Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 459–474.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70E17, 70E20, 70H14

# Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса

**Е. А. Вишенкова**

Рассматривается тяжелое твердое тело, одна из точек которого совершает вертикальные высокочастотные гармонические колебания малой амплитуды. В рамках приближенной автономной системы канонических дифференциальных уравнений изучаются частные движения тела — перманентные вращения вокруг вертикальной главной оси инерции, содержащей центр масс. Найдены необходимые и в ряде случаев достаточные условия устойчивости отвечающих таким движениям положений равновесия приведенной системы с двумя степенями свободы. Проведено сравнение полученных результатов с соответствующими результатами для тела с неподвижной точкой. Для двух частных случаев геометрии масс тела проведен нелинейный анализ устойчивости.

Ключевые слова: твердое тело, перманентные вращения, устойчивость, высокочастотные вибрации

Получено 22 июня 2015 года
После доработки 09 августа 2015 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00380) и программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-2363.2014.1).

Вишенкова Екатерина Алексеевна
vishenkova@bk.ru
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3

## 1. Введение

Исследование перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой является классической задачей динамики твердого тела. Эти движения открыты в 1894 году О. Штауде и Б. Млодзеевским [1, 2], их исследование составляет солидную библиографию. Достаточно полный обзор литературы по данной проблеме и история вопроса содержатся в монографии [3]. Среди большого числа работ выделим монографию [4], где проведен качественный анализ необходимых условий устойчивости перманентных вращений в общем случае распределения масс и подробно исследован случай расположения центра масс на главной оси инерции. В статье [5] при помощи метода Четаева получены достаточные условия устойчивости для части допустимых осей перманентных вращений при произвольном распределении масс, а также проанализированы наиболее важные частные случаи геометрии масс тела. Линейный и нелинейный анализ устойчивости перманентных вращений тела вокруг вертикальной оси, содержащей его центр масс, содержится в работах [2–10]. Полное решение этой задачи, охватывающее весь диапазон допустимых значений параметров, осуществлено в монографии [3].

Представляет интерес исследовать влияние быстрых вибраций точки закрепления (подвеса) тела на устойчивость его перманентных вращений. Задача о повышении динамической устойчивости механических систем под воздействием высокочастотных возмущений берет свое начало с работы А. Стефенсона (1908 г.) [11], где обнаружена возможность стабилизации перевернутого математического маятника при наличии быстрых вибраций точки подвеса. До недавнего времени развитие этой тематики касалось, в основном, маятниковых систем [12–21] или волчка Лагранжа [22]. Весьма обширную библиографию по данному вопросу можно найти в работах [18, 23].

В последнее время изучается также влияние быстрых вибраций на динамику твердого тела с произвольной геометрией масс. В статьях [24, 25] получена система приближенных автономных дифференциальных уравнений тяжелого твердого тела, типа уравнений Эйлера – Пуассона, в предположении, что одна из точек тела совершает произвольные периодические или условно-периодические вибрации высокой частоты и малой амплитуды. В рамках этой приближенной системы проведено исследование ряда частных движений твердого тела. Для случая быстрых вертикальных вибраций точки подвеса найдены достаточные условия устойчивости относительных равновесий тела с произвольной геометрией масс, для которых центр масс и точка подвеса лежат на одной вертикали [25]; решена задача о существовании и устойчивости боковых относительных равновесий тела [26]. Решен вопрос о существовании и устойчивости ряда частных движений волчка Лагранжа (стационарных вращений вокруг вертикали и регулярных прецессий) при высокочастотных периодических или условно-периодических вибрациях точки подвеса [27]. Найдены и исследованы два новых типа стационарных вращений тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями точки подвеса и невозможными для тела с неподвижной точкой; первое представляет собой коническое движение вокруг вертикали несимметричного тела с центром масс на главной оси инерции, а второе — перманентное вращение вокруг главной оси инерции в случае, когда центр масс тела не лежит на этой оси [28].

В данной работе в рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений рассматриваются перманентные вращения тела вокруг главной оси инерции, содержащей центр масс, при наличии быстрых вертикальных гармонических колебаний точки подвеса. Проводится линейный и нелинейный анализ устойчивости отвечающих указанным движениям положений равновесия приведенной (по Раусу) системы с двумя степенями свободы. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами устойчивости перманентных вращений в случае тела с неподвижной точкой.

## 2. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана

Рассмотрим движение твердого тела в однородном поле тяжести. Будем считать, что одна из точек тела $O$ (точка подвеса) совершает вертикальные гармонические колебания относительно некоторой неподвижной точки $O^*$ по закону $O^*O = \zeta(t) = a\cos\Omega t$.

Пусть $OXYZ$ — поступательно движущаяся система координат, ось $OZ$ которой направлена вертикально вверх; $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат, ее оси направлены вдоль главных осей инерции тела для точки $O$. Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно системы $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера $\psi$, $\theta$, $\varphi$.

Пусть центр масс $G$ тела расположен на одной из его главных осей инерции для точки $O$, например, на оси $Ox$. Главные оси направляем так, чтобы абсцисса $x_G$ центра масс была положительной.

Кинетическая и потенциальная энергия тела вычисляются по формулам

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 + m\mathbf{v}_O\cdot\mathbf{v}_{G_r} + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right), \quad \Pi = mg(\zeta(t) + \mathbf{OG}\cdot\mathbf{n}).$$

Здесь $m$ — масса тела, $A$, $B$ и $C$ — главные моменты инерции тела для точки $O$, $\mathbf{v}_O = \dot\zeta(t)\mathbf{n}$ — скорость точки подвеса, $\mathbf{v}_{G_r} = \omega\times\mathbf{OG}$ — относительная (в системе координат $OXYZ$) скорость точки $G$; $\omega$ и $\mathbf{n}$ — векторы абсолютной угловой скорости тела и орта оси $OZ$, компоненты $p$, $q$, $r$ и $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ которых в связанной с телом системе координат определяются соотношениями

$$p = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad q = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \quad r = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi,$$
$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \gamma_3 = \cos\theta.$$

Движения системы будем описывать при помощи канонических дифференциальных уравнений. Введем канонически сопряженные с координатами $\psi$, $\theta$, $\varphi$ импульсы по формулам

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial\dot\psi}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial\dot\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} \tag{2.1}$$

и составим функцию Гамильтона системы в виде

$$H = \frac{1}{2}\left(A\widetilde{p}^2 + B\widetilde{q}^2 + C\widetilde{r}^2\right) + \Pi. \tag{2.2}$$

Знак тильда означает, что в соответствующие величины подставлены выражения обобщенных скоростей $\dot\psi$, $\dot\theta$, $\dot\varphi$ через обобщенные импульсы $p_\psi$, $p_\theta$, $p_\varphi$, полученные из соотношений (2.1).

