Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 579–611.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70E18, 34C40

Динамика систем с сервосвязями. II*

В. В. Козлов

В работе обсуждается динамика систем с сервосвязями, когда связи реализуются посредством управления инерционными свойствами системы. Вакономные системы представляют собой частный случай. Особое внимание уделено исследованию движения на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией и левоинвариантной связью. Наличие симметрий позволяет свести динамические уравнения к замкнутой системе дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями. В качестве основного примера рассмотрено вращение твердого тела с левоинвариантной сервосвязью — проекция угловой скорости тела на некоторое фиксированное в теле направление равна нулю.

Ключевые слова: сервосвязи, симметрии, группы Ли, левоинвариантные связи, системы с квадратичными правыми частями, вакономные системы

1. Введение

Работа посвящена динамике систем с сервосвязями. Сервосвязи могут реализовываться разными способами, и от способа реализации существенно зависит вид уравнений движения управляемой механической системы.

Грубая классификация сервосвязей состоит в следующем. Сервосвязи *первого рода* (открытые Бегеном) реализуются с помощью подходящего выбора управляемых сил. Важным примером являются классические неголономные связи, которые, как указано в [2], допускают не только пассивную реализацию, а могут быть осуществлены при специальном выборе

*Перевод статьи “The Dynamics of Systems with Servoconstraints. II”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, no. 4, pp. 401—427.

Получено 14 мая 2015 года
После доработки 01 июля 2015 года

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

активных сил. В последнее время достигнут существенный прогресс в качественном и топологическом описании неголономных систем (см., например, [51–58]). Сервосвязи *второго рода* реализуются посредством управления инерционными свойствами системы. Системы с сервосвязями второго рода включают в себя как частный случай вакономные системы. Наконец, в реализации сервосвязей *третьего* (*смешанного*) *рода* одновременно участвуют управление внешними силами и управление кинетической энергией, причем оба этих управления должны быть согласованы между собой и от типа такого согласования зависит итоговый вид уравнений движения. Этот круг вопросов рассмотрен в работе [1].

1. Мы будем изучать динамику систем с сервосвязями второго рода. Вопросы качественного анализа движения систем с сервосвязями первого рода рассмотрены в работе [2].

Уравнения движения системы с сервосвязью второго рода

$$\Phi(\dot{x}, x, t) = 0 \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}} \neq 0\right) \tag{1.1}$$

имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F - \dot{\lambda}\frac{\partial N}{\partial\dot{x}} - \lambda\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial N}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{1.2}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — обобщенные координаты, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ — скорость системы, T — кинетическая энергия, F — внешняя сила, N — заранее заданная функция от $\dot{x}$, x и t, λ — множитель Лагранжа. Уравнения (1.1) и (1.2), конечно, следует рассматривать совместно.

Условие реализации связи (1.1) имеет следующий вид:

$$\left(A^{-1}\frac{\partial N}{\partial\dot{x}}, \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\right) \neq 0. \tag{1.3}$$

Здесь

$$A = \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{x}^2}$$

— положительно определенный симметрический оператор инерции. Если $N = \Phi$, то условие (1.3) заведомо выполнено. В этом случае уравнения (1.1)–(1.2) совпадают с вакономными уравнениями (от *Variational Axiomatic Kind*; относительно вакономной механики см. [3]).

Условие (1.3) означает, что мы можем (не решая уравнения движения) найти производную $\dot{\lambda}$ как функцию от $\dot{x}$, x, t и λ. Отсюда, между прочим, вытекает, что системы с сервосвязями второго рода не подчиняются принципу детерминированности: состояние системы x_0, $\dot{x}_0$ в фиксированный момент времени t_0, удовлетворяющее уравнению связи $\Phi(\dot{x}_0, x_0, t_0) = 0$, не определяет однозначно движение этой системы. Для однозначного задания движения надо еще знать значение «ненаблюдаемой» величины λ в момент $t = t_0$. Принцип детерминированности в вакономной механике обсуждается в [3, II]. Мы вернемся к этому вопросу в § 3.

Если функции T и N не зависят явно от времени, то

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}, \dot{x}\right) - T + \lambda\left[\left(\frac{\partial N}{\partial\dot{x}}, \dot{x}\right) - N\right]\right\} = (F, \dot{x}) - \dot{\lambda}N. \tag{1.4}$$

Следовательно, если $N = \Phi$ (или N пропорциональна Φ), то из (1.4) вытекает обобщенная теорема об изменении кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}, \dot{x}\right) - T\right] = (F, \dot{x}).$$

Для потенциальных сил из (1.4) выводится обобщенный интеграл энергии.

С другой стороны, нетрудно сформулировать обобщенную теорему Нётер, дающую линейные по скорости первые интегралы. Пусть $w(x)$ — векторное поле на конфигурационном пространстве, фазовый поток которого сохраняет функции $T(\dot{x}, x)$ и $N(\dot{x}, x)$ (после естественного продолжения на фазовое пространство). Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial N}{\partial \dot{x}}, w\right) = (F, w).$$

В частности, если система движется по инерции ($F = 0$), то уравнения движения допускают первый интеграл

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial N}{\partial \dot{x}}, w\right) = \mathrm{const}. \tag{1.5}$$

Сделаем еще несколько замечаний о вакономной механике. Эта модель для описания динамики систем со связями развита в работах [3, I–V]. В потенциальном силовом поле вакономные движения совпадают с экстремалями вариационной задачи Лагранжа с закрепленными концами:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - V)dt = 0, \quad \Phi = 0.$$

Следовательно, если внешние силы потенциальны, то вакономные уравнения (1.2) (в которых надо положить $N = \Phi$) совпадают с уже известными уравнениями вариационной задачи Лагранжа со связями.

В частности, если $V = 0$, то получаем движение по геодезическим так называемой субримановой геометрии [33, 34], которые следует отличать от неголономной геометрии, развитой Картаном, Вагнером и Вранчеану (см. подробнее [46] и имеющиеся там ссылки).

Еще классикам было известно, что движения обычных неголономных систем в общем случае не совпадают с экстремалями задачи Лагранжа (см. работы Герца, Пуанкаре, Адамара, Суслова...). Точка в этой дискуссии была поставлена в замечательной работе Гамеля [50]. Однако и сейчас появляются статьи, в которых на конкретных простых примерах (вроде катящегося шара или скользящих саней) доказывается отличие вакономных уравнений от классических неголономных уравнений движения, и на этом основании делается вывод об «ошибочности» вакономной модели (см., например, [4]).

Такое непонимание сути вопроса кроется в априорной уверенности в единственно возможном способе описания динамики систем со связями (как когда-то считали евклидову геометрию единственно возможной). В существенной степени это основано на дедуктивном способе изложения (и восприятия) теории систем со связями в многочисленной учебной литературе по механике. В учебниках обычно приводят «вывод» уравнения возможных (виртуальных) перемещений системы, исходя из некоторого «естественного» определения возможного перемещения. Но это определение и есть одна из аксиом теории систем со связями (как «пятый постулат» евклидовой геометрии), *независимая* от других аксиом (принципов) динамики (принципа Даламбера–Лагранжа, принципа освобождаемости, аксиомы идеальности связей). Это ключевое обстоятельство красной нитью проходит через весь цикл статей [3, I–V].

Фактически все это уже содержится в работе Бегена по теории систем с сервосвязями (и повторено в более общей форме в трактате Аппеля) [5, 6]. Ими показано (в частности, на простых примерах), что движения управляемых систем со связями существенно зависят *от способа реализации* этих связей. Анализ аксиоматического построения теории управляемых систем со связями содержится в [1]. Там же показана возможность широкого обобщения теории Бегена–Аппеля за счет управления инерционными свойствами механических систем.

2. Способы реализации связей с помощью управляемых воздействий можно условно назвать «активными». С другой стороны, «пассивные» способы реализации имеют дело с предельными переходами в уравнениях движения свободных систем с сильной анизотропией внешних воздействий или с анизотропией инерционных свойств систем. Обзор работ по пассивной реализации связей содержится, например, в [7].

Основной смысл работ [3, I–V] состоит не в анализе формально-аксиоматических построений, а в нахождении и исследовании предельного перехода, приводящего к вакономным движениям систем со связями.

Рассмотрим движение *свободной* механической системы с кинетической энергией $T_N = T + N\Phi^2/2$, где T — некоторая риманова метрика, $\Phi = (a, \dot{x})$ — линейная по скорости функция на касательном расслоении конфигурационного пространства, причем $a(x) \neq 0$, а N — положительный вещественный параметр. Пусть система находится под действием внешних сил F. Движение такой системы описывается обычным уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_N}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T_N}{\partial x} = F. \tag{1.6}$$

В [3, II] доказана следующая общая теорема, связанная, между прочим, с методом штрафных функций в вариационном исчислении.

Пусть $t \mapsto x_N(t)$, $0 \leqslant t < \tau$, *— решение уравнения* (1.6) *с начальным условием*

$$x_0, \quad \dot{x}_0 = v_0 + \frac{v_1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right), \tag{1.7}$$

причем $(a(x_0), v_0) = 0$. *Тогда в промежутке* $0 \leqslant t < \tau$ *существует предел*

$$\widehat{x}(t) = \lim_{N\to\infty} x_N(t),$$

удовлетворяющий вместе с некоторой функцией $t \mapsto \lambda(t)$, $0 \leqslant t < \tau$, *вакономным уравнениям*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T + \lambda\Phi)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial (T + \lambda\Phi)}{\partial x} = F, \quad \Phi = 0. \tag{1.8}$$

Если скорость системы $\dot{x}$ лежит в гиперплоскости $(a, \dot{x}) = 0$, то кинетическая энергия свободной системы T_N принимает умеренные значения (не зависящие от N). Наоборот, для скоростей вне этой гиперплоскости кинетическая энергия становится большой (при больших N). Анизотропия инерционных свойств системы возникает, например, при движении твердого тела в жидкости (за счет эффекта присоединенных масс) [3, III].

После этого становится понятным, почему качение шара и скольжение саней Чаплыгина не имеет никакого отношения к вакономной механике (здесь пассивная реализация, очевидно, связана с наличием анизотропных сил вязкого или сухого трения).

В подтверждение этого общего тезиса см. обсуждение экспериментальных данных по качению шара на вращающейся плоскости в [35] (см. также [36]).

Интересно отметить, что при $N \to \infty$ начальное состояние (1.7) не зависит от v_1, но решения уравнений (1.8) с одними и теми же начальными данными x_0, v_0 зависят от выбора вектора v_1.

Если продолжить аналогию с геометрией, то теорема о предельном переходе соответствует моделям Бельтрами и Пуанкаре неевклидовой геометрии. Открытие этих моделей доказало, в частности, непротиворечивость геометрии Лобачевского – Бойяи. Именно из-за отсутствия ясности в проблеме непротиворечивости Гаусс решил воздержаться от публикаций по новой геометрии. Впрочем, как говорят немцы, всякое сравнение хромает.

3. В [8] указано новое семейство математических моделей движения систем со связями, которое получается в результате предельного перехода в системах с одновременной анизотропией сил вязкого трения и инерционных свойств системы. Критический анализ круга вопросов, связанных с описанием движения систем со связями, содержится в работе [9].

В работах [37–40] обсуждаются сопоставления различных аспектов динамики неголономных и вакономных систем. С этой точки зрения особый интерес представляет статья [39], в которой рассмотрено частное движение вакономного конька на наклонной плоскости, когда в начальный момент его лезвие горизонтально и конек подтолкнули без закручивания вокруг его оси. Показано, что в первые моменты конек начнет двигаться вверх. В [39] такое поведение конька признано парадоксальным и на этом основании вакономная модель объявлена нефизичной.

Однако этот «парадокс» допускает прозрачную интерпретацию, если обратиться к задаче о падении тонкой пластинки в безграничном объеме идеальной жидкости. Устремим присоединенную массу пластинки к бесконечности, оставляя другие параметры неизменными. Как показано в [3, II], движения пластинки в жидкости стремятся к вакономным движениям конька. Следовательно, при малых значениях времени пластинка действительно будет двигаться вверх. Таким образом, указанное в [39] «парадоксальное» поведение вакономного конька является любопытным эффектом выныривания пластинки в жидкости (см. по этому поводу [41]).

