Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 503–545.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

Об устойчивости неподвижных точек отображений, сохраняющих площадь

А. П. Маркеев

Изучаются отображения, сохраняющие площадь. Предполагается, что отображение имеет неподвижную точку и аналитично в малой ее окрестности. Основной результат состоит в разработке конструктивного алгоритма исследования устойчивости неподвижной точки в критических случаях, когда члены первых степеней (до третьей включительно) рядов, задающих отображение, не решают вопроса об устойчивости.

В качестве приложения решена задача об устойчивости вертикального периодического движения шара при наличии его соударений с эллипсоидальной абсолютно гладкой цилиндрической поверхностью с горизонтальной образующей.

Задача об исследовании сохраняющих площадь отображений берет свое начало в методе поверхностей сечения Пуанкаре [1]. Фундаментальным аспектам этой задачи посвящены классические труды Биркгофа [2–4], Леви-Чивиты [5], Зигеля [6, 7], Мозера [7–9]. Дальнейшее рассмотрение задачи содержится в работах Рюссмана [10], Стернберга [11], Брюно [12, 13], Белицкого [14] и других авторов.

Ключевые слова: отображение, канонические преобразования, система Гамильтона, устойчивость

Получено 25 августа 2015 года
После доработки 15 сентября 2015 года

Работа выполнена в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14.01.00380) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2363.2014.1).

Маркеев Анатолий Павлович
markeev@ipmnet.ru
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1

1. Введение

Рассмотрим сохраняющее площадь отображение T плоскости (u, v) в себя, имеющее начало координат $u = v = 0$ своей неподвижной точкой. Будем считать, что в окрестности этой точки отображение является аналитическим и задается равенствами

$$u_1 = au + bv + U, \qquad v_1 = cu + dv + V. \tag{1.1}$$

Здесь a, b, c, d — постоянные вещественные коэффициенты, а U, V — функции, представимые сходящимися рядами вида

$$U = \sum_{k=2}^{\infty} U_k(u, v), \qquad V = \sum_{k=2}^{\infty} V_k(u, v), \tag{1.2}$$

где U_k, V_k — формы степени k относительно u, v с вещественными коэффициентами.

Условие сохранения площади означает, что выполняется тождество

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u} = 1. \tag{1.3}$$

Рассмотрим линеаризованное отображение (1.1):

$$u_1 = au + bv, \qquad v_1 = cu + dv. \tag{1.4}$$

Из тождества (1.3) следует, что $ad - bc = 1$. Характеристическое уравнение матрицы отображения (1.4) является возвратным и имеет вид

$$\varrho^2 - 2A\varrho + 1 = 0 \qquad (2A = a + d). \tag{1.5}$$

Если $|A| > 1$, $|A| = 1$ или $|A| < 1$, то говорят [15], что имеет место, соответственно, гиперболический, параболический или эллиптический случаи. В гиперболическом случае корни ϱ_1, ϱ_2 уравнения (1.5) действительны и различны, причем модуль одного из корней больше единицы,

$$\varrho_1 = A + \sqrt{A^2 - 1}, \quad \varrho_2 = A - \sqrt{A^2 - 1} \quad (\varrho_2 = \varrho_1^{-1}). \tag{1.6}$$

В параболическом случае корни уравнения (1.5) вещественны и равны: $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ или $\varrho_1 = \varrho_2 = -1$. В эллиптическом случае корни уравнения (1.5) комплексно-сопряженные с модулями, равными единице:

$$\varrho_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \varrho_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha \quad (\cos\alpha = A), \tag{1.7}$$

причем величина α/π отлична от целого числа.

Введем вместо переменных u, v новые переменные x, y, выбрав их так, чтобы матрица линеаризованного отображения (1.4), записанного в новых переменных, имела вещественную нормальную форму. Для этого сделаем в равенствах (1.1) линейную замену переменных

$$u = n_{11}x + n_{12}y, \qquad v = n_{21}x + n_{22}y \tag{1.8}$$

и одновременно

$$u_1 = n_{11}x_1 + n_{12}y_1, \qquad v_1 = n_{21}x_1 + n_{22}y_1. \tag{1.9}$$

Эти замены ищем в классе канонических замен переменных с валентностью μ, то есть требуем [16], чтобы элементы матрицы преобразований (1.8), (1.9) удовлетворяли условию

$$\mu(n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12}) = 1. \tag{1.10}$$

Конструктивная процедура построения преобразований (1.8), (1.9) подробно описана в статье [17]. В зависимости от значений величин a, b, c, d возможны шесть не совпадающих один с другим случаев отображения (1.1). Эти случаи отличаются матрицами $\mathbf{G}$ нормализованной линейной части (1.4) отображения:

$$\begin{gathered}
\text{I)}\ \begin{Vmatrix} \varrho_1 & 0 \\ 0 & \varrho_1^{-1} \end{Vmatrix}, \qquad \text{II)}\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \text{III)}\ \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad \text{IV)}\ \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \\
\text{V)}\ \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \qquad \text{VI)}\ \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.
\end{gathered} \tag{1.11}$$

В переменных x, y, введенных в процессе нормализации линеаризованного отображения (1.4), исходное нелинейное отображение (1.1) можно представить в виде композиции двух отображений, сохраняющих площадь [17]. Одно отображение x_*, $y_* \to x_1$, y_1 задается равенством

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Vmatrix} = \mathbf{G} \begin{Vmatrix} x_* \\ y_* \end{Vmatrix}, \tag{1.12}$$

где матрица $\mathbf{G}$ соответствует одному из случаев (1.11). Второе отображение x, $y \to x_*$, y_* близко к тождественному и задается рядами вида

$$x_* = x + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y), \qquad y_* = y + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y), \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
X_k &= \mu[(cn_{12} + dn_{22})U_k - (an_{12} + bn_{22})V_k]), \\
Y_k &= \mu[-(cn_{11} + dn_{21})U_k + (an_{11} + bn_{21})V_k]).
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь U_k, V_k — формы степени k из разложения (1.2), в которых величины u, v выражены через x, y в соответствии с каноническим преобразованием (1.8), μ — валентность этого преобразования.

Близкое к тождественному отображение (1.13) может быть задано неявно при помощи производящей функции $F(x_*, y)$:

$$x = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad y_* = \frac{\partial F}{\partial x_*}, \tag{1.15}$$

$$F = x_* y + \sum_{m=3}^{\infty} F_m(x_*, y), \tag{1.16}$$

где F_m — форма степени m относительно x_*, y,

$$F_m = \sum_{r+s=m} f_{rs} x_*^r y^s.$$

Конструктивный алгоритм нахождения функции F по отображению (1.13) описан в работе [17].

В статье исследуется задача об устойчивости неподвижной точки отображения (1.1). Важные результаты в исследовании этой задачи получены ранее в работах [5–8, 18, 19]. Найдены, в частности, условия устойчивости и неустойчивости, выраженные через коэффициенты форм первых степеней (до третьей включительно) в представлении отображения (1.1) в виде рядов.

Основной целью данной статьи является разработка конструктивного алгоритма, когда для решения задачи об устойчивости необходимо учитывать формы выше третьей степени в разложениях (1.1). Алгоритм основывается на упрощении (нормализации) отображения при помощи канонических преобразований, второго метода Ляпунова [20] и теоремы Мозера об инвариантных кривых [8]. При этом будет существенно, что для отображения (1.12) (как и для любого аналитического отображения, сохраняющего площадь) существует [4] τ-периодический по t гамильтониан $H(x, y, t)$, непрерывный вместе со всеми своими частными производными любого порядка (если не аналитический) по x, y, t, такой, что преобразование за время τ, задаваемое движениями системы с этим гамильтонианом, совпадает с (1.12). Система с гамильтонианом $H(x, y, t)$ допускает равновесие $x = y = 0$. Задачи об устойчивости этого равновесия и неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (1.1) эквивалентны.

2. Неустойчивость неподвижной точки в гиперболическом случае

Гиперболическому случаю отвечает матрица I из (1.11), в которой ϱ_1 задается первым из равенств (1.6). При решении вопроса об устойчивости величину ϱ_1 можно считать положительной, так как случай $\varrho_1 < 0$, очевидно, сводится к случаю $\varrho_1 > 0$, если вместо отображения T рассмотреть его вторую степень T^2.

Отображение x, $y \to x_1$, y_1 из (1.11), (1.12) записывается в виде

$$x_1 = \varrho_1 x + O_2, \qquad y_1 = \varrho_1^{-1} y + O_2. \tag{2.1}$$

Здесь и далее через O_k ($k = 2, 3, \ldots$) обозначается сходящийся степенной ряд, начинающийся с членов, степень которых не ниже k.

Неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (2.1) неустойчива [5, 6, 15, 19, 21]. Это можно доказать, проведя непосредственный анализ итераций отображения [5, 6, 15] или при помощи теоремы Ляпунова о неустойчивости, распространенной на отображения [19, 21]. Можно также воспользоваться результатами статьи [22], в которой показано, что для отображения (2.1) существует близкая к тождественной каноническая замена переменных x, $y \to \xi$, η, задаваемая сходящимися рядами в окрестности точки $\xi = \eta = 0$, такая, что отображение (2.1) преобразуется в отображение вида

$$\xi_1 = \chi\xi, \qquad \eta_1 = \chi^{-1}\eta, \tag{2.2}$$

где χ — сходящийся степенной ряд относительно произведения $\xi\eta$: $\chi = \varrho_1 + O_2$. В достаточно малой окрестности неподвижной точки кривые $\xi\eta = \mathrm{const}$ инвариантны относительно отображения (2.2). Отсюда сразу следует [15], что неподвижная точка отображения неустойчива.

3. Исследование устойчивости в параболическом случае

Неподвижной точке параболического типа отвечают матрицы II–V из (1.11). Рассмотрим отображение (1.12) для этих четырех случаев последовательно, одно за другим.

Исследование устойчивости в случае II. Отображение (1.12) имеет вид

$$x_1 = x + \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y), \qquad y_1 = y + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y), \tag{3.1}$$

где формы m-й степени X_m, Y_m относительно x, y выражаются через формы $F_3(x, y)$, $F_4(x, y), \ldots, F_{m+1}(x, y)$ из разложения (1.16). Для форм X_m, Y_m до пятой степени включительно имеем такие выражения:

$$X_2 = -\frac{\partial F_3}{\partial y}, \qquad Y_2 = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \tag{3.2}$$

$$X_3 = -\frac{\partial F_4}{\partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} X_2, \qquad Y_3 = \frac{\partial F_4}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} X_2, \tag{3.3}$$

$$X_4 = -\frac{\partial F_5}{\partial y} - \frac{\partial^2 F_4}{\partial x \partial y} X_2 - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} X_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_3}{\partial x^2 \partial y} X_2^2,$$

$$Y_4 = \frac{\partial F_5}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2} X_2 + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} X_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_3}{\partial x^3} X_2^2, \tag{3.4}$$

$$X_5 = -\frac{\partial F_6}{\partial y} - \frac{\partial^2 F_5}{\partial x \partial y} X_2 - \frac{\partial^2 F_4}{\partial x \partial y} X_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_4}{\partial x^2 \partial y} X_2^2 - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} X_4 - \frac{\partial^3 F_3}{\partial x^2 \partial y} X_2 X_3,$$

$$Y_5 = \frac{\partial F_6}{\partial x} + \frac{\partial^2 F_5}{\partial x^2} X_2 + \frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2} X_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_4}{\partial x^3} X_2^2 + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} X_4 + \frac{\partial^3 F_3}{\partial x^3} X_2 X_3. \tag{3.5}$$

При решении задачи об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.1) будем переходить к эквивалентной задаче об устойчивости положения равновесия $x = y = 0$ канонической системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{3.6}$$

функция Гамильтона $H(x, y, t)$ которой имеет период $\tau = 1$ по t, а преобразование за время от $t = 0$ (когда $x = x$, $y = y$) до $t = \tau$ (когда $x = x_1$, $y = y_1$), задаваемое движениями системы (3.6), совпадает с отображением (3.1) с точностью до членов четвертой или пятой степени включительно относительно x, y.

1. Об устойчивости в случае, когда $F_3 \not\equiv 0$. Пусть в разложении производящей функции (1.16) форма F_3 не обращается тождественно в нуль. Тогда правая часть хотя бы одного из равенств (3.1) содержит члены второй степени относительно x, y.

По алгоритму статьи [17] функцию H в рассматриваемом случае можно получить в виде ряда

$$H = H_3(x, y) + H_4(x, y) + H_5(x, y) + O_6, \tag{3.7}$$

где формы H_3, H_4, H_5 выражаются через известные формы F_3, F_4, F_5 из разложения производящей функции (1.16).

Согласно [17], функция (1.16) равна вычисленной при $\tau = 1$ функции

$$\Phi(x_*, y, t) = x_* y + \Phi_3(x_*, y, t) + \Phi_4(x_*, y, t) + \Phi_5(x_*, y, t) + O_6, \tag{3.8}$$

удовлетворяющей уравнению Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H(x_*, \frac{\partial \Phi}{\partial x_*}, t) = 0, \quad \Phi(x_*, y, 0) \equiv x_* y. \tag{3.9}$$

Функции Φ_3, Φ_4, Φ_5 удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} = -H_3, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial t} = -H_4 - \frac{\partial H_3}{\partial y}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \Phi_5}{\partial t} = -H_5 - \frac{\partial H_4}{\partial y}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial H_3}{\partial y}\frac{\partial \Phi_4}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_3}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\right)^2, \tag{3.12}$$

где $H_k = H_k(x, y)$, $\Phi_k = \Phi_k(x, y, t)$, причем $\Phi_k(x, y, 0) \equiv 0$ $(k = 3, 4, 5)$.

Из (3.10)–(3.12) получаем

$$\Phi_3 = -H_3 t, \tag{3.13}$$

$$\Phi_4 = -H_4 t + \frac{\partial H_3}{\partial x}\frac{\partial H_3}{\partial y}\frac{t^2}{2}, \tag{3.14}$$

$$\Phi_5 = -H_5 t + \left(\frac{\partial H_3}{\partial x}\frac{\partial H_4}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial y}\frac{\partial H_4}{\partial x}\right)\frac{t^2}{2} - \left[\frac{\partial H_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x}\frac{\partial H_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 H_3}{\partial y^2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x}\right)^2\right]\frac{t^3}{6}. \tag{3.15}$$

Полагая в равенствах (3.13)–(3.15) $t = 1$, $\Phi_k(x, y, 1) = F_k(x, y)$, получаем следующие выражения форм H_3, H_4, H_5 через F_3, F_4, F_5:

$$H_3 = -F_3, \tag{3.16}$$

$$H_4 = -F_4 + \frac{1}{2}\frac{\partial H_3}{\partial x}\frac{\partial H_3}{\partial y}, \tag{3.17}$$

$$H_5 = -F_5 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x}\frac{\partial H_4}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial y}\frac{\partial H_4}{\partial x}\right) - \frac{1}{6}\left[\frac{\partial H_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x}\frac{\partial H_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 H_3}{\partial y^2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{3.18}$$

Задача об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.1) эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия $x = y = 0$ канонической системы (3.6) с функцией Гамильтона, задаваемой равенствами (3.7), (3.16)–(3.18).

Из (3.16) видно, что $H_3(x, y) \not\equiv 0$.

Теорема 1 ([19, 23]). *Положение равновесия $x = y = 0$ системы* (3.6) *неустойчиво* (*и это можно установить по членам третьей степени $H_3(x, y)$ в разложении* (3.7)) *всегда, кроме, быть может, одного исключительного случая, когда функция* (3.7) *при помощи линейного канонического преобразования x, $y \to q$, p может быть приведена к виду*

$$H^* = q^3 + H_4^*(q, p) + H_5^*(q, p) + O_6, \tag{3.19}$$

$$H_k^* = \sum_{\nu+\mu=k} h_{\nu\mu} q^\nu p^\mu. \tag{3.20}$$

Случай (3.19) выделяется из общего случая $H_3(x, y) \not\equiv 0$ тем, что функция $h_3(\alpha) \equiv \equiv H_3(\sin\alpha, \cos\alpha)$ при некотором вещественном $\alpha = \alpha_*$ удовлетворяет следующим четырем условиям:

$$h_3 = 0, \qquad \frac{dh_3}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d^2 h_3}{d\alpha^2} = 0, \qquad \frac{d^3 h_3}{d\alpha^3} \neq 0.$$

В исключительном случае (3.19) при решении задачи об устойчивости необходимо учитывать в разложении (3.7) члены выше третьей степени относительно x, y.

В статье [24] показано, что функция Гамильтона (3.19) при помощи близкого к тождественному канонического преобразования q, $p \to q'$, p' типа преобразования Биркгофа может быть приведена к виду

$$H' = q'^3 + h'_{13} q' p'^3 + h'_{04} p'^4 + h'_{14} q' p'^4 + h'_{05} p'^5 + O_6, \tag{3.21}$$

где коэффициенты $h'_{\nu\mu}$ выражаются через коэффициенты форм H_4^* и H_5^* в разложении (3.19):

$$h'_{13} = h_{13}, \qquad h'_{04} = h_{04}, \tag{3.22}$$

$$h'_{14} = h_{14} + \frac{8}{3} h_{40} h_{04} - \frac{1}{3} h_{22}^2 + \frac{1}{6} h_{31} h_{13}, h'_{05} = h_{05} + \frac{2}{3} h_{31} h_{04} - \frac{1}{3} h_{13} h_{22}. \tag{3.23}$$

Теорема 2 ([24]). *Если хотя бы один из коэффициентов $h'_{\nu\mu}$ из* (3.22), (3.23) *отличен от нуля, то положение равновесия $x = y = 0$ системы* (3.6) *неустойчиво.*

2. Об устойчивости в случае, когда $F_3 \equiv 0$. Если в производящей функции (1.16) форма F_3 тождественно равна нулю, то в правых частях равенств (3.1) отсутствуют члены второй степени относительно x, y. В этом случае функцию Гамильтона канонической системы (3.6) можно получить в виде ряда, не содержащего члены третьей степени:

$$H = H_4(x, y) + H_5(x, y) + H_6(x, y) + O_7, \tag{3.24}$$

где формы H_4, H_5, H_6 выражаются через формы F_4, F_5, F_6 разложения (1.16).

Функцию Φ ищем в виде, аналогичном (3.8):

$$\Phi(x, y, t) = xy + \Phi_4(x, y, t) + \Phi_5(x, y, t) + \Phi_6(x, y, t) + O_7.$$

Формы Φ_4, Φ_5, Φ_6 определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial t} = -H_4, \qquad \frac{\partial \Phi_5}{\partial t} = -H_5, \qquad \frac{\partial \Phi_6}{\partial t} = -H_6 - \frac{\partial H_4}{\partial y} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x}.$$

Отсюда при учете начальных условий $\Phi_k(x, y, 0) \equiv 0$ $(k = 4, 5, 6)$ получаем

$$\Phi_4 = -H_4 t, \qquad \Phi_5 = -H_5 t, \qquad \Phi_6 = -H_6 t + \frac{\partial H_4}{\partial x} \frac{\partial H_4}{\partial y} \frac{t^2}{2}.$$

Положив здесь $t = 1$, $\Phi_k(x, y, 1) = F_k(x, y)$ $(k = 4, 5, 6)$, находим следующие выражения для искомых форм H_4, H_5, H_6 разложения (3.24):

$$H_4 = -F_4, \qquad H_5 = -F_5, \qquad H_6 = -F_6 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_4}{\partial x} \frac{\partial F_4}{\partial y}. \tag{3.25}$$

Таким образом, задача об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.1) сведена к задаче об устойчивости положения равновесия $x = y = 0$ системы (3.6) с функцией Гамильтона, задаваемой равенствами (3.24), (3.25).