Осуществим в (2.2) каноническую унивалентную замену переменных по формулам $\widehat\psi = \psi$, $\widehat\theta = \theta$, $\widehat\varphi = \varphi$, $\widehat{p}_\psi = p_\psi$ и

$$\widehat{p}_\theta = p_\theta + mx_Ga\Omega\sin\Omega t\sin\theta\cos\varphi, \quad \widehat{p}_\varphi = p_\varphi + mx_Ga\Omega\sin\Omega t\cos\theta\sin\varphi,$$

задаваемую производящей функцией

$$S = \psi\widehat{p}_\psi + \theta\widehat{p}_\theta + \varphi\widehat{p}_\varphi - mx_Ga\Omega\sin\Omega t\sin\theta\sin\varphi.$$

В результате этой замены гамильтониан системы примет вид

$$\widehat{H} = \frac{(A\cos^2\widehat{\varphi} + B\sin^2\widehat{\varphi})(\widehat{p}_\psi - \widehat{p}_\varphi\cos\widehat{\theta})^2}{2AB\sin^2\widehat{\theta}} + \frac{A\sin^2\widehat{\varphi} + B\cos^2\widehat{\varphi}}{2AB}\widehat{p}_\theta^2 + \frac{\widehat{p}_\varphi^2}{2C} + \\ + \frac{(B-A)\sin\widehat{\varphi}\cos\widehat{\varphi}(\widehat{p}_\psi - \widehat{p}_\varphi\cos\widehat{\theta})\widehat{p}_\theta}{AB\sin\widehat{\theta}} + m(g - a\Omega^2\cos\Omega t)x_G\sin\widehat{\theta}\sin\widehat{\varphi}.$$

Будем предполагать, что амплитуда $a$ колебаний точки подвеса мала по сравнению с приведенной длиной $\ell = A/(mx_G)$, а частота $\Omega$ колебаний велика по сравнению с характерной частотой $\Omega_1 = \sqrt{g/\ell}$, при этом считаем, что $a\Omega \sim 1$. Введем малый параметр $\varepsilon$ и безразмерную частоту $\omega_0$ по формулам

$$\varepsilon = \frac{a}{\ell} \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \qquad \frac{\Omega_1}{\Omega} = \varepsilon\omega_0.$$

Введем также безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{A}{B}, \quad \beta = \frac{A}{C} \tag{2.3}$$

и обезразмерим импульсы и время при помощи множителей $A\Omega$ и $\Omega$ соответственно.

Далее при помощи методов теории возмущений для преобразованного гамильтониана можно найти близкую к тождественной каноническую замену переменных $\widehat{\psi}$, $\widehat{\theta}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{p}_\psi$, $\widehat{p}_\theta$, $\widehat{p}_\varphi$ $\to$ $\psi'$, $\theta'$, $\varphi'$, $p'_\psi$, $p'_\theta$, $p'_\varphi$, уничтожающую независимую переменную (безразмерное время) в членах до второго порядка включительно по $\varepsilon$. Эта процедура и указанная замена здесь не приводятся.

Отбросим в преобразованном гамильтониане слагаемые третьего и более высоких порядков по $\varepsilon$. Полученный приближенный гамильтониан отвечает автономной системе. В размерных величинах он имеет вид (штрихи при всех переменных опущены)

$$H = \frac{(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi)(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2}{2AB\sin^2\theta} + \frac{A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi}{2AB}p_\theta^2 + \\ + \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{(B-A)\sin\varphi\cos\varphi(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)p_\theta}{AB\sin\theta} + \\ + mgx_G\sin\varphi\sin\theta + \frac{m^2x_G^2a^2\Omega^2(C\cos^2\theta + B\sin^2\theta\cos^2\varphi)}{4BC}. \tag{2.4}$$

Последнее слагаемое в (2.4) представляет собой вибрационный потенциал, ранее полученный другим путем и для более общего случая в [24] (см. также [23]).

Координата $\psi$ как в исходной, так и в преобразованной приближенной системе циклическая, соответствующий ей импульс $p_\psi$ постоянен.

Система с гамильтонианом (2.4) имеет частные решения — положения равновесия

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \varphi_0 \ \ (\cos\varphi_0 = 0), \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\varphi_0} = 0, \quad p_\psi = A\omega = \mathrm{const}, \tag{2.5}$$

отвечающие перманентным вращениям тела вокруг вертикально расположенной оси $Ox$, содержащей центр масс тела, с постоянной угловой скоростью $\omega$. При этом точка $G$ может располагаться выше (случай $\varphi_0 = \pi/2$) или ниже (случай $\varphi_0 = 3\pi/2$) точки подвеса. Угловая скорость перманентного вращения может быть произвольной.

Будем исследовать устойчивость решений (2.5) (по отношению к координатам $\theta$, $\varphi$ и отвечающим им импульсам), оставаясь в рамках рассматриваемой приближенной системы.

Для удобства вернемся к безразмерным параметрам (2.3) и положим

$$p_\psi = A\Omega_1\eta \quad (\eta = \mathrm{const}), \quad p_\theta = A\Omega_1 p_2, \quad p_\varphi = A\Omega_1 p_3, \quad \tau = \Omega_1 t.$$

В безразмерных переменных гамильтониан системы запишется в виде

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{2\sin^2\theta}(\eta - p_3\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}(\alpha\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)p_2^2 + \\ & + \frac{(1-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\theta}(\eta - p_3\cos\theta)p_2 + \frac{1}{2}\beta p_3^2 + \sin\theta\sin\varphi + \\ & + \frac{\xi}{2}(\alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta\cos^2\varphi), \quad \xi = \frac{mx_G a^2\Omega^2}{2Ag}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Параметр $\xi$, характеризующий частоту вибрации точки подвеса, а также безразмерную угловую скорость $\eta$ ($\eta = \omega/\Omega_1$) перманентного вращения, считаем положительными. Инерционные параметры $\alpha$ и $\beta$ должны удовлетворять неравенствам, следующим из неравенств треугольника для моментов инерции:

$$\alpha + \beta - \alpha\beta \geqslant 0, \quad \alpha - \beta + \alpha\beta \geqslant 0, \quad \beta - \alpha + \alpha\beta \geqslant 0. \tag{2.7}$$

## 3. Линейный анализ устойчивости

Для исследования устойчивости описанных частных решений введем возмущения по формулам

$$\theta = \theta_0 + x_1, \quad \varphi = \varphi_0 + x_2, \quad p_2 = y_1, \quad p_3 = y_2.$$