В работах [42, 43] рассматривалась динамика управляемых неголономных систем (сани Чаплыгина и катящийся без проскальзывания динамически несимметричный уравновешенный шар). При определенном выборе управления получаются вакономные движения таких систем. В [43] управление шаром осуществляется с помощью трех симметричных роторов (общая постановка задачи и исследование управления содержится в работах [51–53]). Задача управления состоит в том, чтобы перекатить шар из начального положения в фиксированное конечное положение, минимизировав при этом укороченное действие (действие по Эйлеру). Оптимальные траектории описываются вакономными уравнениями.

Наконец, упомянем статью [44], в которой вакономная механика излагается с точки зрения теории перестановочных соотношений. Стоит иметь в виду, что сама задача о перестановочных соотношениях зависит от определения вариаций. При обычном определении вариаций (как производных по параметру) дифференцирование по времени и варьирование, конечно, перестановочны и результаты [44] вряд ли стоит воспринимать как новый подход к проблеме.

В недавней работе [47] рассмотрено управляемое (с помощью омниплатформы, помещенной внутри шара) качение шара на плоскости, при котором имеется две реализации неголономных связей: первая из них является пассивной и связана с условием отсутствия проскальзывания в точке контакта, а вторая (отсутствие верчения) обеспечивается с помощью управления (то есть является сервосвязью). Введение сервосвязи необходимо для простоты управления и минимизации действия плохо изученных сил трения верчения. Этот пример [47] позволяет надеяться, что развиваемые в этой работе методы могут быть с успехом использованы в современной мобильной робототехнике (роботике).

Далее мы обсудим лишь некоторые модельные задачи с сервосвязями, хотя несомненно, что в будущем стоит рассмотреть более содержательные и интересные примеры сервосвязей (см. также обсуждение сервосвязей в работе [59]).

2. Системы на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией и левоинвариантной сервосвязью

Пусть G — n-мерная группа Ли, g — ее алгебра Ли. Пусть T — левоинвариантная риманова метрика на G. С точки зрения динамики эту метрику можно интерпретировать как кинетическую энергию некоторой механической системы. Согласно Пуанкаре [11], динамические уравнения отделяются и представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений на алгебре g (или на коалгебре g^* — двойственном линейном пространстве):

$$\dot{m}_k = \sum c_{jk}^i m_i \omega_j, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Здесь $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (декартовы координаты на алгебре g) — квазискорости рассматриваемой системы, а $m_1, \ldots, m_n$ (координаты на коалгебре g^*) — импульсы. Они связаны линейными соотношениями

$$m_k = \sum I_{kj}\omega_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2.2}$$

где $\|I_{kj}\|$ — постоянный тензор инерции. Постоянные $c_{jk}^i = -c_{kj}^i$ — структурные постоянные алгебры Ли; они удовлетворяют известным тождествам Якоби. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\,(I\omega, \omega) = \frac{1}{2}\,(I^{-1}m, m)$$

— первый интеграл уравнений (2.1). Соотношения (2.2) можно записать по-другому:

$$m_k = \frac{\partial T}{\partial \omega_k}.$$

Для полного описания движения системы к уравнениям (2.1) следует добавить кинематические уравнения. (Подробности см. в [12].)

Пусть

$$\Phi = (a, \omega) = \sum a_i \omega_i = 0, \quad a_i = \mathrm{const}, \tag{2.3}$$

— левоинвариантная сервосвязь второго рода, линейная по скоростям. Постоянный ненулевой ковектор a — элемент из коалгебры g^*. Ведем добавочную кинетическую энергию

$$\lambda N = \lambda(b, \omega) = \lambda \sum b_i \omega_i,$$

которая участвует в реализации сервосвязи (2.3); здесь $\lambda(t)$ — неизвестная функция времени (управление), а $b \in g^* \setminus \{0\}$. Тогда динамика системы с левоинвариантной сервосвязью второго рода описывается следующим уравнением:

$$(m_k + \lambda b_k)^{\cdot} = \sum c_{jk}^i (m_i + \lambda b_i)\omega_j \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \quad \sum a_i \omega_i = 0. \tag{2.4}$$

Если ковекторы a и b коллинеарны, то система уравнений (2.4) задает вакономное движение со связью (2.3). В этом случае уравнения (2.4) допускают интеграл энергии $T =$ $=$ const. Если же ковекторы a и b не коллинеарны, то энергия не сохраняется.

Условие реализации сервосвязи (2.3) сводится к неравенству

$$(I^{-1}a, b) \neq 0. \tag{2.5}$$

Оно означает, что ковекторы a и b не ортогональны во «внутренней» метрике на g^*, индуцированной исходной левоинвариантной метрикой на группе G. Условие (2.5) — это общее условие реализуемости сервосвязи второго рода (1.3), представленное в групповых переменных.

Уравнения (2.4) — дифференциально-алгебраические; они представляют собой замкнутую систему из $n+1$ уравнений относительно $n+1$ переменных (например, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и λ). Покажем, что при условии (2.5) эту систему можно свести к замкнутой системе из n дифференциальных уравнений с однородными квадратичными правыми частями. Такую систему будем называть «приведенной».

Указанную редукцию можно осуществить разными способами. По-видимому, самый простой способ состоит в следующем. Представим уравнения (2.4) как систему на коалгебре g^*. Другими словами, обратим линейную систему (2.2) и заменим в (2.4) переменные $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейными функциями от $m_1, \ldots, m_n$. Тогда уравнение связи примет вид

$$(a, \omega) = (a, I^{-1}m) = (I^{-1}a, m) = (A, m) = \sum A_j m_j = 0, \tag{2.6}$$

где $A = I^{-1}a = (A_1, \ldots, A_n)$ — ненулевой элемент из алгебры g. Линейной заменой переменных этот вектор приводится к виду $(0, \ldots, 0, 1)$, то есть уравнение связи (2.6) примет вид $m_n = 0$.

Пусть $m = Mm'$ — эта замена переменных. Ввиду двойственности g^* и g имеем $\omega = (M^{-1})^T \omega'$. В новых переменных уравнения (2.4) имеют тот же вид, только теперь

$$b = Mb', \quad a = Ma' \quad \text{и} \quad A = (M^{-1})^T A'.$$

Условие (2.5) переходит в условие

$$(A, b) = (A', b') \neq 0.$$

Следовательно, $b'_n \neq 0$. Таким образом, из первого уравнения (2.4) при $k = n$ находим $\dot{\lambda}$ как квадратичную форму от $m'_1, \ldots, m'_{n-1}$ и λ. Подставляя это соотношение в первые $n-1$ уравнений, получим аналогичные формулы для $\dot{m}'_1, \ldots, \dot{m}'_{n-1}$. Что и требовалось.

Укажем еще один способ получения приведенной системы (а значит, и форму ее записи), которым мы также будем пользоваться. Положим

$$\widehat{m}_k = m_k + \lambda b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Поскольку $m_k = \sum I_{kp}\omega_p$, то

$$\omega_j = \sum J_{js}(\widehat{m}_s - \lambda b_s),$$

где $||J_{js}||$ — симметричная матрица, обратная к матрице инерции I.

Следовательно, в новых переменных $\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_n, \lambda$ уравнения (2.4) принимают вид

$$\dot{\widehat{m}}_k = \sum_{i,j,s} c^i_{jk} J_{js} \widehat{m}_i (\widehat{m}_s - \lambda b_s).$$

Множитель λ находится из уравнения связи

$$0 = \sum a_i \omega_i = \sum a_i J_{is}(\widehat{m}_s - \lambda b_s).$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{\sum a_i J_{is} \widehat{m}_s}{\sum a_i J_{is} b_s}.$$

Сумма в знаменателе всегда отлична от нуля. Это условие реализуемости сервосвязи второго рода.

Итак, имеем линейное отображение гиперплоскости $(a, \omega) = 0$ из $(n+1)$-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \{\omega, \lambda\}$ в n-мерное пространство $\mathbb{R}^n\{\widehat{m}\}$. Обратно, каждому $\widehat{m}$ отвечает единственный набор ω, λ из $\mathbb{R}^{n+1}$, причем $(a, \omega) = 0$, и это соответствие линейное. Следовательно, наше отображение взаимно однозначное и поэтому невырожденное. В частности, $\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_n$, действительно, можно принять за независимые координаты приведенной системы.

Замечание. Согласно [2], для сервосвязей первого рода приведенная система состоит из $n-1$ дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями.

Допускает ли приведенная система первые интегралы? По-видимому, ответ в общем случае отрицательный, если иметь в виду интегралы, полиномиальные по импульсам m_k и множителю λ. Однако в ряде случаев такие интегралы все же можно указать. Они связаны с так называемыми *функциями Казимира*.

Напомним, что с каждой алгеброй Ли (или коалгеброй) связана скобка Ли – Пуассона:

$$\{m_i, m_j\} = \sum c_{ij}^k m_k.$$

Эта скобка часто оказывается вырожденной. Непостоянная функция $F\colon g^* \to \mathbb{R}$ называется функцией Казимира, если она коммутирует со всеми гладкими функциями на коалгебре. Следовательно,

$$\{m_i, F\} = \sum_{j,k} \frac{\partial F}{\partial m_j} c_{ij}^k m_k = 0 \tag{2.7}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Мы видим, что наличие функций Казимира связано только со структурой алгебры g (или $g*$).

Теорема 1. *Если $F(m_1, \ldots, m_n)$ — функция Казимира, то система уравнений* (2.4) *допускает первый интеграл*

$$F(m_1 + \lambda b_1, \ldots, m_n + \lambda b_n). \tag{2.8}$$

Другими словами, производная от функции (2.8) в силу системы дифференциальных уравнений (2.4) равна нулю. Надо только следить за тем, чтобы ограничение (2.8) на гиперплоскость (2.6) было бы непостоянной функцией.

Следствие 1. *Если ограничение функции Казимира на гиперплоскость* (2.6) *есть локально непостоянная функция, то приведенная система допускает нетривиальный первый интеграл.*

В этом случае функция (2.8) непостоянна при $\lambda = 0$.

Следствие 2. *Если $F(b) \neq F(0)$, то приведенная система допускает нетривиальный первый интеграл.*

В этом случае функция (2.8) непостоянна на оси $\{\lambda\}$.

Докажем теорему 1. Положим

$$\widehat{m}_k = m_k + \lambda b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

тогда дифференциальные уравнения (2.4) принимают вид

$$\dot{\widehat{m}}_k = \sum c^i_{jk} \widehat{m}_i \omega_j.$$

Здесь

$$\omega_j = \sum J_{js}(\widehat{m}_s - \lambda b_s),$$

где $||J_{js}||$ — матрица, обратная к матрице инерции механической системы. Далее,

$$[F(\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_n)]^{\cdot} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial F}{\widehat{m}_j} c^k_{ij} \widehat{m}_k \omega_i = \sum_i \left(\sum_{j,k} \frac{\partial F}{\partial \widehat{m}_j} c^k_{i,j} \widehat{m}_k \right) \omega_i = 0$$

ввиду условия (2.7). Что и требовалось.

Функции Казимира обычно представляют себе как однородные многочлены от $m_1, \ldots, m_n$. Это связано со следующим наблюдением. Пусть $F \colon g* \to \mathbb{R}$ — аналитическая (или формально аналитическая) функция. Сопоставим ей ряд Маклорена $\sum F_p$, $p \geqslant 0$. Оказывается, каждая однородная форма F_p (степени p) также будет функцией Казимира. Это — простое следствие формулы (2.7). Конечно, не следует думать, что в результате такого приема мы получим бесконечное число различных функций Казимира: почти все F_p (кроме некоторого конечного числа) будут функционально зависимыми.

Полиномиальные базисы пространств функций Казимира для полупростых алгебр Ли, важных с точки зрения приложения к механике и математической физике, можно найти, например, в книге [13].

