



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.9:534.1

MSC 2010: 34C15

## Транзиторный сдвиг в задаче о флаттере

А. Д. Морозов, К. Е. Морозов

Рассматривается двумерная система, к которой приводит задача о флаттере панели. Предполагается, что система является транзиторной, то есть неавтономной лишь на конечном промежутке времени. Для консервативного случая устанавливается мера транспорта между ячейками, заполненными замкнутыми траекториями. Для неконсервативного случая рассматривается вопрос о влиянии транзиторного сдвига на установление того или иного аттрактора, приводятся вероятности смены режимов — стационарного и автоколебательного.

Ключевые слова: транзиторная система, сепаратрисы, предельные циклы, аттракторы, флаттер

### 1. Введение

В данной работе, следуя [1], мы рассматриваем специальный класс неавтономных систем, которые являются аperiодически неавтономными лишь на ограниченном интервале времени. Подобные системы называются транзиторными. Для таких систем сепаратрисы определяют динамику в промежутках автономности. Сепаратрисы — это инвариантные многообразия седловых состояний равновесия. Они разбивают фазовое пространство на области с качественно различным поведением траекторий и, для двумерных гамильтоновых систем, определяют границы ячеек.

---

Получено 19 февраля 2015 года

После доработки 18 июня 2015 года

---

Работа поддержана грантом Министерства образования и науки (проектная часть госзадания, № 1410), а также частично грантами: РФФ, № 14-41-00044, РФФИ № 14-01-00344, РФФИ № 13-01-00589.

---

Морозов Альберт Дмитриевич

[morozov@mm.unn.ru](mailto:morozov@mm.unn.ru)

Морозов Кирилл Евгеньевич

[kirwamath@gmail.com](mailto:kirwamath@gmail.com)

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23



Существует много прикладных задач, которые являются транзиторными [1, 2]. Это, например, задача о резонансном ускорителе, о вращающемся двойном вихре, о ламинарном потоке через трубу с конечным числом изгибов между двумя прямыми участками.

Здесь мы рассмотрим транзиторный сдвиг для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y,\end{aligned}\tag{1.1}$$

к которой приводит задача об обтекании упругой пластины потоком жидкости или газа под действием осевой нагрузки (для одномодового приближения см. [3], а также [4]). Эта задача представляет интерес в связи с изучением явления «панельного флаттера» — колебаний пластины с нарастающей амплитудой, которые возбуждаются набегающим потоком. Система (1.1) получается из соответствующих уравнений в [3, 4], которые зависят от многих параметров. После замены переменных, времени и нормировки приходим к системе (1.1), зависящей от двух существенных параметров:  $p$  и  $\varepsilon$ . Параметр  $\varepsilon$  определяет неконсервативность задачи и является малым параметром. Изменение параметра  $p$  позволяет получить автоколебательные режимы в системе (1.1). Переменная  $x$  определяет амплитуду отклонения панели.

К уравнениям вида (1.1) приводят многие задачи о колебаниях тонких пластин и балок. Например, колебания балки под нагрузкой и колебания трубы при протекании жидкости [4], колебания пластины в электромагнитном поле [5], и другие.

Мы решаем здесь две задачи: 1) находим при  $\varepsilon = 0$  величину (меру) транспорта между гамильтоновыми структурами в двумерной системе, подвергающейся транзиторному сдвигу и описывающей задачу о флаттере; 2) исследуем влияние транзиторного сдвига на установившиеся режимы при учете неконсервативности задачи ( $\varepsilon \neq 0$ ).

Прежде чем переходить к решению поставленных задач, приведем необходимые для дальнейшего определения и понятия.

## 2. Вспомогательные понятия

Следуя [1], определим класс транзиторных систем.

**Определение 1.** Транзиторной динамической системой с временем перехода  $\tau$  называется система, которая автономна везде за исключением некоторого интервала ограниченной длины  $\tau > 0$ .

Уравнения транзиторной системы можно представить в виде

$$\dot{z} = V(z, t), \quad V(z, t) = \begin{cases} P(z), & t < 0, \\ F(z), & t > \tau, \end{cases}\tag{2.1}$$

где  $P$  — прошлое векторное поле, а  $F$  — будущее векторное поле. Мы предполагаем, что автономные системы  $\dot{z} = P(z)$  и  $\dot{z} = F(z)$  определены на одном и том же фазовом пространстве  $M$ . На интервале перехода  $[0, \tau]$   $V(z, t)$  — некоторая заданная функция<sup>1</sup>.

Заметим, что для теории неавтономных аperiodических систем также представляет интерес случай, когда интервал неавтономности является бесконечным (см., например, [6, 7]). С другой стороны,  $\tau = 0$  соответствует разрыву правой части (явление удара).