Гамильтониан системы примет следующий вид:

$$\begin{gathered} H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots, \\ H_2 = \frac{\eta^2 - s + \alpha\xi}{2}x_1^2 + \frac{(\alpha-1)\eta^2 - s + \beta\xi}{2}x_2^2 + \frac{\alpha}{2}y_1^2 + \frac{\beta}{2}y_2^2 + \\ + \eta x_1 y_2 + (\alpha - 1)\eta x_2 y_1, \qquad H_3 = 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} H_4 = {} & \frac{8\eta^2 - 4\alpha\xi + s}{24}x_1^4 - \frac{4(\alpha-1)\eta^2 + 4\beta\xi - s}{24}x_2^4 + \\ & + \frac{2(\alpha-1)\eta^2 - 2\beta\xi + s}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2y_2^2 - \frac{\alpha-1}{2}x_2^2y_1^2 + \frac{5\eta}{6}x_1^3y_2 - \\ & - \frac{2(\alpha-1)\eta}{3}x_2^3y_1 + \frac{(\alpha-1)\eta}{2}x_1^2x_2y_1 + (\alpha-1)\eta x_1x_2^2y_2 + (\alpha-1)x_1x_2y_1y_2. \end{aligned}$$

Здесь $s = \mathrm{sign}(\sin\varphi_0)$, а многоточие означает совокупность слагаемых не менее пятой степени относительно возмущений.

Достаточные условия устойчивости исследуемых решений найдем как условия положительной определенности квадратичной формы $H_2$. Эти условия сводятся к системе неравенств

$$\eta^2(\alpha - 1) - s\alpha + \xi\alpha\beta > 0, \quad \eta^2(\beta - 1) - s\beta + \xi\alpha\beta > 0. \tag{3.2}$$

Если форма $H_2$ знакопеременна, то будем исследовать характеристическое уравнение соответствующей ей линейной системы, имеющее вид

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0, \tag{3.3}$$
$$a = (2 - \alpha - \beta + \alpha\beta)\eta^2 - s(\alpha + \beta) + \xi(\alpha^2 + \beta^2),$$
$$b = [\eta^2(\alpha - 1) - s\alpha + \xi\alpha\beta][\eta^2(\beta - 1) - s\beta + \xi\alpha\beta].$$

При выполнении условий

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0 \tag{3.4}$$

корни $\pm i\sigma_j$ $(j = 1, 2)$ уравнения (3.3) чисто мнимые, и исследуемые решения устойчивы в линейном приближении. Неравенства (3.2) являются необходимыми условиями устойчивости решений (2.5).

Если хотя бы одно из неравенств (3.2) выполняется с противоположным знаком, то имеет место неустойчивость, так как в этом случае у характеристического уравнения будут корни с положительной вещественной частью.

Изложим результаты, полученные при исследовании условий (3.2), (3.4).

*3.1. Случай $s = -1$ (центр масс тела ниже точки подвеса).* Допустимую часть плоскости параметров $\alpha$, $\beta$ разобьем на 6 областей прямыми $\alpha = \beta$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Эти области расположены симметрично относительно прямой $\alpha = \beta$; они обозначены цифрами 1–3 и 1′–3′ (рис. 1).

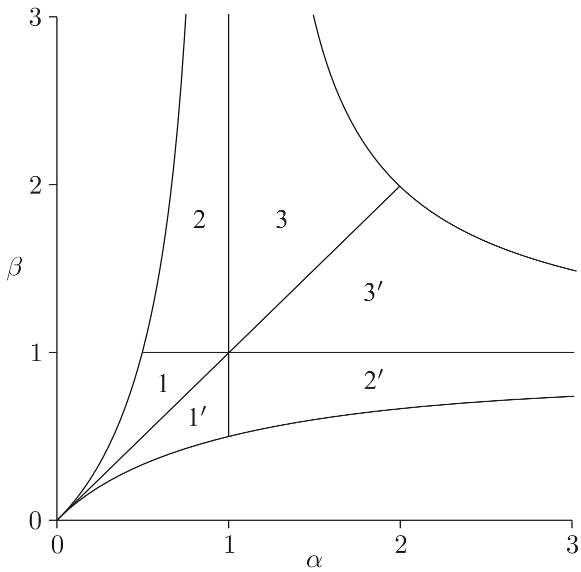


Рис. 1

В областях 1, 2 достаточные (и одновременно необходимые) условия устойчивости выполняются, если угловая скорость $\eta$ перманентного вращения удовлетворяет условию $\eta < \eta_*(\xi)$, а в области 3 — при любых значениях параметра $\eta$ $(\eta > 0)$. В области 1 могут выполняться также только необходимые (не являющиеся достаточными) условия устойчивости, определяемые неравенством $\eta > \eta_{**}(\xi)$. Величины $\eta_*(\xi)$, $\eta_{**}(\xi)$ задаются соотношениями

$$\eta_*^2(\xi) = \frac{\alpha(\xi\beta + 1)}{1 - \alpha}, \quad \eta_{**}^2(\xi) = \frac{\beta(\xi\alpha + 1)}{1 - \beta}.$$

В указанных условиях устойчивости параметр $\xi$ в правых частях может принимать любые положительные значения (частота вибрации точки подвеса тела произвольна). Граница изменения параметра $\eta$ (угловой скорости перманентного вращения) зависит от выбранного значения $\xi$.

В областях $1'$–$3'$ условия устойчивости получаются из соответствующих условий для областей 1–3 заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Из приведенных результатов следует, что наличие вибраций (по сравнению со случаем неподвижной точки подвеса) расширяет диапазон угловых скоростей перманентных вращений тела, для которых выполнены достаточные условия устойчивости. В то же время сдвигается, в сторону увеличения, нижняя граница угловых скоростей, обеспечивающих выполнение только необходимых условий устойчивости.

Заметим, что разбиение плоскости параметров $\alpha$, $\beta$ на области здесь (как и в случае $s = 1$, рассматриваемом в следующем разделе) не зависит от параметров $\xi$ и $\eta$ и совпадает с соответствующим разбиением при решении задачи для тела с неподвижной точкой подвеса [3, 6].

*3.2. Случай $s = 1$ (центр масс тела выше точки подвеса)*. Выделим в допустимой части плоскости параметров $\alpha$, $\beta$ области 1–5 и симметричные им относительно прямой $\alpha = \beta$ области $1'$–$5'$ (рис. 2). Эти области разделены, помимо прямой $\alpha = \beta$, также прямыми $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и двумя симметричными кривыми $DB$ и $D'B$. Кривая $DB$ задается уравнением

$$\alpha = \frac{\beta(2\beta - 3)}{(\beta - 1)^2}$$

и пересекает границы областей в точках $D((9 - \sqrt{17})/8; (\sqrt{17} - 1)/2)$ и $H(1; (\sqrt{5} + 1)/2)$.

