Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 763–823.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

**ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.925
MSC 2010: 37J60, 37J35, 37C10

# Симметрии и редукция в неголономной механике*

**А. В. Борисов, И. С. Мамаев**

Данная работа представляет собой обзор проблемы конструктивной редукции неголономных систем с симметрией. Указана связь редукции с наличием простейших тензорных инвариантов — первых интегралов и полей симметрий. Все теоретические конструкции иллюстрируются примерами, встречающимися в приложениях. Кроме того, в работе содержится краткий историко-критический очерк, освещающий вклад разных исследователей в эту проблему.

Ключевые слова: редукция, симметрия, тензорный инвариант, первый интеграл, группа симметрий, поле симметрий, неголономная связь, теорема Нётер

*Перевод статьи “Symmetries and Reduction in Nonholonomic Mechanics”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 553–604.

Получено 01 августа 2015 года
После доработки 10 сентября 2015 года

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания вузам.

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

## Содержание

**1. Введение** . . . 764
1.1. Голономная и неголономная редукция: исторический и критический обзор . 764
1.2. Проблема редукции динамических систем . . . 769
1.3. Геометрическая схема редукции . . . 770
1.4. Группы симметрий и поля симметрий . . . 772
1.5. Конформные симметрии . . . 773
1.6. Особенности редукции неголономных систем . . . 774
**2. Общие теоретические принципы редукции и реконструкции** . . . 775
2.1. Редукция при наличии первых интегралов . . . 775
2.2. Редукция и реконструкция при наличии полей симметрий . . . 775
2.3. Пример: шар на поверхности вращения . . . 778
**3. Уравнения движения неголономных систем** . . . 779
3.1. Неголономные связи и принцип Даламбера–Лагранжа . . . 779
3.2. Уравнения движения в естественной параметризации . . . 781
3.3. Пример: сани Чаплыгина . . . 783
**4. Симметрии и циклические переменные** . . . 784
4.1. Редукция при действии группы симметрий . . . 784
4.2. Редукция в окрестности регулярных орбит . . . 786
4.3. Пример: качение без проскальзывания выпуклого тела по горизонтальной плоскости . . . 789
4.4. Обобщенный метод редукции Чаплыгина . . . 792
4.5. Пример: сани Чаплыгина на наклонной плоскости . . . 794
4.6. Пример: однородный шар без прокручивания и проскальзывания . . . 795
**5. Симметрия и первые интегралы** . . . 797
5.1. Обобщение теоремы Нётер . . . 797
5.2. Пример: сфера Рауса . . . 799
5.3. Циклические переменные и редукция по Раусу . . . 801
5.4. Пример: шар Чаплыгина . . . 802
**6. Более сложные примеры** . . . 803
6.1. Тело с острой кромкой . . . 803
6.2. Снейкборд . . . 805
6.3. Скейтборд . . . 809
6.4. Доска с неподвижной осью . . . 810
**Приложение A. Продолжение векторных полей и общие уравнения динамики** . . . 812
**Приложение B. Доказательство теоремы о полях симметрий** . . . 814
**Приложение C. Псевдогамильтонова форма уравнений движения** . . . 815
**Приложение D. Редукция в системе с однородным силовым полем** . . . 818

# 1. Введение

## 1.1. Голономная и неголономная редукция: исторический и критический обзор

**1.** В общем смысле под редукцией динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями, понимают понижение порядка системы, позволяющее свести исследования к меньшему числу уравнений [54]. Давно было замечено (ранние наблюдения восходят к Ньютону, Эйлеру, Лагранжу), что редукция системы возможна при наличии у системы первых интегралов и симметрий. Исключение первых интегралов тривиально, понижение порядка системы обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи полей симметрий было систематически рассмотрено в трудах Ли [41, 42], который, к сожалению, фактически не касался механики [30]. Отметим, однако, что в лекциях Энгеля (соавтора и соратника Ли) [27] в приложении к задаче трех тел изложены общие принципы теории Ли, позволяющие понять общую схему редукции на вполне современном уровне.

