



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 534.015.1, 534-6

MSC 2010: 70K30, 70K50, 70K75

## **Осцилляторная цепь на упругой подложке в условиях акустического вакуума**

**И. П. Королева (Кикоть), Л. И. Маневич**

Представлены результаты аналитического и численного исследования нестационарной плоской динамики струны с равномерно распределенными дискретными массами при отсутствии предварительного натяжения. Каждая масса испытывает также действие упругой подложки с нелинеаризуемой в условиях плоского движения характеристикой, которая тоже представляет собой струну без предварительного натяжения. Наиболее важный предельный случай, соответствующий низкоэнергетическим поперечным возбуждениям, рассматривается с учетом геометрической нелинейности. Поскольку такие возбуждения описываются приближенными уравнениями, содержащими лишь кубические упругие силы, осцилляторы колеблются фактически в условиях акустического вакуума. Получено адекватное аналитическое описание резонансных существенно нестационарных процессов в рассматриваемой системе, соответствующих интенсивному энергообмену между ее частями (кластерами осцилляторов) в области низких частот. Сформулированы условия локализации энергии на одном из кластеров. Полученные аналитические результаты подтверждены данными компьютерного моделирования. Показано, что рассматриваемая система может использоваться как энергетическая ловушка повышенной эффективности.

Ключевые слова: нелинейная динамика, нелинейная нормальная мода, предельная фазовая траектория, энергообмен, локализация

---

Получено 26 июня 2015 года

После доработки 25 августа 2015 года

---

Авторы выражают благодарность РФФИ (грант 14-01-00284 А).

---

Королева (Кикоть) Ирина Павловна

[irakikotx@gmail.com](mailto:irakikotx@gmail.com)

Маневич Леонид Исакович

[manevitchleonid3@gmail.com](mailto:manevitchleonid3@gmail.com)

Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук

119991, г. Москва, ул. Косыгина, д. 4



## 1. Введение

В последние годы явления интенсивного, почти полного, энергообмена между частями системы и нестационарной локализации энергии на одной из них привлекают все большее внимание в связи с созданием резонансных энергетических ловушек, применяемых с целью защиты от вибраций и ударов, сейсμοзащиты, а также для пассивного накопления энергии [4, 8]. Возможность существования разных режимов в одной и той же системе, но при различных значениях параметров, является отличительной чертой нелинейных систем. Современная методология их исследования связана с использованием концепции нелинейных нормальных мод (ННМ). Однако эта концепция становится неадекватной при анализе резонирующих ННМ, которые, в отличие от мод линейной системы, интенсивно взаимодействуют. Поэтому в работе используется подход, основанный на концепции предельных фазовых траекторий (ПФТ), описывающих максимально интенсивный (при данных условиях) энергообмен между слабо взаимодействующими осцилляторами или кластерами осцилляторов (*эффективными частицами*). Эта концепция была развита в ряде работ [2, 5, 6] и в настоящее время широко используется для исследования нестационарных резонансных процессов в классических и квантовых нелинейных системах [1, 3, 7, 9, 11, 12]. Отметим, что важнейшая черта эффективной энергетической ловушки — ее принадлежность к классу систем, функционирующих в условиях акустического вакуума. В простейшем случае одномассовой ловушки это означает отсутствие собственной частоты, что обеспечивает возможность переноса энергии в широкой полосе частот. Увеличение числа масс в рассматриваемой осцилляторной цепи позволяет увеличить и число достижимых резонансных режимов, следствием чего должно стать повышение энергоемкости, а следовательно, и эффективности энергетической ловушки.

Осцилляторная цепь в условиях акустического вакуума, без упругой подложки, рассматривалась в работе [7]. Было показано, что в этом предельном случае ННМ, описываемые прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве, совпадают с модами линейной осцилляторной цепи. Однако, в отличие от последней, при наличии акустического вакуума резонировать могут не только ННМ с максимальными и близкими по величине волновыми числами. Был предложен критерий резонансного взаимодействия, позволивший охарактеризовать всю совокупность возможных резонансов, в которой доминирующими оказались ННМ с волновыми числами в верхней половине их спектра. В статье [11] на простейшем примере струны с двумя идентичными массами показано, что добавление нелинейной подложки позволяет расширить область резонансного взаимодействия. Этот вывод сохраняется и при замене нерастянутой струны балкой [9]. Отметим, что нестационарная динамика двух идентичных осцилляторов с кубической характеристикой и кубической же связью была рассмотрена с использованием концепции предельных фазовых траекторий в статье [10]. При этом полученные результаты качественно близки к приведенным в работе [11]. Однако их обобщение на случай конечной осцилляторной цепи с локальной кубической связью получить не удастся. В настоящей статье впервые рассмотрена струна без предварительного натяжения с произвольным числом идентичных равномерно распределенных дискретных масс на кубической подложке, то есть функционирующая в условиях акустического вакуума. Исследованы как стационарная, так и нестационарная динамика рассмотренной модели. Сделаны выводы о повышенной эффективности основанных на этой системе энергетических ловушек.

## 2. Модель и уравнения движения

Рассмотрим нерастянутую предварительно струну с равномерно распределенными и равными по величине дискретными массами (см. рис. 1), испытывающими действие возмущающих сил, пропорциональных кубу смещения с коэффициентом  $c$ . Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{U}_j + T_j \cos \theta_j - T_{j+1} \cos \theta_{j+1} &= 0, & j = 1, \dots, N, \\ m\ddot{V}_j + cV_j^3 + T_j \sin \theta_j - T_{j+1} \sin \theta_{j+1} &= 0, & j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $U_j, V_j$  — продольные и поперечные смещения  $j$ -ой массы,  $\theta_j$  — угол поворота  $j$ -го сегмента относительно его положения в недеформированной струне.

Силы натяжения отдельных сегментов струны пропорциональны их деформациям и зависят от смещений следующим образом:

$$T_j = K \frac{1}{l} \left[ (U_j - U_{j-1}) + \frac{1}{2l} (V_j - V_{j-1})^2 \right],$$

где  $l$  — длина недеформированного сегмента струны,  $K$  — коэффициент упругости продольных пружин.