<sup>1</sup>Для рассматриваемой задачи неавтономная часть функции  $V(z, t)$  определяется в (2.4), (2.5).

В случае гамильтоновых систем вида (2.1) важную роль играет термин «транспорт». Этот термин используется в прикладных работах по гамильтоновым системам без его определения (см., например, [8]). Поэтому мы дадим определение транспорта для нашего случая. Следуя [1], будем использовать понятие «когерентной структуры». Под когерентными структурами мы понимаем области фазового пространства, заполненные однотипными фазовыми кривыми. Для двумерных динамических систем такие области называют «ячейками».

**Определение 2.** Под транспортом в транзиторной гамильтоновой системе (2.1) будем понимать переход из когерентной структуры прошлого векторного поля в когерентную структуру будущего векторного поля под действием транзиторного потока. Под мерой транспорта будем понимать объем области фазового пространства  $M$ , которая перешла из когерентной структуры прошлого векторного поля в когерентную структуру будущего векторного поля.

В нашей задаче  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $z = (x, y)$ , и мы вводим транзиторный сдвиг следующим образом:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (y, x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y), \\ F(x, y) &= (y - \omega, x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\omega$  — положительная постоянная. При  $\varepsilon \neq 0$  наша транзиторная система является неконсервативной. До сих пор рассматривались лишь консервативные транзиторные системы [1, 2].

В первой части данной работы мы интересуемся «транспортом» между когерентными структурами прошлого  $P = (y, x - x^3)$  и будущего  $F = (y - \omega, x - x^3)$  векторных полей для гамильтоновой двумерной системы (1.1) при  $\varepsilon = 0$ . Во второй части рассматривается неконсервативная система ( $\varepsilon \neq 0$ ).

Для определения транспорта естественно рассматривать седловые состояния равновесия систем  $\dot{z} = P(z)$  и  $\dot{z} = F(z)$  и их устойчивые и неустойчивые сепаратрисы.

Неавтономная система (2.1) определена в расширенном фазовом пространстве  $M \times \mathbb{R}$  (в рассматриваемой задаче  $M = \mathbb{R}^2$ ). Следуя [1], будем считать, что  $V$  задает поток  $\varphi_{t_1, t_0} : M \rightarrow M$ , для любых  $t_1, t_0 \in \mathbb{R}$ , где  $\varphi_{t_1, t_0}$  отображает точку из положения при  $t = t_0$  в положение при  $t = t_1$ . Тогда каждая точка  $(z, t) \in M \times \mathbb{R}$  имеет орбиту  $\gamma(z, t_0) = \{(\varphi_{t_1, t_0}(z), t_1) : t_1 \in \mathbb{R}\} \subset M \times \mathbb{R}$ . Динамическая система для прошлого векторного поля  $P$  определена в пространстве  $M \times \mathbb{R}^-$ , а для будущего векторного поля  $F$  — в пространстве  $M \times \mathbb{R}^+_\tau$  ( $t > \tau$ ). Как известно, для автономных систем фазовые кривые являются проекциями интегральных кривых на фазовую плоскость.

Если  $\Upsilon$  — любое инвариантное множество прошлого векторного поля  $P$ , то множество  $\{(z, t) : z \in \Upsilon, t \leq 0\} \subset M \times \mathbb{R}$  является назад-инвариантным множеством в расширенном фазовом пространстве для  $V$ . Например, равновесие и периодические орбиты  $P$  — части назад-инвариантных множеств для  $V$ . Если же  $\Upsilon$  — любое инвариантное множество будущего векторного поля  $F$ , то  $\{(z, t) : z \in \Upsilon, t > \tau\} \subset M \times \mathbb{R}$  является вперед-инвариантным множеством в расширенном фазовом пространстве для  $V$  (любое инвариантное множество  $F$  является частью вперед-инвариантного множества для  $V$  для каждого  $t > \tau$ ).

Наряду с состояниями равновесия и периодическими орбитами, неустойчивые многообразия седла для  $P$  и устойчивые многообразия седла для  $F$  также являются частями назад-инвариантных и вперед-инвариантных множеств для  $V$  соответственно.

Поскольку неавтономная часть динамики (2.1) происходит на конечном интервале, она может быть определена с помощью отображения перехода  $T$ :

$$T(z) = \varphi_{\tau,0}(z). \quad (2.3)$$

Следовательно, инвариантное множество  $\Upsilon$  для векторного поля  $P$  становится множеством  $T(\Upsilon)$  в момент времени  $\tau$ , а затем преобразуется под действием  $F$ . Если динамика прошлого  $P$  и будущего  $F$  векторных полей известна, то единственная нетривиальная работа, которую мы должны сделать, — это охарактеризовать отображение  $T$ .