Во многих случаях условия устойчивости или неустойчивости положения равновесия могут быть выражены через коэффициенты формы H_4 в разложении (3.24). Пусть $h_4(\alpha) \equiv \equiv H_4(\sin\alpha, \cos\alpha)$.

Теорема 3 ([19, 23, 25]). *Если уравнение $h_4(\alpha) = 0$ не имеет вещественных корней, то положение равновесия устойчиво. Если же у этого уравнения существует вещественный корень $\alpha = \alpha_*$ и при этом производная $dh_4(\alpha_*)/d\alpha_*$ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво.*

Но возможны случаи, когда сформулированные достаточные условия устойчивости и неустойчивости не выполняются. Пусть, например, $H_4 = xy^3$. В этом случае $h_4 = \sin\alpha\cos^3\alpha$, $dh_4/d\alpha = \cos^2\alpha(4\cos^2\alpha - 3)$. Уравнение $h_4(\alpha) = 0$ имеет вещественные корни $\alpha = \alpha_*$, причем для них либо $\sin\alpha_* = 0$, либо $\cos\alpha_* = 0$. В первом случае производная $dh_4(\alpha_*)/d\alpha_*$ положительна (равна единице), а во втором случае она равна нулю.

В статье [23] показано, что при помощи линейных канонических преобразований x, $y \to q$, p члены четвертой степени в функции Гамильтона (3.24) можно привести к одной из следующих девяти простейших, не сводящихся одна к другой форм:

$$\begin{aligned}
&1)\ q^4 + aq^2p^2 + p^4\ (a > -2), \quad 2)\ q^4 + aq^2p^2 + p^4\ (a < -2),\\
&3)\ q^4 + aq^2p^2 - p^4\,(a \text{ — любое вещественное число}), \quad 4)\ q^2(q^2 - p^2),\\
&5)\ q^2(q^2 + p^2), \quad 6)\ q^2p^2, \quad 7)\ q^3p, \quad 8)\ -q^3p, \quad 9)\ q^4.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Показано также, что в случае 1) исследуемое положение равновесия устойчиво, а в случаях 2), 3), 4) и 7) — неустойчиво. В случаях же 5), 6), 8) и 9) для решения вопроса об устойчивости требуется учитывать члены выше четвертой степени в разложении функции Гамильтона (3.24). Ограниченность объема статьи не позволяет провести анализ устойчивости во всех этих четырех случаях. Ниже подробно рассмотрим только случай 6), когда в переменных q, p функция Гамильтона (3.24) записывается в виде

$$H^* = q^2p^2 + H_5^*(q,p) + H_6^*(q,p) + O_7, \tag{3.27}$$

а также сформулируем (без доказательства) теорему об устойчивости в случае 5), когда

$$H^* = q^2(q^2 + p^2) + H_5^*(q,p) + H_6^*(q,p) + O_7. \tag{3.28}$$

В (3.27) и (3.28) формы H_5^* и H_6^* представляются суммами вида (3.20).

Исследование устойчивости в системе с функцией Гамильтона (3.27). Для упрощения функции Гамильтона сделаем близкую к тождественной каноническую замену переменных q, $p \to q'$, p' типа преобразования Биркгофа [4, 24], задаваемую неявно соотношениями

$$q' = \frac{\partial S}{\partial p'}, \qquad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \tag{3.29}$$

где производящая функция $S(q, p')$ имеет вид

$$S = qp' + S_3(q,p') + S_4(q,p'), \quad S_k = \sum_{\nu+\mu=k} s_{\nu\mu} q^\nu p'^\mu. \tag{3.30}$$

Значения постоянных коэффициентов $s_{\nu\mu}$ предстоит определить в процессе упрощения новой функции Гамильтона $H'(q', p', t)$.

Из (3.29), (3.30) находим выражения $q = q(q', p')$, $p = p(q', p')$ старых переменных через новые в виде рядов

$$q = q' - \frac{\partial S_3(q', p')}{\partial p'} - \frac{\partial S_4(q', p')}{\partial p'} + \frac{\partial^2 S_3(q', p')}{\partial q' \partial p'} \frac{\partial S_3(q', p')}{\partial p'} + O_4,$$

$$p = p' + \frac{\partial S_3(q', p')}{\partial q'} + \frac{\partial S_4(q', p')}{\partial q'} - \frac{\partial^2 S_3(q', p')}{\partial q'^2} \frac{\partial S_3(q', p')}{\partial p'} + O_4.$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (3.27), получим представление новой функции Гамильтона в виде

$$H' = q'^2 p'^2 + H_5'(q', p') + H_6'(q', p') + O_7. \tag{3.31}$$

Для коэффициентов формы пятой степени H_5' имеем следующие выражения:

$$h_{50}' = h_{50}, \qquad h_{41}' = h_{41} + 6s_{30}, \qquad h_{32}' = h_{32} + 2s_{21},$$
$$h_{23}' = h_{23} - 2s_{12}, \qquad h_{14}' = h_{14} - 6s_{03}, \qquad h_{05}' = h_{05}.$$

Эти равенства показывают, что коэффициенты h_{50}' и h_{05}' не зависят от выбора формы S_3 в производящей функции (3.30). Остальные же четыре коэффициента зависят от этого выбора. Их можно уничтожить, положив

$$s_{30} = -\frac{1}{6}\,h_{41}, \quad s_{21} = -\frac{1}{2}\,h_{32}, \quad s_{12} = \frac{1}{2}\,h_{23}, \quad s_{03} = \frac{1}{6}\,h_{14}.$$

При таком выборе коэффициентов формы S_3 члены H_5' в новой функции Гамильтона (3.31) принимают вид

$$H_5' = h_{50}' q'^5 + h_{05}' p'^5 \qquad (h_{50}' = h_{50},\ h_{05}' = h_{05}), \tag{3.32}$$

а коэффициенты формы шестой степени H_6' вычисляются по формулам

$$h_{60}' = h_{60} - \frac{1}{4}h_{41}^2 + \frac{5}{2}h_{50}h_{32}, \quad h_{51}' = h_{51} - h_{32}h_{41} - 5h_{50}h_{23} + 8s_{40},$$

$$h_{42}' = h_{42} - \frac{5}{4}h_{32}^2 - \frac{3}{2}h_{41}h_{23} - \frac{5}{2}h_{50}h_{14} + 4s_{31}, \quad h_{33}' = h_{33} - 2h_{23}h_{32} - 2h_{14}h_{41},$$

$$h_{24}' = h_{24} + \frac{3}{4}h_{23}^2 - \frac{7}{2}h_{32}h_{14} - \frac{5}{2}h_{05}h_{41} - 4s_{13},$$

$$h_{15}' = h_{15} + h_{23}h_{14} - 5h_{05}h_{32} - 8s_{04}, \quad h_{06}' = h_{06} + \frac{5}{2}h_{05}h_{23} - \frac{1}{4}h_{14}^2.$$

Из этих формул видно, что коэффициенты h_{60}', h_{33}' и h_{06}' формы H_6' не зависят от выбора формы S_4 в производящей функции (3.30). Остальные же четыре коэффициента формы H_6' могут быть уничтожены. Для этого достаточно (оставляя коэффициент s_{22} произвольным) положить

$$s_{40} = -\frac{1}{8}h_{51} + \frac{1}{8}h_{32}h_{41} + \frac{5}{8}h_{50}h_{23}, \qquad s_{31} = -\frac{1}{4}h_{42} + \frac{5}{16}h_{32}^2 + \frac{3}{8}h_{41}h_{23} + \frac{5}{8}h_{50}h_{14},$$

$$s_{13} = \frac{1}{4}h_{24} + \frac{3}{16}h_{23}^2 - \frac{7}{8}h_{32}h_{14} - \frac{5}{8}h_{05}h_{41}, \qquad s_{04} = \frac{1}{8}h_{15} + \frac{1}{8}h_{23}h_{14} - \frac{5}{8}h_{05}h_{32}.$$

При таком выборе коэффициентов формы S_4 члены шестой степени H_6' в функции Гамильтона (3.31) записываются в виде

$$H_6' = h_{60}' q'^6 + h_{33}' q'^3 p'^3 + h_{06}' p'^6. \tag{3.33}$$

Рассмотрим случай, когда вопрос об устойчивости можно решить по коэффициентам формы пятой степени в разложении функции Гамильтона.

Теорема 4. *Если в функции Гамильтона* (3.31) *форма* $H_5' \not\equiv 0$, *то положение равновесия неустойчиво.*

Доказательство. Так как $H_5' \not\equiv 0$, то хотя бы один из коэффициентов h_{50}' и h_{05}' отличен от нуля. Пусть, для определенности, $h_{50}' \neq 0$ (если $h_{05}' \neq 0$, то надо просто перейти к новым канонически сопряженным переменным q'', p'' по формулам $q' = -p''$, $p' = q''$). Для доказательства теоремы 4 воспользуемся теоремой Четаева о неустойчивости [20]. Для удобства вычислений сделаем предварительно унивалентную каноническую замену переменных по формулам

$$q' = -{h_{50}'}^{-1/5}\widetilde{q}, \qquad p' = -{h_{50}'}^{1/5}\widetilde{p}. \tag{3.34}$$

Из (3.31), (3.32) и (3.34) получаем выражение для преобразованной функции Гамильтона:

$$\widetilde{H} = \widetilde{q}^2\widetilde{p}^2 - \widetilde{q}^5 - h_{50}'h_{05}'\widetilde{p}^5 + O_6. \tag{3.35}$$

В качестве функции Четаева возьмем функцию

$$V = \varepsilon^2\widetilde{q}^3 - (\widetilde{p} - \widetilde{q}^{3/2})^2 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1), \tag{3.36}$$

а за область $V > 0$ примем область, определяемую следующими условиями: $\widetilde{q} > 0$, $\widetilde{p} = (1 + \varepsilon\beta)\widetilde{q}^{3/2}$ $(-1 < \beta < 1)$.

Для производной функции (3.36) в силу уравнений движения, задаваемых функцией Гамильтона (3.35), получаем в области $V > 0$ такое выражение:

$$\frac{dV}{dt} = 2\varepsilon\,\widetilde{q}^{11/2}\bigl\{\varepsilon[3 + 7\beta^2 + \varepsilon\beta(3 + 2\beta^2)] + O(\widetilde{q})\bigr\}.$$

При достаточно малом фиксированном значении ε это выражение положительно, если величина $\widetilde{q}$ достаточно мала. Отсюда на основании теоремы Четаева следует неустойчивость положения равновесия.

Если в функции Гамильтона (3.31) $H_5' \equiv 0$, то для решения вопроса об устойчивости необходимо учитывать члены более высокой степени. Предположим, что форма (3.33) не обращается тождественно в нуль. Имеет место следующее утверждение, дающее достаточные условия устойчивости и неустойчивости по членам шестой степени в разложении функции Гамильтона.

Теорема 5. *Если в функции Гамильтона* (3.31) *форма* $H_5' \equiv 0$, *а коэффициенты* h_{60}' *и* h_{06}' *формы* H_6' *положительны, то положение равновесия устойчиво; если же хотя бы один из этих коэффициентов отрицателен, то имеет место неустойчивость.*

Для доказательства утверждения теоремы 5 об устойчивости рассмотрим приближенную систему с функцией Гамильтона H_0, получающейся из функции (3.31), если в ней отбросить члены O_7 выше шестой степени относительно q', p'. В симплектических полярных координатах r, φ, определяемых равенствами

$$q' = \sqrt{2r}\sin\varphi, \qquad p' = \sqrt{2r}\cos\varphi, \tag{3.37}$$

функция H_0 записывается в виде

$$H_0 = 4r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 8r^3(h_{60}'\sin^6\varphi + h_{33}'\sin^3\varphi\cos^3\varphi + h_{06}'\cos^6\varphi). \tag{3.38}$$

При положительных коэффициентах h_{60}' и h_{06}' эта функция является определенно-положительной в окрестности равновесия.

Приближенная система имеет интеграл

$$H_0 = h = \text{const}, \tag{3.39}$$

а ее траектории при $0 < h \ll 1$ охватывают положение равновесия $q' = p' = 0$. Отвечающий этим траекториям период движения τ_0 вычисляется по формуле

$$\tau_0 = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial H_0}{\partial r}\right)^{-1} d\varphi,$$

где

$$\frac{\partial H_0}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dt} = 8r[\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 3r(h'_{60}\sin^6\varphi + h'_{33}\sin^3\varphi\cos^3\varphi + h'_{06}\cos^6\varphi)] > 0,$$

а $r = r(\varphi, h)$ — функция, определяемая из интеграла (3.39).

Пусть I, w — переменные действие–угол в приближенной системе с функцией Гамильтона H_0. Тогда

$$I = I(h) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} r(\varphi, h)\, d\varphi. \tag{3.40}$$

Функция Гамильтона (3.31) полной системы в переменных I, w записывается в виде

$$H = h(I) + h_1(I, w, t), \tag{3.41}$$

где h — функция, обратная к функции (3.40), при $0 < h \ll 1$ она аналитична относительно I. Частота ω движения в приближенной системе вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{\partial h}{\partial I} = \frac{2\pi}{\tau_0}.$$

Функция h_1 из (3.41) имеет период 2π по w и период $\tau = 1$ по t; она аналитична или, по крайней мере, имеет непрерывные производные по всем своим переменным до сколь угодно высокого порядка при $0 < I \ll 1$, причем $h_1 = o\big(h(I)\big)$ при $h \to 0$.

Рассмотрим сохраняющее площадь отображение окрестности начала координат $I = 0$, задаваемое движениями системы с функцией Гамильтона (3.41) за период $\tau = 1$ изменения времени. Для устойчивости начала координат необходимо и достаточно, чтобы в любой сколь угодно малой его окрестности существовала окружающая точку $I = 0$ кривая, инвариантная при этом отображении [15]. Существование таких кривых следует из теоремы Мозера [7, 8, 26], если только выполнено условие невырожденности $d^2h/dI^2 \neq 0$.

Можно показать, что

$$\frac{d^2h}{dI^2} = \frac{\omega^3}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2}\left(\frac{\partial H_0}{\partial r}\right)^{-3} d\varphi. \tag{3.42}$$

Но

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2} = 8[\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 6r(h'_{60}\sin^6\varphi + h'_{33}\sin^3\varphi\cos^3\varphi + h'_{06}\cos^6\varphi)] > 0.$$

Правая часть выражения (3.42) положительна при достаточно малых r. Следовательно, условие невырожденности выполнено и положение равновесия устойчиво.

Докажем теперь утверждение теоремы 5 о неустойчивости. Пусть $h'_{60} < 0$ (если $h'_{60} \geqslant 0$, а $h'_{06} < 0$, то, сделав замену $q' = -p''$, $p' = q''$, придем к случаю $h'_{60} < 0$). Доказательство неустойчивости осуществим при помощи теоремы Четаева.

Сделав для упрощения выкладок замену

$$q' = |h'_{60}|^{-1/6}\widetilde{q}, \qquad p' = |h'_{60}|^{1/6}\widetilde{p},$$

преобразуем функцию Гамильтона (3.31) к виду

$$\widetilde{H} = \widetilde{q}^2\widetilde{p}^2 - \widetilde{q}^6 + h'_{33}\widetilde{q}^3\widetilde{p}^3 + |h'_{60}|h'_{06}\widetilde{p}^6 + O_7. \tag{3.43}$$

Положим

$$V = \varepsilon^2\widetilde{q}^4 - (\widetilde{p} - \widetilde{q}^2)^2 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1). \tag{3.44}$$

За область $V > 0$ примем область, где $\widetilde{q} > 0$, $\widetilde{p} = (1 + \varepsilon\beta)\widetilde{q}^2$ $(-1 < \beta < 1)$.

В области $V > 0$ имеем следующее выражение для производной функции (3.44) в силу уравнений движения с функцией Гамильтона (3.43):

$$\frac{dV}{dt} = 4\varepsilon\,\widetilde{q}^7\bigl\{\varepsilon[2 + 4\beta^2 + \varepsilon\beta(1 + \beta^2)] + O(\widetilde{q})\bigr\}.$$

При малом ε и достаточно малых $\widetilde{q}$ производная положительна, поэтому, согласно теореме Четаева, положение равновесия неустойчиво.

Об устойчивости в системе с функцией Гамильтона (3.28). Сформулируем без доказательства теорему об устойчивости в случае 5) из (3.26). Эта теорема дает достаточные условия неустойчивости и устойчивости, выраженные через коэффициенты форм $H^*_5(q, p)$ и $H^*_6(q, p)$ в разложении функции Гамильтона (3.28).

Теорема 6. *Если $h_{05} \neq 0$, то положение равновесия неустойчиво. Если же $h_{05} = 0$, то положение равновесия устойчиво, если выражение $h_{06} - 1/4\,h_{14}^2$ положительно, и неустойчиво, если это выражение отрицательно.*

Об исследовании устойчивости в случае III. В этом случае отображение (1.12) имеет вид

$$x_1 = f(x, y) \equiv -x - \sum_{k=2}^{\infty} X_k(x, y), \quad y_1 = g(x, y) \equiv -y - \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x, y), \tag{3.45}$$

где формы X_m, Y_m выражаются через формы $F_3(x, y)$, $F_4(x, y), \ldots, F_{m+1}(x, y)$ из разложения (1.16); для $m = 2, 3, 4, 5$ они записываются в виде равенств (3.2)–(3.5).

Исследование устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.45) можно свести к случаю II, рассмотренному выше. Для этого вместо отображения T, задаваемого равенствами (3.45), надо рассмотреть его вторую степень T^2:

$$x_2 = x_*(x, y) \equiv f(x_1, y_1), \qquad y_2 = y_*(x, y) \equiv g(x_1, y_1),$$

где x_1 и y_1 — функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ из правых частей равенств (3.45).

Отображение T^2 близко к тождественному, задающие его функции $x_*(x, y)$, $y_*(x, y)$ аналитичны, а их разложения в ряды не содержат члены второй степени относительно x, y. Можно показать, что эти функции определяются неявно соотношениями, аналогичными (1.15):

$$x = \frac{\partial G}{\partial y}, \qquad y_* = \frac{\partial G}{\partial x_*},$$

а производящая функция $G(x_*, y)$ задается рядом

$$G = x_* y + \sum_{m=4}^{\infty} G_m(x_*, y),$$

где G_m — форма степени m относительно x_*, y, причем

$$\begin{aligned}
G_4(x,y) &= 2F_4 - \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial F_3}{\partial y},\\
G_5(x,y) &= \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial F_4}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial F_4}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)^2\right],\\
G_6(x,y) &= 2F_6 + \frac{\partial F_4}{\partial x}\frac{\partial F_4}{\partial y} - \frac{\partial F_5}{\partial x}\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_5}{\partial y}\frac{\partial F_3}{\partial x} +\\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F_4}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\partial F_4}{\partial x}\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} - \frac{\partial F_4}{\partial y}\frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} -\\
&\quad - \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 F_3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)^3 + \frac{\partial^3 F_3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)^3\right] + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial F_3}{\partial y}.
\end{aligned}$$

В правых частях этих равенств $F_m = F_m(x,y)$ $(m = 3,4,5,6)$, где F_m — формы из разложения (1.16).