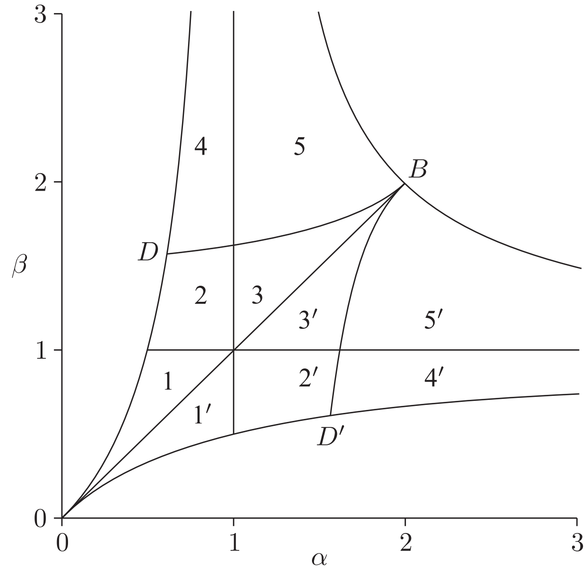


Рис. 2

В таблице 1 приведены условия устойчивости решений (2.5) в областях 1–5. Эти условия представляются следующим образом. Для каждой из областей полуось положительных

Таблица 1. Достаточные и необходимые условия устойчивости в случае $s = 1$

| Область | Значения $\xi$ | Достаточные условия | Только необходимые условия |
|---|---|---|---|
| 1 | $\xi \leqslant \xi_1$ | — | $\eta > \eta_4$ |
| | $\xi_1 < \xi < \xi_3$ | — | $\eta_1 < \eta < \eta_3$ или $\eta > \eta_4$ |
| | $\xi_3 < \xi < 1/\alpha$ | — | $\eta > \eta_1$ |
| | $1/\alpha < \xi < 1/(\alpha\beta)$ | $\eta < \eta_2$ | $\eta > \eta_1$ |
| | $\xi > 1/(\alpha\beta)$ | $\eta < \eta_1$ | $\eta > \eta_2$ |
| 2 | $\xi \leqslant \xi_1$ | — | $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $\xi_1 < \xi < \xi_3$ | — | $\eta_1 < \eta < \eta_3$ или $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $\xi_3 < \xi < 1/(\alpha\beta)$ | — | $\eta_1 < \eta < \eta_2$ |
| | $1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$ | $\eta_2 < \eta < \eta_1$ | — |
| | $\xi > 1/\alpha$ | $\eta < \eta_1$ | — |
| 3 | $\xi < 1/(\alpha\beta)$ | $\eta > \eta_1$ | $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_1$ | $\eta > \eta_2$ | $\eta_4 < \eta < \eta_1$ |
| | $\xi_1 < \xi < 1/\alpha$ | $\eta > \eta_2$ | — |
| | $\xi > 1/\alpha$ | любые $\eta$ | — |
| 4 | $\xi < \xi_2$ | — | — |
| | $\xi_2 < \xi \leqslant \xi_1$ | — | $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $\xi_1 < \xi < \xi_3$ | — | $\eta_1 < \eta < \eta_3$ или $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $\xi_3 < \xi < 1/(\alpha\beta)$ | — | $\eta_1 < \eta < \eta_2$ |
| | $1/(\alpha\beta) < \xi < 1/\alpha$ | $\eta_2 < \eta < \eta_1$ | — |
| | $\xi > 1/\alpha$ | $\eta < \eta_1$ | — |
| 5 | $\xi < \xi_2$ | $\eta > \eta_1$ | — |
| | $\xi_2 < \xi < 1/(\alpha\beta)$ | $\eta > \eta_1$ | $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $1/(\alpha\beta) < \xi < \xi_1$ | $\eta > \eta_2$ | $\eta_4 < \eta < \eta_1$ |
| | $\xi_1 < \xi < 1/\alpha$ | $\eta > \eta_2$ | — |
| | $\xi > 1/\alpha$ | любые $\eta$ | — |

значений параметра $\xi$ разбита на несколько интервалов (второй столбец таблицы 1), границы которых зависят от исследуемой точки $(\alpha, \beta)$ области. Выбирается интервал с требуемым значением $\xi$ (отвечающим требуемой частоте вибрации точки подвеса). В соответствующей ему строке таблицы 1 выписаны достаточные (и одновременно необходимые) и только необходимые условия устойчивости в виде ограничений на (безразмерную) угловую скорость $\eta$ перманентных вращений тела с границами — функциями выбранных значений $\alpha$, $\beta$, $\xi$.

Введенные в таблице обозначения таковы:

$$\xi_1 = \frac{3\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta}{2\alpha\beta - \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 - \alpha^3 + \beta^2},$$
$$\xi_2 = \frac{3\beta - 2\alpha\beta - 2\beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha}{2\alpha\beta - 2\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \beta^3},$$
$$\xi_3 = \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 - \alpha - \beta}, \quad \eta_1^2 = \frac{\alpha(\xi\beta - 1)}{1 - \alpha}, \quad \eta_2^2 = \frac{\beta(\xi\alpha - 1)}{1 - \beta},$$
$$\eta_{3,4} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta)\xi + 4 - \alpha - \beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} \mp$$
$$\mp \frac{2\sqrt{((\alpha^2 - \alpha - \beta)\xi + 2 - \alpha)((\beta^2 - \alpha - \beta)\xi + 2 - \beta)}}{\alpha + \beta - \alpha\beta}. \tag{3.5}$$

Здесь минус и плюс относятся к $\eta_3$ и $\eta_4$ соответственно.

Прочерк в таблице означает, что соответствующие условия не выполнены ни при каких значениях параметра $\eta$. В остальных случаях для не выписанных в таблице значений параметра $\eta$ имеет место неустойчивость.

Анализируя приведенные результаты, заключаем, что в областях 3 и 5 при наличии вибрации нижняя граница диапазона угловых скоростей перманентных вращений, для которых выполнены достаточные условия устойчивости, ниже по сравнению со случаем неподвижной точки подвеса. Эта нижняя граница уменьшается с ростом частоты вибраций, а при $\xi > 1/\alpha$ достаточные условия устойчивости выполняются при любых значениях угловой скорости.

В областях 1 и 2 при отсутствии вибрации ($\xi = 0$) выполняются только необходимые условия устойчивости. Начиная с некоторого значения параметра $\xi$, появляются области достаточных условий устойчивости, для них угловая скорость перманентного вращения не должна превышать некоторого максимального значения.

В области 4 в случае отсутствия вибрации рассматриваемые перманентные вращения неустойчивы. С ростом $\xi$ возникают сначала области выполнения только необходимых условий устойчивости (в ограниченном диапазоне угловых скоростей перманентных вращений), переходящие с последующим ростом частоты вибраций в достаточные условия.