В работе [7] обсуждался механизм формирования средней силы при доминирующем вертикальном движении, в соответствии с которым эта сила во всех сегментах одинакова и равна среднему значению натяжений:

$$T = \langle T_j \rangle = \frac{1}{N+1} K \frac{1}{2l^2} \sum_{s=0}^N (V_{s+1} - V_s)^2.$$

Вводя медленный масштаб времени  $\tau_0 = \omega_0 \varepsilon t$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{lm}}$ , а  $\varepsilon$  — малый параметр, отражающий относительную малость амплитуд поперечных колебаний ( $\varepsilon = a/l$ , где  $a$  —

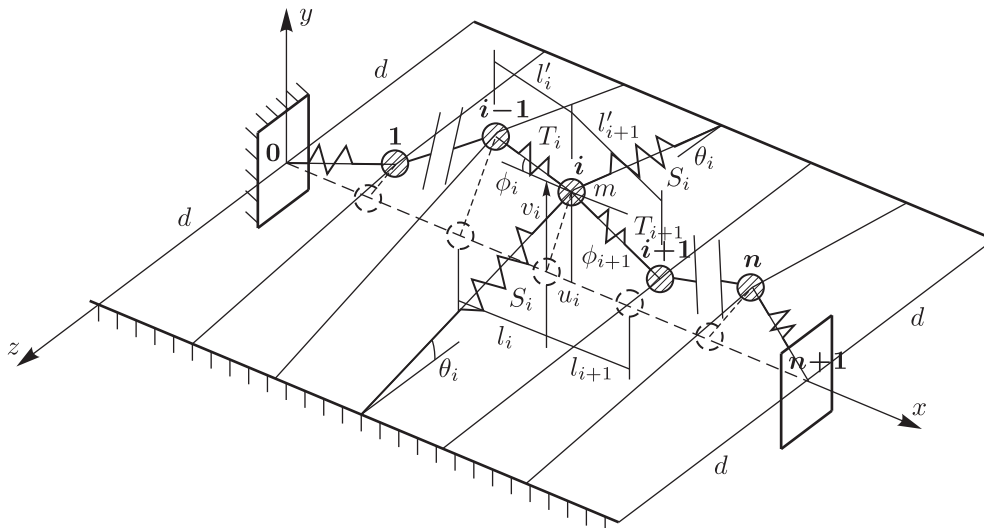


Рис. 1. Осцилляционная цепь на упругой подложке. Для наглядности показана только одна поперечная струна.

амплитуда поперечных колебаний), а также нормированные смещения  $V_j/l = \varepsilon v_j$ , получаем систему уравнений поперечного движения с нелокальной нелинейностью и эффективным параметром  $\mu = \frac{K}{cl^3}$ , характеризующим относительные вклады собственно струны (этот вклад становится основным при  $\mu \rightarrow \infty$ ) и подложки (ее вклад становится существенным при  $\mu \lesssim 1$ ):

$$\frac{d^2 v_j}{d\tau_0^2} + \frac{1}{\mu} v_j^3 + \frac{1}{2(N+1)} \sum_{s=0}^N (v_{s+1} - v_s)^2 (2v_j - v_{j+1} - v_{j-1}) = 0, \quad v_0 = v_{N+1} = 0. \quad (2.2)$$

### 3. Переход к континуальному пределу

Для исследования динамики в условиях  $N \gg 1$  можно перейти к континуальному пределу. Здесь имеются две возможности. При анализе длинноволновой динамики вводятся вместо дискретного индекса  $j$  непрерывный параметр длины  $\xi$ , принимающий значения  $j$  в точках расположения дискретных масс, и непрерывная функция  $v(\tau_0, \xi)$  (вместо  $v_j(\tau_0)$  в дискретном случае). Тогда уравнение движения в частных производных будет иметь следующий вид ( $L$  — безразмерная длина цепи,  $L = N + 1$ ):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{\mu} v^3 - \frac{1}{2L} \left[ \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0, \quad v(0) = v(L) = 0. \quad (3.1)$$

Однако при больших волновых числах величина  $v_j(\tau_0)$  быстро изменяется как функция индекса  $j$ , и континуальное описание самих перемещений в этом случае уже не оправдано. Но оно становится возможным после предварительной замены переменных  $w_j = (-1)^j v_j$  («инвертные переменные»):

$$\frac{d^2 w_j}{d\tau_0^2} + \frac{1}{\mu} w_j^3 + \frac{1}{2(N+1)} \sum_{s=0}^N (w_{s+1} + w_s)^2 (2w_j + w_{j+1} + w_{j-1}) = 0, \quad w_0 = w_{N+1} = 0. \quad (3.2)$$

Тогда континуальное уравнение, описывающее плавную модуляцию быстро изменяющихся по длине перемещений струны, имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{\mu} w^3 + \frac{1}{2L} \int_0^L \left( 2w(x, \tau_0) + \frac{\partial w(x, \tau_0)}{\partial x} \right)^2 dx \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 4w \right) = 0, \quad w_0 = w_L = 0. \quad (3.3)$$

### 4. Нелинейные нормальные моды с прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве

Как отмечалось выше, при отсутствии подложки ННМ рассматриваемой системы с прямолинейными траекториями совпадают с модами линейной осцилляторной цепи [7]. Каждая мода (с номером  $m$ ) описывается законом движения  $v_j(\tau_0) = a_m(\tau_0) \sin \frac{\pi j m}{N+1}$ , представляющим собой точное решение уравнений (2.2) при  $\frac{1}{\mu} = 0$  с частотой, которая зависит

от амплитуды и пропорциональна квадрату частоты соответствующих колебаний линейной осцилляторной цепи с тем же волновым числом:

$$\omega_m = 2 \sin \frac{\pi m}{2(N+1)}. \quad (4.1)$$

При введении подложки ситуация становится более сложной. ННМ собственно струны перестают быть точными решениями. Однако они, являясь теперь приближенными ННМ, по-прежнему образуют подходящий ортогональный базис для проецирования континуальных уравнений движения. В данной статье детально рассмотрен случай, когда резонанс обусловлен близостью волновых чисел двух высших ННМ. В связи с этим ниже выполняется проецирование «высокочастотного» континуального уравнения (3.3) на подпространство, образованное именно этими модами.

Легко видеть, что  $m$ -ой моде в исходных координатах  $v$  соответствует (с точностью до множителя  $-1$ , который не играет роли) мода с номером  $N+1-m$  в инвертных координатах  $w$ :

$$\begin{aligned} w_j^{N+1-m} &= (-1)^j v_j^{N+1-m} = (-1)^j a_m(\tau_0) \sin \frac{\pi j(N+1-m)}{N+1} = \\ &= (-1)^j a_m(\tau_0) \sin \left( \pi j - \frac{\pi j m}{N+1} \right) = -v_j^m. \end{aligned}$$

## 5. Двухмодовое приближение (высокочастотная область)

Спроецируем уравнение (3.3) на каждую из двух мод, соответствующих наибольшему волновому числу ( $m = N-1, n = N$ ) в исходных переменных  $v_j$  (и наименьшему волновому числу ( $m = 2, n = 1$ ) в преобразованных переменных  $w_j$ ). При этом само двухмодовое приближение в преобразованных координатах имеет вид

$$w = a_m(\tau_0) \sin \frac{m\pi\xi}{L} + a_n(\tau_0) \sin \frac{n\pi\xi}{L}, \quad m = 2, \quad n = 1$$

(моды  $m, n$  в «инвертных» координатах  $w$  соответствуют модам с номерами  $N+1-m, N+1-n$  в исходных координатах  $v$ ).

Поскольку рассматриваются высшие моды исходной системы, резонанс имеет место при близких по величине амплитудах осцилляторов и  $m, n \ll N$ . Для удобства введем обозначение  $n_L = \frac{\pi n}{N+1}, m_L = \frac{\pi m}{N+1}$ .