Таким образом, задача об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.45) сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $x = y = 0$ с функцией Гамильтона (3.7), в которой (см. формулы (3.25))

$$H_3 = 0, \quad H_4 = -G_4, \quad H_5 = -G_5, \quad H_6 = -G_6 + \frac{1}{2}\frac{\partial G_4}{\partial x}\frac{\partial G_4}{\partial y}.$$

Исследование случая IV. Отображение (1.12) задается равенствами

$$x_1 = x + y + \sum_{k=2}^{\infty}\big(X_k(x,y) + Y_k(x,y)\big), \quad y_1 = y + \sum_{k=2}^{\infty} Y_k(x,y), \tag{3.46}$$

где формы X_k, Y_k выражаются через производящую функцию (1.16) так же, как и в отображении (3.1).

Отображение (3.46) можно рассматривать как каноническое преобразование, задаваемое неявно равенствами

$$x_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial y_1}, \qquad y = \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \tag{3.47}$$

где производящая функция $\Gamma(x, y_1)$ имеет вид

$$\Lambda = x y_1 + \frac{1}{2} y_1^2 + \sum_{m=3}^{\infty} \Lambda_m(x, y_1), \quad \Lambda_m = \sum_{r+s=m} \lambda_{rs} x^r y_1^s. \tag{3.48}$$

Формы $\Lambda_m(x,y)$ выражаются через формы $F_k(x,y)$ $(k = 3,4,\ldots,m)$ из разложения (1.16). При $m = 3,4,5,6$ для коэффициентов форм Λ_m имеют место следующие выражения:

$$\lambda_{30} = -f_{30}, \qquad \lambda_{21} = -f_{21}, \tag{3.49}$$

$$\lambda_{40} = -f_{40} + 3f_{30}f_{21},\ \lambda_{31} = -f_{31} + 6f_{30}f_{12} + 2f_{21}^2,\ \lambda_{22} = -f_{22} + 9f_{30}f_{03} + 5f_{21}f_{12}, \tag{3.50}$$

$$\lambda_{50} = -f_{50} - 9f_{12}f_{30}^2 + 3(f_{31} - 3f_{21}^2)f_{30} + 4f_{40}f_{21},$$
$$\lambda_{41} = -f_{41} - 27f_{03}f_{30}^2 + 6(f_{22} - 7f_{21}f_{12})f_{30} + 8f_{40}f_{12} + 5f_{21}(f_{31} - f_{21}^2),$$
$$\lambda_{32} = -f_{32} - 22f_{12}f_{21}^2 + 6(f_{22} - 12f_{30}f_{03})f_{21} - 30f_{30}f_{12}^2 + 12f_{40}f_{03} + \\ + 9f_{30}f_{13} + 7f_{31}f_{12}, \tag{3.51}$$
$$\lambda_{60} = -f_{60} + 27f_{03}f_{30}^3 + 9(9f_{21}f_{12} - f_{22})f_{30}^2 + (28f_{21}^3 - 21f_{31}f_{21} - 24f_{40}f_{12} + 3f_{41})f_{30} - \\ - 14f_{40}f_{21}^2 + 5f_{50}f_{21} + 4f_{40}f_{31},$$
$$\lambda_{51} = -f_{51} + 14f_{21}^4 + 3(74f_{30}f_{12} - 7f_{31})f_{21}^2 + 2(135f_{03}f_{30}^2 - 24f_{22}f_{30} + 3f_{41} - 32f_{40}f_{12})f_{21} + \\ + 9(14f_{12}^2 - 3f_{13})f_{30}^2 + 6(f_{32} - 9f_{31}f_{12} - 12f_{40}f_{03})f_{30} + 3f_{31}^2 + 10f_{50}f_{12} + 8f_{22}f_{40},$$
$$\lambda_{42} = -f_{42} + 93f_{12}f_{21}^3 + (423f_{30}f_{03} - 29f_{22})f_{21}^2 + (366f_{30}f_{12}^2 - 67f_{31}f_{12} - \\ - 81f_{30}f_{13} + 7f_{32} - 108f_{40}f_{03})f_{21} + 54(9f_{03}f_{12} - f_{04})f_{30}^2 + 3(3f_{23} - 33f_{03}f_{31} - \\ - 26f_{22}f_{12})f_{30} - 48f_{40}f_{12}^2 + 9f_{41}f_{12} + 8f_{22}f_{31} + 15f_{50}f_{03} + 12f_{40}f_{13},$$
$$\lambda_{33} = -f_{33} + 140f_{03}f_{21}^3 + 2(82f_{12}^2 - 19f_{13})f_{21}^2 + 2(504f_{30}f_{12}f_{03} - 60f_{30}f_{04} - 48f_{31}f_{03} - \\ - 34f_{22}f_{12} + 4f_{23})f_{21} + 324f_{03}^2f_{30}^2 + 2(70f_{12}^3 - 48f_{13}f_{12} - 54f_{22}f_{03})f_{30} - 38f_{31}f_{12}^2 + \\ + 8(f_{32} - 15f_{40}f_{03})f_{12} + 12f_{41}f_{03} + 12f_{14}f_{30} + 16f_{40}f_{04} + 10f_{31}f_{13} + 4f_{22}^2. \tag{3.52}$$

Невыписанные выражения для коэффициентов λ_{ji} получаются из соответствующих равенств (3.49)–(3.52) для λ_{ij}, если в их правых частях величины f_{rs} заменить на f_{sr}.

Ниже будут доказаны следующие утверждения, дающие достаточные условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.46), выраженные через коэффициенты f_{rs} разложения (1.16).

Теорема 7. *1. Если выполняется неравенство*

$$f_{30} \neq 0, \tag{3.53}$$

то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (3.46) неустойчива.

2. Если же $f_{30} = 0$, то при выполнении условия

$$2f_{40} + f_{21}^2 < 0 \tag{3.54}$$

имеет место устойчивость, а при $2f_{40} + f_{21}^2 > 0$ — неустойчивость.

3. При одновременном выполнении трех условий

$$f_{30} = 0, \qquad 2f_{40} + f_{21}^2 = 0, \qquad f_{50} + f_{31}f_{21} - 2f_{40}f_{12} \neq 0 \tag{3.55}$$

неподвижная точка неустойчива.

4. Если выполняются три равенства

$$f_{30} = 0, \qquad 2f_{40} + f_{21}^2 = 0, \qquad f_{50} + f_{31}f_{21} - 2f_{40}f_{12} = 0 \tag{3.56}$$

и при этом

$$2f_{60} + f_{31}^2 - 2(5f_{50} - 2f_{31}f_{12} - f_{41})f_{21} - 4(f_{22} - 5f_{31} + f_{03}f_{21} - 5f_{21}f_{12} + 2f_{12}^2)f_{40} < 0, \tag{3.57}$$

то имеет место устойчивость; если же последнее неравенство выполняется с противоположным знаком, то неподвижная точка отображения неустойчива.

Н о р м а л и з а ц и я   о т о б р а ж е н и я (3.46). Исследование свойств отображения удобнее осуществить, если предварительно привести его к простейшей (нормальной) форме [3, 8, 19]. При этом целесообразно упрощать не два равенства (3.46), задающие отображение, а одну производящую функцию (3.48), находя нелинейное нормализующее преобразование x, $y \to \xi$, η при помощи канонической замены переменных.

Связь старых и новых переменных задается соотношениями

$$x = \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad \eta = \frac{\partial S}{\partial \xi}, \tag{3.58}$$

а производящая функция $S(\xi, y)$ ищется в виде

$$S = \xi y + \sum_{m=3}^{\infty} S_m(\xi, y), \qquad S_m = \sum_{\nu+\mu=m} s_{\nu\mu}\xi^{\nu} y^{\mu}. \tag{3.59}$$

В новых переменных имеем отображение ξ, $\eta \to \xi_1$, η_1, задаваемое производящей функцией

$$W = \xi\eta_1 + \frac{1}{2}\,\eta_1^2 + \sum_{m=3}^{\infty} W_m(\xi, \eta_1), \qquad W_m = \sum_{r+s=m} w_{rs}\xi^r\eta_1^s. \tag{3.60}$$

При этом

$$\xi_1 = \xi + \eta_1 + \sum_{m=3}^{6} \frac{\partial W_m}{\partial \eta_1} + O_6, \qquad \eta = \eta_1 + \sum_{m=3}^{6} \frac{\partial W_m}{\partial \xi} + O_6. \tag{3.61}$$

Формы $S_3, S_4, \ldots$ в функции (3.59) будем выбирать так, чтобы максимально упростить формы $W_3, W_4, \ldots$ в функции (3.60).

Из соотношений (3.58), (3.59) находятся выражения $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ в виде рядов по степеням ξ, η (а следовательно, и выражения $x_1 = x(\xi_1, \eta_1)$, $y_1 = y(\xi_1, \eta_1)$ в виде рядов по степеням ξ_1, η_1). Подставив эти выражения в соотношения (3.47), получим два равенства, связывающие величины ξ, η, ξ_1, η_1. Разрешив эти равенства относительно величин $\xi_1 = \xi_1(\xi, \eta_1)$, $\eta = \eta(\xi, \eta_1)$, найдем разложение (3.61) в явном виде. Для форм W_m ($m = 3, 4, \ldots$) имеем такое выражение:

$$W_m(\xi, \eta_1) = K_m(\xi, \eta_1) + \Lambda_m(\xi, \eta_1) + S_m(\xi, \eta_1) - S_m(\xi + \eta_1, \eta_1), \tag{3.62}$$

где $K_3 \equiv 0$, а форма K_m ($m = 4, 5, \ldots$) выражается через формы Λ_k, S_k ($3 \leqslant k \leqslant m - 1$). Будем ее записывать в виде суммы

$$K_m = \sum_{r+s=m} k_{rs}\xi^r\eta_1^s.$$

Если в равенстве (3.62) положить $\xi = z\,\eta_1$, то оно запишется в виде

$$\sum_{\ell=0}^{m} w_{m-\ell,\ell}\, z^{m-\ell} = \sum_{\ell=0}^{m} (k_{m-\ell,\ell} + \lambda_{m-\ell,\ell})\, z^{m-\ell} + \sum_{\ell=0}^{m} s_{m-\ell,\ell}\left[z^{m-\ell} - (1+z)^{m-\ell}\right].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях этого равенства, получаем выражения для коэффициентов формы W_m через коэффициенты форм K_m, Λ_m и S_m:

$$
\begin{aligned}
&w_{m,0} = k_{m,0} + \lambda_{m,0},\\
&w_{m-1,1} = k_{m-1,1} + \lambda_{m-1,1} - m\, s_{m,0},\\
&w_{m-2,2} = k_{m-2,2} + \lambda_{m-2,2} - \frac{m(m-1)}{2!}\, s_{m,0} - (m-1)\, s_{m-1,1},\\
&w_{m-3,3} = k_{m-3,3} + \lambda_{m-3,3} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\, s_{m,0} - \frac{(m-1)(m-2)}{2!}\, s_{m-1,1} -\\
&\qquad - (m-2)\, s_{m-2,2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&w_{0,m} = k_{0,m} + \lambda_{0,m} - s_{m,0} - s_{m-1,1} - s_{m-2,2} - \ldots - s_{1,m-1}.
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Из второго, третьего и т. д. (до последнего $(m+1)$-го) равенств (3.63) видно, что коэффициенты $s_{m,0}, s_{m-1,1}, \ldots, s_{1,m-1}$ формы S_m из разложения производящей функции (3.59) замены переменных $x, y \;\to\; \xi, \eta$ можно выбрать так, чтобы коэффициенты $w_{m-1,1}$, $w_{m-2,2}, \ldots, w_{0,m}$ формы W_m в производящей функции (3.60) обратились в нуль. При этом коэффициент $s_{m,0}$ может быть выбран произвольным, его можно, например, положить равным нулю. Коэффициент же $w_{m,0}$ выбором формы S_m уничтожить нельзя. Поэтому в форме W_m остается один одночлен $w_{m,0}\xi^m$, где $w_{m,0}$ определяется первым из равенств (3.63).

Как мы увидим ниже, для задачи об устойчивости достаточно получить производящую функцию W нормализованного отображения $\xi, \eta \to \xi_1, \eta_1$ только до первого ненулевого коэффициента $w_{m,0}$. Поэтому будем считать, что нормализованное отображение задается производящей функцией

$$
W = \xi\eta_1 + \frac{1}{2}\,\eta_1^2 + w_{m,0}\xi^m + O_{m+1} \qquad (w_{m,0} \neq 0). \tag{3.64}
$$

Для удобства последующих вычислений введем новые переменные по формулам $\widetilde{\xi} = a\xi$, $\widetilde{\eta} = a\eta$, где $a = -(m\, w_{m,0})^{\frac{1}{m-2}}$, если m — нечетное число, и $a = (m\,|w_{m,0}|)^{\frac{1}{m-2}}$, если m — четное число. В новых переменных имеем нормализованное отображение $\widetilde{\xi}$, $\widetilde{\eta} \to \widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\eta}_1$ с производящей функцией

$$
\widetilde{W} = \widetilde{\xi}\widetilde{\eta}_1 + \frac{1}{2}\,\widetilde{\eta}_1{}^2 - \frac{s}{m}\,\widetilde{\xi}^m + O_{m+1},
$$

где $s = 1$, если m нечетно, и $s = -\operatorname{sign}(w_{m,0})$, если m четно, а само отображение задается равенствами

$$
\widetilde{\xi}_1 = \widetilde{\xi} + \widetilde{\eta} + s\,\widetilde{\xi}^{m-1} + O_m, \qquad \widetilde{\eta}_1 = \widetilde{\eta} + s\,\widetilde{\xi}^{m-1} + O_m. \tag{3.65}
$$

О функции Гамильтона, отвечающей отображению (3.65). Действуя так же, как в рассмотренном выше случае II, можно найти функцию Гамильтона $\widetilde{H}(\widetilde{q}, \widetilde{p}, t)$, отвечающую отображению (3.65). Эта функция имеет период $\tau = 1$ по t, и для траекторий $\widetilde{q}(t)$, $\widetilde{p}(t)$ соответствующей ей канонической системы уравнений, удовлетворяющих начальным условиям $\widetilde{q}(0) = \widetilde{\xi}$, $\widetilde{p}(0) = \widetilde{\eta}$, имеем $\widetilde{q}(1) = \widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{p}(1) = \widetilde{\eta}_1$, где $\widetilde{\xi}_1$ и $\widetilde{\eta}_1$ задаются равенствами (3.65).

Вычисления по алгоритму статьи [17] показывают, что функция $\widetilde{H}$ может быть представлена в виде

$$
\widetilde{H} = \frac{1}{2}\,\widetilde{p}^2 - \frac{s}{m}\,\widetilde{q}^m + \sum_{\ell=1}^{m} a_{m-\ell,\ell}\,\widetilde{q}^{m-\ell}\widetilde{p}^{\ell} + O_{m+1}, \tag{3.66}
$$

где $a_{m-\ell,\ell}$ — постоянные коэффициенты, а совокупность членов O_{m+1} имеет период $\tau = 1$ по t.

Функцию $\widetilde{H}$ можно упростить, уничтожив при помощи канонического преобразования $\widetilde{q}$, $\widetilde{p} \to q$, p все слагаемые, содержащиеся под знаком суммы в правой части равенства (3.66). Нетрудно убедиться, что это преобразование можно получить при помощи производящей функции $\widetilde{S}(\widetilde{q}, p)$ вида

$$\widetilde{S} = \widetilde{q}p - \sum_{\ell=1}^{m} \frac{a_{m-\ell,\ell}}{m+1-\ell}\, \widetilde{q}^{m+1-\ell} p^{\ell-1}$$

и соотношений

$$q = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial p}, \qquad \widetilde{p} = \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial \widetilde{q}}.$$

Новым переменным отвечает функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\, p^2 - \frac{s}{m}\, q^m + O_{m+1}. \tag{3.67}$$

Задача об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.46) эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия $q = p = 0$ системы с функцией Гамильтона (3.67).

Вспомогательные утверждения. Доказательство теоремы 7 будет опираться на две леммы об устойчивости положения равновесия $q = p = 0$ системы с функцией Гамильтона (3.67).

Лемма 1. *Если в функции Гамильтона* (3.67) $s = 1$, *то положение равновесия* $q = p = 0$ *неустойчиво.*

Замечание. Если m — нечетное число, то $s = 1$ всегда. Если же m четно, то $s = 1$, если коэффициент $w_{m,0}$ в функции (3.64) отрицателен.

Доказательство леммы 1 осуществляется при помощи теоремы Четаева о неустойчивости. Пусть

$$V = \varepsilon^2\, \frac{2}{m}\, q^m - \left(p - \sqrt{\frac{2}{m}}\, q^{\frac{m}{2}}\right)^2 \qquad (0 < \varepsilon \ll 1).$$

За область $V > 0$ возьмем область, в которой $q > 0$, $p = (1 + \varepsilon\beta) \sqrt{\frac{2}{m}}\, q^{\frac{m}{2}}$ $(-1 < \beta < 1)$.

Для производной функции V в силу уравнений движения с функцией Гамильтона (3.67) (в которой $s = 1$) получаем в области $V > 0$ такое выражение:

$$\frac{dV}{dt} = 2\,\varepsilon \sqrt{\frac{2}{m}}\, q^{\left(\frac{3}{2}\, m-1\right)} \bigl\{\varepsilon[1 + \beta^2 + \varepsilon\beta] + O(q)\bigr\}.$$

При малом ε это выражение положительно, если величина q достаточно мала. На основании теоремы Четаева отсюда следует, что положение равновесия неустойчиво.

Лемма 2. *Если в функции Гамильтона* (3.67) m *— четное число и* $s = -1$, *то положение равновесия* $q = p = 0$ *устойчиво.*

Замечание. Условия леммы 2 выполняются, если при четном m коэффициент $w_{m,0}$ в функции (3.64) положителен.

При условиях леммы 2 функция Гамильтона (3.67) записывается в виде

$$H = H_0 + O_{2n+1}, \quad H_0 = \frac{1}{2}\, p^2 + \frac{1}{2n}\, q^{2n} \quad (n \geqslant 2). \tag{3.68}$$

В системе с этой функцией Гамильтона величину O_{2n+1} будем рассматривать как возмущение системы с функцией Гамильтона H_0.

О функциях $Cs\, u$ и $Sn\, u$. Для анализа невозмущенной системы, задаваемой функцией H_0, полезны функции $Cs\, u$ и $Sn\, u$, рассмотренные Ляпуновым в статье [27]. Кратко опишем основные свойства этих функций.