Условия устойчивости в симметричных областях $1'$–$5'$ получаются из приведенных условий путем замены $\alpha \leftrightarrow \beta$, выводы по результатам устойчивости аналогичны.

Приведем также условия устойчивости исследуемых движений для случая динамически симметричного тела ($\alpha = 1$), соответствующего границам рассмотренных областей. В случае расположения центра масс тела ниже точки подвеса ($s = -1$) при $\beta < 1$ достаточные условия устойчивости определяются соотношением $\eta^2 < \beta(1 + \xi)/(1 - \beta)$; при выполнении неравенства с противоположным знаком имеем неустойчивость. Если же $\beta \geqslant 1$, то перманентные вращения устойчивы при любых значениях параметров $\eta$ и $\xi$. Результаты исследования для случая расположения центра масс тела выше точки подвеса ($s = 1$) представлены в таблице 2. Величины $\xi_j$ и $\eta_j$ определяются из формул (3.5) при $\alpha = 1$. Величина $\xi_4$ задается формулой

$$\xi_4 = \frac{\beta - 2}{\beta^2 - \beta - 1}. \tag{3.6}$$

## 4. Нелинейный анализ устойчивости

Продолжим исследование устойчивости решений (2.5) в тех областях, где выполнены только необходимые условия устойчивости. С этой целью проведем нормализацию гамильтониана возмущенного движения (3.1) в членах до четвертого порядка включительно.

Осуществим в (3.1) линейное унивалентное каноническое преобразование $x_i, y_i \to q_i, p_i$ $(i = 1, 2)$ по формулам

$$
\begin{gathered}
x_1 = n_{11}q_1 + n_{12}q_2, \quad x_2 = n_{23}p_1 + n_{24}p_2, \\
y_1 = n_{33}p_1 + n_{34}p_2, \quad y_2 = n_{41}q_1 + n_{42}q_2, \\
n_{11} = \frac{\sqrt{2}\sigma_1(\varkappa(\beta-2)\eta^2 + \beta(s-(\alpha+\beta)\xi)(\beta-\alpha) + \beta\sqrt{d})}{\sqrt{\varsigma}o_1}, \\
n_{12} = \frac{\sqrt{2}\sigma_2(\varkappa(\beta-2)\eta^2 + \beta(s-(\alpha+\beta)\xi)(\beta-\alpha) - \beta\sqrt{d})}{\sqrt{\varsigma}o_2}, \\
n_{23} = \frac{\varkappa\eta\sqrt{2\varsigma}}{o_1}, \quad n_{24} = -\frac{\varkappa\eta\sqrt{2\varsigma}}{o_2}, \\
n_{33} = -\frac{\sqrt{\varsigma}[(\beta-\alpha)[s-(\alpha+\beta)\xi] + \varkappa\eta^2 + \sqrt{d}]}{\sqrt{2}o_1}, \\
n_{34} = \frac{\sqrt{\varsigma}[(\beta-\alpha)[s-(\alpha+\beta)\xi] + \varkappa\eta^2 - \sqrt{d}]}{\sqrt{2}o_2}, \\
n_{41} = \frac{\eta\sqrt{2\sigma_1}[\varkappa\eta^2 - [2\alpha^2\beta - (\alpha+\beta)^2]\xi - (3\beta+\alpha-2\alpha\beta)s - \sqrt{d}]}{\sqrt{\varsigma}o_1}, \\
n_{42} = \frac{\eta\sqrt{2\sigma_2}[\varkappa\eta^2 - [2\alpha^2\beta - (\alpha+\beta)^2]\xi - (3\beta+\alpha-2\alpha\beta)s + \sqrt{d}]}{\sqrt{\varsigma}o_2}, \\
\varsigma = (1-\beta)\eta^2 + (s-\alpha\xi)\beta, \quad \varkappa = \alpha + \beta - \alpha\beta, \\
o_1 = \sqrt{\sigma_1(-\beta\varkappa^2\eta^4 - 2\varkappa((\beta-2)\sqrt{d} + (\upsilon\xi + \chi s)\beta)\eta^2 - z)}, \\
o_2 = \sqrt{\sigma_2(\beta\varkappa^2\eta^4 + 2\varkappa((\upsilon\xi + \chi s)\beta - (\beta-2)\sqrt{d})\eta^2 + z)}, \\
\chi = \beta + \alpha - 4, \quad \upsilon = \beta(2-\beta) + \alpha(2-\alpha), \\
z = \beta[\sqrt{d} - (\beta-\alpha)[(\beta+\alpha)\xi - s]]^2, \\
\sigma_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\eta^2(2-\varkappa) + \xi(\alpha^2+\beta^2) - s(\alpha+\beta) \pm \sqrt{d}} \quad (\sigma_1 > \sigma_2).
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

Здесь $d$ — дискриминант характеристического уравнения (3.3), определенный в соотношениях (3.4), а $\sigma_1$ и $\sigma_2$ — частоты малых линейных колебаний системы.

В результате этого преобразования квадратичная часть гамильтониана приводится к нормальной форме вида

$$
\widetilde{H}_2 = \frac{1}{2}\sigma_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\sigma_2(q_2^2 + p_2^2). \tag{4.2}
$$

Далее проведем нелинейную нормализацию. В гамильтониане возмущенного движения отсутствуют члены третьей степени относительно возмущений, поэтому резонанс третьего порядка несущественен (если исключить случай вырождения). При отсутствии резонанса четвертого порядка нормализованный до членов четвертой степени включительно гамильтониан возмущенного движения имеет вид

$$H = \sigma_1 r_1 - \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}),$$

$$c_{20} = \frac{1}{16}(s + 8\eta^2 - 4\alpha\xi)n_{11}^4 + \frac{1}{16}(s + 4(\eta^2(1-\alpha) - \beta\xi))n_{23}^4 + \frac{5}{4}n_{11}^3 n_{41}\eta +$$
$$+ (\eta - \alpha\eta)n_{33}n_{23}^3 + \frac{3}{4}n_{41}^2 n_{11}^2 + \frac{3}{4}(1-\alpha)n_{23}^2 n_{33}^2 + \frac{1}{8}(s + 2(\eta^2(\alpha-1) - \beta\xi))n_{11}^2 n_{23}^2 +$$
$$+ \frac{1}{4}(\alpha-1)\eta n_{11}^2 n_{23} n_{33} + \frac{1}{2}\eta(\alpha-1)n_{11}n_{23}^2 n_{41} + \left(\frac{1}{2}(\alpha-1)\right) n_{11}n_{23}n_{33}n_{41},$$