Оказывается, функции Казимира могут иметь сингулярности и они никаким образом не сводятся к однородным полиномам. Наличие таких функций Казимира связано со строением соответствующей алгебры Ли. Трансцендентные функции Казимира уже есть на типичных трехмерных разрешимых (но не нильпотентных) алгебрах Ли (см., например, алгебры $A_{3,2}$, $A^a_{3,5}$ и $A^a_{3,7}$ из классификации, выполненной в [48], или «book» алгебру из работы [49]).

3. Вращение твердого тела с левоинвариантной сервосвязью второго рода

В этом важном для нас примере группа Ли G совпадает с группой вращений трехмерного евклидова пространства $SO(3)$. Наличие евклидовой метрики на алгебре $so(3)$ позволяет нам отождествлять векторы и ковекторы (этим обстоятельством мы будем постоянно пользоваться). Для левоинвариантной сервосвязи первого рода эта задача рассмотрена в работе [2].

Уравнения (2.4) на алгебре $so(3)$ принимают следующий вид:

$$(I\dot{\omega} + \lambda b)^{\cdot} + \omega \times (I\omega + \lambda b) = 0, \quad (a, \omega) = 0. \tag{3.1}$$

Символ «$\times$» — векторное умножение, I — тензор инерции вращающегося твердого тела, постоянные ненулевые векторы a и b задают направления фиксированных в теле осей l и n (которые упоминаются в [1]). Неизвестная функция времени $\lambda(\cdot)$ — управление.

Согласно [1], сервосвязь $(a, \omega) = 0$ реализуется за счет подходящего вращения симметричного маховика вокруг неподвижной в теле оси n. Кинетический момент маховика относительно твердого тела равен λb. Его вращение осуществляется регулируемыми внутренними силами. В частности, справедлива теорема об изменении кинетического момента системы «тело + маховик» (первое уравнение (3.1)).

Если векторы a и b коллинеарны, то уравнения (3.1) описывают вакономное вращение волчка. Их решения — экстремали вариационной задачи Лагранжа:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\,(I\omega, \omega) dt = 0, \quad (a, \omega) = 0.$$

В этом случае вращение волчка допускает вырожденное представление Пуансо: эллиптическая пластинка (пересечение эллипсоида инерции гиперплоскостью $(a, \omega) = 0$), жестко связанная с твердым телом, все время катится без проскальзывания по некоторой неподвижной плоскости (см. [8]). Так что для нас особый интерес представляет случай, когда векторы a и b не коллинеарны.

Оси подвижного ортогонального трехгранника выберем так, чтобы третья ось совпала с осью l, а ось n была бы ортогональна первой оси. В этих осях вектор a имеет компоненты 0, 0, 1, а компоненты вектора b суть числа 0, b_2, b_3. Обозначим I_{ij} компоненты тензора инерции твердого тела в этих осях, а ω_1, ω_2, ω_3 — проекции вектора угловой скорости на те же оси. В этих обозначениях $\omega_3 = 0$ будет уравнением связи, а уравнения (3.1) примут следующий явный вид:

$$\begin{aligned}
&I_{11}\dot\omega_1 + I_{12}\dot\omega_2 + \omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda) = 0,\\
&I_{12}\dot\omega_1 + I_{22}\dot\omega_2 + b_2\dot\lambda - \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda = 0,\\
&I_{13}\dot\omega_1 + I_{23}\dot\omega_2 + b_3\dot\lambda + \omega_1(I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + b_2\lambda) - \omega_2(I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2) = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь мы уже учли уравнение связи $\omega_3 = 0$.

Условие реализуемости сервосвязи сводится к условию разрешимости системы уравнений относительно $\dot\omega_1$, $\dot\omega_2$ и $\dot\lambda$. Другими словами,

$$\begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & b_2 \\ I_{13} & I_{23} & b_3 \end{vmatrix} = b_3(I_{11}I_{22} - I_{12}^2) + b_2(I_{12}I_{13} - I_{11}I_{23}) \neq 0. \tag{3.3}$$

Кстати сказать, оно совпадает с условием реализуемости сервосвязи $\omega_3 = 0$ первого рода, указанным в работе [2]. Условие (3.3) можно представить в виде

$$(I^{-1}a, b) \neq 0.$$

Это означает, что оси l и n не ортогональны во «внутренней» метрике, которая задается кинетической энергией тела. В таком виде условие реализуемости левоинвариантной сервосвязи второго рода было представлено в работе [1].

В отличие от систем с сервосвязями первого рода, здесь для однозначного определения решений надо задать еще значение параметра Лагранжа λ в начальный момент времени. Другими словами, надо задать кинетический момент симметричного маховика. Это условие совершенно естественно в задаче о движении твердого тела со свободно вращающимися маховиками. Оно также имеет место и для управляемого движения, если выполнено условие реализации связи (3.3). Принцип детерминированности в вакономной механике обсуждается в [3].

Уравнения движения (3.1) допускают первый интеграл

$$(I\omega + \lambda b, I\omega + \lambda b) = \text{const.} \tag{3.4}$$

Этот факт — непосредственное следствие первого (динамического) уравнения (3.1). С другой стороны, интеграл (3.4) выводится из теоремы 1, поскольку

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

— функция Казимира на коалгебре $(so(3))^*$ ввиду известных коммутационных соотношений

$$\{m_1, m_2\} = m_3, \quad \{m_2, m_3\} = m_1, \quad \{m_3, m_1\} = m_2.$$

С учетом связи $\omega_3 = 0$ интеграл (3.4) имеет следующий явный вид:

$$(I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2)^2 + (I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + b_2\lambda)^2 + (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda)^2. \tag{3.5}$$

Это — однородная квадратичная форма от ω_1, ω_2 и λ.

Предложение 1. *Если выполнено условие реализуемости сервосвязи* (3.3)*, то квадратичная форма* (3.5) *положительно определена.*

Действительно, форма (3.5), очевидно, неотрицательна и обращается в нуль при выполнении следующих условий:

$$I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 = 0, \quad I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + b_2\lambda = 0, \quad I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda = 0.$$

Это — линейная система относительно ω_1, ω_2, λ. Ее определитель (3.3) отличен от нуля. Следовательно, квадратичная форма (3.5) обращается в нуль только при $\omega_1 = \omega_2 = \lambda = 0$. Что и требовалось.

Таким образом, поверхности уровня первого интеграла (3.5) — это эллипсоиды в $\mathbb{R}^3 = \{\omega_1, \omega_2, \lambda\}$, центрально-симметричные относительно начала координат. Каждый эллипсоид расслоен на траектории динамической системы (3.2). Это расслоение составляет фазовый портрет, вид которого дает практически исчерпывающее представление о поведении фазовых траекторий рассматриваемой системы.

Первый шаг на пути построения фазового портрета — нахождение особых точек (положений равновесия) и описание их типов. Найдем все особые точки системы (3.2), помня, что они группируются на прямых, проходящих через начало координат. Положения равновесия определяются из нелинейной системы (3.2), в которой надо положить $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\lambda} = 0$.

Сначала отметим простое решение: $\omega_1 = \omega_2 = 0$, а λ принимает любые значения. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} \rho I_{11} & \rho I_{12} + b_3\lambda & 0 \\ \rho I_{12} - b_3\lambda & \rho I_{22} & \rho b_2 \\ \rho I_{13} + b_2\lambda & \rho I_{23} & \rho b_3 \end{vmatrix} = \rho^3\Delta + \rho^2\lambda b_2(b_2 I_{12} + b_3 I_{13}) + \rho\lambda^2 b_3(b_2^2 + b_3^2) = 0.$$

Здесь ρ — спектральный параметр, а $\Delta \neq 0$ — левая часть условия реализуемости сервосвязи (3.3). Нулевой корень отвечает наличию первого интеграла (3.5). Если система (3.5) допускает интегральный инвариант с гладкой положительной плотностью, то

$$b_2(b_2 I_{12} + b_3 I_{13}) = 0. \tag{3.6}$$

Это условие того, что сумма корней характеристического уравнения равна нулю (см. [14]).

Если в состоянии равновесия $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$, то из первых двух уравнений (3.2) вытекает равенство

$$I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda = 0. \tag{3.7}$$

Заметим, что это линейное уравнение не вырождается; в противном случае $I_{13} = I_{23} = b_2 = 0$ и, следовательно, нарушается условие (3.3) реализуемости связи. Таким образом, остальные положения равновесия лежат в пересечении эллипсоида (получаемого приравниванием (3.5) положительной константе) гиперплоскостью (3.7). Чтобы их найти, надо воспользоваться третьим уравнением системы (3.2):

$$I_{12}\omega_1^2 + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 - I_{12}\omega_2^2 + b_2\omega_1\lambda = 0. \tag{3.8}$$

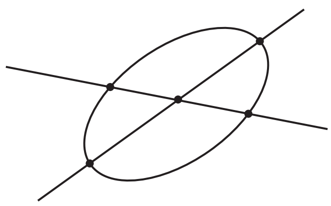

Рис. 1

Покажем, что «оставшихся» положений равновесия либо совсем нет, либо их два (причем оба двукратные), либо четыре, либо, наконец, вся линия пересечения плоскости (3.7) с эллипсоидом состоит из положений равновесия. Действительно, плоскость (3.7) может пересекаться с конусом (3.8) только в начале координат. Другими словами, ограничение квадратичной формы (3.8) на плоскость (3.7) будет положительной или отрицательной квадратичной формой. В этом случае новых нетривиальных положений равновесия нет. Если ограничение квадратичной формы (3.8) на плоскость (3.7) есть нулевая форма, то все точки плоскости (3.7) будут положениями равновесия системы (3.2). Во всех других случаях пересечение (3.7) и (3.8) состоит из двух прямых, проходящих через начало координат, или из одной (двукратной) прямой, которые пересекают центрально-симметричный эллипсоид в четырех (или в двух) точках — положениях равновесия.

В качестве следствия из этих рассуждений вытекает следующая альтернатива.

Предложение 2. *Приведенная динамическая система* (3.2) *имеет либо одну прямую равновесий, либо таких прямых ровно три (считая кратности), либо их бесконечно много.*

Укажем значения параметров, при которых система (3.2) имеет только одну прямую равновесий — ось $\{\lambda\}$. Положим $I_{23} = 0$ и предположим, что произведения инерции I_{12} и I_{13} имеют один и тот же знак. Если b_2 много больше b_3 (другими словами, отношение b_2/b_3 достаточно большое), то при указанных предположениях все положения равновесия системы (3.2) лежат на оси $\{\lambda\}$.

С другой стороны, если $b_2 = 0$ (вакономная модель), то приведенная система всегда имеет не менее трех различных прямых равновесий. Действительно, как и в общем случае, система (3.2) допускает целую ось равновесий

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \lambda \text{ — любое}. \tag{3.9}$$

Пусть теперь $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$. Тогда из последнего уравнения (3.2) найдем, что

$$I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 = \rho\omega_1, \quad I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 = \rho\omega_2 \tag{3.10}$$

при некотором вещественном ρ; здесь мы уже учли предположение $b_2 = 0$. Следовательно, вектор $(\omega_1, \omega_2)^T$ — собственный вектор положительно определенной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Эта матрица имеет два положительных собственных значения ρ_1 и ρ_2. Если $\rho_1 \neq \rho_2$, то имеется два линейно независимых собственных вектора, порождающих две различные прямые равновесий (значения переменной λ находятся из уравнения (3.7)). Если же $\rho_1 = \rho_2$, то собственные векторы матрицы (3.11) (а значит, и прямые равновесий) образуют однопараметрическое семейство.

Утверждение о трех прямых равновесий можно доказать по-другому. Вспомним, что вакономная система допускает интеграл энергии

$$T = \frac{1}{2}\,(I\omega, \omega) = \frac{1}{2}\,(I_{11}\omega_1^2 + 2I_{12}\omega_1\omega_2 + I_{22}\omega_2^2).$$

Предложение 3. *Если $b_2 = 0$, то стационарные точки функции T при фиксированных значениях первого интеграла* (3.5) *совпадают с положениями равновесия системы* (3.2).