Для гамильтоновых систем дифференциальных уравнений (вследствие наличия пуассоновой структуры, являющейся кососимметрическим тензорным инвариантом, удовлетворяющим тождеству Якоби) редукция имеет свою специфику и наиболее развита. Дело в том, что пуассонова структура сопоставляет всякому первому интегралу поле симметрий; с другой стороны, всякой симметрии, действующей на конфигурационном пространстве, соответствует первый интеграл, линейный по обобщенным импульсам. Эти утверждения составляют содержание классической теоремы Нётер.

В локальной, но конструктивной форме процедура понижения порядка при помощи линейных интегралов и соответствующих им циклических (игнорируемых) координат в общей форме была предложена Раусом [48]. Выделить набор циклических координат зачастую оказывается сложно, особенно в задачах с некоммутативным набором первых интегралов, когда циклические координаты имеют скрытый характер. С целью преодоления подобных сложностей были разработаны различные методы теории канонических преобразований, позволяющие понизить порядок системы. Хорошим примером, иллюстрирующим специфику этих методов редукции, является классическая задача трех тел (некоммутативность набора интегралов для нее была отмечена еще Ли [40], который не занимался, однако, явной редукцией; см. также работу Картана [24]). Различным способам редукции в этой задаче (используются даже неголономные циклические переменные) посвящена обширная работа П. В. Воронца [67] (известного, главным образом, по его общей форме уравнений движений неголономной механики). Различные технические приемы в редукции для задачи трех тел собраны также в книге Уиттекера [52], а с точки зрения теории канонических преобразований, позволяющих представить приведенные уравнения в наиболее симметричной форме, такие приемы приведены в статье [50] (см. также работу Пуанкаре [75]).

Идеи использовать неканонические переменные при понижении порядка восходят к Лагранжу (который, кстати, в своем классическом трактате [38] выполнил редукцию многих известных задач механики). Он предложил в задаче трех тел использовать взаимные расстояния и некоторые проекции скоростей (обсуждение см. в [67]). В дальнейшем его соображения были развиты и переизложены на языке скобок Ли – Пуассона для общей задачи $n$ тел в работах [3, 13, 26]. В задаче о движении $n$-точечных вихрей по плоскости и сфере аналогичная система переменных была предложена в [39] (в случае плоскости) и в [21] (в случае сферы), а современная интерпретация с точки зрения алгебр Ли содержится в [12], где выполнена также редукция уравнений движения и их последующая канонизация (симплектизация).

В рамках гамильтоновой динамики твердого тела основные схемы редукции, использующие, как правило, неканонические переменные, были выполнены еще Эйлером и Лагранжем [59]. Они связаны с исключением прецессий $\psi$ и собственного вращения $\varphi$. Для динамики твердого тела в нескольких силовых полях, обладающих неочевидной симметрией на конфигурационном пространстве (соответствующей углу $\varphi \pm \psi$), редукция была предложена в работе [61], что позволило заметить изоморфизм редуцированной системы с уравнениями, описывающими движение твердого тела в идеальной жидкости.

В работах [2, 13] рассмотрена нестандартная редукция в задачах небесной механики (и вообще в системах взаимодействующих частиц частные случаи, которых рассматривались еще Ньютоном и Якоби), сводящихся к однородным уравнениям ньютоновского типа со степенью однородности $\alpha = -3$. В приложении к этой работе приведена общая схема, позволяющая интерпретировать эту редукцию с точки зрения теории Ли.

**2.** Отметим, что частным случаем редукции является интегрирование системы дифференциальных уравнений в квадратурах. В некотором смысле это случай полной редукции. Основные методы интегрирования гамильтоновых систем восходят к Эйлеру, Якоби (метод разделения переменных и последнего множителя) и Ли (интегрирование при помощи полей симметрий). По интегрируемым системам имеется обширная современная литература, обсуждающая, помимо классических подходов, метод $L - A$ пары, бигамильтоновы системы и много других более частных методов (см., например, [60]).