Тогда уравнения, полученные проецированием на ННМ с волновыми числами  $m$  и  $n$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_m}{d\tau_0^2} + \frac{3}{4\mu} (a_m^3 + 2a_m a_n^2) + \frac{1}{4} [(4 + m_L^2) a_m^2 + (4 + n_L^2) a_n^2] (4 - m_L^2) a_m &= 0, \\ \frac{d^2 a_n}{d\tau_0^2} + \frac{3}{4\mu} (a_n^3 + 2a_n a_m^2) + \frac{1}{4} [(4 + m_L^2) a_m^2 + (4 + n_L^2) a_n^2] (4 - n_L^2) a_n &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

После замены переменных (масштабирования)  $a_m = \sqrt{\frac{4 - m_L^2}{4 + m_L^2}} A_m, a_n = \sqrt{\frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2}} A_n$ , учитывая близость волновых чисел рассматриваемых мод, уравнения (5.1) можно привести



к симметризованной форме

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_m}{d\tau_0^2} + \frac{3}{4\mu} \frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2} A_m (A_m^2 + 2A_n^2) + \frac{1}{4} [(4 - m_L^2) A_m^2 + (4 - n_L^2) A_n^2] (4 - m_L^2) A_m &= 0, \\ \frac{d^2 A_n}{d\tau_0^2} + \frac{3}{4\mu} \frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2} A_n (A_n^2 + 2A_m^2) + \frac{1}{4} [(4 - m_L^2) A_m^2 + (4 - n_L^2) A_n^2] (4 - n_L^2) A_n &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассматриваемые ННМ резонируют и, следовательно, не являются слабо взаимодействующими, поэтому введем «кластерные» переменные  $v_1 = \frac{A_m + A_n}{2}$ ,  $v_2 = \frac{A_m - A_n}{2}$ , характеризующие динамику слабо взаимодействующих частей цепи (кластеров). В новых переменных получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{d\tau_0^2} + M v_1 (3v_1^2 + v_2^2) + \frac{A}{8} v_1^3 + \frac{3C}{8} v_1^2 v_2 + \frac{B}{8} v_1 v_2^2 + \frac{C}{8} v_2^3 &= 0, \\ \frac{d^2 v_2}{d\tau_0^2} + M v_2 (3v_2^2 + v_1^2) + \frac{A}{8} v_2^3 + \frac{3C}{8} v_2^2 v_1 + \frac{B}{8} v_2 v_1^2 + \frac{C}{8} v_1^3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь для краткости введены обозначения:  $A = (m_L^2 + n_L^2 - 8)^2$ ,  $B = (m_L^2 + n_L^2 - 8)^2 + 2(m_L^2 - n_L^2)^2$ ,  $C = (m_L^2 - n_L^2)(m_L^2 + n_L^2 - 8)$ ,  $M = \frac{3}{4\mu} \frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2}$ . Интеграл энергии, соответствующий данной системе, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} H = \frac{\dot{v}_1^2}{2} + \frac{\dot{v}_2^2}{2} + M \left( \frac{3}{4} v_1^4 + \frac{3}{4} v_2^4 + \frac{1}{2} v_1^2 v_2^2 \right) + \\ + \frac{A}{32} (v_1^4 + v_2^4) + \frac{C}{8} (v_2^3 v_1 + v_1^3 v_2) + \frac{B}{16} v_1^2 v_2^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Далее, рассматривая динамику цепи в условиях резонанса 1 : 1 на частоте  $\omega$ , запишем систему (5.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{d\tau_0^2} + \omega^2 v_1 = -\varepsilon \gamma \left( M v_1 (3v_1^2 + v_2^2) + \frac{A}{8} v_1^3 + \frac{3C}{8} v_1^2 v_2 + \frac{B}{8} v_1 v_2^2 + \frac{C}{8} v_2^3 - \omega^2 v_1 \right), \\ \frac{d^2 v_2}{d\tau_0^2} + \omega^2 v_2 = -\varepsilon \gamma \left( M v_2 (3v_2^2 + v_1^2) + \frac{A}{8} v_2^3 + \frac{3C}{8} v_2^2 v_1 + \frac{B}{8} v_2 v_1^2 + \frac{C}{8} v_1^3 - \omega^2 v_2 \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

При этом комбинация в правой части должна быть мала, что отражено введением малого параметра  $\varepsilon \ll 1$ . Параметр  $\gamma = \varepsilon^{-1}$  позволяет сохранить формальную эквивалентность систем уравнений (5.3) и (5.5). Введем комплексные переменные:  $\psi_j = dv_j/d\tau_0 + i\omega v_j$  (при этом  $\psi_j^* = dv_j/d\tau_0 - i\omega v_j$ ). Тогда

$$v_j = \frac{\psi_j - \psi_j^*}{2i\omega}, \quad \frac{dv_j}{d\tau_0} = \frac{\psi_j + \psi_j^*}{2}. \quad (5.6)$$

Применяя процедуру многомасштабных разложений, введем медленное время  $\tau_1 = \varepsilon\tau_0$ . Учитывая, что  $\frac{d}{d\tau_0} = \frac{\partial}{\partial\tau_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \dots$ , ищем решение в виде разложения  $\psi_j = \psi_{j0} + \varepsilon\psi_{j1} + \dots$ ,  $j = 1, 2$ . Подставим это разложение в систему (5.5) с учетом (5.6) и приравняем к нулю комбинации членов различных порядков по малому параметру  $\varepsilon$ . В первом приближении получаем  $\psi_{j0} = e^{i\omega\tau_0}\varphi_j(\tau_1)$ . Подставим это выражение в полученное уравнение для комплексных переменных и рассмотрим следующее приближение, приравнивая к нулю сумму членов порядка  $\varepsilon$ . Чтобы избежать появления секулярных членов при интегрировании по времени  $\tau_0$ , суммарный коэффициент при  $e^{i\omega\tau_0}$  должен быть равен нулю. Это условие приводит к следующей системе для «амплитудных» функций  $\varphi_j(\tau_1)$  в медленном времени  $\tau_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_j}{d\tau_1} = & \gamma \left( 3\frac{Mi}{8\omega^3} (9\varphi_j|\varphi_j|^2 + \varphi_j^*\varphi_{3-j}^2 + 2\varphi_j|\varphi_{3-j}|^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{64} (3A\varphi_j|\varphi_j|^2 + 3C\varphi_{3-j}^*\varphi_j^2 + 3C\varphi_{3-j}|\varphi_{3-j}|^2 + 6C\varphi_{3-j}|\varphi_j|^2 + 2B\varphi_j|\varphi_{3-j}|^2) - \frac{i\omega}{2}\varphi_j \right). \end{aligned}$$

Для простоты мы опустили промежуточные выкладки. Более подробно данная методика описана в статье [11].

Полученная система является интегрируемой, поскольку, кроме интеграла энергии (5.4), записанного в переменных  $\varphi_1, \varphi_2$ , она допускает также второй интеграл (интеграл чисел заполнения в квантовомеханической интерпретации)

$$N = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2, \tag{5.7}$$

что может быть проверено непосредственно.