В данной работе мы рассматриваем пример транзитивной системы, для которой полное векторное поле является выпуклой комбинацией из прошлого и будущего векторных полей:

$$V(z, t) = (1 - f(t))P(z) + f(t)F(z). \quad (2.4)$$

Здесь  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  есть функция перехода, удовлетворяющая условию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \left(3 - 2\left(\frac{t}{\tau}\right)\right), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 1, & t > \tau, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\tau$  — время перехода, а  $P$  и  $F$  определены в (2.2).

### 3. Консервативный случай ( $\varepsilon = 0$ )

#### 3.1. Транзитивный сдвиг по скорости

Согласно (2.2) прошлое векторное поле определяется гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4,$$

а будущее векторное поле — гамильтонианом

$$H_1(x, y) = \frac{1}{2}(y - \omega)^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\omega^2.$$

На рисунке 1 показаны фазовые портреты для этих систем.

Считаем, что переход между прошлым и будущим автономными состояниями осуществляется в течение времени  $t \in [0, \tau]$ . Положим для определенности  $\omega = 1$ . Таким образом, в нашей системе остается один параметр — время перехода  $\tau$ . Теперь введем полный гамильтониан как комбинацию прошлого и будущего гамильтонианов:

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}(y - f(t))^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}f^2(t), \quad (3.1)$$

где  $f(t)$  — функция перехода, определенная в (2.5).

Построим численно образы сепаратрис прошлого векторного поля с помощью отображения  $T$ . При численном интегрировании используем формулы Рунге–Кутты 4-го порядка точности. В начальный момент  $t = 0$  берем точки на сепаратрисах прошлого векторного поля, уравнение которых имеет вид

$$y^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = 0. \quad (3.2)$$

Далее интегрируем систему с функцией Гамильтона (3.1) до момента  $t = \tau$ . В результате найдем образы сепаратрис прошлого векторного поля. На рисунке 2 показаны сепаратрисы

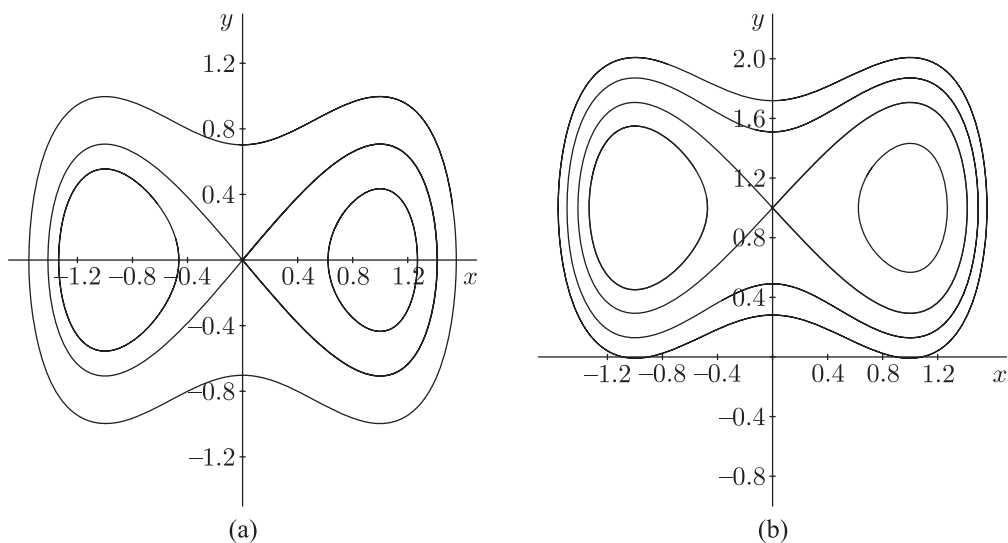
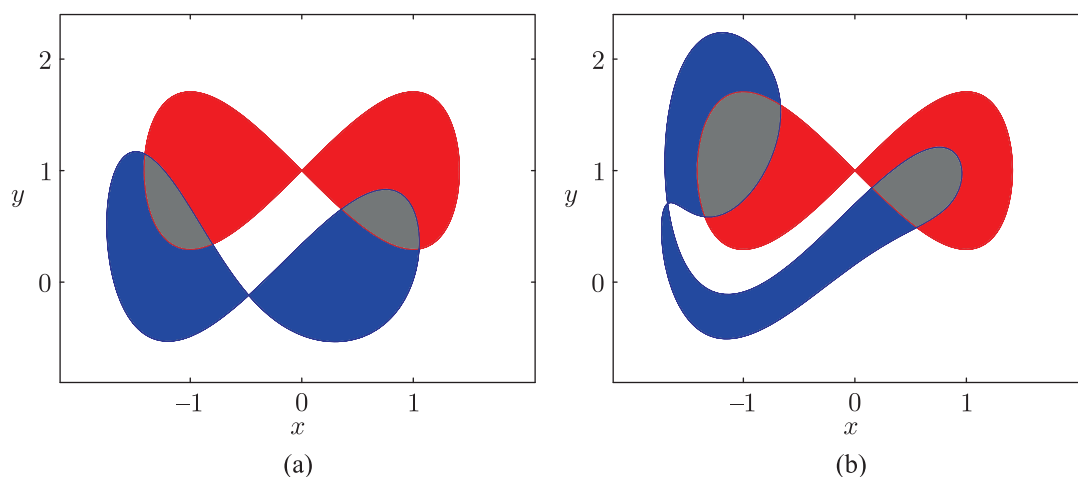