Пусть вещественная функция φ вещественного переменного u задается неявно соотношением

$$u = \sqrt{n} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \cos^2\alpha + \ldots + \cos^{2n-2}\alpha}}. \tag{3.69}$$

По определению,

$$Cs\, u = \cos\varphi, \qquad Sn\, u = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \cos^2\varphi + \ldots + \cos^{2n-2}\varphi}. \tag{3.70}$$

Имеют место легко проверяемые тождество

$$Cs^{2n}\, u + n\, Sn^2\, u = 1 \tag{3.71}$$

и правила дифференцирования

$$\frac{d\, Cs\, u}{d\, u} = -Sn\, u, \qquad \frac{d\, Sn\, u}{d\, u} = Cs^{2n-1}\, u. \tag{3.72}$$

Очевидно также, что

$$Cs\, 0 = 1, \qquad Sn\, 0 = 0. \tag{3.73}$$

Соотношения (3.72), (3.73) можно было бы принять в качестве определения функций $Cs\, u$ и $Sn\, u$.

Функция $Cs\, u$ четная, а $Sn\, u$ нечетная. При этом обе они периодические с периодом τ_*. Величину τ_* можно найти, используя равенства (3.69), (3.70). Имеем

$$\begin{aligned} \tau_* &= \sqrt{n} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \cos^2\alpha + \ldots + \cos^{2n-2}\alpha}} = \\ &= 4\sqrt{n} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1 - \cos^{2n}\alpha}} = 4\sqrt{n} \int\limits_0^1 \frac{d\, x}{\sqrt{1 - x^{2n}}} = \frac{4(n+1)}{\sqrt{n}}\, J_n. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Здесь введено обозначение

$$J_n = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^{2n}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2(n+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)}, \tag{3.75}$$

где Γ — гамма-функция.

Отметим еще, что функции $Cs\,u$ и $Sn\,u$ зависят от величины n. При $n = 2$ эти функции выражаются через эллиптические функции с модулем, равным $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$:

$$Cs\,u = cn\,u, \qquad Sn\,u = sn\,u\,dn\,u.$$

Доказательство леммы 2. В справедливости леммы 2 можно убедиться при помощи теоремы Мозера об инвариантных кривых [7, 8, 26]. Для этого надо показать невырожденность функции Гамильтона H_0 невозмущенной системы, записанной в переменных действие – угол I, w.

В невозмущенной системе существует интеграл $H_0 = h = \mathrm{const}$. Все ее движения представляют собой периодические колебания. В плоскости (q, p) фазовые траектории замкнуты, симметричны относительно осей координат и охватывают положение равновесия $q = p = 0$. Максимальное значение q_* переменной q на этих траекториях равно $(2nh)^{\frac{1}{2n}}$.

Переменная I равна поделенной на 2π площади, заключенной внутри фазовой кривой:

$$I = \oint p\,dq = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{q_*}\sqrt{2h - \frac{1}{n}\,q^{2n}}\,dq = \frac{2J_n}{\pi\sqrt{n}}\,(2nh)^{\frac{n+1}{2n}}, \tag{3.76}$$

где величина J_n задается равенством (3.75).

Из (3.76) следует выражение h через переменную I:

$$h = \frac{1}{2n}\left(\frac{\pi\sqrt{n}\,I}{2J_n}\right)^{\frac{2n}{n+1}}. \tag{3.77}$$

Частота колебаний ω вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{\partial\,h}{\partial\,I} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{2J_n}\right)^{\frac{2n}{n+1}} I^{\frac{n-1}{n+1}}. \tag{3.78}$$

Сделаем замену переменных q, $p \to w$, I по формулам

$$q = \left(\frac{\pi\sqrt{n}\,I}{2J_n}\right)^{\frac{1}{n+1}} Cs\,(\beta w), \qquad p = -\left(\frac{\pi\sqrt{n}\,I}{2J_n}\right)^{\frac{n}{n+1}} Sn\,(\beta w), \tag{3.79}$$

где

$$\beta = \frac{\tau_*}{2\pi} = \frac{2(n+1)}{\pi\sqrt{n}}\,J_n.$$

Используя равенства (3.71), (3.72), можно вычислить скобку Пуассона функций q и p. Имеем

$$(q, p) = \frac{\partial\,q}{\partial\,w}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,I} - \frac{\partial\,q}{\partial\,I}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,w} = 1.$$

Следовательно [16], преобразование, задаваемое равенствами (3.79), является унивалентным каноническим преобразованием.

Функция Гамильтона (3.68) полной системы в переменных I, w принимает вид

$$H_0 = h(I) + \widetilde{h}(I, w, t),$$

где $h(I)$ задается равенством (3.77). Функция $\widetilde{h}$ имеет период 2π по w и период $\tau = 1$ по t, при $0 < I \ll 1$ она имеет непрерывные производные до сколь угодно высокого порядка по всем переменным, причем $\widetilde{h} = O\Big(I^{\frac{2n+1}{n+1}}\Big)$.

Так как

$$\frac{\partial^2 h}{\partial I^2} = \frac{\partial\,\omega}{\partial\,I} = \frac{(n-1)}{(n+1)^2}\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{2J_n}\right)^{\frac{2n}{n+1}} I^{-\frac{2}{n+1}},$$

то при $0 < I \ll 1$ условие невырожденности $\partial^2 h/\partial I^2 \neq 0$ выполнено. На основании теоремы Мозера об инвариантных кривых отсюда следует, что положение равновесия $q = p = 0$ устойчиво.

Проверка справедливости утверждений теоремы 7. Чтобы убедиться в справедливости теоремы 7, рассмотрим равенства (3.62), (3.63) последовательно для $m = 3, 4, 5, 6$. Так как $K_3 \equiv 0$, то равенства (3.63) при $m = 3$ имеют вид

$$w_{30} = \lambda_{30}, \quad w_{21} = \lambda_{21} - 3s_{30}, \quad w_{12} = \lambda_{12} - 3s_{30} - 2s_{21}, \quad w_{03} = \lambda_{03} - s_{30} - s_{21} - s_{12}.$$

Положив

$$s_{30} = \frac{1}{3}\,\lambda_{21}, \quad s_{21} = \frac{1}{2}(\lambda_{12} - \lambda_{21}), \quad s_{12} = \lambda_{03} + \frac{1}{6}\,\lambda_{21} - \frac{1}{2}\,\lambda_{12}, \quad s_{03} = 0, \tag{3.80}$$

уничтожим все коэффициенты формы W_3, кроме w_{30}. Учитывая равенства (3.49), получаем, что он равен $-f_{30}$, и первое утверждение теоремы 7 о неустойчивости при $f_{30} \neq 0$ сразу следует из леммы 1.

Пусть теперь $f_{30} = 0$, а s_{30}, s_{21}, s_{12}, s_{03} вычисляются по формулам (3.80). Тогда $W_3 = 0$ и, как показывают вычисления, для формы K_4 в (3.62) имеет место следующее выражение:

$$K_4 = \frac{\partial\,\Lambda_3(\xi,\eta_1)}{\partial\,\xi}\,\frac{\partial\,S_3(\xi,\eta_1)}{\partial\,\eta_1} - \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial\,S_3(\xi+\eta_1,\eta_1)}{\partial\,\xi}\bigg)^2. \tag{3.81}$$

Равенства (3.63) при $m = 4$ будут такими:

$$\begin{gathered} w_{40} = \lambda_{40} + k_{40}, \qquad w_{31} = \lambda_{31} + k_{31} - 4s_{40}, \qquad w_{22} = \lambda_{22} + k_{22} - 6s_{40} - 3s_{31}, \\ w_{13} = \lambda_{13} + k_{13} - 4s_{40} - 3s_{31} - 2s_{22}, \qquad w_{04} = \lambda_{04} + k_{04} - s_{40} - s_{31} - s_{22} - s_{13}. \end{gathered}$$

Положив

$$\begin{gathered} s_{40} = \frac{1}{4}\lambda_{31} - \frac{1}{2}\lambda_{21}^2, \qquad s_{31} = \frac{1}{3}\lambda_{22} - \frac{1}{2}\lambda_{31} - \frac{4}{3}\lambda_{21}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{03} + \lambda_{21}^2, \\ s_{22} = \frac{1}{4}\lambda_{31} - \frac{1}{2}\lambda_{22} + \frac{1}{2}\lambda_{13} + \frac{1}{2}\lambda_{03}\lambda_{12} - \frac{3}{4}\lambda_{12}^2 - 2\lambda_{21}\lambda_{03} + \frac{11}{6}\lambda_{21}\lambda_{12} - \frac{7}{12}\lambda_{21}^2, \\ s_{13} = \lambda_{04} + \frac{1}{6}\lambda_{22} - \frac{1}{2}\lambda_{13} - \lambda_{03}\lambda_{12} + \frac{5}{8}\lambda_{12}^2 - \frac{1}{2}\lambda_{03}^2 + \frac{5}{6}\lambda_{21}\lambda_{03} - \frac{7}{12}\lambda_{21}\lambda_{12} + \frac{5}{12}\lambda_{21}^2, \\ s_{04} = 0, \end{gathered} \tag{3.82}$$

получим $w_{31} = w_{22} = w_{13} = w_{04} = 0$. Для коэффициента w_{40} при учете равенств (3.81) и (3.49), (3.50) получаем следующее выражение: $w_{40} = -1/2(2f_{40} + f_{21}^2)$. Содержащееся во втором утверждении теоремы 7 условие устойчивости (3.54) следует из леммы 2, а условие неустойчивости — из леммы 1.

Пусть теперь $f_{30} = 0$ и $2f_{40} + f_{21}^2 = 0$, а коэффициенты форм S_3 и S_4 вычисляются по формулам (3.80) и (3.82). Тогда W_3 и W_4 равны нулю. Рассматривая равенства (3.63) при $m = 5$, можно выбором формы S_5 уничтожить все одночлены, кроме одночлена $w_{50}\,\xi^5$, причем, как показывают довольно громоздкие вычисления, $w_{50} = 2f_{40}f_{12} - f_{21}f_{31} - f_{50}$. Справедливость третьего утверждения теоремы 7 следует теперь из леммы 1.

Совершенно аналогично, рассматривая равенства (3.63) при $m = 6$, можно на основании лемм 1 и 2 получить справедливость и четвертого утверждения теоремы 7.

Об исследовании устойчивости в случае V. Этому случаю отвечает отображение (1.12) вида

$$x_1 = -x + y - \sum_{k=2}^{\infty}(X_k - Y_k), \qquad y_1 = -y - \sum_{k=2}^{\infty} Y_k, \tag{3.83}$$

где формы $X_m(x, y)$, $Y_m(x, y)$ выражаются через формы $F_3(x, y), F_(x, y), \ldots, F_{m+1}(x, y)$ из разложения (1.16).

Исследование случая V можно свести к изученному выше случаю IV, рассмотрев вместо отображения (3.83) его вторую степень, которая, как легко убедиться, задается равенствами

$$x_2 = x - 2y + X(x, y), \qquad y_2 = y + Y(x, y). \tag{3.84}$$

Здесь X и Y определяются по формулам

$$X = \sum_{k=2}^{\infty}[X_k(x, y) - 2Y_k(x, y) - X_k(x_1, y_1) + Y_k(x_1, y_1)],$$
$$Y = \sum_{k=2}^{\infty}[Y_k(x, y) - Y_k(x_1, y_1)],$$

в которых величины x_1, y_1 задаются правыми частями равенств (3.83).

Сделав в (3.84) замену переменных $x = \widetilde{x}$, $y = -1/2\,\widetilde{y}$, получим отображение $\widetilde{x}, \widetilde{y} \to$ $\to \widetilde{x}_2, \widetilde{y}_2$, которое можно представить в виде, аналогичном (1.12) с матрицей $\mathbf{G}$, отвечающей случаю IV из (1.11). При этом близкое к тождественному преобразование $\widetilde{x}, \widetilde{y} \to \widetilde{x}_*, \widetilde{y}_*$ имеет вид

$$\widetilde{x}_* = \widetilde{x} + X(\widetilde{x}, -1/2\,\widetilde{y}) - Y(\widetilde{x}, -1/2\,\widetilde{y}), \qquad \widetilde{y}_* = \widetilde{y} + Y(\widetilde{x}, -1/2\,\widetilde{y}).$$

Этому преобразованию отвечает аналогичная (1.16) производящая функция

$$\widetilde{F}(\widetilde{x}_*, \widetilde{y}) = \widetilde{x}_*\widetilde{y} + \sum_{m=3}^{\infty} \widetilde{F}_m(\widetilde{x}_*, \widetilde{y}).$$

Коэффициенты форм $\widetilde{F}_m$ выражаются через коэффициенты форм $F_3, F_4, \ldots, F_m$ производящей функции (1.16). Выпишем выражения для тех коэффициентов, которые потребуются при исследовании устойчивости:

$$\widetilde{f}_{30} = 0, \qquad \widetilde{f}_{21} = 3f_{30}, \qquad \widetilde{f}_{12} = \frac{3}{2}f_{30} - f_{21}, \qquad \widetilde{f}_{03} = \frac{1}{4}(f_{30} - f_{21} + f_{12}), \tag{3.85}$$

$$\widetilde{f}_{40} = -4f_{40} + 6f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2, \qquad \widetilde{f}_{31} = 2(f_{31} - f_{21}^2 - 2f_{40}) + 6(2f_{21} - f_{12})f_{30},$$
$$\widetilde{f}_{22} = -3f_{21}^2 + \frac{5}{2}f_{21}f_{12} - 3f_{40} + \frac{3}{2}f_{31} - f_{22} + \frac{3}{2}(3f_{03} - 3f_{12} + f_{21})f_{30} + 9f_{30}^2, \tag{3.86}$$
$$\widetilde{f}_{50} = 8f_{40}f_{21} - 6(f_{21}^2 + f_{31} + 4f_{40})f_{30} + 18(f_{12} + 2f_{21})f_{30}^2 - 54f_{30}^3,$$

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_{41} &= -f_{31}f_{21} - 8f_{40}f_{12} + 16f_{40}f_{21} + f_{21}^3 + 5f_{50} + 6(f_{22} - 8f_{40} - 5f_{21}^2)f_{30} + \\ &\quad + 9(17f_{21} - 3f_{12} - 3f_{03})f_{30}^2 - 108f_{30}^3, \end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_{60} &= -8f_{40}f_{31} + 48f_{40}^2 - 4f_{60} + 10f_{50}f_{21} - 12f_{40}f_{21}^2 + 2(f_{21}^3 + 24f_{40}f_{12} + 6f_{31}f_{21} - \\ &\quad - 36f_{40}f_{21} + 3f_{41} - 15f_{50})f_{30} + 18(5f_{21}^2 - f_{22} - 2f_{31} - 4f_{21}f_{12} + 2f_{40})f_{30}^2 + \\ &\quad + 54(f_{03} - 3f_{21} + 4f_{12})f_{30}^3 - 54f_{30}^4. \end{aligned} \tag{3.88}$$

Условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (3.83) получаются из теоремы 7, если в ее формулировке величины f_{rs} заменить на величины $\widetilde{f}_{rs}$, задаваемые равенствами (3.85)–(3.88).

Введем обозначения

$$g = 12f_{30}f_{21} - 9f_{30}^2 - 8f_{40}, \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned} e &= 8(f_{21}^4 - 2f_{31}f_{21}^2 + 5f_{50}f_{21} + f_{31}^2 - 2f_{60}) + 4(12f_{21}^2f_{12} - 15f_{50} - 13f_{21}^3 - \\ &\quad - 3f_{31}f_{21} + 6f_{41} - 12f_{31}f_{12})f_{30} + 18(7f_{21}^2 - 3f_{21}f_{12} - 2f_{22} + 3f_{31} + \\ &\quad + 4f_{12}^2)f_{30}^2 + 27(2f_{03} - 5f_{21} - f_{12})f_{30}^3 + 54f_{30}^4. \end{aligned} \tag{3.90}$$

Результаты исследования устойчивости в случае V можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 8. *Если $g < 0$, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения* (3.83) *устойчива, если же $g > 0$, то имеет место неустойчивость. Если $g = 0$, то при $e < 0$ неподвижная точка устойчива, а при $e > 0$ — неустойчива.*

4. Исследование устойчивости в эллиптическом случае

Этому случаю отвечает матрица VI из (1.11). Отображение (1.12) записывается в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y + \sum_{k=2}^{\infty}(\cos\alpha\, X_k(x,y) + \sin\alpha\, Y_k(x,y)), \\ y_1 &= -\sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y + \sum_{k=2}^{\infty}(-\sin\alpha\, X_k(x,y) + \cos\alpha\, Y_k(x,y)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где, как обычно, X_m, Y_m вычисляются через формы $F_3, F_4, \ldots, F_{m+1}$ производящей функции (1.16).

Положив $\xi = x - iy$, $\eta = x + iy$, запишем отображение (4.1) в комплексной форме:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varrho\xi + \varrho\sum_{k=2}^{\infty}\left[X_k\left(\frac{\xi+\eta}{2}, i\frac{\xi-\eta}{2}\right) + iY_k\left(\frac{\xi+\eta}{2}, i\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right], \\ \eta_1 &= \overline{\varrho}\eta + \overline{\varrho}\sum_{k=2}^{\infty}\left[X_k\left(\frac{\xi+\eta}{2}, i\frac{\xi-\eta}{2}\right) - iY_k\left(\frac{\xi+\eta}{2}, i\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\varrho = \cos\alpha + i\,\sin\alpha. \tag{4.3}$$

В (4.2) и далее чертой обозначается комплексно-сопряженная величина.

Отображение (4.2) будем представлять при помощи производящей функции $\Gamma(\xi, \eta_1)$:

$$\Gamma = \varrho\xi\eta_1 + \sum_{k=3}^{\infty} \Gamma_k(\xi\,\eta_1), \qquad \Gamma_k = \sum_{m+n=k} \gamma_{mn}\xi^m\eta_1^n.$$

В неявной форме отображение задается равенствами

$$\xi_1 = \frac{\partial\,\Gamma}{\partial\,\eta_1} = \varrho\xi + \sum_{k=3}^{8} \frac{\partial\,\Gamma_k}{\partial\,\eta_1} + O_8, \quad \eta = \frac{\partial\,\Gamma}{\partial\,\xi} = \varrho\eta_1 + \sum_{k=3}^{8} \frac{\partial\,\Gamma_k}{\partial\,\xi} + O_8. \tag{4.4}$$

Коэффициенты форм Γ_k выражаются через коэффициенты форм $F_3, F_4, \ldots, F_k$ в функции (1.16). Для краткости выпишем эти выражения только для форм Γ_3 и Γ_4:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{30} = \frac{1}{4}[(f_{21} - f_{03}) - i(f_{30} - f_{12})], \qquad \gamma_{21} = \frac{\varrho}{4}[(3f_{03} + f_{21}) - i(3f_{30} + f_{12})],\\
&\gamma_{12} = -\varrho^3\overline{\gamma_{21}}, \qquad \gamma_{03} = -\varrho^3\overline{\gamma_{30}},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{40} &= \frac{1}{32}[(4f_{31} - 4f_{13} - 9f_{30}^2 - 9f_{03}^2 - 6f_{30}f_{12} + 7f_{12}^2 - f_{21}^2 + 18f_{21}f_{03}) -\\
&\quad - i\,2(2f_{04} + 2f_{40} - 2f_{22} + 3f_{30}f_{21} + 5f_{21}f_{12} + 9f_{30}f_{03} - 9f_{12}f_{03})],\\
\gamma_{31} &= \frac{\varrho}{8}[(2f_{31} + 2f_{13} + 9f_{03}^2 - 9f_{30}^2 - 3f_{21}^2 - f_{12}^2 - 6f_{30}f_{12} - 6f_{21}f_{03}) -\\
&\quad - i\,4(f_{40} - f_{04} + f_{21}f_{12} + 3f_{12}f_{03})],\\
\gamma_{22} &= -\frac{\varrho^2}{16}[(27f_{30}^2 + 27f_{03}^2 + 7f_{21}^2 + 7f_{12}^2 + 6f_{30}f_{12} + 6f_{03}f_{21}) -\\
&\quad - i\,2(9f_{30}f_{03} + 9f_{30}f_{21} + 9f_{03}f_{12} - 6f_{40} - 6f_{04} - 2f_{22} + 5f_{21}f_{12})],\\
\gamma_{13} &= -\varrho^2\gamma_{31}^*, \qquad \gamma_{04} = \varrho^4\gamma_{40}^*.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

В последних двух равенствах γ_{31}^* и γ_{40}^* являются величинами γ_{31} и γ_{40}, в которых сделана замена f_{ij} на f_{ji}.