С учетом второго интеграла можно ввести угловые переменные:

$$\varphi_1 = \sqrt{N} \cos \theta e^{i\delta_1}, \quad \varphi_2 = \sqrt{N} \sin \theta e^{i\delta_2}.$$

В угловых переменных получаем следующую систему ( $\Delta = \delta_1 - \delta_2$  — сдвиг по фазе):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin 2\theta \dot{\Delta} = & M \left( -\frac{7}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \cos 2\Delta \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{3A}{4} \sin 4\theta - \frac{B}{4} \sin 4\theta (\cos 2\Delta + 2) - 3C \cos 2\theta \cos \Delta \right), \tag{5.8} \\ \dot{\theta} = & \frac{3}{2\mu} \frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2} \sin 2\theta \sin 2\Delta + \frac{1}{2} (B \sin \theta \cos \theta \sin 2\Delta + 3C \sin \Delta). \end{aligned}$$

Здесь точка ( $\dot{\phantom{x}}$ ) обозначает дифференцирование по нормированному (для упрощения уравнений) времени  $\tau_1^* = \frac{\gamma N}{32\omega^3} \tau_1$ . Интеграл энергии в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} H = & -M \left( \frac{9}{2} \sin^4 \theta + \frac{9}{2} \cos^4 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( -\frac{3A}{2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - B \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos 2\Delta + 2) \right). \end{aligned} \tag{5.9}$$



### 5.1. Предельный случай: цепочка осцилляторов без подложки

Рассмотрим вначале более простой случай, когда подложка отсутствует ( $\frac{1}{\mu} = 0$ ). Соответствующая фазовая плоскость показана на рисунке 2.

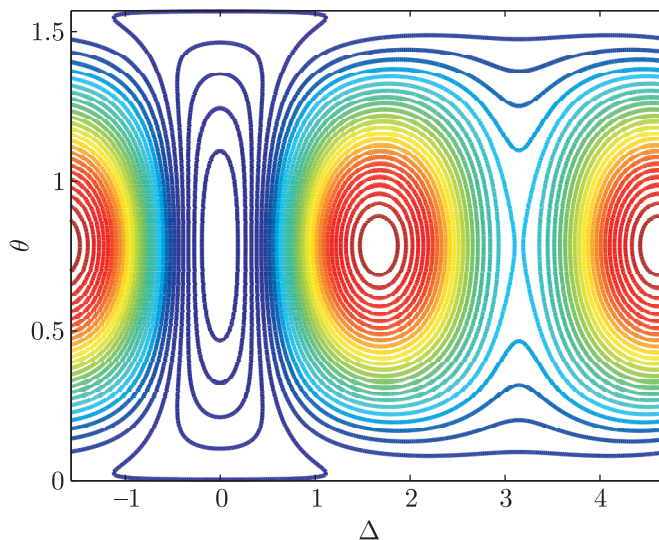


Рис. 2. Фазовая плоскость в угловых переменных при отсутствии подложки ( $\mu = \infty$ ).

Стационарные точки соответствуют НМ исходной системы:  $(\Delta = 0, \theta = \pi/4)$  — моде с номером  $N$ ,  $(\Delta = \pi, \theta = \pi/4)$  — моде с номером  $N - 1$ . Анализ представленной фазовой плоскости позволяет выявить особенности стационарной динамики, которые не были отмечены в статье [7]. В то время как стационарная точка  $(\Delta = 0, \theta = \pi/4)$  устойчива, а  $(\Delta = \pi, \theta = \pi/4)$  неустойчива, существуют две дополнительные устойчивые стационарные точки, которые отличаются от неустойчивых стационарных точек лишь фазами и в исходных переменных соответствуют так называемым эллиптическим модам. В медленном времени эллиптические моды неотличимы от мод с прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве.

Этот вывод подтверждается анализом системы (5.8) после ее линеаризации вблизи стационарных точек

$$\ddot{\Delta} = \frac{3}{2}(A - B - 2C)(B + 3C)\Delta.$$

Коэффициент  $\frac{3}{2}(A - B - 2C)(B + 3C) < 0$ , а значит, НМ с максимальным волновым числом (в исходных переменных  $v_j$ ) устойчива. В окрестности же стационарной точки  $\theta = \pi/4, \Delta = \pi$ , которая соответствует НМ с на единицу меньшим волновым числом, линейное приближение записывается следующим образом:

$$\ddot{\Delta} = \frac{3}{2}(A - B + 2C)(B - 3C)\Delta;$$

коэффициент  $\frac{3}{2}(A - B + 2C)(B - 3C) > 0$ , и, следовательно, эта мода неустойчива.

В то же время при начальных условиях, обеспечивающих равенство нулю или  $\pi/2$  угловой координаты  $\theta$ , происходит полный энергообмен между двумя кластерами, каж-



дый из которых содержит половину рассматриваемой цепи. Этот нестационарный резонансный процесс соответствует предельной фазовой траектории (ПФТ), максимально удаленной от стационарных точек. Полученные аналитические результаты подтверждаются численным интегрированием исходной системы (2.2) (рис. 3); они не были получены в статье [7].

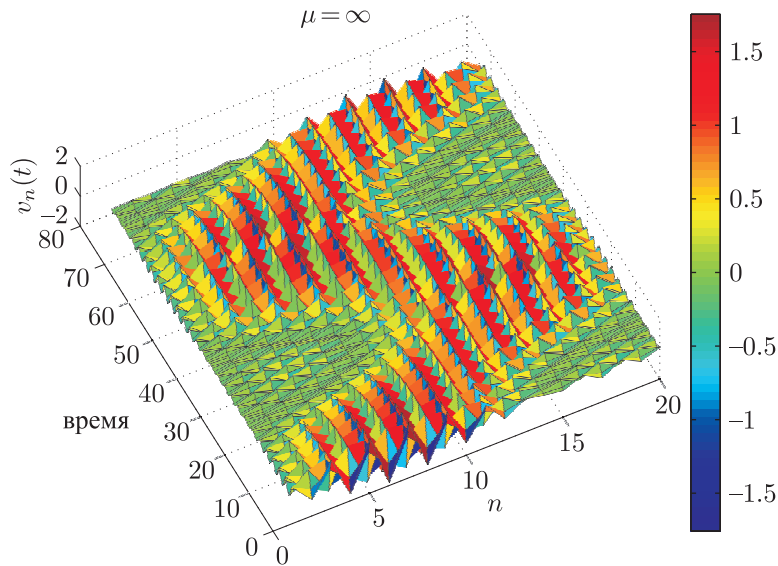


Рис. 3. Энергообмен между частями цепочки в отсутствие подложки.

## 5.2. Влияние подложки на устойчивость ННМ.

### Первый динамический переход: стационарная локализация энергии

На рисунке 4 показана эволюция фазовой плоскости при изменении параметра  $\mu$ , характеризующего относительный вклад подложки. По-прежнему рассматривается двухмодовое многообразие, образованное резонирующими ННМ с минимальными волновыми числами в преобразованных («инвертных») координатах ( $m = 2, n = 1$ ).