Рис. 1. Фазовые портреты для прошлого (а) и будущего (б) гамильтоновых векторных полей.

Рис. 2. Сепаратрисы будущего гамильтониана и образ сепаратрис прошлого гамильтониана в момент времени  $\tau = 1$  (а) и  $\tau = 3$  (б).

будущего векторного поля (красным цветом) и образы сепаратрис прошлого векторного поля (синим цветом) при действии отображения  $T$  для  $\tau = 1$  (а) и  $\tau = 3$  (б). Области внутри восьмерки также закрашены соответствующим цветом.

Обозначим через  $D_F$  и  $D_P$  области внутри «восьмерки» будущего и прошлого векторного поля соответственно, через  $T(D_P)$  — образ области  $D_P$ , а через  $S(D_F)$ ,  $S(T(D_P))$  — их площади. Введем отношение

$$R = \frac{S(D_F \cap T(D_P))}{S(T(D_P))}, \quad (3.3)$$

которое и определяет меру транспорта в рассматриваемой транзиторной системе. Таким образом, проблема оценки транспорта сводится к вычислению площадей областей  $D_F \cap T(D_P)$  (на рисунке 2 обозначены серым цветом).

Заметим, что  $R(\tau) \rightarrow R_0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , где величина  $R_0$  определяется пересечением площадей, ограничивающих соответствующие «восьмерки» (образ сепаратрис прошлого векторного поля совпадает с сепаратрисами этого векторного поля, см. рис. 1). С другой стороны, вычисления показывают, что  $R(\tau) \rightarrow 1$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

### 3.2. Транзиторный сдвиг по координате

Транзиторный сдвиг можно ввести иначе. Например, положим

$$\ddot{x} - x + x^3 = \omega f(t). \quad (3.4)$$

Такое введение неавтономности соответствует неперiodическому возмущению, которое действует в течение конечного интервала времени  $(0, \tau)$  произвольным образом, а вне указанного промежутка сохраняет постоянное значение (до перехода возмущение отсутствует, а после перехода его значение определяется величиной  $\omega$ ). Здесь  $f(t)$  та же, что и в предыдущем примере.

Естественно, для оценки транспорта нас интересуют такие значения  $\omega$ , для которых в системе после сдвига наблюдается качественно та же картина поведения фазовых кривых. Это будет так, если уравнение  $\ddot{x} - x + x^3 = \omega$  имеет три вещественных корня. Это условие, очевидно, будет выполнено, если значение  $\omega$  достаточно мало ( $\omega^2 < \frac{4}{27}$ ). Полный гамильтониан для данной системы выглядит следующим образом:

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 - \omega f(t)x. \quad (3.5)$$

На рисунке 3 показаны образы сепаратрис прошлого векторного поля и сепаратрисы будущего векторного поля. Здесь области обозначены теми же цветами, что и в предыдущем примере. Мера транспорта оценивается отношением (3.3).