В задаче об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (4.1) важно наличие или отсутствие резонанса. Если резонанс есть, то его порядком называется наименьшее натуральное число k, для которого $\varrho^k = 1$. Рассмотренные выше случаи, когда матрица нормализованного линейного отображения имеет вид II, IV и III, V из (1.11), являются случаями резонансов первого и второго порядков соответственно. При этих резонансах $\sin\alpha = 0$, а $\varrho = 1$ при резонансе первого порядка и $\varrho = -1$, если порядок резонанса равен двум. В изучаемом в данном разделе эллиптическом случае резонанс либо отсутствует, либо имеет порядок выше второго.

Нерезонансный случай. 1. Рассмотрим случай, когда отсутствуют резонансы третьего и четвертого порядков, то есть $\varrho^3 \neq 1$ и $\varrho^4 \neq 1$. Упростим (приведем к нормальной форме) отображение (4.2). Для этого вместо переменных ξ, η введем новые переменные u, v при помощи производящей функции

$$S(u, \eta) = u\eta + \sum_{m=3}^{\infty} S_m(u, \eta), \qquad S_m = \sum_{\nu+\mu=m} s_{\nu\mu}u^\nu\eta^\mu. \tag{4.7}$$

Связь ξ, η и u, v (а также ξ_1, η_1 и u_1, v_1) определяется из соотношений

$$\xi = \frac{\partial\,S}{\partial\,\eta} = u + \sum_{m=3}^{8} \frac{\partial\,S_m}{\partial\,\eta} + O_8, \quad v = \frac{\partial\,S}{\partial\,u} = \eta + \sum_{m=3}^{8} \frac{\partial\,S_m}{\partial\,u} + O_8. \tag{4.8}$$

В новых переменных имеем отображение u, $v \to u_1$, v_1, задаваемое при помощи производящей функции

$$W = \varrho\, u v_1 + \sum_{m=3}^{\infty} W_m(u, v_1), \qquad W_m = \sum_{\nu+\mu=m} w_{\nu\mu} u^{\nu} v_1^{\mu} \tag{4.9}$$

посредством равенств

$$u_1 = \frac{\partial W}{\partial v_1} = \varrho u + \sum_{m=3}^{8} \frac{\partial W_m}{\partial v_1} + O_8, \qquad v = \frac{\partial W}{\partial u} = \varrho v_1 + \sum_{m=3}^{8} \frac{\partial W_m}{\partial u} + O_8. \tag{4.10}$$

Из (4.4), (4.8) и (4.10) получаем соотношение

$$W_3(u, v_1) = \Gamma_3(u, v_1) + S_3(u, \varrho v_1) - S_3(\rho u, v_1). \tag{4.11}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях u, v_1 в левой и правой частях этого соотношения, получим равенства

$$\begin{aligned} &w_{30} = \gamma_{30} - (\varrho^3 - 1)s_{30}, && w_{21} = \gamma_{21} - \varrho(\varrho - 1)s_{21},\\ &w_{12} = \gamma_{12} + \varrho(\varrho - 1)s_{12}, && w_{03} = \gamma_{03} + (\varrho^3 - 1)s_{03}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Коэффициенты формы S_3 можно выбрать так, чтобы полностью уничтожить форму W_3 в производящей функции (4.9):

$$s_{30} = \frac{\gamma_{30}}{\varrho^3 - 1}, \quad s_{21} = \frac{\gamma_{21}}{\varrho(\varrho - 1)}, \quad s_{12} = -\frac{\gamma_{12}}{\varrho(\varrho - 1)}, \quad s_{03} = -\frac{\gamma_{03}}{\varrho^3 - 1}. \tag{4.13}$$

При таком выборе S_3 из (4.4), (4.8) и (4.10) следует соотношение

$$W_4(u, v_1) = \Gamma_4(u, v_1) + \overline{\varrho}\frac{\partial\, \Gamma_3(u, v_1)}{\partial\, u}\, \frac{\partial\, S_3(u, v_1)}{\partial\, v_1} + S_4(u, \varrho v_1) - S_4(\rho u, v_1).$$

Отсюда получаем такие выражения для коэффициентов формы W_4:

$$\begin{gathered} w_{40} = \gamma_{40} + \frac{3\gamma_{30}\gamma_{21}}{\varrho(\varrho - 1)} - (\varrho^4 - 1)s_{40}, \quad w_{31} = \gamma_{31} + \frac{2\gamma_{21}^2}{\varrho(\varrho - 1)} - \frac{6\gamma_{30}\gamma_{12}}{\varrho - 1} - \varrho(\varrho^2 - 1)s_{31},\\ w_{22} = \gamma_{22} - \frac{9\varrho^2\gamma_{30}\gamma_{03}}{\varrho^3 - 1} - \frac{(4\varrho - 1)\gamma_{21}\gamma_{12}}{\varrho(\varrho - 1)},\\ w_{13} = \gamma_{13} - \frac{2\gamma_{12}^2}{\varrho - 1} - \frac{6\varrho^2\gamma_{03}\gamma_{21}}{\varrho^3 - 1} + \varrho(\varrho^2 - 1)s_{13}, \quad w_{04} = \gamma_{04} - \frac{3\varrho^2\gamma_{03}\gamma_{12}}{\varrho^3 - 1} + (\varrho^4 - 1)s_{04}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Так как в рассматриваемом нерезонансном случае $\varrho \neq 1$, $\varrho \neq -1$, $\varrho^3 \neq 1$ и $\varrho^4 \neq 1$, то s_{40}, s_{31}, s_{13}, s_{04} можно выбрать так, что коэффициенты w_{40}, w_{31}, w_{13}, w_{04} обратятся в нуль. Коэффициент же w_{22} уничтожить нельзя, и нормализованная до членов четвертой степени включительно производящая функция (4.9) имеет вид

$$W = \varrho\, u v_1 + w_{22}\, u^2 v_1^2 + O_5. \tag{4.15}$$

Из (4.15) и (4.10) находим отображение (4.2) в новых переменных:

$$u_1 = \varrho u\,(1 + 2\overline{\varrho}^2 w_{22} uv) + O_4, \qquad v_1 = \overline{\varrho} v(1 - 2\overline{\varrho}^2 w_{22} uv) + O_4. \tag{4.16}$$

Это отображение может быть получено как отображение от $t = 0$ до $t = 2\pi$ в системе с 2π-периодической по t функцией Гамильтона $H(u, v, t)$ вида

$$H = i\lambda\, uv + \frac{\overline{\varrho}^2}{2\pi}\, w_{22}\, u^2 v^2 + O_5 \qquad \left(\lambda = \frac{\alpha}{2\pi}\right). \tag{4.17}$$

В симплектических полярных координатах r, φ, вводимых заменой

$$u = -i\sqrt{2r}\exp(i\varphi), \qquad v = i\sqrt{2r}\exp(-i\varphi), \tag{4.18}$$

получаем функцию Гамильтона

$$H = \lambda\, r + c_2\, r^2 + O\bigl(r^{5/2}\bigr) \qquad \left(c_2 = -\frac{i}{\pi}\overline{\varrho}^2\, w_{22}\right). \tag{4.19}$$

Коэффициент c_2 является вещественным, он находится из третьего соотношения (4.14) с учетом равенств (4.3), (4.5) и (4.6):

$$\begin{aligned} c_2 = &-\frac{3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}}{4\pi} - \\ &-\frac{1}{32\pi}\left[9\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{2}\,(a_1^2 + b_1^2) + 3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\,(a_2^2 + b_2^2) + 6(a_1 b_2 - a_2 b_1) - 8a_2 b_2\right], \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$a_1 = f_{30} - f_{12}, \qquad a_2 = f_{12} + 3f_{30}, \qquad b_1 = f_{21} - f_{03}, \qquad b_2 = f_{21} + 3f_{03}. \tag{4.21}$$

В переменных r, φ отображение (4.16) можно получить как преобразование за период 2π в системе с функцией Гамильтона (4.19):

$$r_1 = r + O(r^{5/2}), \qquad \varphi_1 = \alpha + \varphi + 4\pi\, c_2\, r + O(r^{3/2}). \tag{4.22}$$

Отсюда, на основании теоремы Мозера об инвариантных кривых, следует [17], что если $c_2 \neq 0$, то неподвижная точка отображения устойчива.

2. Пусть $c_2 = 0$. Тогда при исследовании устойчивости надо проводить нормализацию отображения (4.2) до членов выше четвертой степени. Если отсутствуют резонансы до шестого порядка включительно, то выбором форм S_3, S_4, S_5 и S_6 в функции (4.9) можно полностью уничтожить формы W_3, W_4, W_5, а в форме W_6 останется один неуничтожаемый одночлен $w_{33}u^3v_1^3$. В переменных r, φ, вводимых заменой (4.18), нормализованному отображению соответствует функция Гамильтона

$$H = \lambda\, r + c_3\, r^3 + O\bigl(r^{7/2}\bigr) \qquad \left(c_3 = -\frac{2i}{\pi}\overline{\varrho}^3\, w_{33}\right). \tag{4.23}$$

Величина c_3 будет вещественной. Ее выражение через коэффициенты форм $F_3, \ldots, F_6$ из (1.16) в общем случае довольно громоздко. Выпишем это выражение в частном случае, когда в правых частях равенств (4.1), задающих отображение, нет форм четной степени (а следовательно, в производящей функции (1.16) формы нечетных степеней тождественно равны нулю). В этом случае

$$\begin{aligned} c_3 = &-\frac{5f_{60} + f_{42} + f_{24} + 5f_{06}}{4\pi} + \frac{f_{22}(f_{31} + 3f_{13}) - 6f_{04}(f_{31} - f_{13})}{6\pi} - \\ &-\frac{3(3f_{31}^2 + 3f_{13}^2 + 2f_{31}f_{13}) + 8(f_{22}^2 + 12f_{04}^2 + 4f_{22}f_{04})}{12\pi}\operatorname{ctg}2\alpha - \frac{9(f_{31}+f_{13})^2 + 4(f_{22}+6f_{04})^2}{18\pi\sin 2\alpha}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Из теоремы Мозера об инвариантных кривых следует, что если $c_3 \neq 0$, то неподвижная точка отображения устойчива.

3. Если же $c_2 = 0$ и $c_3 = 0$, то необходима нормализация отображения (4.2) до членов выше шестой степени. Если нет резонансов до восьмого порядка включительно, то отвечающая нормализованному отображению функция Гамильтона имеет вид

$$H = \lambda\, r + c_4\, r^4 + O\big(r^{9/2}\big). \tag{4.25}$$

Согласно теореме Мозера, если $c_4 \neq 0$, то имеет место устойчивость. Выражение c_4 через коэффициенты форм $F_3, \ldots, F_8$ не выписываем ввиду его большой громоздкости.

Результаты проведенного анализа нерезонансного случая можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 9. *Если отсутствуют резонансы до порядка $2n$ включительно* $(n = 2, 3, 4)$ *и в функции Гамильтона, соответствующей нормализованному отображению, величина c_n отлична от нуля, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения* (4.1) *устойчива.*

Замечание. При практическом применении теоремы 9 нормализацию отображения можно проводить только до первого отличного от нуля коэффициента c_n.

Резонанс третьего порядка. Для резонанса третьего порядка $\varrho^3 = 1$. При этом $\cos\alpha = -1/2$, а величина $\sin\alpha$ может принимать значения $\sqrt{3}/2$ или $-\sqrt{3}/2$. Рассмотрим некоторые случаи нормальных форм отображения при этом резонансе.

1. Из (4.12) видно, что если $\varrho^3 = 1$, то коэффициенты w_{30} и w_{03} уничтожить нельзя. Коэффициенты же w_{21} и w_{12} уничтожаются, если, например, положить

$$s_{30} = 0, \qquad s_{21} = \frac{\gamma_{21}}{\varrho(\varrho - 1)}, \qquad s_{12} = -\frac{\gamma_{12}}{\varrho(\varrho - 1)}, \qquad s_{03} = 0. \tag{4.26}$$

Нормализованная производящая функция (4.9) имеет вид

$$W = \varrho\, uv_1 + w_{30}\, u^3 + w_{03}\, v_1^3 + O_4. \tag{4.27}$$

Здесь

$$w_{30} = \frac{1}{4}\,(b_1 - ia_1), \qquad w_{03} = -\frac{1}{4}\,(b_1 + ia_1),$$

а величины a_1, b_1 определены равенствами (4.21).

Из (4.10) и (4.27) следует, что нормализованное до членов второй степени включительно отображение задается равенствами

$$u_1 = \varrho\,(u + 3w_{03}v^2) + O_3, \qquad v_1 = \overline{\varrho}\,(v - 3w_{30}u^2) + O_3. \tag{4.28}$$

Нетрудно убедиться, что отображению (4.28) соответствует отображение за период, задаваемое каноническими дифференциальными уравнениями с 2π-периодической по t функцией Гамильтона

$$H = i\lambda\, uv + \frac{1}{2\pi}\,\exp(-i\,3\lambda\, t)w_{30}\, u^3 + \frac{1}{2\pi}\,\exp(i\,3\lambda\, t)w_{03}\, v^3 + O_4. \tag{4.29}$$

В симплектических полярных координатах r, φ, вводимых равенствами (4.18), нормализованное отображение задается при помощи канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \lambda\, r + \frac{\sqrt{2}}{4\pi}[a_1 \sin(3\varphi - 3\lambda\, t) + b_1 \cos(3\varphi - 3\lambda\, t)]r^{3/2} + O(r^2). \tag{4.30}$$

2. Пусть $f_{30} = f_{12}$ и $f_{21} = f_{03}$. Тогда $a_1 = b_1 = 0$. И если коэффициенты формы S_3 вычислить по формулам (4.26), то форма W_3 в функции (4.9) будет уничтожена полностью. Рассмотрев затем члены третьей степени в отображении, получим, что, как и в нерезонансном случае, в форме W_4 нельзя уничтожить одночлен $w_{22}u^2v_1^2$. Производящая функция нормализованного отображения будет иметь вид (4.15). Соответствующая нормализованному отображению функция Гамильтона задается в переменных r, φ равенством (4.19), в котором коэффициент c_2 вычисляется по формуле

$$c_2 = -\frac{3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}}{4\pi} + \frac{4f_{30}f_{03}}{\pi} - \frac{f_{30}^2 + f_{03}^2}{\pi}\sin\alpha. \tag{4.31}$$

3. Пусть теперь $f_{30} = f_{12}$, $f_{21} = f_{03}$, а величина c_2 из (4.31) равна нулю. Тогда выбором форм S_3, S_4, S_5 в функции (4.7) можно привести функцию (4.9) к следующей форме:

$$W = \varrho\, uv_1 + w_{41}\, u^4v_1 + w_{14}\, uv_1^4 + O_5; \tag{4.32}$$

нормализованное до членов четвертой степени включительно отображение (4.2) записывается в виде равенств

$$u_1 = \varrho\,[u + \overline{\varrho}(w_{41}u^4 + 4w_{14}uv^3)] + O_5, \qquad v_1 = \overline{\varrho}[v - \overline{\varrho}(4w_{41}u^3v + w_{14}v^4)] + O_5. \tag{4.33}$$

Соответствующая этому отображению 2π-периодическая по t функция Гамильтона в переменных u, v имеет вид

$$H = i\lambda\, uv + \frac{\overline{\varrho}}{2\pi}\exp(-i\,3\lambda\, t)\, w_{41}\, u^4v + \frac{\overline{\varrho}}{2\pi}\exp(i\,3\lambda\, t)\, w_{14}\, uv^4 + O_5, \tag{4.34}$$

а в переменных r, φ —

$$H = \lambda\, r + [d_2\sin(3\varphi - 3\lambda\, t) + e_2\cos(3\varphi - 3\lambda\, t)]r^{5/2} + O(r^3), \tag{4.35}$$

где

$$\begin{gathered} d_2 = \frac{\sqrt{2}}{24\pi}[3(5f_{50} - f_{32} - 3f_{14} + 12f_{30}^3 - 24f_{03}f_{04} + 12f_{30}f_{13} + 156f_{30}f_{03}^2 - 4f_{30}f_{31} - \\ - 40f_{03}f_{40}) + 4(14f_{40}f_{30} + 18f_{04}f_{30} - 32f_{03}^3 - 96f_{30}^2f_{03} - 3f_{03}f_{13} + 5f_{31}f_{03})\sin\alpha], \\ e_2 = -d_2^*, \end{gathered} \tag{4.36}$$

d_2^* — величина d_2, в которой сделана замена f_{ij} на f_{ji}.