Усиление влияния подложки соответствует уменьшению параметра  $\mu$ . До достижения его первого критического значения топология фазовой плоскости остается неизменной. Однако при критическом значении этого параметра ННМ с минимальным волновым числом (синфазная ННМ в двумерном многообразии) становится неустойчивой, и вследствие ее бифуркации появляются две дополнительные устойчивые ННМ и разделяющая их сепаратриса (рис. 4).

Критическое значение можно найти аналитически из условия

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\pi/4, \Delta=0} = 0. \tag{5.10}$$

Отсюда

$$\mu_{cr1} = \frac{3(n_L^4 - 4)}{(m_L - 4)^2(-4m_L^2 + 4n_L^2 - m_L^2 n_L^2 + n_L^4)}.$$

В случае двух резонирующих мод ( $m = 2, n = 1$ ) цепочки из 10 звеньев первое критическое значение  $\mu_{cr1} = 2.65$ . С уменьшением параметра  $\mu$  новые моды становятся все более локализованными, что позволяет говорить о стационарной локализации энергии на одном из кластеров.

### 5.3. Второй динамический переход: от энергообмена к локализации

При дальнейшем увеличении вклада подложки количество ННМ не изменяется, однако наблюдается переход от полного энергообмена к нестационарной локализации энергии на одном из кластеров, в данном случае на половине цепи (на фазовой плоскости нет фазовых траекторий, реализующих переход от  $\theta = 0$  к  $\theta = \pi/2$ , см. рис. 4). Но здесь речь идет о нестационарной локализации, которая возникает при спонтанном возбуждении кластера. Локализации этого типа соответствует в медленном времени не стационарная точка, а ПФТ, реализующая максимально возможный при данных условиях частичный энергообмен между кластерами. Второе критическое значение параметра  $\mu$  можно также найти аналитически, учитывая, что при этом значении ПФТ является сепаратрисой (неустойчивая стационарная точка  $(\pi/4, 0)$  принадлежит ПФТ):  $H(\pi/4, 0) = H(0, \pi)$ . Отсюда

$$\mu_{cr2} = \frac{6(n_L^4 - 4)}{(n_L^2 + 4)(16m_L^2 - 3m_L^4 - 16n_L^2 + 2m_L^2 n_L^2 + n_L^4)}.$$

Для двух ННМ с минимальными волновыми числами в преобразованных координатах переход происходит при значении  $\mu_{cr2} = 1.35$ .

Полученные результаты подтверждаются численным интегрированием исходной системы (2.2) с начальными условиями, соответствующими возбуждению одного из кластеров (комбинация резонирующих мод с минимальными волновыми числами):  $v_j = \sin \frac{\pi j(N-1)}{N+1} + \sin \frac{\pi j N}{N+1}$ . При  $\mu < \mu_{cr2}$  наблюдается локализация в первоначально возбужденном кластере, а при  $\mu > \mu_{cr2}$  — практически полный энергообмен между двумя кластерами (рис. 5).

### 5.4. Аналитическое представление ПФТ

Полный энергообмен между кластерами и локализация энергии на одном из них, описываемые ПФТ, представляют собой фундаментальные нестационарные процессы, играющие к тому же важную роль в приложениях. В связи с этим желательно получить их аналитическое описание. Это действительно можно сделать в угловых переменных, удовлетворяющих уравнениям (5.10). Поскольку ПФТ задается условием

$$H(\theta, \Delta) = H(0, 0),$$

где интеграл энергии определяется выражением (5.9), получаем уравнение

$$-M \left( \frac{9}{2} \sin^4 \theta + \frac{9}{2} \cos^4 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{3A}{2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - B \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos 2\Delta + 2) \right) = -\frac{9}{2} M - \frac{3A}{4}.$$

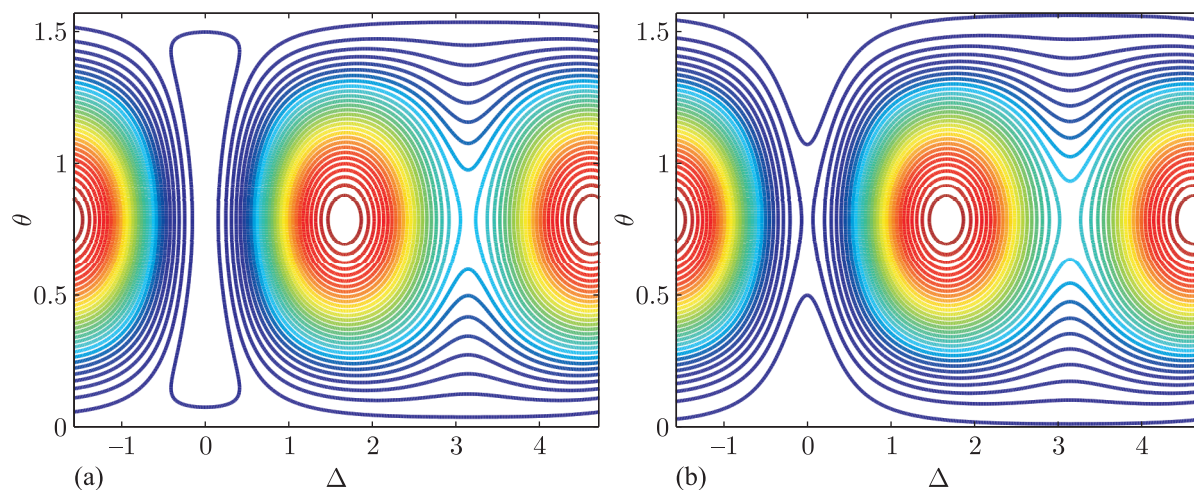


Рис. 4. Фазовая плоскость в угловых переменных (для двух высших мод) при наличии подложки ( $\mu = 2, \mu = 1.2$ );  $N = 10, t = 2, n = 1$ .