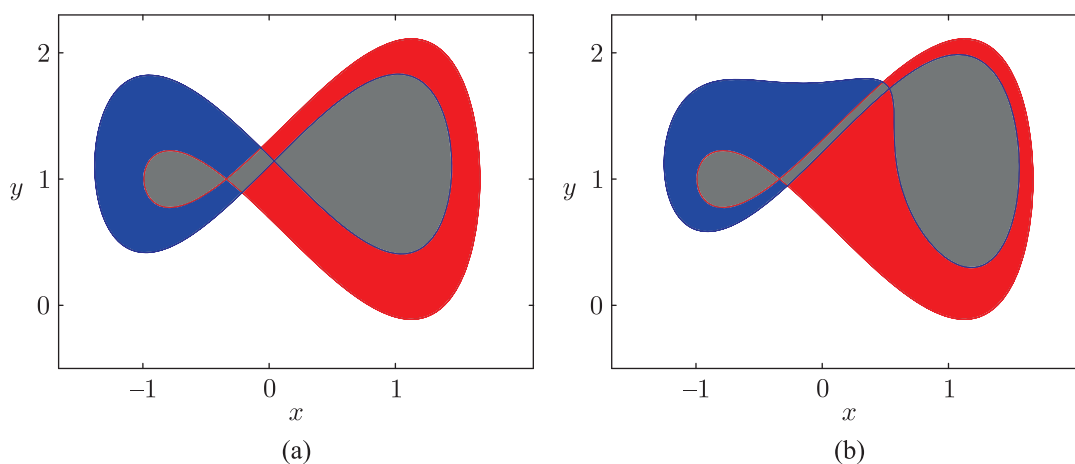


Рис. 3. Сепаратрисы будущего гамильтониана и образ сепаратрис прошлого гамильтониана в момент времени  $\tau = 1$  (а) и  $\tau = 3$  (б) для  $\omega = 0.3$ .

## 4. Неконсервативный случай ( $\varepsilon \neq 0$ )

Обратимся к системе (1.1), которая определяет прошлое векторное поле. Она инвариантна относительно преобразования  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ , что приводит к симметрии фазовых

портретов. Система (1.1) ранее исследовалась (см., например, [3, 4, 9, 10]<sup>2</sup>). В ней могут существовать предельные циклы. Согласно [9], система (1.1) имеет

- при  $p < p_* \approx 0.7764$  два устойчивых фокуса  $O^\pm(\pm 1, 0)$ , предельные циклы отсутствуют,
- при  $p_* < p < 0.8$  два устойчивых фокуса  $O^\pm(\pm 1, 0)$  и два предельных цикла вне «восьмерки» (внешний цикл, который обозначим через  $L$ , — устойчивый, а внутренний — неустойчивый);
- при  $0.8 < p < 1$  два устойчивых фокуса  $O^\pm(\pm 1, 0)$ , один устойчивый предельный цикл  $L$  вне «восьмерки» и два неустойчивых предельных цикла внутри «восьмерки»;
- при  $p > 1$  два неустойчивых фокуса  $O^\pm(\pm 1, 0)$  и один устойчивый предельный цикл  $L$  вне «восьмерки».

Фазовый портрет системы (1.1) при  $p = 0.9$  и  $\varepsilon = 0.2$  показан на рисунке 4.

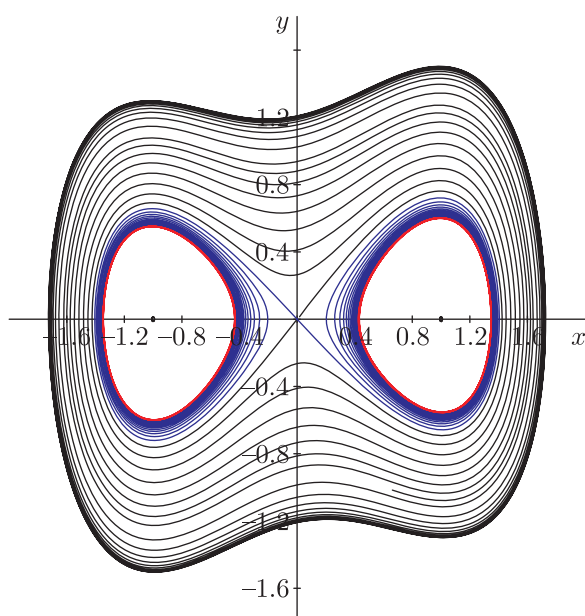


Рис. 4. Фазовый портрет системы (1.1) при  $p = 0.9$ .

Обратимся теперь к системе, определяющей будущее векторное поле (2.2) (положим для определенности  $\omega = 1$ ):

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1, \\ \dot{y} = x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y. \end{cases} \quad (4.1)$$

Эта система, в отличие от (1.1), не обладает симметрией. Состояния равновесия лежат на оси  $y = 1$ . Координата  $x$  состояния равновесия определяется из уравнения  $x - x^3 + \varepsilon(p - x^2) = 0$ , которое при малых значениях  $\varepsilon$  имеет три вещественных корня, близких к  $x = 0$  и  $x = \pm 1$ . Обозначим эти состояния равновесия через  $\tilde{O}$  и  $\tilde{O}^\pm$  соответственно. Устойчивый предельный цикл системы (4.1) обозначим через  $\tilde{L}$ .

<sup>2</sup>Исследование, представленное в работах [3, 4], нельзя признать достаточно полным.