$$c_{11} = \frac{1}{4}\left[(4(1-\alpha)\eta^2 + s - 4\beta\xi)n_{24}^2 - 8\eta(\alpha-1)n_{24}n_{34} + 2(\alpha-1)\eta^2 n_{12}^2 +\right.$$
$$\left. + (s - 2\beta\xi)n_{12}^2 + 4(\alpha-1)\eta n_{42}n_{12} - 2(\alpha-1)n_{34}^2\right] n_{23}^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(\alpha-1)(\eta n_{12}^2 + 2n_{42}n_{12} - 4\eta n_{24}^2 - 4n_{34}n_{24})n_{33}n_{23} +$$
$$+ 2n_{11}n_{12}n_{41}n_{42} + 2\eta^2 n_{11}^2 n_{12}^2 + \frac{5}{2}\eta(n_{11}n_{42} + n_{12}n_{41})n_{11}n_{12} +$$
$$+ \frac{1}{4}\left[4(\alpha-1)\eta n_{11}n_{41} + (s - 2\beta\xi)n_{11}^2 + 2(\alpha-1)\eta^2 n_{11}^2 - 2(\alpha-1)n_{33}^2\right] n_{24}^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}(\alpha-1)(\eta n_{11}^2 + 2n_{11}n_{41})n_{34}n_{24} + \frac{1}{2}n_{12}^2 n_{41}^2 + \frac{1}{4}[(s - 4\alpha\xi)n_{12}^2 + 2n_{42}^2]n_{11}^2,$$

$$c_{02} = -\eta(\alpha-1)n_{34}n_{24}^3 + \frac{1}{16}[4(1-\alpha)\eta^2 + s - 4\beta\xi]n_{24}^4 + \frac{1}{16}(s - 4\alpha\xi)n_{12}^4 +$$
$$+ \frac{3}{4}n_{12}^2 n_{42}^2 + \frac{1}{2}\eta^2 n_{12}^4 + \frac{5}{4}\eta n_{12}^3 n_{42} + \frac{1}{4}(\alpha-1)(\eta n_{12}^2 + 2n_{42}n_{12})n_{34}n_{24} +$$
$$+ \frac{1}{8}\left[2(\alpha-1)\eta^2 n_{12}^2 + (s - 2\beta\xi)n_{12}^2 + 4(\alpha-1)\eta n_{42}n_{12} - 6(\alpha-1)n_{34}^2\right] n_{24}^2.$$

Здесь введены «полярные» координаты $\varphi_j$ и $r_j$, задаваемые формулами $q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j$ $(j = 1, 2)$.

Исследуемые перманентные вращения устойчивы по Ляпунову при выполнении условия теоремы Арнольда – Мозера [29]:

$$\Delta = c_{20}\sigma_2^2 + c_{11}\sigma_1\sigma_2 + c_{02}\sigma_1^2 \neq 0. \qquad (4.3)$$

Если в системе реализуется резонанс четвертого порядка ($\sigma_1 = 3\sigma_2$), то нормализованная функция Гамильтона имеет вид

$$H = 3\sigma_2 r_1 - \sigma_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + k r_1^{1/2} r_2^{3/2}\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_j^{5/2}),$$

$$k = \frac{1}{12}\Big[[(s - 4\beta\xi) - 4(\alpha-1)\eta^2]n_{23} - 4\eta(\alpha-1)n_{33}\Big]n_{24}^3 - \frac{1}{4}\Big[[2\eta(\alpha-1)\times$$
$$\times(\eta n_{11} + n_{41}) + (s - 2\beta\xi)]n_{11}n_{12} + 2\eta(\alpha-1)((n_{42}n_{11} + 2n_{23}n_{34}) +$$
$$+ n_{34}n_{33})\Big]n_{24}^2 - \frac{1}{4}\Big[[(\alpha-1)\eta(2\eta n_{23} + n_{33}) + (s - 2\beta\xi)n_{23}]n_{12}^2 +$$
$$+ 2(\alpha-1)[\eta(n_{11}n_{34} + 2n_{23}n_{42}) + n_{33}n_{42} + n_{41}n_{34}]n_{12} + 2(\alpha-1)(n_{23}n_{34} +$$
$$+ n_{42}n_{11})n_{34}\Big]n_{24} + \frac{1}{12}n_{12}\Big[[6\eta^2 n_{11} + 5\eta n_{41} + (s - 4\alpha\xi)n_{11}]n_{12}^2 - 3n_{12}\times$$
$$\times[\eta\big((\alpha-1)n_{23}n_{34} - 5n_{42}n_{11}\big) - 2n_{41}n_{42}] - 6((\alpha-1)n_{23}n_{34} - n_{42}n_{11})n_{42}\Big].$$

При этом, если выполняется условие

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}k \quad (k \geqslant 0), \tag{4.4}$$

то исследуемое решение устойчиво по Ляпунову [30]. При выполнении неравенства с противоположным знаком имеем неустойчивость.

Из выражений для $\sigma_1$, $\sigma_2$ следует, что резонансное соотношение $\sigma_1 = 3\sigma_2$ эквивалентно биквадратному относительно параметра $\eta$ уравнению вида

$$u\eta^4 + 2v\eta^2 + w = 0, \tag{4.5}$$

$$u = (\alpha\beta - \alpha - \beta - 8)[9(\alpha\beta - \alpha - \beta) + 8],$$

$$v = sv_0 + v_1\,\xi, \quad v_0 = 9(\alpha^2 + \beta^2) - (9\alpha\beta + 68)(\alpha + \beta) + 118\alpha\beta,$$

$$v_1 = -9(\alpha^3 + \beta^3) + 18(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta[9(\alpha^2 + \beta^2) - 59(\alpha + \beta) + 100],$$

$$w = w_0 + sw_1\,\xi + w_2\,\xi^2, \quad w_0 = (9\beta - \alpha)(\beta - 9\alpha),$$

$$w_1 = 82\alpha\beta(\alpha + \beta) - 18(\alpha^3 + \beta^3), \quad w_2 = (9\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - 9\alpha^2).$$

Поэтому, в зависимости от выбранной области, в пространстве параметров задачи может быть две или одна поверхности резонанса четвертого порядка либо резонансный случай не реализуется.

Таким образом, устойчивость может нарушиться, если точка $(\alpha, \beta, \xi, \eta)$ из исследуемой области пространства параметров принадлежит поверхности резонанса четвертого порядка (случай $\sigma_1 = 3\sigma_2$) или поверхности вырождения (случай $\Delta = 0$).

## 5. Некоторые частные случаи

Проведем нелинейный анализ устойчивости исследуемых решений для двух частных значений параметра $\alpha$: $\alpha = 1$ (случай динамически симметричного тела) и $\alpha = 2$ (случай Бобылева–Стеклова). В трехмерном пространстве параметров $\xi$, $\eta$, $\beta$ будем строить сечения $\beta = \mathrm{const}$ для различных (допустимых) значений параметра $\beta$. Результаты анализа устойчивости будем представлять в плоскости параметров $\xi$ и $\eta$, характеризующих частоту вибрации точки подвеса и угловую скорость вращений. Здесь же будут приведены полученные в разделе 3 области достаточных условий устойчивости.