Это общее утверждение восходит к Раусу. Для полноты изложения приведем его доказательство. Согласно методу множителей, точки условного экстремума находятся из уравнения

$$dT + \mu dF = 0, \tag{3.12}$$

где F — квадратичная форма (3.5). В явном виде уравнение (3.12) имеет следующий вид:

$$\alpha + \mu I_{11}\alpha + \mu I_{12}\beta + \mu I_{13}\gamma = 0, \quad \beta + \mu I_{12}\alpha + \mu I_{22}\beta + \mu I_{23}\gamma = 0, \quad \mu\gamma = 0,$$

где

$$\alpha = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2, \quad \beta = I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2, \quad \gamma = I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda. \tag{3.13}$$

Если $\mu = 0$, то $\alpha = \beta = 0$. С учетом невырожденности матрицы (3.11) получаем равновесия (3.9). Если же $\mu \neq 0$, то $\gamma = 0$ и вектор $x = (\alpha, \beta)^T$ будет собственным для матрицы (3.11):

$$Ax = \rho x, \quad \rho = -\frac{1}{\mu}.$$

Два первых соотношения (3.13) можно представить в виде

$$Az = x, \quad z = (\omega_1, \omega_2)^T.$$

Следовательно,

$$\rho Az = \rho x = Ax.$$

Так как $\det A \neq 0$, то $x = \rho z$. Значит, вектор z удовлетворяет уравнениям (3.10), которые определяют (вместе с уравнением $\gamma = 0$) положения равновесия. Что и требовалось.

Функция T имеет на эллипсоиде $\{F = c, c > 0\}$ по меньшей мере две стационарные точки: это точки максимума и минимума. Им отвечают две различные прямые равновесий. Вообще-то гладкая функция на эллипсоиде может и не иметь других стационарных точек.

Однако эллипсоид центрально-симметричен и функция T принимает одинаковые значения в антиподальных точках. Поэтому функция T естественным образом определена на проективной плоскости, которая получается из эллипсоида отождествлением противоположных (относительно начала координат) точек. Из топологии хорошо известно, что гладкая функция на проективной плоскости имеет по меньшей мере три различные стационарные точки. Это и доказывает утверждение о трех прямых равновесий приведенных уравнений вакономной модели.

4. Изоморфизм вакономного волчка и волчка Эйлера

Фазовые траектории приведенной вакономной системы на эллипсоиде $\{F = c,\ c > 0\}$ — это линии пересечения поверхностей уровня кинетической энергии T с эллипсоидом. Поверхности уровня функции T — цилиндрические поверхности второго порядка, образующие которых параллельны оси λ. Нетрудно понять, что картина фазовых траекторий на эллипсоиде по существу совпадает с хорошо известной картиной полодий в классической задаче Эйлера и поэтому нет смысла здесь ее воспроизводить. Как мы знаем, динамические уравнения Эйлера интегрируются в эллиптических функциях. Оказывается, переменные ω_1, ω_2 и λ, удовлетворяющие уравнениям (3.2) при $b_2 = 0$, также можно выразить через эллиптические функции времени. Это можно сделать разными способами.

Все эти наблюдения вытекают из более общего результата о наличии изоморфизма между вакономным волчком с левоинвариантной связью и волчком Эйлера.

Теорема 2. *При $b_2 = 0$ существует невырожденная линейная замена переменных*

$$\omega_1, \omega_2, \lambda \mapsto m_1, m_2, m_3, \tag{4.1}$$

приводящая уравнения (3.2) *к динамическим уравнениям Эйлера*

$$\dot m_1 = (J_3 - J_2)m_2m_3, \quad \dot m_2 = (J_1 - J_3)m_3m_1, \quad \dot m_3 = (J_2 - J_1)m_1m_2. \tag{4.2}$$

В уравнениях (4.2) m_1, m_2, m_3 — компоненты кинетического момента твердого тела относительно главных осей инерции, а J_1, J_2, J_3 — величины, обратные главным моментам инерции.

Следствие. *Фазовый поток вакономной приведенной системы сохраняет стандартную меру в $\mathbb{R}^3 = \{\omega_1, \omega_2, \lambda\}$.*

Действительно, этим свойством обладают уравнения Эйлера (4.2) (как динамическая система в $\mathbb{R}^3 = \{m_1, m_2, m_3\}$). Остается заметить, что при переходе к исходным координатам ω_1, ω_2, λ элемент объема в $\mathbb{R}^3 = \{m\}$ умножается на константу — абсолютную величину определителя обратной подстановки (4.1). Что и требовалось.

Как отмечалось выше, необходимое условие наличия инвариантной меры с гладкой положительной плотностью системы (3.2) в общем случае выражается равенством (3.6).

Для доказательства теоремы 2 перейдем к новым переменным M_1, M_2, m_3 по формулам

$$M_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2, \quad M_2 = I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2, \quad m_3 = I_{13}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + b_3\lambda.$$

Эта линейная замена переменных невырожденна согласно условию реализуемости сервосвязи (3.3):

$$b_3(I_{11}I_{22} - I_{12}^2) \neq 0.$$

В новых переменных уравнения (3.2) принимают вид

$$\dot{M}_1 = -\omega_2 m_3, \quad \dot{M}_2 = \omega_1 m_3, \quad \dot{m}_3 = -\omega_1 M_2 + \omega_2 M_1. \tag{4.3}$$

Здесь угловые скорости ω_1 и ω_2 следует заменить на линейные формы

$$J_{11}M_1 + J_{12}M_2 \quad \text{и} \quad J_{12}M_1 + J_{22}M_2,$$

где $||J_{ij}||$ — симметричная 2×2-матрица, обратная к матрице $||I_{ij}||$.

Сделаем еще ортогональный поворот

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix},$$

приводящий матрицу $||J_{ij}||$ к диагональному виду

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}, \quad \rho_j > 0.$$

После элементарных преобразований получаем следующий вид уравнений (4.3) в новых переменных m_1, m_2, m_3:

$$\dot{m}_1 = -\rho_2 m_2 m_3, \quad \dot{m}_2 = \rho_1 m_3 m_1, \quad \dot{m}_3 = (\rho_2 - \rho_1) m_1 m_2. \tag{4.4}$$

Чтобы получить уравнения Эйлера (4.2), надо удовлетворить равенствам

$$J_3 - J_2 = -\rho_2, \quad J_1 - J_2 = \rho_1, \quad J_2 - J_1 = \rho_2 - \rho_1.$$

Эта линейная система имеет целое семейство решений

$$J_1 = \rho_1 + \alpha, \quad J_2 = \rho_2 + \alpha, \quad J_3 = \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что в новых переменных интеграл кинетического момента (3.5) равен

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \tag{4.5}$$

а кинетическая энергия (которая также является первым интегралом для вакономного волчка) принимает вид

$$2T = \rho_1 m_1^2 + \rho_2 m_2^2. \tag{4.6}$$

Легко проверить, что дифференциальные уравнения (4.4) можно представить в следующей форме:

$$\dot{m}_k = \frac{\partial(m_k, F, T)}{\partial(m_1, m_2, m_3)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 3. \tag{4.7}$$

Здесь $2F$ обозначает интеграл кинетического момента (4.5). Аналогичное представление имеет место и для классических уравнений Эйлера (4.2); при этом функции F и T сохраняют свой смысл.

По-видимому, дифференциальные уравнения вида (4.7) впервые встречаются в работе В. Вольтерры [15], посвященной влиянию морских течений на изменение широты. В этой работе рассмотрена задача о свободном гиростате, обобщающая задачу Эйлера, и динамические уравнения на алгебре $so(3)$ представлены в форме (4.7).

Уравнения (4.7) обладают рядом любопытных свойств.

1°. Функции F и T автоматически являются первыми интегралами.

2°. Уравнения (4.7) не изменятся, если к функции T добавить cF, $c = \mathrm{const}$; конечно, при этом можно поменять ролями функции T и F.

3°. Фазовый поток системы (4.7) сохраняет меру Лебега в $\mathbb{R}^3 = \{m\}$.

Забегая вперед, отметим, что существуют системы с квадратичными правыми частями в $\mathbb{R}^3$, допускающие два независимых квадратичных интеграла, и фазовый поток таких систем не сохраняет фазового объема. Очевидно, такие системы нельзя представить в виде (4.7).

Валле Пуссен доказал [16], что *любую* динамическую систему в окрестности неособой точки n-мерного фазового пространства можно представить в виде

$$\dot{x}_j = \frac{\partial(x_j, f_1, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{4.8}$$

Функции $f_1, \ldots, f_{n-1}$ — первые интегралы этой системы. Теорема Валле Пуссена — следствие локальной теоремы о выпрямлении фазовых траекторий. Действительно, в малой окрестности неособой точки существуют локальные координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, в которых система имеет вид

$$\dot{x}_1 = 1,\ \dot{x}_2 = 0,\ \ldots,\ \dot{x}_n = 0.$$

Эти уравнения можно записать в форме уравнений (4.8), если положить $f_1 = x_2, \ldots, f_{n-1} = x_n$. (Относительно обобщений см. [13].)

Замечание. В оригинальной формулировке теоремы Валле Пуссена имеется предположение о бездивергентности векторного поля, задающего динамическую систему. Этим свойством, конечно, обладают уравнения (4.8). Валле Пуссен не связывал представление (4.8) с теоремой о выпрямлении, в которой условие бездивергентности выполнено автоматически.

Представление динамической системы в виде (4.8) имеет особый интерес в окрестности положений равновесия или во всем фазовом пространстве, где траектории обладают свойством возвращаемости. Теорема 2 объединяет как раз оба эти случая.

Уравнение (4.8) лежит в основе так называемой механики Намбу [17]. При $n = 2$ получаем гамильтонову систему на плоскости с гамильтонианом f_1. Далеко не каждая замена переменных сохраняет вид системы дифференциальных уравнений (4.8). Такие преобразования с необходимостью должны сохранять элемент объема в $\mathbb{R}$ (то есть их якобианы равны единице). В [18] указаны условия приводимости динамической системы на n-мерном торе с полным набором многозначных интегралов (в количестве $n-1$) к виду (4.8) с точностью до замены времени. Там же указаны ссылки на другие работы по этой теме.

Теорему 2 можно обобщить и распространить на общие системы дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями в трехмерном векторном пространстве. Пусть

$$\dot{x} = v(x) \quad \text{и} \quad \dot{y} = v'(y) \tag{4.9}$$

— две такие системы; здесь $x \in \mathbb{R}^3$ и $y \in \mathbb{R}^3$. Предположим, что каждая из систем (4.9) допускает по два квадратичных первых интеграла

$$F(x),\ H(x) \quad \text{и} \quad F'(y),\ H'(y), \tag{4.10}$$

причем квадратичные формы F и F' считаются положительно определенными.

Мы укажем условия, при которых найдется линейное обратимое преобразование $x \mapsto y$, переводящее первую систему дифференциальных уравнений во вторую. В этом случае можно говорить об *изоморфизме* двух динамических систем (4.9): они ничем не отличаются по своим свойствам и каждая из них получается из другой линейной подстановкой. Чтобы исключить из рассмотрения тривиальные случаи, мы будем считать векторные поля v и v' ненулевыми (не обращающимися в тождественный нуль).

Поскольку квадратичные формы F и F' положительно определены, то каждую из пар форм (4.10) можно привести к каноническому виду; в подходящих канонических координатах x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 эти формы имеют следующий вид:

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad H = \rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2 + \rho_3 x_3^2 \tag{4.11}$$

и

$$F' = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad H' = \rho_1' y_1^2 + \rho_2' y_2^2 + \rho_3' y_3^2.$$

Теорема 3. *Пусть $\sum \rho_j^2 \neq 0$ и среди чисел ρ_1, ρ_2, ρ_3 нет равных. Если $\rho_j' = \mu\rho_j$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то системы* (4.9) *изоморфны и их фазовые потоки сохраняют стандартную меру Лебега в $\mathbb{R}^3$.*

Пусть $\sum \rho_j^2 \neq 0$ и $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$. Если $\rho_j' = \mu\rho_j$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и фазовые потоки систем (4.9) *сохраняют стандартную меру Лебега в $\mathbb{R}^3$, то эти системы изоморфны.*

Доказательство основано на приведении каждой из систем (4.9) к *одному и тому же* виду с помощью невырожденных линейных преобразований

$$z = Ax \quad \text{и} \quad z = By.$$

Тогда линейная подстановка $y = B^{-1}Ax$ дает искомый изоморфизм.