В отличие от консервативного случая, сепаратрисы седла  $O(0, 0)$  определяют границы областей притяжения аттракторов. При транзиторном сдвиге возможна смена аттрактора  $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$ , то есть если при отсутствии транзиторного сдвига устанавливается стационарный режим, соответствующий состоянию равновесия  $O^\pm$ , то при наличии транзиторного сдвига может устанавливаться периодический режим, отвечающий устойчивому предельному циклу будущего векторного поля. Такая смена режима приводит к дестабилизации панели. Также возможна смена режимов  $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$ , что соответствует стабилизации панели. Мы укажем области начальных условий, которые соответствуют смене установившегося режима.

Рассмотрим 4 случая, соответствующие всем возможным топологическим структурам фазовых портретов системы (1.1).

*Случай 1:*  $p < p_*$ . В этом случае устойчивые предельные циклы в системах (1.1), (4.1) отсутствуют и устанавливается стационарный режим, отвечающий устойчивому состоянию равновесия  $\tilde{O}^+$  или  $\tilde{O}^-$  (пластина прогнута либо вверх, либо вниз). Наряду с сохранением стационарного режима (до и после транзиторного сдвига) возможны переходы  $O^+ \rightarrow \tilde{O}^-$  или  $O^- \rightarrow \tilde{O}^+$ .

Более сложная ситуация имеет место, когда в системе (1.1) существуют устойчивые предельные циклы.

*Случай 2:*  $p \in (p_*, 0.8)$ . Для определенности положим  $p = 0.79$ . Кроме состояний равновесия  $\tilde{O}^\pm$  и  $\tilde{O}$  у системы (4.1) при малых  $\varepsilon < \varepsilon_1 \approx 0.042$  существуют два предельных цикла, охватывающих все состояния равновесия (внешний — устойчивый). При  $\varepsilon = \varepsilon_1$  возникает правая петля сепаратрисы, от которой при увеличении значения  $\varepsilon$  родится внутренний неустойчивый предельный цикл. При  $\varepsilon = \varepsilon_2 \approx 0.146$  образуется большая петля сепаратрисы, охватывающая оба фокуса, а неустойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия, исчезает. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  в системе (4.1) существует один устойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия, а также один неустойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия  $\tilde{O}^+$ . Состояния равновесия  $\tilde{O}^\pm$  — устойчивы. Именно этот случай мы и рассмотрим далее ( $1 > \varepsilon > \varepsilon_2$ ).

Используя компьютер, найдем образ ячейки, ограниченной неустойчивым предельным циклом (синий, желтый и серый цвет на рисунке 5). На рисунке 5 также показан фазовый портрет системы (4.1). Через  $D$  обозначим область притяжения фокусов  $O^\pm$  системы (1.1), а через  $G$  — область притяжения «большого» предельного цикла  $\tilde{L}$  будущего векторного поля. Тогда мера (вероятность) смены режима (дестабилизация)  $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$  определяется величиной

$$P = \frac{S(G \cap T(D))}{S(T(D))},$$

где через  $S$  обозначены площади соответствующих областей. Таким образом, для случайно выбранной начальной точки в области  $D$  с вероятностью  $P$  устанавливается периодический режим колебаний.

Нижняя и верхняя желтые области на рисунке 5 определяют меру траекторий, для которых  $O^+ \rightarrow \tilde{O}^-$ .

*Случай 3:*  $0.8 < p < 1$ . Положим для определенности  $p = 0.9$ . В этом случае в системе и до, и после перехода существуют три аттрактора: два устойчивых состояния равновесия и устойчивый предельный цикл. На рисунке 6 показан (красным цветом) фазовый портрет системы (4.1). Выделены черным цветом два неустойчивых предельных цикла внутри «восьмерки» и внешний устойчивый предельный цикл.