*5.1. Случай динамической симметрии тела.* Пусть тело динамически симметрично ($\alpha = 1$, $\beta > 1/2$). Рассмотрим случай $s = 1$ расположения центра масс тела выше точки подвеса, для которого могут выполняться как достаточные, так и только необходимые условия устойчивости (см. табл. 2).

Эти области показаны на рисунке 3, соответствующем интервалам $1/2 < \beta < 1$, $1 \leqslant \beta < (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta \geqslant (1 + \sqrt{5})/2$ изменения параметра $\beta$. Области неустойчивости на рисунке 3 закрашены серым цветом. Области выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости не закрашены и лежат, соответственно, правее и левее граничной прямой $\xi = 1/\beta$. Кривые резонанса четвертого порядка показаны полужирными линиями, а кривые вырождения — пунктирными.

При $\beta \in (1/2, 1)$ (рис. 3a) область выполнения только необходимых условий устойчивости не ограничена сверху. В области имеется кривая резонанса четвертого порядка, соединяющая одну из точек левой границы области с угловой точкой (точкой возврата) нижней границы. Имеются также две ветви кривой вырождения, выходящие из точек нижней границы левее и правее точки возврата. Левая из этих ветвей, пересекая резонансную

Таблица 2. Достаточные и необходимые условия устойчивости в случае $\alpha = 1$, $s = 1$

| Значения $\beta$ | Значения $\xi$ | Достаточные условия | Только необходимые условия |
|---|---|---|---|
| $1/2 < \beta < 1$ | $\xi \leqslant \xi_2$ | — | $\eta > \eta_4$ |
| | $\xi_2 < \xi < \xi_4$ | — | $\eta_2 < \eta < \eta_3$ или $\eta > \eta_4$ |
| | $\xi_4 < \xi < 1/\beta$ | — | $\eta > \eta_2$ |
| | $\xi > 1/\beta$ | $\eta < \eta_2$ | — |
| $1 < \beta < (1+\sqrt{5})/2$ | $\xi < 1/\beta$ | — | $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $1/\beta < \xi < 1$ | $\eta > \eta_1$ | — |
| | $\xi > 1$ | любые $\eta$ | — |
| $\beta > (1+\sqrt{5})/2$ | $\xi < \xi_2$ | — | — |
| | $\xi_2 < \xi < 1/\beta$ | — | $\eta_4 < \eta < \eta_2$ |
| | $1/\beta < \xi < 1$ | $\eta > \eta_1$ | — |
| | $\xi > 1$ | любые $\eta$ | — |

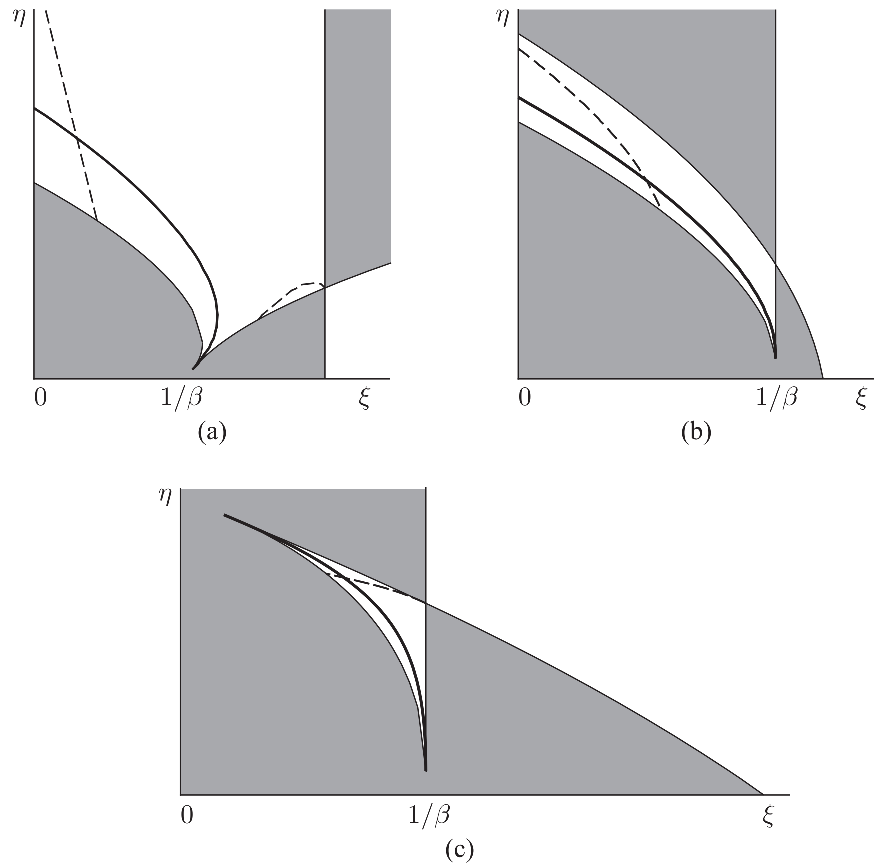


Рис. 3

кривую, при $\eta \to \infty$ асимптотически стремится к оси $\xi = 0$. Правая ветвь заканчивается в угловой точке на границе $\eta = 1/\beta$ области. С ростом $\beta$ левый конец этой ветви «ползет» вдоль нижней границы области по направлению к угловой точке, при $\beta = 2/3$ кривая вырождается в точку и с последующим ростом $\beta$ исчезает. При $2/3 < \beta < 1$ качественный характер резонансной кривой и первой ветви кривой вырождения сохраняется. Этот случай на рисунке 3 не отражен.

При переходе через точку $\beta = 1$ у области выполнения только необходимых условий устойчивости появляется верхняя граница, и область принимает вид криволинейного четырехугольника (рис. 3b), а при $\beta > (1+\sqrt{5})/2$ — вид криволинейного треугольника (рис. 3c). В области имеется кривая резонанса четвертого порядка, которая соединяет либо точку левой границы области с угловой точкой на правой границе $\xi = 1/\beta$ (рис. 3b), либо две «вершины» криволинейного треугольника (рис. 3c). Единственная ветвь кривой вырождения соединяет точки на двух границах исследуемой области и имеет точку пересечения с резонансной кривой. В диапазоне $(1+\sqrt{5})/2 < \beta < 2$ (рис. 3c) правая граничная точка кривой вырождения с ростом $\beta$ «ползет» вдоль верхней границы, при $\beta = 2$ (случай С. В. Ковалевской) оказывается в угловой точке и при всех $\beta > 2$ остается в этой точке.