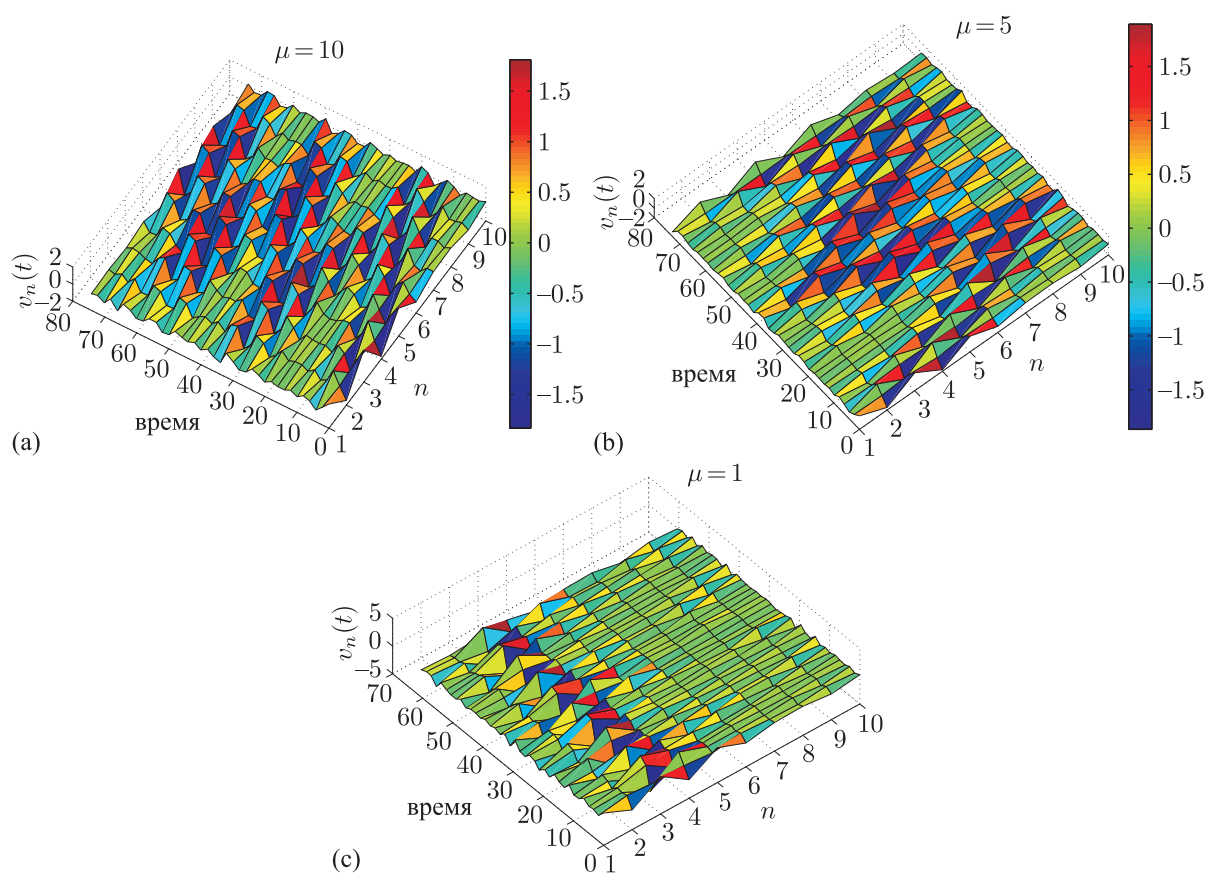


Рис. 5. Интенсивный энергообмен между частями цепочки из 10 звеньев: (а)  $\mu = 10$ , (б)  $\mu = 5$  и (с)  $\mu = 1$  (локализация энергии). Результаты численного интегрирования системы (2.2); начальные условия соответствуют сумме двух последних мод.

Это соотношение позволяет выявить связь между переменными  $\theta$  и  $\Delta$  на ПФТ:

$$\begin{aligned} & -M \left( \frac{9}{2} \sin^4 \theta + \frac{9}{2} (\cos^4 \theta - 1) + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( -\frac{3A}{2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta - 1) - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - B \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos 2\Delta + 2) \right) = 0, \\ & -M \left( -\frac{9}{4} \sin^2 2\theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{3A}{4} \sin^2 2\theta - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - \frac{B}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда либо  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ , что соответствует прямолинейным участкам ПФТ, либо

$$\cos \Delta = \frac{\frac{3}{2}C - \sqrt{\left(\frac{3}{2}C\right)^2 + \left(2M - \frac{B}{8} + \frac{3A}{8}\right)(2M + B)\sin^2 2\theta}}{\left(-M - \frac{B}{2}\right)\sin 2\theta}.$$

Таким образом, получается аналитическое представление для ПФТ:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} \tau(t/a), \\ \Delta &= -\arccos \left( \frac{\frac{3}{2}C - \sqrt{\left(\frac{3}{2}C\right)^2 + \left(2M - \frac{B}{8} + \frac{3A}{8}\right)(2M + B)\sin^2 \pi\tau}}{\left(-M - \frac{B}{2}\right)\sin \pi\tau} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь  $\tau$  — пилообразная функция с периодом  $T = 4a$ :

$$\tau(\tau_1) = 0.5 \left( (2/\pi) \arcsin(\sin(\pi\tau_1/a - \pi/2)) + 1 \right);$$

$e(\tau)$  — ее производная в терминах обобщенных функций:  $e(\tau_1) = d\tau/d\tau_1$ . Период можно найти из темпорального уравнения для  $\theta$ :

$$T = 4a = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{M \sin 2\theta \sin 2\Delta + \frac{1}{2} (B \sin \theta \cos \theta \sin 2\Delta + 3C \sin \Delta)}.$$

## 6. Выявление резонирующих ННМ при наличии подложки в двумерных подпространствах волновых чисел

Для практического использования систем рассматриваемого типа в качестве энергетических ловушек важно знать, какие пары ННМ могут резонировать. В статье [7] эта проблема была решена для струны без подложки. Ниже тот же подход применен в общем случае.



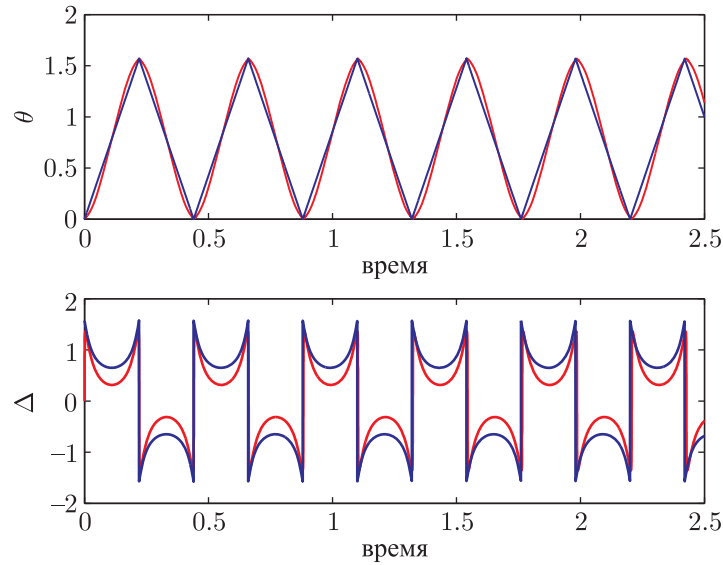


Рис. 6. Сравнение результатов численного решения системы (5.8) и аналитического приближения (5.11) для ПФТ;  $\mu = 3$ .