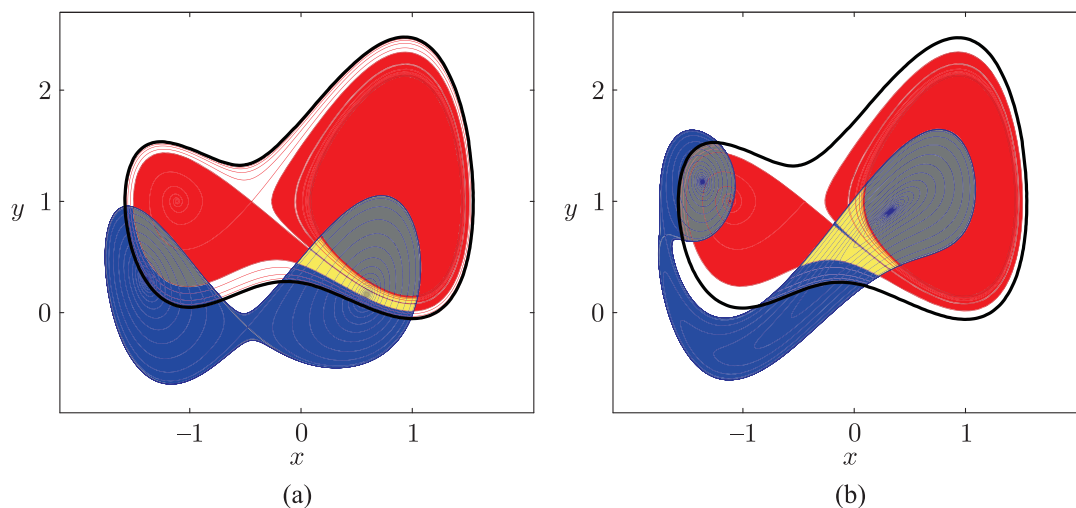


Рис. 5. Образ сепаратрис прошлого векторного поля и сепаратрисы будущего векторного поля ( $p = 0.79$ ,  $\varepsilon = 0.6$ ) при  $\tau = 1$  (a) и  $\tau = 3$  (b).

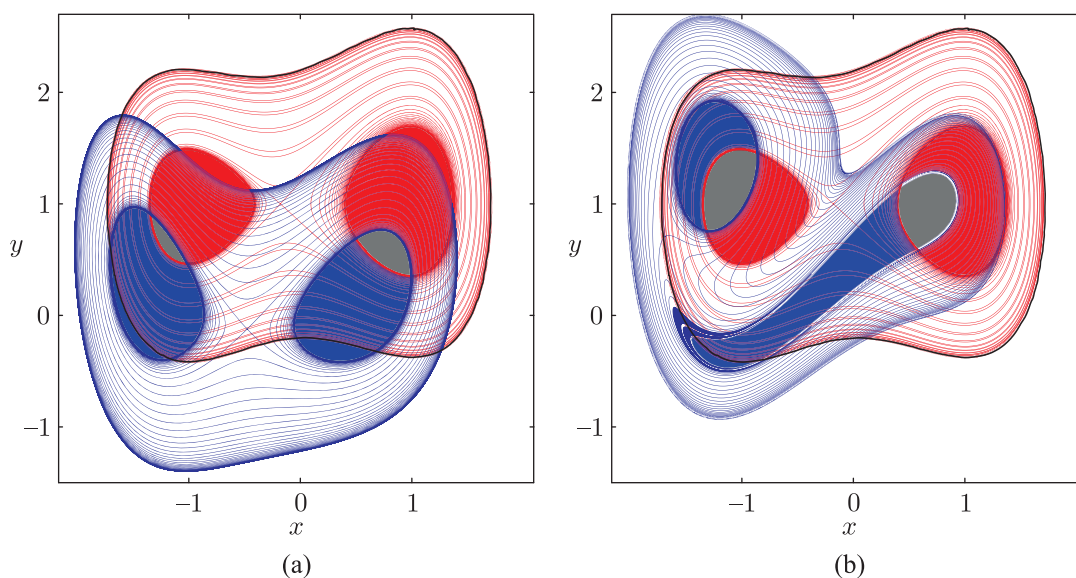


Рис. 6. Образ сепаратрис прошлого векторного поля и сепаратрисы будущего векторного поля ( $p = 0.9$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ) при  $\tau = 1$  (a) и  $\tau = 3$  (b).

Через  $D^\pm$  обозначим области притяжения фокусов  $O^\pm(\pm 1, 0)$  системы, определяющей прошлое векторное поле. Через  $D_\tau^\pm$  обозначим образы областей  $D^\pm$  при действии отображения  $T$ :  $D_\tau^\pm = T(D^\pm)$ . Области  $D_\tau^\pm$  разбиваются неустойчивыми предельными циклами будущего векторного поля на две подобласти каждая  $D_k^\pm$ ,  $k = 1, 2$ . Траектории с начальными точками из областей  $D_1^\pm$  (обозначены серым цветом) стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к устойчивым состояниям равновесия  $\tilde{O}^\pm$ . Это соответствует переходу  $O^\pm \rightarrow \tilde{O}^\pm$ . Для начальных точек из областей  $D_2^\pm$  имеет место переход  $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$  (смена установившегося режима, соответствующая дестабилизации панели). Итак, если начальная точка выбрана до перехода в области  $D^\pm$  притяжения фокусов  $O^\pm$ , то соответствующая траектория может стремиться как к стационарному режиму, так и к периодическому.