Была проведена проверка устойчивости по Ляпунову исследуемых решений для значений параметров $\xi$, $\eta$, лежащих на кривых резонансов четвертого порядка в построенных областях выполнения только необходимых условий устойчивости. Для рассмотренных значений параметра $\beta$ установлено, что критерий (4.3) на резонансных кривых всегда выполняется (за исключением, может быть, точек их пересечения с кривыми вырождения) и, таким образом, и при наличии резонанса четвертого порядка решения (2.5) устойчивы по Ляпунову.

*5.2. Случай Бобылева – Стеклова ($\alpha = 2$, $2/3 < \beta < 2$).* Вновь рассмотрим только случай $s = 1$, для которого имеются области выполнения как достаточных, так и только необходимых условий устойчивости. Для всех значений $\beta$ из исследуемого диапазона качественный вид областей устойчивости один и тот же (см. рис. 4). Области выполнения достаточных и только необходимых условий устойчивости имеют общую граничную точку с координатами $\big(1/(2\beta), 1\big)$. Область выполнения необходимых условий устойчивости (левая область на рисунке 4) имеет вид криволинейного треугольника. Внутри области имеются кривая резонанса четвертого порядка, соединяющая две угловые точки области, и кривая

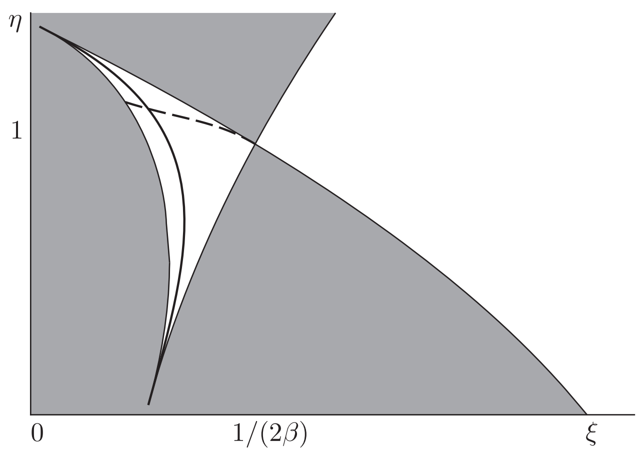


Рис. 4

вырождения, соединяющая одну из точек левой границы с противолежащей угловой точкой; две кривые имеют точку пересечения.

Аналогично предыдущему случаю была проведена проверка устойчивости по Ляпунову исследуемых движений для значений параметров, лежащих на кривых резонанса четвертого порядка. Установлено, что для всех точек резонансных кривых (кроме, может быть, точек их пересечения с кривыми вырождения) имеет место устойчивость.

## Список литературы

[1] Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt // J. Reine Angew. Math., 1894, vol. 113, no. 4, pp. 318–334.

[2] Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук Общества любителей естествознания, 1894, т. 7, № 1, с. 46–48.

[3] Холостова О. В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 128 с.

[4] Граммель Р. Гироскоп, его теория и применения: В 2-х тт. Москва: ИЛ, 1952. 351 с.; 318 с.

[5] Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тел // ПММ, 1956, т. 20, № 1, с. 51–66.

[6] Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // ПММ, 1975, т. 39, № 4, с. 650–660.

[7] Ковалев А. М., Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений гамильтоновых систем при наличии резонанса четвертого порядка // Механика твердого тела, 1977, № 9, с. 40–44.

[8] Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. Москва: Мир, 1974. 526 с.

[9] Румянцев В. В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской // ПММ, 1954, т. 18, № 4, с. 457–458.

[10] Сергеев В. С. Об устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // ПММ, 1976, т. 40, № 3, с. 408–416.

[11] Stephenson A. On a new type of dynamical stability // Mem. Manchester Literary Philos. Soc., 1908, vol. 52, pt. 2, no. 8. pp. 1–10.

[12] Бардин Б. С., Маркеев А. П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // ПММ, 1995, т. 59, № 6, с. 922–929.

[13] Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. мех. АН УССР, 1950, № 14, с. 9–34.

[14] Вишенкова Е. А., Холостова О. В. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2012, № 2, с. 114–129.

[15] Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН, 1951, т. 44, № 5, с. 7–20.

[16] Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ, 1951, т. 21, № 5, с. 588–597.

[17] Маркеев А. П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ, 1999, т. 63, № 2, с. 213–219.

[18] Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.

[19] Холостова О. В. Об устойчивости периодических движений маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // МТТ, 1997, № 4, с. 35–39.

[20] Холостова О. В. О движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса // Теоретическая механика: Вып. 24: Сб. науч.-метод. ст. Москва: МГУ, 2003. С. 157–167.

[21] Холостова О. В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // МТТ, 2009, № 2, с. 25–40.

[22] Холостова О. В. Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. Москва: МАИ, 2000. 84 с.

[23] Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики, 2006, т. 4, № 3, с. 26–158.

[24] Маркеев А. П. К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Докл. РАН, 2009, т. 427, № 6, с. 771–775.

[25] Маркеев А. П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ, 2011, т. 75, № 2, с. 193–203.

[26] Холостова О. В. Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестн. РУДН. Матем. Информатика. Физика, 2011, № 2, с. 111–122.

[27] Маркеев А. П. О движении тяжелого динамически симметричного твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // МТТ, 2012, № 4, с. 3–10.

[28] Холостова О. В. Об устойчивости частных движений тяжелого твердого тела, обусловленных быстрыми вертикальными вибрациями одной из его точек // Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 1, с. 99–116.

[29] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

[30] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978. 312 с.

[31] Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, no. 4, pp. 509–526.

## Stability of special motions (permanent rotations) of a heavy rigid body with a suspension point vibrating along the vertical

Ekaterina A. Vishenkova

Moscow Aviation Institute (National Research University)
Volokolamskoe shosse 4, Moscow, A-80, GSP-3,125993, Russia
vishenkova@bk.ru

We consider a heavy rigid body with a point making the vertical high–frequency harmonic oscillations of small amplitude. The problem is considered in the framework of an approximate autonomous canonical system of differential equations of motion. The special motions are studied, which are permanent rotations of the body around the vertical principal axis of inertia containing its center of mass. Necessary and in some cases sufficient stability conditions for the corresponding equilibrium positions of the reduced two-degree-of-freedom system are found. The comparison of the results obtained with the corresponding results for a body with a fixed point is fulfilled. Nonlinear stability analysis is carried out for two special cases of mass geometry of the body.

MSC 2010: 70E17, 70E20, 70H14
Keywords: rigid body, permanent rotations, stability, high-frequency vibrations

Received June 22, 2015, accepted August 09, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 3, pp. 459–474 (Russian)