В. Вольтерра получил «нормальные» формы многомерных систем дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями, допускающих пару квадратичных интегралов (один из которых положительно определен), и при этом все собственные числа ρ_j различны [10]. Но только в трехмерном случае условия изоморфизма можно выразить через эти собственные числа. Теорема 3 неявно содержится в теории трехмерных систем гидродинамического типа (триплеты) [45]. Для полноты изложения мы дадим ее прямое доказательство.

Сначала выясним, какой вид имеет первая система (4.9) в канонических координатах x_1, x_2, x_3, в которых квадратичные формы F и H имеют вид (4.11). Будем считать все ρ_j положительными. Если это не так, то заменим H квадратичной формой $H + \rho F$ с большим положительным ρ.

Запишем в явном виде первую систему (4.9):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1,\\
\dot{x}_2 &= a_{11}'x_1^2 + a_{22}'x_2^2 + a_{33}'x_3^2 + a_{12}'x_1x_2 + a_{23}'x_2x_3 + a_{31}'x_3x_1,\\
\dot{x}_3 &= a_{11}''x_1^2 + a_{22}''x_2^2 + a_{33}''x_3^2 + a_{12}''x_1x_2 + a_{23}''x_2x_3 + a_{31}''x_3x_1.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Поскольку квадратичная форма F есть первый интеграл этой системы, то мы имеем следующую цепочку соотношений на коэффициенты:

$$\begin{gathered}
a_{11} = a_{22}' = a_{33}'' = 0,\ a_{22} + a_{12}' = 0,\ a_{33} + a_{31}'' = 0,\ a_{12} + a_{11}' = 0,\\
a_{31} + a_{11}'' = 0,\ a_{23}' + a_{22}'' = 0,\ a_{33}' + a_{23}'' = 0;\ a_{23} + a_{31}' + a_{12}'' = 0.
\end{gathered} \tag{4.13}$$

С их учетом система (4.12) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_3(a_{31}x_1 + a_{33}x_3) - x_2(-a_{12}x_1 - a_{22}x_2) + a_{23}x_2x_3,\\
\dot x_2 &= x_1(-a_{12}x_1 - a_{22}x_2) - x_3(-a'_{23}x_2 - a'_{33}x_3) + a'_{31}x_1x_3,\\
\dot x_3 &= x_2(-a'_{23}x_2 - a'_{33}x_3) - x_1(a_{31}x_1 + a_{33}x_3) + a''_{12}x_1x_2.
\end{aligned}
$$

Так как квадратичная форма H — первый интеграл этой системы, то

$$
\begin{aligned}
&(\rho_1-\rho_2)a_{12} = (\rho_1-\rho_2)a_{22} = 0,\ (\rho_2-\rho_3)a'_{23} = (\rho_2-\rho_3)a'_{33} = 0,\\
&(\rho_3-\rho_1)a_{31} = (\rho_3-\rho_1)a_{33} = 0 \quad \text{и}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

$$
\rho_1 a_{23} + \rho_2 a'_{31} + \rho_3 a''_{12} = 0. \tag{4.15}
$$

Сначала рассмотрим случай, когда среди чисел ρ_1, ρ_2, ρ_3 нет равных между собой. Тогда из (4.14) получаем равенства

$$
a_{12} = a_{22} = a'_{23} = a'_{33} = a_{31} = a_{33} = 0.
$$

Добавляя к (4.15) последнее равенство (4.13) и учитывая предположение $\sum \rho_j^2 \neq 0$, заключаем, что

$$
a_{23} = k(\rho_3-\rho_2), \quad a'_{31} = k(\rho_1-\rho_3), \quad a''_{12} = k(\rho_2-\rho_1) \tag{4.16}
$$

с некоторым вещественным k. Ясно, что $k \neq 0$, иначе $v \equiv 0$.

Итак, в этом случае первая система (4.9) принимает следующий вид:

$$
\dot x_1 = k(\rho_3-\rho_2)x_2x_3, \quad \dot x_2 = k(\rho_1-\rho_3)x_3x_1, \quad \dot x_3 = k(\rho_2-\rho_1)x_1x_2.
$$

Подстановка $x_j \mapsto x_j/k$ приводит эти уравнения к динамическим уравнениям Эйлера (4.2).

В канонических координатах y_1, y_2, y_3 вторая система (4.9) принимает тот же вид:

$$
\dot y_1 = k'(\rho'_3 - \rho'_2)y_2y_3, \ldots .
$$

Согласно условию теоремы, $\rho'_j = \mu\rho_j$. Совершая преобразование подобия $y_j \mapsto y_j/(\mu k')$, снова получаем те же самые уравнения Эйлера. Очевидно, что после всех линейных подстановок

$$
\operatorname{div} v = \operatorname{div} v' = 0.
$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$. Из (4.14) получаем равенства

$$
a'_{23} = a'_{33} = a_{31} = a_{33} = 0.
$$

В этом случае первая система (4.9) приводится к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) + a_{23}x_2x_3,\\
\dot x_2 &= -x_1(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) + a'_{31}x_3x_1,\\
\dot x_3 &= a''_{12}x_1x_2.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Ясно, что в этих координатах

$$
\operatorname{div} v = a_{12}x_2 - a_{22}x_1.
$$

В общем случае фазовый поток не сохраняет элемента фазового объема, хотя система допускает независимые квадратичные первые интегралы.

Согласно предположению теоремы 3, $\operatorname{div} v = 0$. Следовательно, $a_{12} = a_{22} = 0$, и поэтому система (4.17) приобретает тот же вид, что и в первом рассмотренном случае. Поскольку $\rho_3 \neq \rho_2 (= \rho_1)$, то снова получаем соотношения (4.16) и тем самым приводим исходную систему к динамическим уравнениям Эйлера с двумя равными моментами инерции. Теорема доказана полностью.

В общем случае, когда $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$, коэффициент a''_{12} в уравнениях (4.17) равен нулю и $a'_{31} = -a_{23}$. Это сразу же вытекает из соотношений

$$\rho_1(a_{23} + a'_{31}) + \rho_3 a''_{12} = 0 \quad (a_{23} + a'_{31}) + a''_{12} = 0.$$

Следовательно, система (4.17) принимает следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad \dot{x}_2 = -x_1(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad \dot{x}_3 = 0. \tag{4.18}$$

Ясно, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, если исходное векторное поле v — не тождественный нуль. В этом случае плоскость

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

пересекает каждую инвариантную сферу

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \mathrm{const} > 0$$

по большому кругу, сплошь состоящему из положений равновесия. Траектории системы (4.18) на этой сфере — окружности (или их части) — сечения сферы плоскостями $x_3 = \mathrm{const}$. Фазовый портрет изображен на рисунке 2. Фазовый поток динамической системы на сфере не допускает инвариантной меры, непрерывной относительно стандартной меры.

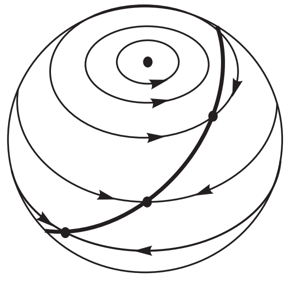

Рис. 2

5. Об инвариантных мерах приведенной системы в общем случае

Как мы уже видели, фазовый поток вакономной приведенной системы (система (3.2) при $b_2 = 0$) сохраняет стандартную меру в трехмерном фазовом пространстве. С другой стороны, *необходимое* условие существования инвариантной меры с гладкой положительной плотностью выражается равенством (3.6). Этот вопрос имеет принципиальное значение в задаче точного интегрирования приведенной системы. Действительно, система (3.2) в трехмерном фазовом пространстве допускает первый интеграл (3.5). Поэтому если бы мы знали плотность инвариантной меры (интегрального инварианта), то смогли бы проинтегрировать эти уравнения согласно классической теореме Эйлера–Якоби о последнем множителе.

Теорема 4. *Система дифференциальных уравнений* (3.2) *допускает инвариантную меру с гладкой положительной плотностью тогда и только тогда, когда* $b_2 = 0$.

Как известно, существование такой меры сводится к условию бездивергентности системы (3.2) [14]:

$$\frac{\partial \dot{\omega}_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial \dot{\omega}_2}{\partial \omega_2} + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} = 0.$$

Однако чтобы проверить это равенство, надо прежде разрешить систему уравнений (3.2) относительно производных $\dot\omega_1$, $\dot\omega_2$ и $\dot\lambda$. Правда, реализация этой простой идеи сопряжена с громоздкими вычислениями.

Мы перейдем к новым координатам по формулам

$$x_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2, \quad x_2 = I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + b_2\lambda, \quad x_3 = I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda. \tag{5.1}$$

Условие обратимости этой линейной подстановки сводится к условию реализуемости сервосвязи (3.3). В новых переменных система (3.2) принимает вид уравнений (4.3):

$$\dot x_1 = -\omega_2 x_3, \quad \dot x_2 = \omega_1 x_3, \quad \dot x_3 = -\omega_1 x_2 + \omega_2 x_1. \tag{5.2}$$

При любом выборе функций ω_1 и ω_2 эта система имеет квадратичный интеграл

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Обратим линейные уравнения (5.1):

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_1 &= (I_{22}b_3 - I_{23}b_2)x_1 - I_{12}b_3x_2 + I_{12}b_2x_3,\\
\Delta\omega_2 &= (-I_{12}b_3 + I_{13}b_2)x_1 + I_{11}b_3x_2 - I_{11}b_2x_3,\\
\Delta\lambda &= (I_{12}I_{23} - I_{22}I_{13})x_1 + (-I_{11}I_{23} + I_{12}I_{13})x_2 + (I_{11}I_{22} - I_{12}^2)x_3.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь

$$\Delta = (I_{11}I_{22} - I_{12}^2)b_3 + (I_{12}I_{13} - I_{11}I_{23})b_2;$$

эта величина отлична от нуля согласно условию реализуемости связи.

С учетом (5.2) и (5.3),

$$\frac{\partial\dot x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\dot x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\dot x_3}{\partial x_3} = \left[-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\right]x_3 - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}\,x_2 + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}\,x_1 = -\frac{b_2}{\Delta}\,(I_{11}x_1 + I_{12}x_2 + I_{13}x_3).$$

Так как $I_{11} > 0$, то эта функция тождественно равна нулю только при $b_2 = 0$. Что и доказывает теорему 4.

Таким образом, теорема 4 делает призрачной надежду проинтегрировать уравнения (3.2) при $b_2 \neq 0$ методом Эйлера–Якоби. Еще один возможный путь к точному интегрированию приведенной системы связан с теорией Ли разрешимых групп симметрий. Дело в том, что векторное поле u с оператором дифференцирования

$$L_u = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

есть поле симметрий системы (5.2)–(5.3): его фазовый поток переводит траектории этой системы в траектории той же системы. Это простое следствие коммутационного соотношения

$$L_uL_v - L_vL_u = L_v, \tag{5.4}$$

где L_v — оператор дифференцирования в силу системы (5.2)–(5.3). В свою очередь, соотношение (5.4) вытекает из квадратичной однородности правых частей приведенной системы. Линейные комбинации векторных полей u и v порождают разрешимую алгебру размерности два. Из этого факта и классической теоремы Ли об интегрируемости сразу же вытекает возможность проинтегрировать в квадратурах систему на плоскости с квадратичными правыми частями. Впрочем, эту возможность нетрудно реализовать с помощью восходящего к Лейбницу приема, связанного с разделением переменных. В нашем случае теорема Ли ничего не дает, поскольку функция F не является первым интегралом векторного поля симметрий u.