4. Пусть одновременно выполняются пять равенств: $f_{30} = f_{12}$, $f_{21} = f_{03}$, $c_2 = 0$, $d_2 = 0$, $e_2 = 0$. Тогда выбором S_3, S_4, S_5 и S_6 можно привести функцию (4.2) к нормальной форме

$$W = \varrho\, uv_1 + w_{60}\, u^6 + w_{33}\, u^3v_1^3 + w_{06}\, v_1^6 + O_7. \tag{4.37}$$

Нормализованное до членов пятой степени отображение (4.2) имеет вид

$$u_1 = \varrho\,[u + 3w_{33}u^3v^2 + 6w_{06}v^5) + O_6, \qquad v_1 = \overline{\varrho}[v - 6w_{60}u^5 - 3w_{33}u^2v^3) + O_6. \tag{4.38}$$

Соответствующая этому отображению функция Гамильтона будет такой:

$$H = i\lambda uv + \frac{1}{2\pi}\exp(-i6\lambda t)w_{60}u^6 + \frac{1}{2\pi}w_{33}u^3v^3 + \frac{1}{2\pi}\exp(i6\lambda t)w_{06}\, v^6 + O_7. \tag{4.39}$$

В переменных r, φ имеем

$$H = \lambda r + [c_3 + d_3 \sin(6\varphi - 6\lambda t) + e_3 \cos(6\varphi - 6\lambda t)]r^3 + O(r^{7/2}). \tag{4.40}$$

Коэффициенты c_3, d_3 и e_3 вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
c_3 = \frac{1}{12\pi}\{&740(f_{40}f_{03}^2 + f_{04}f_{30}^2) - 18(f_{40}f_{13} + f_{04}f_{31}) - 6(f_{13}f_{04} + f_{31}f_{40}) + \\
&+ 72(f_{14}f_{03} + f_{41}f_{30}) + 36(f_{30}f_{23} + f_{03}f_{32}) - 3(f_{42} + f_{24}) - 4256f_{03}f_{30}(f_{03}^2 + f_{30}^2) + \\
&+ 572(f_{40}f_{30}^2 + f_{04}f_{03}^2) - 148f_{30}f_{03}(f_{31} + f_{13}) - 15(f_{60} + f_{06}) + 2[472(f_{30}^4 + f_{03}^4) - \\
&- 480f_{30}f_{03}(f_{40} + f_{04}) - 8(f_{40}^2 + f_{04}^2 + 6f_{40}f_{04} + f_{31}f_{03}^2 + f_{13}f_{30}^2 + f_{30}f_{32} + f_{03}f_{23}) + \\
&+ 16(f_{31}f_{30}^2 + f_{13}f_{03}^2 - f_{30}f_{14} - f_{03}f_{41}) + 3504f_{30}^2f_{03}^2 + 6f_{31}f_{13} + f_{31}^2 + f_{13}^2]\sin\alpha\}, \\
d_3 = -\frac{1}{48\pi}\{&48(f_{30}^2f_{13} + f_{03}^2f_{31}) - 1440f_{30}f_{03}(f_{40} + f_{04}) + 2816f_{30}^2f_{03}^2 + \\
&+ 6(f_{15} + f_{51} - f_{33} + 5f_{13}f_{31}) + 8(f_{30}^2f_{31} + f_{13}f_{03}^2) + 408f_{40}f_{04} - 9(f_{31}^2 + f_{13}^2) + \\
&+ 180(f_{40}^2 + f_{04}^2) + [16(f_{31}f_{04} + f_{13}f_{40} + f_{32}f_{03} + f_{23}f_{30}) - 32(f_{41}f_{30} + f_{14}f_{03}) + \\
&+ 48(f_{04}f_{13} + f_{40}f_{31}) - 128f_{30}f_{03}(f_{31} + f_{13}) + 192(f_{30}^2f_{04} + f_{03}^2f_{40}) - \\
&- 896f_{30}f_{03}(f_{30}^2 + f_{03}^2) + 320(f_{04}f_{03}^2 + f_{40}f_{30}^2)]\sin\alpha\}, \\
e_3 = -\frac{1}{24\pi}\{&64f_{30}f_{03}(f_{30}^2 - f_{03}^2) - 44(f_{40}f_{30}^2 - f_{04}f_{03}^2) + 42(f_{40}f_{31} - f_{04}f_{13}) + \\
&+ 54(f_{31}f_{04} - f_{13}f_{40}) - 4(f_{30}^2f_{04} - f_{03}^2f_{40}) - 3(f_{60} - f_{06}) - 3(f_{24} - f_{42}) + \\
&+ 212f_{30}f_{03}(f_{13} - f_{31}) + [-8(f_{30}f_{32} - f_{03}f_{23}) - 64(f_{13}f_{03}^2 - f_{31}f_{30}^2) + \\
&+ 16(f_{30}f_{14} - f_{03}f_{41}) - 192f_{30}f_{03}(f_{04} - f_{40}) + 16(f_{03}^4 - f_{30}^4) - \\
&- 64(f_{30}^2f_{13} - f_{03}^2f_{31}) - 32(f_{40}^2 - f_{04}^2) - 4(f_{13}^2 - f_{31}^2)]\sin\alpha\}.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Справедливы следующие утверждения об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (4.1) в случае резонанса третьего порядка.

Теорема 10. *1. При выполнении хотя бы одного из неравенств* $f_{30} \neq f_{12}$ *или* $f_{21} \neq f_{03}$ *неподвижная точка* $x = y = 0$ *отображения* (4.1) *неустойчива.*

2. Если $f_{30} = f_{12}$ *и* $f_{21} = f_{03}$, *а величина* c_2, *задаваемая равенством* (4.31), *отлична от нуля, то неподвижная точка отображения устойчива.*

3. Если одновременно выполняются три равенства $f_{30} = f_{12}$, $f_{21} = f_{03}$, $c_2 = 0$ *и хотя бы одна из величин* d_2 *и* e_2, *вычисляемых по формулам* (4.36), *отлична от нуля, то неподвижная точка неустойчива.*

4. Если одновременно $f_{30} = f_{12}$, $f_{21} = f_{03}$, $c_2 = 0$, $d_2 = 0$, $e_2 = 0$, *то при выполнении неравенства* $|c_3| > \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$, *где величины* c_3, d_3 *и* e_3 *вычисляются по формулам* (4.41), *имеет место устойчивость, а при* $|c_3| < \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$ *— неустойчивость.*

В первом и втором утверждениях теоремы формулируются достаточные условия устойчивости и неустойчивости, которые следуют из анализа членов второй и третьей степени в разложении правых частей равенств (4.1) в ряды. Эти утверждения получены ранее [19, 28] при помощи теоремы Четаева о неустойчивости и теоремы Мозера об инвариантных кривых.

Третье и четвертое утверждения теоремы относятся к случаю, когда для решения вопроса об устойчивости рассмотрения членов второй и третьей степеней недостаточно и требуется привлечение еще членов четвертой и пятой степеней. Доказательство этих утверждений здесь не приводится, они аналогичны соответствующим доказательствам из [19, 28].

Резонанс четвертого порядка. При резонансе четвертого порядка $\varrho^4 = 1$. Для этого резонанса $\cos\alpha = 0$, а величина $\sin\alpha$ может принимать значения 1 или -1.

1. Рассмотрим сначала случай, когда вопрос об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения может быть решен по членам не выше третьей степени в разложении правых частей равенств (4.1) в ряды.

Как и в нерезонансном случае, выбрав коэффициенты формы S_3 по формулам (4.13), можно в производящей функции (4.9) уничтожить форму W_3. Для коэффициентов формы W_4 будем тогда иметь выражения (4.14). Из этих выражений видно, что выбором величин s_{31} и s_{13} можно уничтожить w_{31} и w_{13}. Коэффициенты же w_{22}, w_{40} и w_{04} уничтожить нельзя, и функция (4.9) запишется в такой форме:

$$W = \varrho\, uv_1 + w_{40}u^4 + w_{22}\, u^2v_1^2 + w_{04}v_1^4 + O_5. \tag{4.42}$$

Эта функция отличается от функции (4.15) наличием третьего и четвертого слагаемых, появившихся из-за резонанса четвертого порядка.

Нормализованное отображение (4.2) имеет вид

$$u_1 = \varrho(u - 2w_{22}u^2v + 4w_{04}v^3) + O_4, \qquad v_1 = \overline{\varrho}(v + 2w_{22}uv^2 - 4w_{40}u^3) + O_4. \tag{4.43}$$

Соответствующая этому отображению функция Гамильтона будет такой:

$$H = i\lambda uv + \frac{1}{2\pi}\exp(-i4\lambda t)w_{40}u^4 - \frac{1}{2\pi}w_{22}u^2v^2 + \frac{1}{2\pi}\exp(i4\lambda t)w_{04}v^4 + O_5. \tag{4.44}$$

В симплектических полярных координатах r, φ, вводимых равенствами (4.18), имеем такую функцию Гамильтона:

$$H = \lambda\, r + [\gamma_2 + \alpha_2\sin(4\varphi - 4\lambda\, t) + \beta_2\cos(4\varphi - 4\lambda\, t)]r^2 + O(r^{5/2}). \tag{4.45}$$

Коэффициенты γ_2, α_2 и β_2 выражаются через коэффициенты разложения производящей функции (1.16) по следующим формулам:

$$\gamma_2 = -\frac{3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}}{4\pi} + \frac{5f_{21}f_{12} + 9(f_{30}f_{21} + f_{03}f_{12} + f_{30}f_{03})}{8\pi} - \\ - 3\,\frac{6(f_{30}f_{12} + f_{03}f_{21}) + 3(f_{30}^2 + f_{03}^2) - f_{21}^2 - f_{12}^2}{16\pi}\sin\alpha, \tag{4.46}$$

$$\alpha_2 = \frac{f_{31} - f_{13} + f_{12}^2 - f_{21}^2 + 3(f_{21}f_{03} - f_{12}f_{30}) + 3(f_{12}f_{03} - f_{21}f_{30})\sin\alpha}{4\pi}, \tag{4.47}$$

$$\beta_2 = -\frac{2(f_{40} + f_{04}) - 2f_{22} - 3(f_{30}f_{21} + f_{03}f_{12}) + 9f_{30}f_{03} + 5f_{21}f_{12}}{8\pi} + \\ + 3\,\frac{3(f_{30}^2 + f_{03}^2) - 2(f_{30}f_{12} + f_{03}f_{21}) - f_{21}^2 - f_{12}^2}{16\pi}\sin\alpha. \tag{4.48}$$

Отметим,что коэффициент γ_2 может быть получен из коэффициента c_2, задаваемого равенством (4.20), если в нем положить $\cos\alpha = 0$.

Справедлива следующая теорема [19, 28].

Теорема 11. *Если выполняется неравенство* $|\gamma_2| > \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$, *то неподвижная точка* $x = y = 0$ *отображения* (4.1) *устойчива; если же* $|\gamma_2| < \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$, *то имеет место неустойчивость.*

2. Рассмотрим критический случай, когда для коэффициентов функции Гамильтона (4.45) выполняется равенство $|\gamma_2| = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$. В этом случае для решения вопроса об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения необходимо в разложениях (4.1) учитывать члены выше третьей степени.

Как и в некритическом случае, уничтожим в функции (4.9) форму W_3, определив коэффициенты формы S_3 равенствами (4.13), а затем выбором S_4 и S_5 максимально упростим W_4 и W_5. В результате получим нормальную форму функции (4.9) в виде

$$W = \varrho uv_1 + w_{40}u^4 + w_{22}u^2v_1^2 + w_{04}v_1^4 + w_{51}u^5v_1 + w_{33}u^3v_1^3 + w_{15}uv_1^5 + O_7. \tag{4.49}$$

Нормализованному отображению (4.2) в переменных r, φ отвечает 2π-периодическая по t функция Гамильтона

$$\begin{aligned} H = \lambda r + [\gamma_2 + \alpha_2 \sin(4\varphi - 4\lambda t) + \beta_2 \cos(4\varphi - 4\lambda t)]r^2 + \\ + [\gamma_3 + \alpha_3 \sin(4\varphi - 4\lambda t) + \beta_3 \cos(4\varphi - 4\lambda t)]r^3 + O(r^{7/2}). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Коэффициенты функции (4.50) выражаются через коэффициенты f_{ij} разложения производящей функции (1.16). Для последних трех коэффициентов эти выражения весьма громоздки. Здесь приведем выражения для коэффициентов функции (4.50) в частном случае, когда правые части равенств (4.1) не содержат формы четной степени:

$$\begin{aligned}
&\gamma_2 = -\frac{3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}}{4\pi}, \qquad \alpha_2 = \frac{f_{31} - f_{13}}{4\pi}, \qquad \beta_2 = -\frac{f_{40} - f_{22} + f_{04}}{4\pi},\\
&\gamma_3 = -\frac{5f_{60} + f_{42} + f_{24} + 5f_{06}}{4\pi} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}[3(f_{40}f_{13} + f_{04}f_{31}) + 5(f_{40}f_{31} + f_{04}f_{13}) + 2f_{22}(f_{31} + f_{13})],\\
&\alpha_3 = \frac{2(f_{51} - f_{15}) - 8f_{22}(f_{40} - f_{04}) - 3(f_{31}^2 - f_{13}^2)}{4\pi},\\
&\beta_3 = -\frac{3f_{60} - f_{42} - f_{24} + 3f_{06}}{4\pi} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}[3(f_{40}f_{31} + f_{04}f_{13}) - 3(f_{40}f_{13} + f_{04}f_{31}) - 2f_{22}(f_{31} + f_{13})].
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Согласно [29], справедливо следующее утверждение об устойчивости неподвижной точки отображения в критическом случае резонанса четвертого порядка.

Теорема 12. *Пусть* $|\gamma_2| = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$. *Тогда при выполнении неравенства* $\gamma_2\gamma_3 > (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3)$ *неподвижная точка* $x = y = 0$ *отображения* (4.1) *устойчива, а при* $\gamma_2\gamma_3 < (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3)$ — *неустойчива.*

О резонансах пятого и шестого порядков в случае $c_2 = 0$. Пусть отображение (4.1) таково, что нет резонансов до четвертого порядка включительно, а вычисляемая по формуле (4.20) величина c_2 равна нулю. Тогда для решения задачи об устойчивости неподвижной точки $x = y = 0$ отображения (4.1) необходимо учитывать в разложениях (4.1) члены выше третьей степени. Кратко рассмотрим задачу об устойчивости неподвижной точки, предполагая, что $c_2 = 0$ и существует резонанс пятого или шестого порядков.

1. Пусть существует резонанс пятого порядка $\varrho^5 = 1$. Тогда $\cos\alpha = (\sqrt{5} - 1)/4$ или $\cos\alpha = -(\sqrt{5}+1)/4$. Подходящим выбором форм S_3, S_4 и S_5 можно полностью уничтожить формы W_3, W_4 и упростить форму W_5 в функции (4.9). Производящая функция отображения, нормализованного до членов четвертой степени включительно, будет такой:

$$W = \varrho\, uv_1 + w_{50}u^5 + w_{05}v_1^5 + O_6. \tag{4.52}$$

Функция Гамильтона, соответствующая нормализованному отображению, в симплектических полярных координатах r, φ имеет вид

$$H = \lambda\, r + [\alpha_4 \sin(5\varphi - 5\lambda\, t) + \beta_4 \cos(5\varphi - 5\lambda\, t)]r^{5/2} + O(r^3). \tag{4.53}$$

Имеет место следующее утверждение [28].

Теорема 13. *Если хотя бы одна из величин α_4 или β_4 отлична от нуля, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (4.1) неустойчива.*

Выражения для величин α_4 и β_4 выглядят довольно громоздко и поэтому здесь не приводятся. Отметим только, что в частном случае, когда правые части равенств (4.1) не содержат форм четной степени, эти величины равны нулю.

2. Пусть теперь $c_2 = 0$ и нет резонансов до пятого порядка включительно, но есть резонанс шестого порядка $\varrho^6 = 1$. Для этого резонанса $\cos\alpha = 1/2$, а $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$ или $\sin\alpha = -\sqrt{3}/2$.

В этом случае выбором S_3, S_4, S_5 и S_6 функцию (4.9) можно привести к форме (4.37), а нормализованному отображению в переменных r, φ будет отвечать функция Гамильтона вида (4.40). В частном случае, когда в правых частях равенств (4.1) нет членов четных степеней, коэффициенты c_3, d_3 и e_3 этой функции вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{5f_{60} + f_{42} + f_{24} + 5f_{06}}{4\pi} - \frac{f_{40}f_{31} + f_{04}f_{13} + 3(f_{40}f_{13} + f_{04}f_{31})}{2\pi} + \\
&\quad + \frac{8(f_{40}^2 + f_{04}^2) + 48f_{40}f_{04} - f_{31}^2 - 6f_{31}f_{13} - f_{13}^2}{6\pi}\sin\alpha, \\
d_3 &= -\frac{15f_{40}^2 + 34f_{40}f_{04} + 15f_{04}^2}{4\pi} - \frac{2(f_{51} + f_{15} - f_{33}) - 3f_{31}^2 + 10f_{31}f_{13} - 3f_{13}^2}{16\pi} + \\
&\quad + \frac{f_{40}f_{13} + f_{04}f_{31} + 3(f_{40}f_{31} + f_{04}f_{13})}{3\pi}\sin\alpha, \\
e_3 &= \frac{f_{60} - f_{06} + f_{24} - f_{42}}{8\pi} + \frac{9(f_{40}f_{13} - f_{04}f_{31}) - 7(f_{40}f_{31} - f_{04}f_{13})}{4\pi} + \\
&\quad + \frac{f_{31}^2 - f_{13}^2 - 8(f_{40}^2 - f_{04}^2)}{6\pi}\sin\alpha.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Справедлива следующая теорема [28].

Теорема 14. *Если $|c_3| > \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$, то неподвижная точка $x = y = 0$ отображения (4.1) устойчива; если же $|c_3| < \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$, то имеет место неустойчивость.*

5. Исследование устойчивости периодического движения шара над цилиндрической поверхностью

Пусть однородный шар массы m движется в однородном поле тяжести над неподвижным абсолютно гладким желобом, представляющим собой поверхность эллиптического цилиндра, образующая которого горизонтальна. Движение рассматриваем в неподвижной системе координат $O\xi\eta\zeta$, оси $O\eta$ и $O\zeta$ которой направлены, соответственно, вертикально вверх и вдоль образующей желоба. Поверхность желоба задается соотношениями

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\xi^2}{k^2} + \frac{(\eta - \ell)^2}{\ell^2} = 1 \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant \ell). \tag{5.1}$$

При движении шар время от времени соударяется с поверхностью желоба. Считаем, что удар является абсолютно упругим.

При сделанных предположениях проекция скорости центра шара на горизонтальную ось $O\zeta$ во все время движения остается постоянной. Не ограничивая общности, примем ее равной нулю, и, если пренебречь размерами шара, придем к задаче о движении материальной точки веса mg в вертикальной плоскости $\zeta = 0$ над кривой $\eta = \varphi(\xi)$, где функция $\varphi(\xi)$ определяется вторым из соотношений (5.1). При малых значениях ξ эта функция задается степенным рядом вида

$$\eta = \ell\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{k}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\xi}{k}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{\xi}{k}\right)^6 + \frac{5}{128}\left(\frac{\xi}{k}\right)^8 + \ldots\right]. \tag{5.2}$$

Существует движение точки, когда ее траектория лежит на вертикальной оси $O\eta$, а сама точка в результате соударений с кривой (5.2) в начале координат $\xi = \eta = 0$ периодически подскакивает на заданную высоту h. Период T движения определяется равенством

$$T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{5.3}$$

Задача об орбитальной устойчивости этого периодического движения исследовалась ранее [19, 29]. Анализ основывался на результатах по устойчивости неподвижной точки сохраняющего площадь отображения, отвечающего исследуемому периодическому движению. Полного решения задачи, однако, не получено, так как для некоторых значений параметров задачи требуется разложение отображения в ряд в окрестности ее неподвижной точки до членов довольно высокой степени. Ниже, при помощи результатов, полученных в предыдущих разделах статьи, задача об устойчивости вертикального периодического движения точки над дугой эллипса (5.3) решается для всех физически допустимых значений параметров.

Построение отображения. Следуя [19], кратко опишем процедуру построения сохраняющего площадь отображения, соответствующего движению точки в окрестности упомянутого ее периодического движения.

За обобщенные координаты примем величины ξ и $q = \eta - \varphi(\xi)$. Во все время движения выполняется неравенство $q \geqslant 0$. На координату ξ не накладывается никаких ограничений. Для обобщенных импульсов имеем следующие выражения:

$$p_\xi = m\dot{\xi} + m(\dot{q} + \varphi'\dot{\xi})\varphi', \qquad p = m\dot{\eta} = m(\dot{q} + \varphi'\dot{\xi}), \tag{5.4}$$

где точкой и штрихом обозначается дифференцирование по времени t и координате ξ соответственно.