Вернемся к модальным переменным. В длинноволновой области в случае резонанса двух произвольных мод после перехода к континуальному пределу и проецирования на подпространство, образованное двумя модами с волновыми числами  $m, n$  ( $v = a_m(t) \sin \frac{m\pi\xi}{L} + a_n(t) \sin \frac{n\pi\xi}{L}$ ), приходим к системе

$$\begin{aligned} \ddot{a}_m + \frac{3}{4\mu} (a_m^3 + 2a_m a_n^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 m^2 [m^2 a_m^2 + n^2 a_n^2] a_m &= 0, \\ \ddot{a}_n + \frac{3}{4\mu} (a_n^3 + 2a_n a_m^2) + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 n^2 [m^2 a_m^2 + n^2 a_n^2] a_n &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Для анализа этой системы можно применить ту же методологию, что была использована при введении «кластерных» переменных, то есть перейти к угловым переменным  $\Delta - \theta$ . В этих переменных получаем

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= -\frac{15}{4\mu} \cos 2\theta + \frac{\pi^4}{4L^4} [3(n^4 \sin^2 \theta - m^4 \cos^2 \theta) + m^2 n^2 \cos 2\Delta \cos 2\theta + 2m^2 n^2 \cos 2\theta], \\ \dot{\theta} &= \frac{3}{4\mu} \sin 2\theta \sin 2\Delta + \frac{\pi^4}{4L^4} n^2 m^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\Delta\right). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Найдем условия, при которых существует хотя бы одна стационарная точка данной системы, что соответствует наличию резонанса между двумя модами. Из второго уравнения  $\Delta_e = \pi/2$ . После подстановки в первое уравнение получаем зависимость

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{3m^4 - m^2 n^2 + A}{3n^4 - m^2 n^2 + A},$$

где  $A = \frac{15}{\mu} \cdot \frac{L^4}{\pi^4}$ . Таким образом, между  $m$ -ой и  $n$ -ой модами резонанс возможен при условии, что

$$\frac{3m^4 - m^2 n^2 + A}{3n^4 - m^2 n^2 + A} > 0. \tag{6.3}$$

Рассмотрим теперь коротковолновую область, в которой используются «инвертные» переменные  $w$ . Аналогично длинноволновой области, получаем условие

$$\frac{3(4 - m_L)^4 - (4 - m_L^2)(4 - n_L^2) + A}{3(4 - n_L^2)^2 - (4 - m_L^2)(4 - n_L^2) + A} > 0, \quad A = \frac{15}{\mu} \cdot \frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2}.$$

Построим зону резонанса при различных значениях  $\mu$ , учитывая результаты, полученные в низкочастотном и высокочастотном приближениях (рис. 7). Можно видеть, что введение подложки существенно расширяет область резонанса. Следовательно, рассматриваемая система может функционировать как значительно более эффективная энергетическая ловушка.

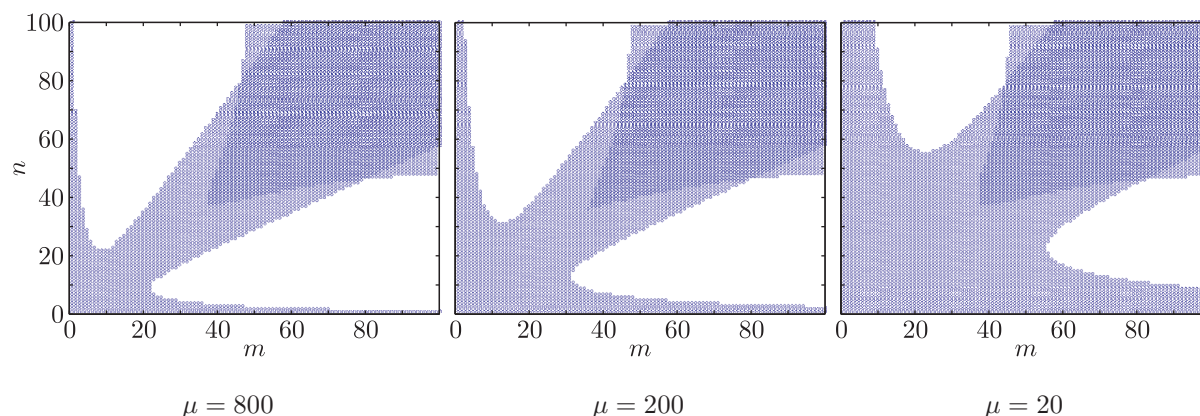


Рис. 7. Зона резонанса для различных значений  $\mu$ .

Сопоставление с анализом, приведенным в работе [7] применительно к той же системе, но без подложки, показывает, что результаты хорошо согласуются при  $m, n \ll N$ , но отличие заметно в области высокочастотных мод. Это связано с переходом к непрерывному пределу, который не был использован в работе [7]. Именно поэтому в данной статье было использовано и континуальное приближение для описания высокочастотных мод.

## 7. Сечения Пуанкаре

Поскольку исходная система и после проецирования на двумерное многообразие, образованное НМ с наименьшими (в преобразованных координатах) волновыми числами, неинтегрируема, представляет интерес построение соответствующих системе (5.3) сечений Пуанкаре.

Рассмотрим набор траекторий с одинаковым значением энергии. В качестве секущей плоскости взята плоскость  $\dot{v}_2 = 0$ . Точки пересечения с этой плоскостью проецируются на плоскость  $(v_1, \dot{v}_1)$ . ПФТ (предельные фазовые траектории) получаются на той же плоскости, если взять траекторию с начальными условиями, соответствующими возбуждению одного кластера.

Полученные сечения изображены на рисунке 8. Видно, что по количеству точек равновесия и расположению ПФТ они полностью соответствуют фазовым портретам, полученным при асимптотическом анализе в угловых переменных. Неожиданным обстоятельством является отсутствие признаков хаотического поведения во всех трех рассмотрен-