Чтобы лучше разобраться с этим кругом вопросов, рассмотрим самый «далекий» от вакономной модели случай, когда

$$b_3 = 0, \quad I_{12} = I_{13} = 0, \quad \text{а} \quad I_{23} \neq 0.$$

Условие реализуемости сервосвязи второго рода здесь выполнено, поскольку

$$\Delta = -I_{11} I_{23} b_2 \neq 0.$$

В этом случае уравнения (5.2)–(5.3) принимают следующий вид:

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_3^2, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 x_3, \quad \dot{x}_3 = -\beta x_1 x_2 + \alpha x_1 x_3. \tag{5.5}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{I_{23}}, \quad \beta = \frac{1}{I_{11}} > 0.$$

Изучим вопрос о наличии гладкого (класса C^∞) первого интеграла уравнений (5.5), функционально независимого от интеграла F. Этому интегралу мы можем сопоставить его ряд Маклорена. Ясно, что каждая однородная форма этого разложения также будет первым интегралом. Таким образом, наша задача сводится к изучению условий существования однородных полиномиальных первых интегралов. Воспользуемся асимптотическим методом Ковалевской–Ляпунова, развитым Йошидой (см. [19, 20]).

Согласно этому методу, сначала надо найти ненулевые решения следующей нелинейной алгебраической системы:

$$-\alpha c_3^2 = -c_1, \quad \beta c_1 c_3 = -c_2, \quad -\beta c_1 c_2 + \alpha c_1 c_3 = -c_3.$$

Она легко решается:

$$c_1 = \alpha c^2, \quad c_2 = -\alpha\beta c^3, \quad c_3 = c,$$

где комплексный параметр c удовлетворяет биквадратному уравнению

$$\alpha^2\beta^2 c^4 + \alpha^2 c^2 + 1 = 0. \tag{5.6}$$

Далее вычисляется матрица Якоби

$$\left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|$$

в точках

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = c_3 \tag{5.7}$$

и ищутся ее собственные значения. Характеристический многочлен этой матрицы равен

$$\lambda^3 - \lambda^2\alpha^2 c^2 + \lambda(2\alpha^2 c^2 + 3\alpha^2\beta^2 c^4) - 2\alpha^2\beta^2 c^4 = 0.$$

С учетом соотношения (5.6) нетрудно найти его корни:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \alpha^2 c^2 + 1.$$

В теории Ковалевской обычно используют другой спектральный параметр $\rho = \lambda + 1$. Так как $(c_1, c_2, c_3) \neq 0$, то значение $\rho_1 = -1$ всегда присутствует в спектре [20]. Значение $\rho_2 = \lambda_2 + 1 = 2$ есть степень квадратичного интеграла F, поскольку $dF \neq 0$ в точках (5.7). Согласно Йошиде [19],

$$\rho_3 = \lambda_3 + 1$$

равно степени дополнительного полиномиального интеграла H (если, конечно, он существует).

Дальнейший анализ зависит от дискриминанта уравнения (5.6). Если $\alpha^2 < 4\beta^2$, то c^2 будет комплексным числом и в этом случае никаких новых полиномиальных интегралов нет (поскольку ρ_3 вообще не будет целым числом). Если же $\alpha^2 \geqslant 4\beta^2$, то c^2 вещественно и отрицательно. Следовательно,

$$\rho_3 = 2 + \alpha^2 c^2 < 2,$$

и поэтому могут существовать только линейные интегралы. Однако легко убедиться в том, что таких интегралов нет.

Подытожим проведенный анализ. Справедлива

Теорема 5. *Дифференциальные уравнения* (5.5) *не допускают дополнительного первого интеграла в виде однородного полинома, для которого точка* (5.7) *не является критической.*

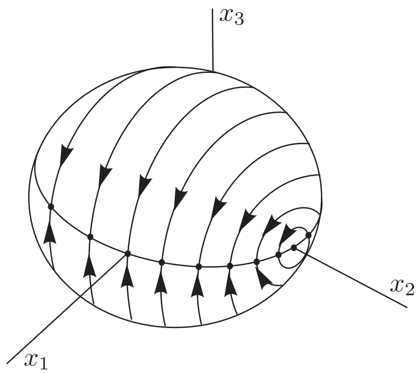

Рис. 3

Устремим теперь момент инерции I_{11} к бесконечности. В «нефизическом» пределе $\beta = 0$, и уравнения (5.5) допускают линейный интеграл $H = x_2$. Это вполне согласуется с методом Ковалевской, поскольку в этом случае $\rho_3 = \lambda_3 + 1 = 1$, так как $\lambda_3 = \alpha^2 c^2 + 1 = 0$ согласно (5.6). Фазовый портрет системы (5.5) при $\beta = 0$ на сфере $F = \mathrm{const} > 0$ изображен на рисунке 3. Это частный вариант фазового портрета из рисунка 2. Хотя система (5.5) допускает два независимых первых интеграла, ее нельзя отнести к «консервативным» системам, поскольку все ее решения двоякоасимптотические.

Теорему 5 можно усилить.

Теорема 6. *Дифференциальные уравнения* (5.5) *не допускают даже непрерывных первых интегралов, ограничения которых на сферу* $\{F(x) = c^2 > 0\}$ *будут локально непостоянными функциями.*

Действительно, на каждой такой сфере система имеет по две пары антиподальных положений равновесия:

$$x_1 = \pm c (c > 0), \quad x_2 = x_3 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = \pm c, \quad x_1 = x_3 = 0. \tag{5.8}$$

Напомним, что в вакономной модели волчка мы имеем три пары антиподальных равновесий.

Легко сосчитать собственные значения оператора линеаризации динамической системы на сфере в точках равновесий (5.8). Первые два состояния равновесия оказываются узлами; знак «+» отвечает устойчивому (неустойчивому) узлу, если $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$). Каждое из равновесий второй пары (5.8) будет вырожденным (одно из собственных значений равно нулю).

По известной теореме Ляпунова, каждое из равновесий первой пары (5.8) будет асимптотически устойчивым или асимптотически неустойчивым: все решения из малой окрестности такого равновесия неограниченно приближаются к этому равновесию при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ соответственно. Поскольку первый интеграл постоянен на каждой фазовой траектории и по предположению является непрерывной функцией, то его значения во всех точках окрестности положения равновесия совпадают со значением в самом равновесии. Но тогда интеграл не будет локально непостоянной функцией. Полученное противоречие доказывает теорему.

Используя первое уравнение системы (5.5), можно показать, что почти все решения динамической системы на сфере будут двоякоасимптотическими к первой паре антиподальных равновесий (5.8). Это замечание дает ключ к построению ее фазового портрета. Он изображен на рисунке 4 для значений $\alpha = \beta = 1$.

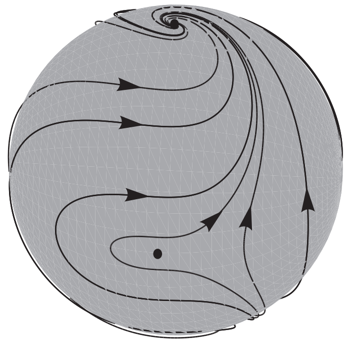

Рис. 4

6. Инвариантные многообразия

Как описать собственно движение управляемой системы (то есть найти координаты $x_1, \ldots, x_n$ как функции времени)? Для этого надо учесть кинематические соотношения. Наиболее эффективный путь связан с использованием имеющихся симметрий.

Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — независимые правоинвариантные векторные поля на n-мерной группе Ли G. Как известно, фазовый поток каждого правоинвариантного поля состоит из левых сдвигов на группе G. По предположению, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum I_{ij} \omega_i \omega_j$$

и функция $N = \sum b_i \omega_i$ левоинварианты. Следовательно (как указано во введении), уравнения движения системы с сервосвязью второго рода допускают n нётеровых интегралов (1.5)

$$(I\omega + \lambda b, w_j) = c_j \quad (= \mathrm{const}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{6.1}$$

К этим соотношениям следует добавить уравнение левоинвариантной связи

$$(a, \omega) = 0. \tag{6.2}$$

При фиксированных значениях $c = (c_1, \ldots, c_n)$ из алгебраической системы (6.1)–(6.2) можно найти квазискорости $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и множитель Лагранжа λ как однозначные функции на группе G — конфигурационном пространстве рассматриваемой механической системы. Чтобы это показать, положим (как в § 2)

$$\widehat{m} = I\omega + \lambda b. \tag{6.3}$$

С учетом уравнения связи (6.2) множитель λ находится как линейная функция от $\widehat{m} = (\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_n)$. Тогда обобщенные нётеровы интегралы (6.1) принимают вид

$$(\widehat{m}, w_j) = c_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{6.4}$$

Скобка (,) обозначает значение ковектора $\widehat{m}$ на векторе w (и наоборот, в силу известной двойственности).

Так как векторы $w_1(x), \ldots, w_n(x)$ линейно независимы в каждой точке x группы Ли G, то из системы n уравнений (6.4) обобщенные импульсы $\widehat{m}_1, \ldots, \widehat{m}_n$ можно однозначно выразить через компоненты правоинвариантных векторных полей. Согласно (6.3), квазискорости $\omega_1, \ldots, \omega_n$ будут однозначными функциями на группе G.

Если $v_1, \ldots, v_n$ — исходные левоинвариантные векторные поля на группе G, то скорость системы $\dot{x}$ (касательный вектор к G в точке x) можно разложить по этим векторам как по базису:

$$\dot{x} = \sum \omega_k v_k(x). \tag{6.5}$$

Коэффициенты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — это как раз квазискорости, фигурирующие в уравнениях Эйлера–Пуанкаре (см. [12]). Соотношения (6.5) — это кинематические уравнения. Если $G = SO(3)$ и если в качестве обобщенных координат на этой группе выбрать углы Эйлера θ, φ, ψ, то (6.5) будут известными кинематическими уравнениями Эйлера.

Итак, согласно (6.5), при фиксированных значениях обобщенных нётеровых интегралов $c_1, \ldots, c_n$ мы имеем динамическую систему на группе G:

$$\dot{x} = v_c(x). \tag{6.6}$$

Уравнения (6.1)–(6.2) определяют n-мерные инвариантные многообразия нашей системы, которые однозначно проектируются на группу Ли G (конфигурационное многообразие). Ограничение полной системы движения с сервосвязью второго рода на эти инвариантные многообразия порождает динамические системы, которые при проектировании на группу G задаются дифференциальными уравнениями (6.6). Таким образом, изучение движения системы с левоинвариантной кинетической энергией и левоинвариантной сервосвязью второго рода на n-мерной группе Ли сводится к решению системы n дифференциальных уравнений первого порядка на этой группе.

Применительно к системам Эйлера–Пуанкаре без связей эта конструкция систематически изложена в [12]. По своим свойствам поток системы (6.6) схож с течениями многомерной идеальной жидкости. Установлено, что при фиксированных значениях c фазовый поток системы (6.6) сохраняет правоинвариантную меру на G. В частности, если группа G унимодулярна ($\sum c_{ik}^k = 0$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$), то поток системы (6.6) сохраняет меру Хаара на G.

Покажем, как эта общая схема выглядит в случае, когда группа G совпадает с группой $SO(3)$. Другими словами, рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки с левоинвариантной связью второго рода. Уравнения (2.4) на алгебре $so(3)$ принимают вид уравнений (3.1):

$$(I\omega + \lambda b)^{\cdot} + \omega \times (I\omega + \lambda b) = 0, \quad (a, \omega) = 0. \tag{6.7}$$

Ориентацию вращающегося твердого тела можно задавать разными способами (ортогональные матрицы, кватернионы, углы Эйлера...). Пусть α, β, γ — ортонормированный репер в неподвижном пространстве. Мы будем рассматривать эти векторы как векторы в подвижном пространстве, связанном с твердым телом. Тогда они уже не будут постоянными: их эволюция со временем описывается известными уравнениями Пуассона

$$\dot{\alpha} + \omega \times \alpha = 0, \quad \dot{\beta} + \omega \times \beta = 0, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0. \tag{6.8}$$

Эти уравнения вместе с динамическими уравнениями (6.7) образуют полную систему уравнений движения. Они допускают обобщенные нётеровы интегралы

$$(I\omega + \lambda b, \alpha) = c_1, \quad (I\omega + \lambda b, \beta) = c_2, \quad (I\omega + \lambda b) = c_3, \tag{6.9}$$

выражающие свойство неизменности вектора суммарного кинетического момента $I\omega + \lambda b$ в неподвижном пространстве.