Другой общей теорией, тесно соприкасающейся с идеей редукции, является теория нормальных форм в окрестности особых инвариантных многообразий системы (восходящая к Пуанкаре, Дюлаку и Биркгофу) (см. [53]). Хорошо известным недостатком этой теории (тем не менее позволяющей сделать некоторые выводы о динамике и устойчивости) является расходимость нормализующих преобразований. Эта расходимость, кстати говоря, тесно связана с тем, что основные ингредиенты, необходимые для редукции, то есть первые интегралы и поля симметрий для общей гамильтоновой системы, вообще не существуют. Здесь мы, естественно, имеем в виду глобальные (или рассматриваемые вблизи особого инвариантного многообразия) аналитические законы сохранения. Локально вблизи неособой точки они заведомо существуют по теореме о выпрямлении. Современное обсуждение динамических и геометрических эффектов, препятствующих существованию аналитических интегралов и полей симметрий, содержится в замечательной книге В. В. Козлова [70].

В конкретных задачах редукции первые интегралы и симметрии продолжаются аналитически и заданы явно, однако во многих случаях редукция конструктивно невыполнима. Практически невозможно в явном виде произвести редукцию, когда первые интегралы нелинейны по импульсам. Аналогичная ситуация имеет место для явного интегрирования гамильтоновой системы при наличии полного набора нелинейных интегралов. Например, в интересном случае Клебша достигнуть понижения порядка (в вещественной форме) не удается, и этому препятствуют общие топологические эффекты, связанные со слоением инвариантных многообразий, задаваемых первыми интегралами (см. [59]). Одна из возможностей, при которой интеграл является квадратичным по импульсам и редукция конструктивно выполнима, указана в [13].

**3.** Общая точка зрения на редукцию для гамильтоновой системы, претендующая на глобальный характер, была предложена Майером (1973) и Марсденом и Вейнстейном (1974), которые ввели термин *симплектическая редукция* и в общей конструкции показали, что редуцированное многообразие, получаемое при совместном использовании полей симметрий и первых интегралов, также является симплектическим. При этом в качестве симметрий рассматривалось свободное и собственное действие некоторой группы Ли (отметим, что в приложениях часто встречаются более общие ситуации). Несколько ранее (1970) вопрос редукции частично рассматривался Смейлом [46], который ввел термин *фактор-пространство* (его аналог — *идентификационное пространство* — имеется еще у Биркгофа [6]), а также отображение момента, позволяющее единым образом охватить набор первых интегралов. К сожалению, все эти работы, которые очень часто цитируются, повлекли за собой множество формальных исследований по редукции, не привязанных к конкретным задачам. К старым задачам небесной механики и динамики твердого тела они не добавили ничего существенного, а новые проблемы практически не рассматривались. Как уже указывалось, общая схема редукции также присутствует у Энгеля [27]. Некоторые попытки применить общие методы теории редукции Марсдена к конкретным системам (например, к динамике частиц в пространстве постоянной кривизны), по-видимому, приводят к неверным результатам — по крайней мере, их невозможно верифицировать и указать явное преобразование к редуцированным переменным [45].

В связи с этим укажем работы [20, 62], где для описания динамики точки в пространствах постоянной кривизны использовалась более классическая (восходящая к Буру) и конструктивная схема редукции.

**4.** В неголономной механике для конкретных примеров понижение порядка системы производилось еще в работах Рауса, Чаплыгина, Воронца, а также в некоторых других, однако без особого теоретического обоснования. Само понятие неголономной редукции было предложено в работе Койлера [36], где также содержатся некоторые общие соображения, позволяющие понизить порядок неголономных уравнений движения с помощью симметрий и первых интегралов. Принципиальной проблемой для неголономных систем является отсутствие пуассоновой структуры и, как следствие, неприменимость различных вариантов теоремы Нётер. С этой точки зрения неголономные системы более близки к общей (как правило, обратимой) системе дифференциальных уравнений (в случае однородных связей обладающей интегралом энергии). Исследование условий, при которых система, описывающая движение тела, катящегося по поверхности без проскальзывания (требование, задающее неголономную связь), допускает различные тензорные инварианты, привело авторов в работе [16] к общей концепции иерархии динамического поведения неголономных систем. В дальнейшем эта концепция была развита для существенно более общих классов неголономных систем.