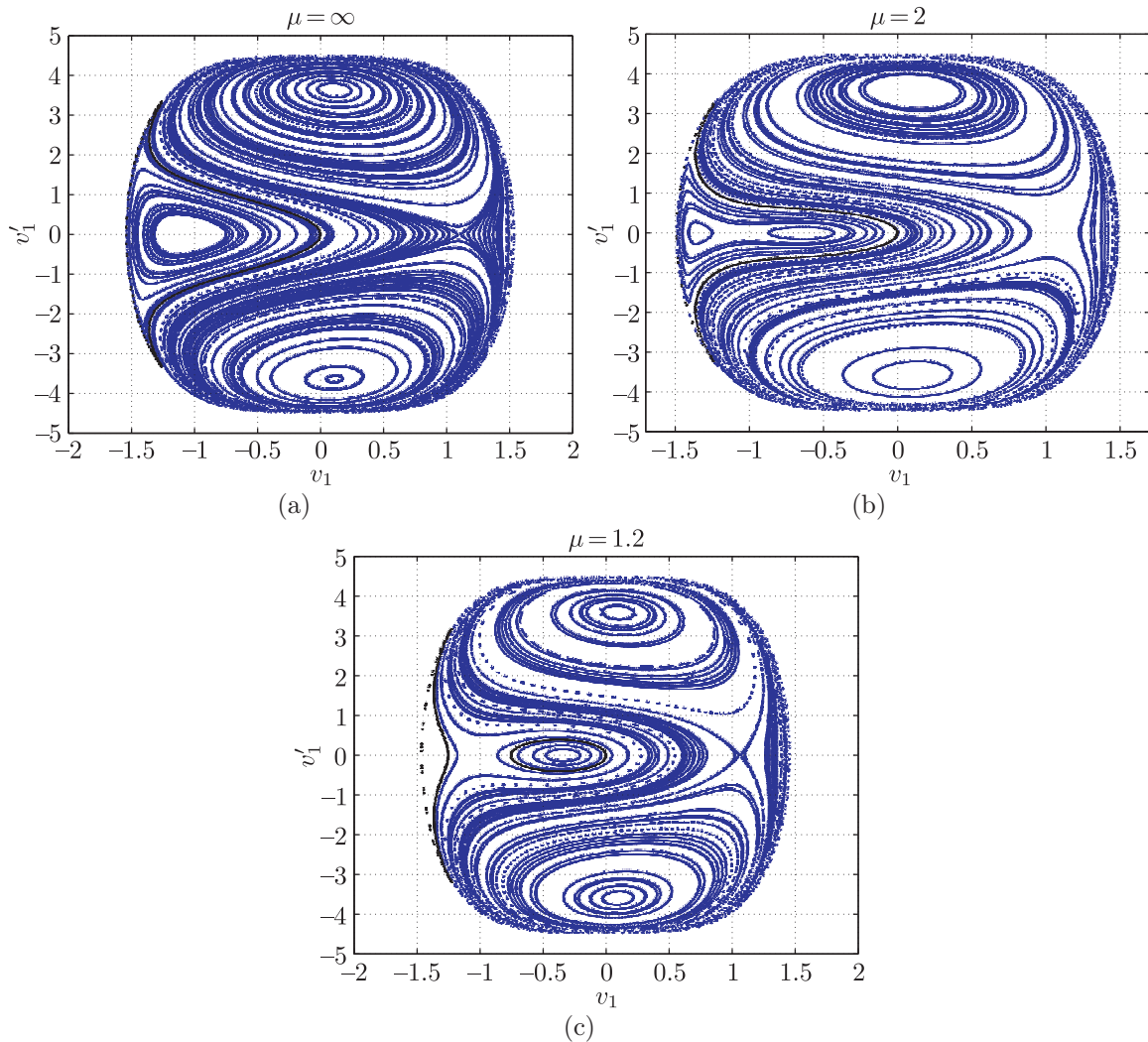


Рис. 8. Сечения Пуанкаре: (а) в отсутствие подложки ( $\mu = \infty$ ), (б)  $\mu = 2$ , (с)  $\mu = 1.2$ .

ных областях изменения параметра  $\mu$ . Это объясняется близостью к вырожденной системе [7].

## 8. Выводы

Таким образом, впервые показано, что в струне с произвольным числом дискретных масс, в условиях акустического вакуума при наличии подложки, наряду с ННМ существуют регулярные режимы полного энергообмена между частями струны (кластерами), а также, наряду со стационарной локализацией энергии, ее нестационарная локализация на одном из кластеров. Получено аналитическое описание указанных режимов и определены условия переходов между ними в параметрическом пространстве. Возможность существования разных режимов в одной и той же системе определяется наличием нелинейной подложки, которая позволяет и существенно расширить область волновых чисел, соответствующих резонирующим модам. Это означает возможность использования данной системы в качестве эффективной энергетической ловушки повышенной энергоемкости.

## Список литературы

- [1] Kovaleva A. S., Manevitch L. I. Resonance energy transport and exchange in oscillator arrays // *Phys. Rev. E.*, 2013, vol. 88, no. 2, 022904, 10 pp.
- [2] Manevitch L. I. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // *Arch. Appl. Mech.*, 2007, vol. 77, no. 5, pp. 301–312.
- [3] Manevitch L. I., Kovaleva M. A., Pilipchuk V. N. Non-conventional synchronization of weakly coupled active oscillators // *Europhys. Lett.*, 2013, vol. 101, no. 5, 50002, 5 pp.
- [4] Manevitch L. I., Gourdon E., Lamarque C.-H. Towards the design of an optimal energetic sink in a strongly inhomogeneous two-degree-of-freedom system // *J. Appl. Mech.*, 2007, vol. 74, no. 6, pp. 1078–1086.
- [5] Manevitch L. I., Kovaleva M. A., Manevitch E. L. Limiting phase trajectories and resonance energy transfer in a system of two coupled oscillators // *Math. Probl. Eng.*, 2010, vol. 2010, 760479, 24 pp.
- [6] Manevitch L. I., Kovaleva A. S., Shepelev D. S. Non-smooth approximations of the limiting phase trajectories for the Duffing oscillator near 1 : 1 resonance // *Phys. D*, 2011, vol. 240, no. 1, pp. 1–12.
- [7] Manevitch L. I., Vakakis A. F. Nonlinear oscillatory acoustic vacuum // *SIAM J. Appl. Math.*, 2014, vol. 74, no. 6, pp. 1742–1762.
- [8] Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M., Kerschen G., Lee Y. S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems. (Solid Mech. Appl., vol. 156.) Dordrecht: Springer, 2009. 1032 pp.
- [9] Silina K. G., Kikot I. P., Manevitch L. I. Energy exchange and localization in the planar motion of a weightless beam carrying two discrete masses // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 109–122.
- [10] Starosvetsky Y., Ben-Meir Y. Nonstationary regimes of homogeneous Hamiltonian systems in the state of sonic vacuum // *Phys. Rev. E.*, 2013, vol. 87, no. 6, 062919, 18 pp.
- [11] Кикоть И. П., Маневич Л. И. Связанные осцилляторы на упругой подложке в условиях акустического вакуума // *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 3, с. 245–263.
- [12] Ковалева М. А., Маневич Л. И., Пилипчук В. Н. О новом типе синхронизации генераторов с жестким возбуждением // *ЖЭТФ*, 2013, т. 144, № 2(8), с. 428–437.

## Oscillatory chain with grounding support in conditions of acoustic vacuum

Irina P. Koroleva (Kikot)<sup>1</sup>, Leonid I. Manevitch<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> N. N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences

Kosygina st. 4, Moscow, 117977, Russia

<sup>1</sup>irakikotx@gmail.com, <sup>2</sup>manevitchleonid3@gmail.com

In this work we investigate dynamics of a string with uniformly distributed discrete masses without tension both analytically and numerically. Each mass is also coupled to the ground through lateral spring which provides effect of cubic grounding support. The most important limiting case of low-energy transversal oscillations is considered accounting for geometric non-linearity. Since such oscillations are governed by motion equations with purely cubic stiffness nonlinearities, the chain behaves as a nonlinear acoustic vacuum. We obtained adequate analytical description of resonance non-stationary processes in the system which correspond to intensive energy exchange between parts (clusters) of the chain in low-frequency domain. Conditions of energy localization are given. Obtained analytical results agree well with results of computer simulations. The considered system is shown to be able to be used as very effective energy sink.

MSC 2010: 70K30, 70K50, 70K75

Keywords: nonlinear dynamics, nonlinear normal mode, limiting phase trajectory, energy exchange, localization

Received June 26, 2015, accepted August 25, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 487–502 (Russian)