Из (6.9) вытекает, что

$$I\omega + \lambda b = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma.$$

Поскольку в неподвижном пространстве нет выделенных направлений, то без ущерба для общности можно положить

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Тогда

$$I\omega + \lambda b = k\gamma. \tag{6.10}$$

Множитель λ можно найти из уравнения связи $(a, \omega) = 0$:

$$\lambda = k\frac{(a, I^{-1}\gamma)}{(a, I^{-1}b)}. \tag{6.11}$$

Такой прием уже применялся нами в § 2. Знаменатель в (6.11) отличен от нуля в силу условия реализуемости сервосвязи.

Векторное равенство (6.10) с учетом формулы (6.11) задает трехмерное стационарное инвариантное многообразие, однозначно проектирующееся на группу $SO(3)$. Оно позволяет представить скорость вращения волчка как однозначную функцию на конфигурационном пространстве:

$$\omega = kI^{-1}\left(\gamma - \frac{(a, I^{-1}\gamma)}{(a, I^{-1}b)}\, b\right). \tag{6.12}$$

Уравнения (6.6) на группе $SO(3)$ получаются из уравнений Пуассона (6.8) после замены угловой скорости ω выражением (6.12). Следует иметь в виду шесть независимых условий ортогональности

$$(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = (\gamma, \gamma) = 1, \quad (\alpha, \beta) = (\beta, \gamma) = (\gamma, \alpha) = 0,$$

которые высекают в девятимерном фазовом пространстве уравнений (6.8) гладкую регулярную трехмерную поверхность — многообразие $SO(3)$.

Наибольший интерес представляет последнее уравнение (6.8):

$$\dot{\gamma} + k\left[I^{-1}\left(\gamma - \frac{(a, I^{-1}\gamma)}{(a, I^{-1}b)}b\right)\right] \times \gamma = 0. \tag{6.13}$$

Если мы сможем решить это уравнение, то решения остальных двух уравнений (6.8) находятся с помощью квадратур. Это — простое следствие общих результатов об интегрируемости неавтономных систем дифференциальных уравнений, восходящих к Дарбу [21, 22].

Однако уравнение (6.13), как и система (6.7), в общем случае, по-видимому, неинтегрируемы в квадратурах. Более того, эти системы дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве связаны друг с другом самым тесным образом.

Теорема 7. *При* $k \neq 0$ *системы* (6.7) *и* (6.13) *изоморфны: они переходят друг в друга линейной заменой переменных.*

Для доказательства этого несколько удивительного свойства выполним линейную замену переменных

$$p = I\omega + \lambda b,$$

которую мы уже использовали в § 2 при обсуждении редукции уравнений Эйлера – Пуанкаре со связями. Тогда

$$\omega = I^{-1}(p - \lambda b).$$

Множитель Лагранжа находится из уравнения связи:

$$\lambda = \frac{(a, I^{-1}p)}{(a, I^{-1}b)}.$$

После этого первое уравнение системы (6.7) принимает вид

$$\dot{p} + \left[I^{-1}\left(p - \frac{(a, I^{-1}p)}{(a, I^{-1}b)}b\right)\right] \times p = 0.$$

Наконец, подстановка $p \mapsto kp$ приводит это уравнение к уравнению (6.13). Что и требовалось.

Замечание. Теорема 7 справедлива и для обычного волчка Эйлера. Это обстоятельство проясняет классический результат Якоби о представлении направляющих косинусов в задаче Эйлера через эллиптические функции времени (см. [23, 24]).

Из теоремы 7 и следствия из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Если векторы a и b коллинеарны (вакономная модель), то фазовый поток системы* (6.13) *сохраняет стандартную меру в* $\mathbb{R}^3 = \{\gamma\}$.

Поскольку система (6.13) допускает первый интеграл $F = (\gamma, \gamma)$, то в случае вакономной модели векторное уравнение (6.13) интегрируется в квадратурах по теореме Эйлера – Якоби о последнем множителе. На самом деле мы имеем здесь суперинтегрируемость, поскольку имеется еще один интеграл «энергии»

$$H = \frac{1}{2}(I\omega, \omega) = \frac{k^2}{2}\left[(\gamma, I^{-1}\gamma)^2 - \frac{(a, I^{-1}\gamma)^2}{(a, I^{-1}a)}\right].$$

По неравенству Коши – Буняковского, $H \geqslant 0$. Однако эта квадратичная форма не положительно определена, поскольку $H = 0$ для всех векторов γ, которые коллинеарны вектору a.

Из теорем 2 и 7 вытекает, что решения уравнения (6.13) суть эллиптические функции времени, если, конечно, векторы a и b параллельны.

Уравнения (6.6) на группе $SO(3)$ можно представить также с помощью углов Эйлера θ, φ, ψ. Для этого воспользуемся обозначениями § 3; в частности, уравнение связи имеет вид $\omega_3 = 0$. Полагаем

$$\begin{aligned}
&I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 = k\gamma_1 = k\sin\theta\sin\varphi,\\
&I_{12}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + b_2\lambda = k\gamma_2 = k\sin\theta\cos\varphi,\\
&I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 + b_3\lambda = k\gamma_3 = k\cos\theta.
\end{aligned}$$

Исключая множитель λ, получим ω_1 и ω_2 как функции от углов θ и φ:

$$\begin{aligned}\omega_1\Delta &= k\{(b_3I_{22} - b_2I_{23})\sin\theta\sin\varphi - I_{12}(b_3\sin\theta\cos\varphi - b_2\cos\theta)\},\\ \omega_2\Delta &= k\{-(b_3I_{13} - b_2I_{13})\sin\theta\sin\varphi + I_{11}(b_3\sin\theta\cos\varphi - b_2\cos\theta)\},\end{aligned} \tag{6.14}$$

где

$$\Delta = I_{11}(b_3I_{22} - b_2I_{23}) - I_{12}(b_3I_{12} - b_2I_{13}) \neq 0.$$

Теперь воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера (с учетом связи $\omega_3 = 0$):

$$\begin{aligned}\dot\theta &= \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi,\\ \dot\varphi &= -\frac{\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi}{\sin\theta}\cos\theta,\\ \dot\psi &= \frac{\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi}{\sin\theta}.\end{aligned} \tag{6.15}$$

Подставляя сюда формулы (6.14), получим искомую динамическую систему на группе $SO(3)$ в углах Эйлера. Правые части (6.15), очевидно, не содержат угла прецессии ψ. Поэтому первые два уравнения (6.15) образуют замкнутую систему, которая на самом деле совпадает с уравнениями (6.13), представленными в сферических координатах θ, φ.

Если известны решения первых двух уравнений системы (6.15), то из последнего уравнения угол прецессии находится простой квадратурой.

В общем случае уравнения (6.15) выглядят весьма громоздкими. Однако можно проверить, что если $b_2 = 0$ (вакономная модель), то система (6.15) допускает интегральный инвариант

$$\iiint \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi.$$

Как хорошо известно, это мера Хаара на группе $SO(3)$, инвариантная относительно всех левых и правых сдвигов на группе (см., например, [25]).

7. Инвариантные меры вакономных уравнений

Утверждения об инвариантных мерах вакономного волчка можно перенести на общий случай унимодулярных групп Ли. Они выделяются следующим соотношением на структурные постоянные:

$$\sum c_{ik}^k = 0 \tag{7.1}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$ ($n = \dim G$). В частности, компактные группы Ли унимодулярны.

Теорема 8. *Если группа G унимодулярна и векторы a и b коллинеарны, то фазовый поток приведенной системы* (2.4) *сохраняет стандартную меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.*

Это утверждение не зависит от способа приведения дифференциально-алгебраической системы (2.4) к системе с квадратичными правыми частями в $\mathbb{R}^n$, поскольку все приведенные системы получаются друг из друга посредством невырожденного линейного преобразования. Для уравнений Эйлера – Пуанкаре на унимодулярных алгебрах Ли теорема 8 установлена ранее в [26].

Для доказательства теоремы 8 воспользуемся вторым способом приведения системы (2.4), указанным в § 2. В обозначениях § 2 приведенная система имеет следующий вид:

$$(\widehat{m}_k)^{\cdot} = \sum c_{jk}^{i} J_{js} \widehat{m}_i (\widehat{m}_s - \lambda b_s), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{7.2}$$

где

$$\lambda = \Big(\sum a_i J_{is} \widehat{m}_s\Big) \Big/ \Big(\sum a_i J_{is} b_s\Big). \tag{7.3}$$

Здесь всюду по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до n.

Вычислим дивергенцию правой части системы (7.2). Дивергенция векторного поля с компонентами

$$\sum c_{jk}^{i} J_{js} \widehat{m}_i \widehat{m}_s, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

равна нулю, так как это поле определяется обычными уравнениями Эйлера – Пуанкаре на унимодулярной алгебре Ли (см. [26]).

Дивергенция «остатка»

$$\lambda \sum c_{jk}^{i} J_{js} \widehat{m}_i b_s, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

с учетом формулы (7.3) равна сумме двух слагаемых

$$\sum_i \widehat{m}_i \Big(\sum J_{pk} a_p c_{jk}^{i} J_{js} b_s\Big) \tag{7.4}$$

и

$$\sum a_p J_{pq} \widehat{m}_q \sum c_{jk}^{k} J_{js} b_s. \tag{7.5}$$

В формулах (7.4) и (7.5) мы опустили ненулевой знаменатель

$$\sum a_j J_{js} b_s.$$

Каждое из слагаемых (7.4) и (7.5) равно нулю. Действительно, выражения в круглых скобках из (7.4) (зависящие от индекса i) — это значения билинейной кососимметрической формы на двух векторах

$$\sum_p J_{kp} a_p \quad \text{и} \quad \sum_s J_{js} b_s. \tag{7.6}$$

Кососимметричность этой 2-формы вытекает из кососимметричности структурных постоянных алгебры Ли по нижним индексам. Поскольку векторы с компонентами (7.6) коллинеарны (ввиду предположения о коллинеарности векторов a и b), то все круглые скобки в (7.4) равны нулю.

Вторую сумму в (7.5) можно представить в виде

$$\sum_{j,s} \left(\sum_k c_{jk}^{k}\right) J_{js} b_s.$$

Но эта сумма также равна нулю ввиду предположения (7.1). Что и требовалось.

Теперь мы рассматриваем произвольные конечномерные группы Ли G.

Теорема 9. *Фазовый поток вакономной динамической системы* (6.6) *на группе* G *сохраняет правостороннюю меру группы* G.

Следствие. *Если группа Ли* G *унимодулярна, то поток системы* (6.6) *сохраняет меру Хаара на* G.

Напомним, что мера Хаара на унимодулярной группе Ли инвариантна относительно всех левых и правых сдвигов группы. Эта мера единственна с точностью до постоянного положительного множителя. Для систем без связей теорема 9 установлена в [27].

Теорема 9 доказывается методом работы [27]. Дело в том, что движение вакономной системы по инерции описывается некоторой гамильтоновой системой с n степенями свободы (в нашем случае $n = \dim G$) [3]. Все $2n$-мерное фазовое пространство расслаивается на n-параметрическое семейство n-мерных инвариантных многообразий (задаваемых уравнениями (6.4)). По теореме Лиувилля, фазовый поток системы во всем $2n$-мерном фазовом пространстве сохраняет стандартную форму объема. Нетрудно показать, что ограничение динамической системы на каждое инвариантное n-мерное многообразие допускает инвариантную меру (которая строится по теореме Лиувилля). Если эту меру «опустить» с помощью естественной проекции на группу Ли, то она оказывается инвариантной относительно всех правых сдвигов на группе. В этом состоит содержательная часть теоремы 9. Детали доказательства следуют рассуждениям работы [27] (см. также [12]).

8. Некоторые задачи

В качестве заключения перечислим ряд задач, возникающих в связи с анализом динамики управляемых систем.

1°. Представляет интерес изучение динамики управляемых систем со связями *смешанного* рода на группах Ли. При этом кинетическую энергию и сами сервосвязи следует считать левоинвариантными. Здесь сервосвязь реализуется одновременно с помощью согласованного управления внешними силами и инерционными свойствами системы (как это делалось в работе [1]). Во всяком случае изучение вращения волчка с сервосвязью смешанного рода представляется вполне обозримой задачей.