За величину

$$P_1^\pm = \frac{S(D_1^\pm)}{S(D_\tau^\pm)}$$

примем вероятность перехода  $O^\pm \rightarrow \tilde{O}^\pm$ , то есть вероятность установления для случайно выбранной начальной точки из  $D^\pm$  стационарного режима  $\tilde{O}^\pm$ . Здесь через  $S(D_1^\pm)$ ,  $S(D_\tau^\pm)$  обозначены площади соответствующих областей. Аналогично введем вероятность перехода  $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$ :

$$P_2^\pm = \frac{S(D_2^\pm)}{S(D_\tau^\pm)}, \quad P_1^\pm + P_2^\pm = 1.$$

Если же начальная точка выбрана до перехода в области притяжения устойчивого предельного цикла, то для соответствующей ей траектории может произойти смена установившегося режима.

Обозначим через  $D_0^\pm$  области притяжения состояний равновесия  $\tilde{O}^\pm$ , а через  $T(D_L)$  — образ области притяжения устойчивого цикла  $L$  внутри. Области  $T(D_L) \cap D_0^\pm$  определяют переход  $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$ . Используя площади соответствующих областей, найдем вероятность перехода  $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$ :

$$P_3^\pm = \frac{S(T(D_L) \cap D_0^\pm)}{S(T(D_L))}.$$

*Случай 4:*  $p > 1$ . В этом случае единственным аттрактором является устойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия. Транзиторный сдвиг существенной роли не играет.

## 5. Заключение

Мы рассмотрели двумерную систему, к которой приводит исследование задачи о колебаниях тонкой пластины под действием потока жидкости или газа и которая является аperiодически неавтономной лишь на ограниченном интервале по времени, то есть является транзиторной. В консервативном случае специальная структура транзиторной системы приводит к простому методу для вычисления меры транспорта между гамильтоновыми когерентными структурами прошлого и будущего векторных полей. Этот метод опирается прежде всего на знание сепаратрис седла автономных систем.

При учете неконсервативности рассматриваемой задачи в соответствующей двумерной автономной системе могут существовать устойчивые предельные циклы, то есть возможны автоколебания.

Транзиторный сдвиг может приводить как к стабилизации колебаний (в связи с переходом от автоколебательного режима к стационарному решению, отвечающему устойчивому состоянию равновесия  $\tilde{O}^+$  или  $\tilde{O}^-$ ), так и к дестабилизации (связанной с переходом  $\tilde{O}^\pm \rightarrow \tilde{L}$ ). Указаны вероятности смены режимов колебаний.

## Список литературы

- [1] Mosovsky B. A., Meiss J. D. Transport in transitory dynamical systems // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2011, vol. 10, no. 1, pp. 35–65.
- [2] Mosovsky B. A., Meiss J. D. Transport in transitory three-dimensional Liouville flows // SIAM J. Appl. Dyn. Syst., 2012, vol. 11, no. 4, pp. 1785–1816.



- [3] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
- [4] Holmes Ph. J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis // *J. Sound Vibration*, 1977, vol. 53, no. 4, pp. 471–503.
- [5] Tam J. I., Holmes Ph. J. Revisiting a magneto-elastic strange attractor // *J. Sound Vibration*, 2014, vol. 333, no. 6, pp. 1767–1780.
- [6] Markus L. Asymptotically autonomous differential systems // *Contributions to the theory of nonlinear oscillations* / S. Lefschetz (Ed.). (Ann. of Math Stud., vol. 3.) Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1956. P. 17–29.
- [7] Лерман Л. М., Шильников Л. П. О классификации грубых неавтономных динамических систем 2-го порядка с конечным числом ячеек // *Докл. АН СССР*, 1973, т. 209, № 3, с. 544–547.
- [8] Заславский Г. М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва – Ижевск: РХД, 2004. 286 с.
- [9] Костромина О. С., Морозов А. Д. О предельных циклах в асимметричном уравнении Дюффинга – Ван-дер-Поля // *Вестник ННГУ*, 2012, № 1, с. 115–121.
- [10] Morozov A. D., Kostromina O. S. On periodic perturbations of asymmetric Duffing – Van-der-Pol equation // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2014, vol. frn-e4, no. 5, 1450061, 16 pp.

### Transitory shift in the flutter problem

Albert D. Morozov<sup>1</sup>, Kirill E. Morozov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue), Nizhny Novgorod, 603950, Russia

<sup>1</sup>morozov@mm.unn.ru, <sup>2</sup>kirwamath@gmail.com

We consider the two-dimensional system, which occurs in the flutter problem. We assume that this system is transitory (one whose time-dependence is confined to a compact interval). In the conservative case of this problem, we identified measure of transport between the cells filled with closed trajectories. In the nonconservative case, we consider the impact of transitory shift to setting of one or another attractor. We give probabilities of changing a mode (stationary to auto-oscillation).

MSC 2010: 34C15

Keywords: transitory system, separatrix, limit cycles, attractors, flutter

Received February 19, 2015, accepted June 18, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 447–457 (Russian)