Функция Гамильтона при свободном полете точки над кривой (5.2) (когда $q > 0$) имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(1 + \varphi'^2\right)p^2 - \frac{1}{m}\,\varphi' p\, p_\xi + \frac{1}{2m}\,p_\xi^2 + mg(q + \varphi(\xi)). \tag{5.5}$$

При соударении точки с кривой (5.2) (когда $q = 0$) импульс p_ξ не изменяется [30]. Значения же p^- и p^+ импульса p до и после удара связаны следующим соотношением, получающимся из интеграла $H = \mathrm{const}$ или из равенства $\dot{q}^+ = -\dot{q}^-$:

$$p^+ = -p^- + \frac{2\varphi'}{1 + \varphi'^2}\,p_\xi. \tag{5.6}$$

На изучаемом периодическом движении точки $H = mgh$. Возмущенное движение будем рассматривать на том же уровне энергии.

Пусть непосредственно перед первым соударением $\xi = h\,u$, $p_\xi = m\sqrt{2gh}\,v$ $(0 < u^2 + v^2 \ll 1)$. Подставив эти значения ξ, p_ξ в интеграл $H = mgh$, учтя разложение (5.2) и тот факт, что во время удара величины ξ, p_ξ и q неизменны, можно найти выражение для значения p^+ импульса p после удара в виде ряда по степеням u, v. Для целей данного раздела статьи достаточно получить этот ряд с точностью до членов седьмой степени включительно. Соответствующие аналитические вычисления проводились на компьютере. Имеем

$$p^+ = m\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{4}\frac{\delta}{\sigma}\left(1 + 2\frac{\delta}{\sigma}\right)u^2 + \frac{\delta}{\sigma}\,uv - \frac{1}{2}v^2 + \ldots\right]. \tag{5.7}$$

Здесь введены безразмерные параметры задачи:

$$\sigma = \frac{k^2}{\ell^2}, \qquad \delta = \frac{h}{\ell}. \tag{5.8}$$

Члены выше второй степени в равенстве (5.7) явно не выписаны и обозначены многоточием.

После соударения начинается свободный полет материальной точки над кривой (5.2). Траекторией точки является парабола. Если принять, что первое соударение происходило в момент времени $t = 0$, то во время свободного полета (когда $t > 0$) справедливы равенства

$$\xi(t) = \dot{\xi}_0\, t + \xi_0, \qquad \eta(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2 + \dot{\eta}_0\, t + \eta_0. \tag{5.9}$$

Здесь нижним индексом «нуль» обозначаются значения соответствующих величин непосредственно после удара (то есть при $t = 0$). Эти значения находятся при помощи соотношений (5.2) и (5.4) в виде разложений по степеням u, v. Для ξ_0 и $\dot{\eta}_0$, в частности, имеем такие выражения: $\xi_0 = h\,u$, $\dot{\eta}_0 = p^+/m$.

Во время свободного полета через промежуток времени t_1 материальная точка снова попадает на кривую (5.2), и происходит второе соударение. Непосредственно перед ним $\xi = hu_1$, $p_\xi = m\sqrt{2gh}v_1$. Величины u_1, v_1 будут аналитическими функциями от u, v. Эти функции и задают искомое отображение, сохраняющее площадь и обладающее неподвижной точкой $u = v = 0$, соответствующей изучаемому периодическому движению материальной точки над кривой (5.2).

Величина t_1 является наименьшим положительным корнем уравнения $\eta(t_1) = \varphi(\xi(t_1))$. Очевидно, что при $u = v = 0$ эта величина равна периоду (5.3) исследуемого невозмущенного периодического движения. Учитывая равенства (5.2), (5.7) и (5.9), найдем t_1 в виде ряда по степеням u, v. Подставив это значение t_1 в (5.9) и учтя (5.4), получим искомое отображение в виде разложения (1.1). При помощи компьютерных аналитических вычислений это разложение было найдено до членов седьмой степени включительно. Оказалось, что в правых частях равенств (1.1) отсутствуют члены четных степеней относительно u, v и отображение имеет вид

$$u_1 = au + bv + U_3 + U_5 + U_7 + O_9, \qquad v_1 = cu + dv + V_3 + V_5 + V_7 + O_9. \tag{5.10}$$

Здесь

$$a = 1 - 4\frac{\delta}{\sigma}, \qquad b = 4, \qquad c = 4\frac{\delta^2}{\sigma^2} - 2\frac{\delta}{\sigma}, \qquad d = 1 - 4\frac{\delta}{\sigma}. \tag{5.11}$$

Коэффициенты форм U_k, V_k $(k = 3, 5, 7)$ зависят от параметров задачи σ, δ. Для форм третьей степени имеем следующие выражения:

$$U_3 = \frac{1}{\sigma^4}\sum_{\nu+\mu=3} a_{\nu\mu}u^\nu v^\mu, \qquad V_3 = \frac{1}{2\sigma^5}\sum_{\nu+\mu=3} b_{\nu\mu}u^\nu v^\mu, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
&a_{30} = 2\delta^2(\sigma^2 - \sigma^2\delta + 4\delta^2), \qquad a_{21} = -\delta\sigma(\sigma^2 + 2\sigma\delta + 24\delta^2), \qquad a_{12} = 4\delta\sigma^2(\sigma + 6\delta),\\
&a_{03} = -2\sigma^3(\sigma + 4\delta),\\
&b_{30} = \delta^2[\sigma^3 - 2\sigma^2(\sigma + 4)\delta + 4\sigma(4\sigma + 5)\delta^2 - 48(\sigma + 1)\delta^3 + 64\delta^4],\\
&b_{21} = 4\sigma\delta^2[\sigma^2 - \sigma(3\sigma + 8)\delta + 12(2\sigma + 3)\delta^2 - 48\delta^3],\\
&b_{12} = 2\sigma^2\delta[\sigma^2 + 2\sigma\delta - 24(\sigma + 3)\delta^2 + 96\delta^3], \quad b_{03} = 8\sigma^3\delta(\sigma + 6\delta - 8\delta^2),
\end{aligned}$$

а для форм пятой степени —

$$U_5 = \frac{1}{8\sigma^7}\sum_{\nu+\mu=5} a_{\nu\mu}u^\nu v^\mu, \qquad V_5 = \frac{1}{16\sigma^8}\sum_{\nu+\mu=5} b_{\nu\mu}u^\nu v^\mu, \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
&a_{50} = 4\delta^4[3\sigma^4 - \sigma^2(16 + 3\sigma^2)\delta + 16\sigma(3\sigma - 1)\delta^2 - 32(2\sigma + 1)\delta^3 + 64\delta^4],\\
&a_{41} = -\sigma\delta^2[\sigma^4 + 2\sigma^3(\sigma - 2)\delta + 4\sigma^2(4\sigma - 39)\delta^2 + 96\sigma(5\sigma - 3)\delta^3 - 128(8\sigma + 5)\delta^4 + 1280\delta^5],\\
&a_{32} = 16\sigma^2\delta^3[\sigma^3 - 8\sigma^2 + 8\sigma(3\sigma - 4)\delta - 16(6\sigma + 5)\delta^2 + 160\delta^3],\\
&a_{23} = -4\sigma^3\delta[\sigma^3 - 10\delta\sigma^2 + 8\sigma(3\sigma - 14)\delta^2 - 64(4\sigma + 5)\delta^3 + 640\delta^4],\\
&a_{14} = -64\sigma^4\delta^2[3\sigma + 2(2\sigma + 5)\delta - 20\delta^2], \quad a_{05} = -4\sigma^5[\sigma^2 - 8\sigma\delta - 32\delta^2 + 64\delta^3],\\
&b_{50} = \delta^3[\sigma^5 + 2\sigma^4(3\sigma + 5)\delta - 4\sigma^3(3\sigma^2 + 33\sigma + 29)\delta^2 + 24\sigma^2(8\sigma^2 + 40\sigma + 17)\delta^3 -\\
&\quad - 64\sigma(21\sigma^2 + 54\sigma + 1)\delta^4 + 256(18\sigma^2 + 22\sigma + 5)\delta^5 - 512(15\sigma + 13)\delta^6 + 6144\delta^7],\\
&b_{41} = 8\sigma\delta^4[7\sigma^4 + 16\sigma^3 - \sigma^2(15\sigma^2 + 176\sigma + 112)\delta + 16\sigma(18\sigma^2 + 69\sigma - 1)\delta^2 -\\
&\quad - 32(51\sigma^2 + 84\sigma + 25)\delta^3 + 320(12\sigma + 13)\delta^4 - 3840\delta^5],\\
&b_{32} = 4\sigma^2\delta^2[\sigma^4 + 2\sigma^3(\sigma - 2)\delta + 44\sigma^2(2\sigma + 3)\delta^2 - 48\sigma(5\sigma^2 + 35\sigma - 6)\delta^3 +\\
&\quad + 128(24\sigma^2 + 58\sigma + 25)\delta^4 - 1280(9\sigma + 13)\delta^5 + 15\,360\delta^6],\\
&b_{23} = 32\sigma^3\delta^3[3\sigma^3 + 8\sigma(3\sigma - 8)\delta - 8(15\sigma^2 + 64\sigma + 50)\delta^2 + 160(6\sigma + 13)\delta^3 - 1920\delta^4],\\
&b_{14} = 4\sigma^4\delta[\sigma^3 - 10\delta\sigma^2 + 16\sigma(9\sigma + 23)\delta^2 + 64(6\sigma + 25)\delta^3 - 640(3\sigma + 13)\delta^4 + 7680\delta^5],\\
&b_{05} = -128\sigma^5\delta^2[3\sigma - 2(4\sigma - 5)\delta - 52\delta^2 + 48\delta^3].
\end{aligned}$$

Выражения для форм U_7 и V_7 приведены в статье [31].

Задача об орбитальной устойчивости рассматриваемого периодического движения материальной точки эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (5.10).

О первом (линейном) приближении. Линеаризованное отображение (5.10) записывается в виде равенств (1.4), в которых величины a, b, c, d вычисляются по формулам (5.11). Анализ характеристического уравнения (1.5) показывает, что при выполнении неравенства $\delta > \sigma/2$ неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (5.10) неустойчива, причем не только в первом приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи об устойчивости (имеет место гиперболический случай).

В размерных переменных неравенство $\delta > \sigma/2$ записывается в виде $h > k^2/(2\ell)$, то есть для орбитальной неустойчивости периодического движения материальной точки вдоль вертикали достаточно, чтобы высота ее подскока была больше половины радиуса кривизны кривой (5.2) в начале координат $\xi = \eta = 0$, где происходят соударения в невозмущенном движении.

На рисунке 1 в плоскости (σ, δ) прямая $\delta = \sigma/2$ обозначена через ℓ_2, а область неустойчивости заштрихована. В области $\delta < \sigma/2$ имеет место устойчивость в первом приближении. Здесь и на граничной прямой $\delta = \sigma/2$, разделяющей области неустойчивости и устойчивости в первом приближении, строгое исследование требует учета нелинейных членов в отображении (5.10).

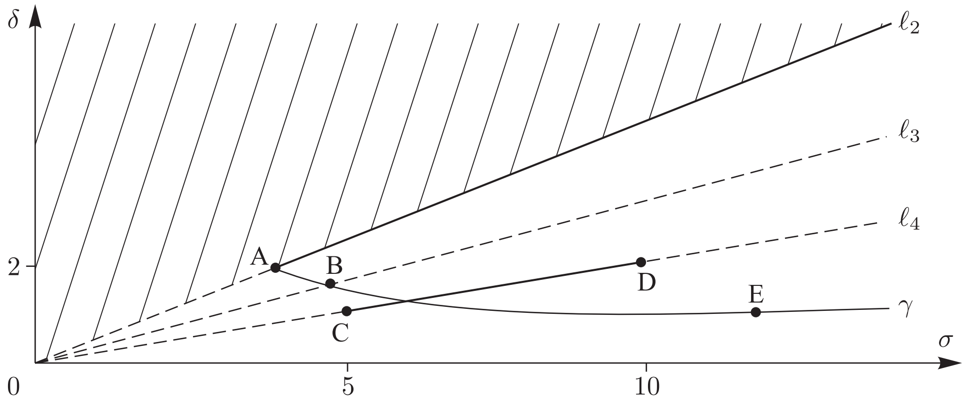

Рис. 1

Анализ устойчивости на граничной прямой. Пусть $\delta = \sigma/2$. Тогда, согласно (5.11), $a = d = -1$, $b = 4$, $c = 0$. Линеаризованное отображение (5.10) относится к параболическому случаю и здесь оно, очевидно, будет неустойчивым. Но для строгого решения задачи об устойчивости надо привлекать нелинейные члены в отображении (5.10).

Если положить $u = 2x$, $v = y/2$, то нелинейное отображение (5.10) запишется в виде (1.12) с матрицей $\mathbf{G}$, отвечающей случаю V из (1.11). Близкое к тождественному преобразование x, $y \to x_*$, y_* задается равенствами (1.15) с производящей функцией F из (1.16). Вычисления по алгоритму из статьи [17] показывают, что формы F_m нечетных степеней в функции (1.16) тождественно равны нулю, коэффициенты формы F_4 вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} f_{40} = -\frac{1}{2}\sigma + 2, \quad f_{31} = \sigma - 4, \quad f_{22} = -\frac{3}{2}\sigma + 4, \\ f_{13} = \sigma - 2, \quad f_{04} = -\frac{1}{4}\sigma + \frac{13}{32}, \end{gathered} \tag{5.14}$$

а для коэффициентов формы F_6 имеем выражения

$$f_{60} = -\frac{7}{4}\sigma^2 + \frac{25}{2}\sigma - \frac{64}{3}, \quad f_{51} = \frac{27}{4}\sigma^2 - \frac{91}{2}\sigma + 72, \quad f_{42} = -\frac{99}{8}\sigma^2 + \frac{1235}{16}\sigma - \frac{435}{4},$$

$$f_{33} = \frac{27}{2}\sigma^2 - \frac{151}{2}\sigma + \frac{280}{3}, \quad f_{24} = -\frac{75}{8}\sigma^2 + \frac{715}{16}\sigma - 48, \quad f_{15} = \frac{15}{4}\sigma^2 - 15\sigma + 14,$$

$$f_{06} = -\frac{5}{8}\sigma^2 + \frac{69}{32}\sigma - \frac{455}{256}. \tag{5.15}$$

Вопрос об устойчивости решается при помощи теоремы 8 из раздела 3. Для величины g, вычисляемой по формуле (3.89) с учетом равенств (5.14) и того, что $F_3 \equiv 0$, получаем выражение

$$g = 4(\sigma - 4). \tag{5.16}$$

На основании теоремы 8 отсюда следует, что при $0 < \sigma < 4$ неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (5.10) устойчива, а при $\sigma > 4$ — неустойчива. На рисунке 1 участки прямой ℓ_2, где выполняются условия устойчивости и неустойчивости, изображены, соответственно, штриховой и сплошной линиями. Разделяющая эти участки точка A имеет координаты $\sigma = 4$, $\delta = 2$. В этой точке $g = 0$. Для величины же e, задаваемой равенством (3.90) с учетом выражений (5.15) и тождеств $F_3 \equiv 0$, $F_5 \equiv 0$, получаем отрицательное значение $e = -32/3$. Поэтому, согласно теореме 8, для значений параметров, соответствующих точке A, неподвижная точка отображения устойчива.

Исследование устойчивости для значений параметров из области устойчивости в первом приближении. Пусть $\delta < \sigma/2$. Положим

$$\sin\alpha = 2\frac{\sqrt{2\delta(\sigma - 2\delta)}}{\sigma}, \qquad \cos\alpha = 1 - 4\,\frac{\delta}{\sigma}. \tag{5.17}$$

В переменных x, y, вводимых заменой

$$u = \frac{2}{\sqrt{\sin\alpha}}\,x, \qquad v = \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{2}\,y,$$

отображение (5.10) переходит в отображение $x, y \to x_1, y_1$ и может быть представлено в виде композиции двух отображений, одно из которых $x_*, y_* \to x_1, y_1$ имеет форму (1.12) с матрицей $\mathbf{G}$ вида VI из (1.11). Второе отображение $x, y \to x_*, y_*$ задается равенствами вида (1.15), (1.16), причем все формы F_m нечетных степеней в разложении (1.16) равны нулю.

Отображение $x, y \to x_1, y_1$ относится к эллиптическому типу. В первом (линейном) приближении оно представляет собой поворот на угол α и, очевидно, является устойчивым. При строгом решении задачи об устойчивости для всех значений параметров из области $\delta < \sigma/2$ нам придется исследовать это отображение до довольно высокого (седьмого) приближения.

Исследование третьего приближения. Учтем сначала члены наименьшей степени в отображении. Они порождаются первой отличной от нуля формой F_4 в разложении (1.16). Коэффициенты этой формы, как показывают вычисления [17, 31], задаются равенствами

$$f_{40} = -\frac{1}{4\,\sigma^4(\sigma - 2\delta)}\delta[256\delta^5 - 128(2\sigma + 1)\delta^4 + 96\sigma(\sigma + 1)\delta^3 -$$

$$- 4\sigma^2(4\sigma + 9)\delta^2 + 2\sigma^3(2 + \sigma)\delta - \sigma^4],$$

$$f_{31} = \frac{2\sqrt{2\delta}\,\delta^2[64\delta^3 - 16(3\sigma + 2)\delta^2 + 4\sigma(3\sigma + 4)\delta - \sigma^3 - 4\sigma^2]}{\sigma^4\sqrt{\sigma - 2\delta}},$$

$$f_{22} = -\frac{\delta\,[384\delta^4 - 192(\sigma+1)\delta^3 + 24\sigma(\sigma+2)\delta^2 - 6\sigma^2\delta - \sigma^3]}{2\,\sigma^4},$$
$$f_{13} = \frac{16\sqrt{2\delta(\sigma-2\delta)}\,\delta^3(4\delta-\sigma-2)}{\sigma^4},$$
$$f_{04} = -\frac{\delta(\sigma-2\delta)(64\delta^3 - 32\delta^2 - 8\sigma\delta - \sigma^2)}{4\,\sigma^4}. \qquad (5.18)$$

Для значений параметров σ, δ, принадлежащих прямым $\delta = 3\sigma/8$ и $\delta = \sigma/4$, имеют место резонансы третьего и четвертого порядков соответственно. Этим резонансам на рисунке 1 отвечают прямые ℓ_3 и ℓ_4.

Так как $F_3 \equiv 0$, то наличие резонанса третьего порядка не препятствует получению отвечающей нормализованному отображению функции Гамильтона (4.19). Достаточно лишь потребовать, чтобы параметры σ, δ не лежали на прямой ℓ_4 резонанса четвертого порядка.

Из (4.20) и (5.18) получаем следующее выражение для коэффициента c_2 функции (4.19):

$$c_2 = \delta\,\frac{(3\sigma-4)\delta - 4\sigma}{8\pi\sigma(\sigma-2\delta)}. \qquad (5.19)$$

В рассматриваемой области изменения параметров $(0 < \delta < \sigma/2)$ величина c_2 обращается в нуль на кривой

$$(3\sigma-4)\delta - 4\sigma = 0. \qquad (5.20)$$

На рисунке 1 эта кривая обозначена буквой γ. Она является участком гиперболы, проходит через точку $A(4, 2)$, лежащую на граничной прямой ℓ_2, и имеет горизонтальную асимптоту $\delta = 4/3$.