2°. Отдельный класс составляют системы на группах Ли с левоинвариантной кинетической энергией и правоинвариантными сервосвязями. Вот простейший пример правоинвариантной связи из динамики твердого тела: проекция угловой скорости на некоторое неподвижное (в пространстве) направление равна нулю. С точки зрения неголономной механики эта задача исследована в [28].

3°. Полезно продвинуться в решении задачи классификации и исследования устойчивости равновесных состояний в системах с сервосвязями второго рода. Сколько известно автору, этот круг вопросов недостаточно изучен даже для уравнений Эйлера–Пуанкаре без связей. Исключением является классическая работа Ляпунова по винтовым движениям твердого тела в жидкости, описываемых уравнениями Кирхгофа (это уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре $e(3)$) [29].

4°. Можно ли распространить результаты § 4 об изоморфизме динамических уравнений Эйлера и приведенных уравнений вакономного волчка на случай многомерных алгебр Ли?

5°. Следовало бы построить фазовые портреты динамических уравнений волчка с сервосвязями второго рода и исследовать их бифуркации. С учетом установленного в § 6 изоморфизма с векторным уравнением (6.13), решение этой задачи прояснило бы особенности вращения такого волчка в неподвижном пространстве. Было бы полезным также провести более детальное исследование системы (6.14)–(6.15). По-видимому, в общем случае эта система на группе $SO(3)$ демонстрирует неинтегрируемое поведение.

6°. Было бы полезным получить аналоги классических формул Якоби, выражающих направляющие косинусы подвижных осей вакономного волчка через эллиптические функции времени.

7°. Поскольку динамика вакономных систем в потенциальном силовом поле (в частности, при движении по инерции) описывается дифференциальными уравнениями Гамильтона [3, II], то это дает возможность изучать инвариантные многообразия таких систем с помощью общей теории вихрей, развитой в [12]. Здесь существенную роль играют не только инвариантные формы объема, но и линейные интегральные инварианты (типа Пуанкаре – Картана). Модельная задача — вихревая теория вакономного волчка.

8°. Исследование динамики сервосаней со связями второго рода также сводится к уравнениям вида (2.4) на алгебре $e(2)$ (алгебра группы движений евклидовой плоскости). Эта задача получается из задачи о волчке некоторым предельным переходом (с использованием известной ретракции группы $SO(3)$ к группе $E(2)$). Задача о сервосанях выглядит проще, и поэтому можно ожидать большего продвижения.

9°. Задача о сервосанях со связями второго рода на наклонной плоскости существенно сложнее соответствующей задачи со связями первого рода, рассмотренной в [2]. Достаточно упомянуть задачу о вакономном коньке на наклонной плоскости [3, III], которая тесно связана с изучением падения пластинки в бесконечном объеме идеальной жидкости (см., например, [30]).

10°. Как показано в [8], для вакономного волчка справедливо представление Пуансо: эллипсоид инерции $\{\omega\colon (I\omega, \omega) = 1\}$ пересекается плоскостью связи $(a, \omega) = 0$ по эллипсу, который катится без проскальзывания по неподвижной плоскости, ортогональной вектору суммарного кинетического момента $I\omega + \lambda a$. Было бы полезным дать картину Пуансо для вращения многомерного твердого тела в вакономной модели. Для свободного вращения первые результаты в этом направлении получены в [31], а полное представление Пуансо указано в работе [32].

Автор дружески благодарит А. В. Борисова за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Козлов В. В. Принципы динамики и сервосвязи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1989, № 5, с. 59–66.

[2] Kozlov V. V. The dynamics of systems with servoconstaints: I // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 205–224. *См. также:* Козлов В. В. Динамика систем с сервосвязями: I // Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 2, с. 353–376.

[3] Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями: I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1982, № 3, с. 92–100;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1982, № 4, с. 70–76;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: III // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1983, № 3, с. 102–111;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: IV. Интегральные принципы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1987, № 5, с. 76–83;
Динамика систем с неинтегрируемыми связями: V. Принцип освобождаемости и условие идеальности связей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1988, № 6, с. 51–54.

[4] Li Sh.-M., Berakdar J. On the validity of the vakonomic model and the Chetaev model for constraint dynamical systems // Rep. Math. Phys., 2007, vol. 60, no. 1, pp. 107–116.

[5] Béghin M. H. Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry. Paris: Impr. nationale, 1921. 132 pp.

[6] Appel P. Traité de Mécanique rationnelle: Vol. 2. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. 6th ed. Paris: Gauthier-Villars, 1953. 584 pp.

[7] Arnol'd V. I., Kozlov V. V., Neĭshtadt A. I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. 3rd ed. (Encyclopaedia Math. Sci., vol. 3.) Berlin: Springer, 2006. 518 pp.

[8] Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 550–554.

[9] Козлов В. В. К вопросу о реализации связей в динамике // ПММ, 1992, т. 56, № 4, с. 692–698.

[10] Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche // Atti della R. Accad. Sci. di Torino, 1898, vol. 33, pp. 471–475.

[11] Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique // C. R. Acad. Sci., 1901, vol. 132, pp. 369–371.

[12] Козлов В. В. Общая теория вихрей. 2-е изд., испр. и дополн. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 324 с.

[13] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.

[14] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ, 1987, т. 51, № 4, с. 538–545.

[15] Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta Math., 1899, vol. 22, pp. 201–357.

[16] Валле-Пуссен Ш.-Ж. Курс анализа бесконечно малых: В 2-х тт.: Т. 2. Москва: Гостехиздат, 1933. 469 с.

[17] Nambu Y. Generalized Hamiltonian dynamics // Phys. Rev. D, 1973, vol. 7, no. 8, pp. 2405–2412.

[18] Козлов В. В. Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Динамические системы и оптимизация: Сб. ст.: К 70-летию со дня рождения акад. Д. В. Аносова / Е. Ф. Мищенко (гл. ред.) и др. (Тр. МИАН, т. 256.) Москва: Наука, 2007. С. 201–218.

[19] Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals: 1. Kowalevski's exponents // Celestial Mech., 1983, vol. 31, no. 4, pp. 363–379;
Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals: 2. Condition for algebraic integrability // Celestial Mech., 1983, vol. 31, no. 4, pp. 381–399.

[20] Козлов В. В. Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской – Ляпунова // Матем. заметки, 1992, т. 51, № 2, с. 46–52.

[21] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal: T. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1914. 618 pp.

[22] Kozlov V. V. Remarks on integrable systems // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 2, pp. 145–161.

[23] Jacobi C. G. J. Sur la rotation d'un corps // Gesammelte Werke: Vol. 2. Berlin: Raimer, 1882. P. 289–352.

[24] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. 2-е изд. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 248 с.

[25] Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. Москва: Наука, 1958. 376 с.

[26] Козлов В. В. Об инвариантных мерах уравнений Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли // Функц. анализ и его прил., 1988, т. 22, № 1, с. 69–70.

[27] Козлов В. В., Ярощук В. А. Об инвариантных мерах уравнений Эйлера – Пуанкаре на унимодулярных группах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 1993, № 2, с. 91–95.

[28] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Потоки на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые гамильтоновы системы // Функц. анализ и его прил., 1986, т. 20, № 4, с. 65–66.

[29] Ляпунов А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Сообщения Харьковского матем. об-ва. Сер. 2, 1888, т. 1, № 1–2, с. 7–60.

[30] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[31] Зенков Д. В., Козлов В. В. Геометрическое представление Пуансо в динамике многомерного твердого тела // Тр. сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1988, т. 23, с. 202–204.

[32] Fedorov Yu. N., Kozlov V. V. Various aspects of n-dimensional rigid body dynamics // Dynamical systems in classical mechanics / V. V. Kozlov (Ed.). (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 168.) Providence, R.I.: AMS, 1995, pp. 141–171.

[33] Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динамические системы 7 / В. И. Арнольд, С. П. Новиков (ред.). (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 16.) Москва: ВИНИТИ, 1987. С. 5–85.

[34] Montgomery R. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. (Math. Surveys Monogr., vol. 91.) Providence, R.I.: AMS, 2002. 259 pp.

[35] Lewis A. D., Murray R. M. Variational principles for constrained systems: Theory and experiment // Internat. J. Non-Linear Mech., 1995, vol. 30, no. 6, pp. 793–815.

[36] Favretti M. Equivalence of dynamics for nonholonomic systems with transverse constraints // J. Dynam. Differential Equations, 1998, vol. 10, no. 4, pp. 511–536.

[37] Cardin F., Favretti M. On nonholonomic and vakonomic dynamics of mechanical systems with nonintegrable constraints // J. Geom. Phys., 1996, vol. 18, no. 4, pp. 295–325.

[38] de León, M., Marrero, J. C., and Martin de Diego, D., Vakonomic mechanics versus non-holonomic mechanics: A unified geometrical approach // J. Geom. Phys., 2000, vol. 35, nos. 2–3, pp. 126–144.

[39] Zampieri G. Nonholonomic versus vakonomic dynamics // J. Differential Equations, 2000, vol. 163, no. 2, pp. 335–347.

[40] Fernandez O. E., Bloch A. M. Equivalence of the dynamics of nonholonomic and variational nonholonomic systems for certain initial data // J. Phys. A, 2008, vol. 41, no. 34, 344005, 20 pp.

[41] Дерябин М. В., Козлов В. В. Об эффекте «выныривания» тяжелого твердого тела в жидкости // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2002, № 1, с. 68–74.

[42] Antunes A. C. B., Sigaud C., de Moraes P. C. G. Controlling nonholonomic Chaplygin systems // Braz. J. Phys., 2010, vol. 40, no. 2, pp. 131–140.

[43] Bolotin S. V. The problem of optimal control of a Chaplygin ball by internal rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 559–570.

[44] Llibre J., Ramírez R., Sadovskaia N. A new approach to the vakonomic mechanics // Nonlinear Dynam., 2014, vol. 78, no. 3, pp. 2219–2247.

[45] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. Москва: Наука, 1981. 368 с.

[46] Борисов А. В., Мамаев И. С., Цыганов А. В. Неголономная динамика и пуассонова геометрия // УМН, 2014, т. 69, № 3, с. 87–144.

[47] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Dynamics and control of an omniwheel vehicle // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 2, pp. 153–172.

[48] Patera J., Sharp R. T., Winternitz P. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys., 1976, vol. 17, no. 6, pp. 986–994.

[49] Cariñena J. F., Ibort A., Marmo G., Perelomov A. On the geometry of Lie algebras and Poisson tensors // J. Phys. A, 1994, vol. 27, no. 22, pp. 7425–7449.

[50] Hamel G. Das Hamiltonsche Prinzip bei nichtholonomen Systemen // Math. Ann., 1935, vol. 111, no. 1, pp. 94–97.

[51] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307.

[52] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76.

[53] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a spherical rolling robot actuated by orthogonal internal rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 126–143.

[54] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Geometrisation of Chaplygin's reducing multiplier theorem // Nonlinearity, 2015, vol. 28, no. 7, pp. 2307–2318.

[55] Borisov A. V., Mamaev I. S. Topological analysis of an integrable system related to the rolling of a ball on a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, № 4, pp. 356–371.

[56] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, № 6, pp. 832–859.

[57] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, № 2, pp. 198–213.

[58] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, № 3, pp. 277–328.

[59] Marle C. M. Kinematic and geometric constraints, servomechanisms and control of mechanical systems // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 1996, vol. 54, no. 4, pp. 353–364.

The dynamics of systems with servoconstraints. II

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

This paper addresses the dynamics of systems with servoconstraints where the constraints are realized by controlling the inertial properties of the system. Vakonomic systems are a particular case. Special attention is given to the motion on Lie groups with left-invariant kinetic energy and a left-invariant constraint. The presence of symmetries allows the dynamical equations to be reduced to a closed system of differential equations with quadratic right-hand sides. As the main example, we consider the rotation of a rigid body with a left-invariant servo-constraint, which implies that the projection of the body's angular velocity on some body-fixed direction is zero.

MSC 2010: 70E18, 34C40
Keywords: servoconstraints, symmetries, Lie groups, left-invariant constraints, systems with quadratic right-hand sides, vakonomic systems

Received May 14, 2015, accepted July 01, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 579–611 (Russian)