Если параметры σ, δ таковы, что соответствующие им точки лежат в области $0<\delta<\sigma/2$ и не попадают ни на прямую ℓ_4 резонанса четвертого порядка, ни на кривую γ, где $c_2 = 0$, то, согласно теореме 9, неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (5.10) устойчива.

Продолжая исследование третьего приближения, рассмотрим теперь случай резонанса четвертого порядка. Пусть $\delta = \sigma/4$. Тогда коэффициенты (5.18) формы F_4 зависят от одного параметра и задаются равествами

$$f_{40} = f_{04} = -\frac{1}{32}\,\sigma + \frac{5}{32}, \qquad f_{31} = f_{13} = -\frac{1}{4}, \qquad f_{22} = \frac{5}{16}. \qquad (5.21)$$

Нормализованному отображению соответствует теперь функция Гамильтона (4.45). Для ее коэффициентов получаем из (4.46)–(4.48) и (5.21) следующие выражения:

$$\gamma_2 = \frac{3\sigma-20}{64\pi}, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \beta_2 = \frac{\sigma}{64\pi}. \qquad (5.22)$$

Отсюда и из теоремы 11 следует, что если $0 < \sigma < 5$ или $\sigma > 10$, то имеет место устойчивость, а если $5 < \sigma < 10$, то неустойчивость. На рисунке 1 интервалы устойчивости показаны на прямой ℓ_4 штриховыми линиями, а интервал неустойчивости выделен сплошной линией. Граничные точки интервалов $C(5, 5/4)$ и $D(10, 5/2)$ соответствуют критическому случаю, когда $|\gamma_2| = \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$.

Таким образом, первое и третье приближения позволили решить вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения для почти всех физически допустимых значений параметров σ, δ. Дополнительного исследования, учитывающего члены выше третьей степени в отображении (5.10), требуют точки C и D кривой ℓ_4 и все точки кривой γ, кроме точки $(20/3, 5/3)$ ее пересечения с кривой ℓ_4, где, как показано выше, имеет место неустойчивость.

Исследование пятого приближения. Будем учитывать теперь не одну, а две первые отличные от нуля формы F_4 и F_6 в разложении производящей функции (1.16).

1. Сначала рассмотрим точки $C(5, 5/4)$ и $D(10, 5/2)$, в которых реализуется критический случай резонанса четвертого порядка.

При резонансе четвертого порядка коэффициенты формы F_4 вычисляются по формулам (5.21). А для коэффициентов формы F_6, при помощи алгоритма статьи [17] и разложения (5.10), можно получить такие формулы:

$$f_{60} = f_{06} = -\frac{1}{768}(3\sigma^2 - 33\sigma + 82), \qquad f_{51} = f_{15} = -\frac{1}{128}(11\sigma - 53),$$
$$f_{42} = f_{24} = \frac{1}{256}(25\sigma - 202), \qquad f_{33} = \frac{1}{192}(3\sigma^2 - 30\sigma + 199). \tag{5.23}$$

Нормализованному отображению соответствует функция Гамильтона вида (4.50). Три ее коэффициента $\gamma_2, \alpha_2, \beta_2$ вычисляются по формулам (5.22), а для коэффициентов $\gamma_3, \alpha_3, \beta_3$ получаем из равенств (4.51) и (5.21), (5.23) следующие выражения:

$$\gamma_3 = \frac{15\sigma^2 - 144\sigma + 296}{1536\pi}, \qquad \alpha_3 = 0, \qquad \beta_3 = \frac{3\sigma^2 - 8\sigma - 40}{512\pi}. \tag{5.24}$$

Вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения (5.10) при значениях параметров, отвечающих точкам C и D, решается при помощи теоремы 12. Из (5.22) и (5.24) находим

$$\gamma_2\gamma_3 - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) = \frac{9\sigma^3 - 177\sigma^2 + 972\sigma - 1480}{24\,576\pi^2}.$$

Для точки C (где $\sigma = 5$) это выражение, очевидно, положительно, а для точки D (в которой $\sigma = 10$) — отрицательно. Согласно теореме 12, при значениях параметров σ, δ, отвечающих точкам C и D, неподвижная точка отображения (5.10), соответственно, устойчива и неустойчива.

2. Теперь рассмотрим случай, когда параметры σ, δ принадлежат кривой γ, на которой величина (5.19) обращается в нуль. На этой кривой коэффициенты форм F_4 и F_6 можно представить как функции от одного параметра δ. Получим, что для коэффициентов формы F_4 имеют место такие выражения:

$$f_{40} = \frac{1}{96}(3\delta - 4)(324\delta^4 - 1674\delta^3 + 3078\delta^2 - 2301\delta + 530),$$
$$f_{31} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3(3\delta - 4)}{2 - \delta}}(3\delta - 4)(\delta - 2)(54\delta^3 - 189\delta^2 + 198\delta - 52),$$
$$f_{22} = -\frac{1}{16}(3\delta - 4)(18\delta^2 - 60\delta + 49)(18\delta^2 - 33\delta + 10),$$
$$f_{13} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3(2 - \delta)}{3\delta - 4}}(3\delta - 4)^3(6\delta^2 - 13\delta + 4),$$
$$f_{04} = \frac{3}{32}(3\delta - 4)(\delta - 2)(36\delta^3 - 114\delta^2 + 106\delta - 25), \tag{5.25}$$

а коэффициенты формы F_6 вычисляются по формулам

$$
\begin{aligned}
f_{60} = {} & \frac{1}{6912}\frac{3\delta-4}{\delta-2}\sqrt{\frac{3(3\delta-4)}{2-\delta}}(629\,856\delta^{10} - 8\,817\,984\delta^9 + 54\,709\,992\delta^8 - \\
& - 197\,623\,152\delta^7 + 458\,807\,328\delta^6 - 712\,354\,500\delta^5 + 744\,844\,221\delta^4 - \\
& - 513\,907\,623\delta^3 + 221\,592\,642\delta^2 - 53\,227\,860\delta + 5\,354\,312), \\
f_{51} = {} & -\frac{1}{384}\frac{(3\delta-4)^2}{\delta-2}(209\,952\delta^9 - 2\,589\,408\delta^8 + 13\,920\,984\delta^7 - \\
& - 42\,666\,912\delta^6 + 81\,766\,260\delta^5 - 100\,932\,372\delta^4 + 79\,513\,533\delta^3 - \\
& - 38\,060\,262\delta^2 + 9\,885\,308\delta - 1\,050\,792), \\
f_{42} = {} & -\frac{1}{768}\sqrt{\frac{3(3\delta-4)}{2-\delta}}(3\delta-4)(1\,049\,760\delta^9 - 12\,597\,120\delta^8 + 65\,872\,440\delta^7 - \\
& - 196\,324\,560\delta^6 + 365\,792\,112\delta^5 - 439\,005\,204\delta^4 + 336\,358\,593\delta^3 - \\
& - 156\,730\,929\delta^2 + 39\,700\,376\delta - 4\,125\,108), \\
f_{33} = {} & \frac{1}{192}(3\delta-4)^2(349\,920\delta^8 - 3\,615\,840\delta^7 + 15\,931\,080\delta^6 - 38\,880\,000\delta^5 + \\
& + 57\,054\,780\delta^4 - 51\,002\,712\delta^3 + 26\,719\,227\delta^2 - 7\,361\,052\delta + 809\,644), \\
f_{24} = {} & \frac{1}{256}\sqrt{\frac{3(3\delta-4)}{2-\delta}}(3\delta-4)(\delta-2)(349\,920\delta^8 - 3\,499\,200\delta^7 + \\
& + 14\,920\,200\delta^6 - 35\,244\,720\delta^5 + 50\,080\,896\delta^4 - 43\,386\,228\delta^3 + \\
& + 22\,063\,077\delta^2 - 5\,916\,739\delta + 635\,442), \\
f_{15} = {} & -\frac{3}{128}(3\delta-4)^2(\delta-2)(23\,328\delta^7 - 194\,400\delta^6 + 670\,680\delta^5 - \\
& - 1\,231\,200\delta^4 + 1\,282\,932\delta^3 - 745\,596\delta^2 + 218\,901\delta - 24\,922), \\
f_{06} = {} & \frac{3}{256}(3\delta-4)^2(\delta-2)\sqrt{\frac{3(2-\delta)}{3\delta-4}}(7776\delta^7 - 62\,208\delta^6 + 206\,280\delta^5 - \\
& - 364\,464\delta^4 + 366\,192\delta^3 - 205\,772\delta^2 + 58\,659\delta - 6511).
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Об устойчивости при резонансе третьего порядка. На кривой γ в точке B ее пересечения с прямой ℓ_3 (см. рис. 1) реализуется резонанс третьего порядка. В этой точке $\sigma = 44/9$, $\delta = 11/6$ и, в соответствии с (5.17), $\sin\alpha = \sqrt{3}/2$, $\cos\alpha = -1/2$. Вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения (5.10) для значений параметров, отвечающих точке B, может быть решен при помощи теоремы 10.

Ввиду того, что в производящей функции (1.16) $F_3 \equiv 0$, $F_5 \equiv 0$, справедливы равенства $f_{30} = f_{12} = 0$, $f_{21} = f_{03} = 0$, а также, согласно (4.36), и равенства $d_2 = e_2 = 0$. А так как на кривой γ величина c_2 равна нулю, то при исследовании устойчивости можно воспользоваться утверждением 4 теоремы 10.

Проведя вычисления по формулам (5.25), (5.26) и (4.41), получим, что в точке B коэффициенты функции (4.40) будут такими:

$$
c_3 = -\frac{515\sqrt{3}}{1536\,\pi}, \qquad d_3 = 0, \qquad e_3 = -\frac{55\sqrt{3}}{1536\,\pi}.
$$

Так как $|c_3| > \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$, то, согласно утверждению 4 теоремы 10, при резонансе третьего порядка неподвижная точка отображения (5.10) устойчива.

О резонансах пятого и шестого порядков. Резонансу пятого порядка отвечают (не показанные на рисунке) две точки кривой γ, в которых

$$\cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{4}, \qquad \sigma = \frac{20}{3} \pm \frac{16\sqrt{5}}{15}, \qquad \delta = \frac{7}{4} \mp \frac{\sqrt{5}}{12}.$$

Здесь одновременно берутся только верхние или только нижние знаки.

Так как $F_3 \equiv 0$ и $F_5 \equiv 0$, то коэффициенты α_4 и β_4 функции (4.53) равны нулю и соответствующая нормализованному отображению (5.10) функция Гамильтона имеет вид (4.23). Вычисления по формулам (4.24) и (5.25), (5.26) показывают, что коэффициент c_3 функции (4.23) задается равенством

$$c_3 = \pm\frac{\sqrt{10(38\,924\,185 \mp 17\,407\,109\sqrt{5})}}{9216\pi}.$$

Так как этот коэффициент отличен от нуля, то, согласно теореме 9, в обеих точках резонанса пятого порядка неподвижная точка отображения (4.10) устойчива.

Резонанс шестого порядка реализуется в показанной на рисунке точке E кривой γ. В этой точке

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sigma = 12, \qquad \delta = \frac{3}{2}.$$

В точке E нормализованному отображению соответствует функция Гамильтона вида (4.40). Для ее коэффициентов имеем следующие выражения, получаемые при помощи формул (4.54) и (5.25), (5.26):

$$c_3 = \frac{\sqrt{3}}{4608\,\pi}, \qquad d_3 = 0, \qquad e_3 = -\frac{31\sqrt{3}}{4608\,\pi}.$$

Отсюда, на основании теоремы 14, следует, что при значениях параметров σ, δ, отвечающих резонансу шестого порядка, неподвижная точка отображения (5.10) неустойчива.

Случай отсутствия резонансов до шестого порядка включительно. Для точек кривой γ, отличных от точек B и E резонансов третьего и шестого порядков и точки $(20/3, 5/3)$, пересечения кривой γ с кривой ℓ_4 резонанса четвертого порядка, нормализованному отображению (5.10) соответствует функция Гамильтона вида (4.23). Для ее коэффициента c_3 из равенств (4.24) и (5.17), (5.25), (5.26) получаем следующее выражение:

$$c_3 = \frac{1}{3456\pi}\sqrt{\frac{3(3\delta - 4)}{2 - \delta}}\,\frac{(3\delta - 4)(9\delta^3 + 48\delta^2 - 172\delta + 120)}{(\delta - 2)(3\delta - 5)}. \tag{5.27}$$

Несложный анализ показывает, что величина (5.27) может обратиться в нуль только в одной точке P кривой γ. Эта точка имеет координаты $\sigma = 12.81482$, $\delta = 1.48817$ (сама точка P на рисунке не показана). По теореме 9 для всех рассматриваемых точек кривой γ, кроме, быть может, точки P, имеет место устойчивость.

Таким образом, анализ первого, третьего и пятого приближений отображения (5.10) дал возможность строго решить вопрос об устойчивости его неподвижной точки для всех значений параметров σ, δ, кроме параметров, отвечающих точке P, в которой нет резонансов до шестого порядка включительно и коэффициенты c_2 и c_3 функций (4.19) и (4.23) одновременно обращаются в нуль. В этой одной точке нужно проводить исследование с привлечением членов седьмой степени в отображении (5.10).

О седьмом приближении. Рассмотрим отображение (5.10), принимая во внимание формы U_k, V_k до седьмой степени включительно. Для величины (4.30) в точке P имеем выражение $\varrho = 0.53548 + i\,0.84455$, и в этой точке не реализуются резонансы до восьмого порядка включительно.

По алгоритму четвертого раздела статьи можно привести отображение (5.10) к нормальной форме до членов седьмой степени. Соответствующая этой форме функция Гамильтона записывается в виде (4.25), причем, как показали компьютерные вычисления, $c_4 = 0.00011$. Так как $c_4 \neq 0$, то, согласно теореме 9, неподвижная точка отображения будет здесь устойчивой.

Выводы. Кратко сформулируем результаты проведенного исследования устойчивости периодического движения шара (материальной точки) в однородном поле тяжести над эллипсоидальной цилиндрической поверхностью. Задача решена для всех физически допустимых значений параметров σ и δ, определяемых равенствами (5.8). Получены следующие утверждения.

1. Если $\delta > \sigma/2$, то периодическое движение неустойчиво.

2. Если $\delta = \sigma/2$, то при $0 < \sigma \leqslant 4$ движение устойчиво, а при $\sigma > 4$ — неустойчиво.

3. Если $0 < \delta < \sigma/2$, то периодическое движение будет устойчиво для почти всех значений параметров. Исключения составляют значения параметров $\sigma = 12$, $\delta = 3/2$, которым на рисунке отвечает точка E, а также значения σ и δ, лежащие на прямой $\delta = \sigma/4$ при $5 < \sigma \leqslant 10$ (полуинтервал $(C, D]$ на рисунке); при этих исключительных значениях параметров периодическое движение неустойчиво.

Список литературы

[1] Пуанкаре А. Избранные труды: Т. 2: Новые методы небесной механики. Москва: Наука, 1972. 999 с.

[2] Birkhoff G. D. Dynamical systems with two degrees of freedom // Trans. Amer. Math. Soc., 1917, vol. 18, no. 2, pp. 199–300.

[3] Birkhoff G. D. Surface transformations and their dynamical applications // Acta Math., 1922, vol. 43, no. 1, pp. 1–119.

[4] Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: УдГУ, 1999. 408 с.

[5] Levi-Civita T. Sorpa alcuni criteri di instabilita // Ann. Mat. Pura Appl. (3), 1901, vol. 5, no. 1, pp. 221–305.

[6] Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. Москва: ИИЛ, 1959. 300 с.

[7] Зигель К., Мозер Ю. Лекции по небесной механике. Ижевск: РХД, 2001. 384 с.

[8] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Москва: Мир, 1973. 167 с.

[9] Мозер Ю. Устойчивые и хаотические движения в динамических системах. Москва – Ижевск: РХД, 2010. 184 с.

[10] Rüssmann H. Über die Existenz einer Normalform inhaltstreuer elliptischer Transformationen // Math. Ann., 1959, vol. 137, pp. 64–77.

[11] Sternberg Sh. The structure of local homeomorphisms: 3 // Amer. J. Math., 1959, vol. 81, no. 3, pp. 578–604.

[12] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений: 1 // Тр. ММО, 1971, т. 25, с. 119–262.

[13] Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений: 2 // Тр. ММО, 1972, т. 26, с. 199–239.

[14] Белицкий Г. Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. Киев: Наукова думка, 1979. 176 с.

[15] Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1949. 551 с.

[16] Маркеев А. П. Теоретическая механика. Москва – Ижевск: РХД, 2007. 592 с.

[17] Маркеев А. П. Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // ПММ, 2014, т. 78, № 5, с. 611–624.

[18] Markeev A. A. The method of pointwise mappings in the stability problem of two-segment trajectories of Birkhoff billiards // Dynamical systems in classical mechanics / V. V. Kozlov (Ed.). (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Adv. Math. Sci., vol. 168.) Providence, R.I.: AMS, 1995. P. 211–226.

[19] Маркеев А. П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // МТТ, 1996, № 2, с. 37–54.

[20] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.

[21] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний: 1 // Изв. вузов. Радиофизика, 1958, т. 1, № 1, с. 41–66.

[22] Mozer J. The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point // Comm. Pure Appl. Math., 1956, vol. 9, no. 4, pp. 673–692.

[23] Маркеев А. П. Упрощение структуры форм третьей и четвертой степеней в разложении функции Гамильтона при помощи линейного преобразования // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 4, с. 447–464.

[24] Markeev A. P. On the Birkhoff transformation in the case of complete degeneracy of quadratic part of the Hamiltonian // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 309–316. *См. также:* Маркеев А. П. О преобразовании Биркгофа в случае полного вырождения квадратичной части функции Гамильтона // Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 2, с. 343–352.

[25] Иванов А. П., Сокольский А. Г. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ, 1980, т. 44, № 6, с. 963–970.

[26] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.

[27] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Матем. сб., 1893, т. 17, № 2, с. 253–333.

[28] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978. 312 с.

[29] Маркеев А. П. О критическом случае резонанса четвертого порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ, 1997, т. 61, № 3, с. 369–376.

[30] Аппель П. Теоретическая механика: Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: Физматгиз, 1960. 487 с.

[31] Маркеев А. П. О производящей функции сохраняющего площадь отображения в одной задаче о движении тяжелого шара над цилиндрической поверхностью // Тр. 17-го Международного симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем». Москва: ИМАШ РАН, 2015. С. 179–184.

On the fixed points stability for the area-preserving maps

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

We study area-preserving maps. The map is assumed to have a fixed point and be analytic in its small neighborhood. The main result is a developed constructive algorithm for studying the stability of the fixed point in critical cases when members of the first degrees (up to the third degree inclusive) in a series specifying the map do not solve the issue of stability.
As an application, the stability problem is solved for a vertical periodic motion of a ball in the presence of impacts with an ellipsoidal absolutely smooth cylindrical surface with a horizontal generatrix.
Study of area-preserving maps originates in the Poincaré section surfaces method [1]. The classical works by Birkhoff [2–4], Levi-Civita [5], Siegel [6, 7], Moser [7–9] are devoted to fundamental aspects of this problem. Further consideration of the objectives is contained in the works by Russman [10], Sternberg [11], Bruno [12, 13], Belitsky [14] and other authors.

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50
Keywords: map, canonical transformations, Hamilton system, stability

Received August 25, 2015, accepted September 15, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 503–545 (Russian)