До работы [36] вопросы редукции неголономных систем ставились разрозненно и в основном были связаны с аналогом для таких систем циклических координат (линейных интегралов). Наиболее ясные результаты содержатся в книге [73], но многие работы не имеет смысла цитировать из-за запутанных соотношений, которые необходимо проверить для выяснения какого-нибудь определяемого автором и не присущего системе свойства. Некоторые из этих результатов обсуждаются в интересном обзоре [28], посвященном обобщению теоремы Нётер в случае неголономных систем.

Спецификой неголономных систем с линейными связями (возникающими, например, в теории качения) является наличие, с одной стороны, конфигурационного пространства, а с другой — системы неголономных связей, задающих некоторое распределение в касательном расслоении. В зависимости от такого «вложения» возможны различные ситуации, модифицирующие действия различных (как правило, естественных) симметрий, имеющихся у свободной (без связей) системы.

По нашему мнению, наиболее важным и полезным результатом в этом направлении является теорема Козлова – Колесникова, ставшая естественным обобщением теоремы Нётер для неголономных систем [72] (см. также [69]). Теорема подробно изложена в разделе 4.1, где показано также, что в общем случае линейные первые интегралы не влекут за собой существования полей симметрий, а связаны с некоторыми нётеровскими полями, действующими на конфигурационном пространстве. В разделах 4.2 и 5.1 приведен ряд классических примеров (задача Рауса о качении несимметричного шара, движение монеты) и обсуждается вопрос об обращении теоремы Козлова – Колесникова. В разделе 4.3 рассматривается вопрос о том, когда нётеровские поля порождают поля симметрий неголономной системы и при этом возможна редукция по Раусу.

Другим достоинством работы [36] является введение неабелевых систем Чаплыгина и описание схемы редукции для них. В связи с этим отметим, что «абелев случай» был рассмотрен самим Чаплыгиным, который не только исследовал ряд наиболее интересных неголономных систем, допускающих такую схему, но и получил общую форму уравнений движения, носящих теперь его имя [76]. В разделе 3.4 мы приводим более общую и естественную трактовку неабелевых систем Чаплыгина, указываем схему редукции и рассматриваем ряд новых примеров.

**5.** К сожалению, работа Койлера [36] (изложенная на языке Марсдена и Вейнстейна и содержащая в себе обсуждения различных вопросов, не связанных непосредственно с редукцией, — например, идеи Картана и Гамеля в неголономной механике) повлекла за собой множество формалистических построений по общей неголономной редукции, которые совершенно бесполезны для исследователей, занимающихся решением конкретных задач. Неприменимость таких общих схем редукции при решении уже простейших задач отмечена в [32]. В связи с этим упомянем недавний обзор по истории неголономной механики [25]. Совершенно не соглашаясь с точкой зрения автора, пропагандирующего абстрактные построения в противовес исследованию конкретных задач, отметим, что в [9] собраны все наиболее значимые результаты «редукционистского» направления. Не останавливаясь на совсем лингвистических упражнениях (ведущих к группоидам и алгеброидам и к программе Вейнстейна, но в качестве примеров рассматривающих качение однородного шара или уравновешенного конька), обратимся к классике редукционистского жанра — к работам [9, 37].

В работе [37] делается попытка перенести гамильтонову точку зрения на неголономные системы, введя некоторый новый объект — почти пуассонову структуру (хотя следовало бы назвать такие структуры «псевдопуассоновы») с кососимметрическим тензором, не удовлетворяющим тождеству Якоби (впервые такая запись уравнений приведена в [49]). Здесь общая гамильтонова схема Марсдена и Вейнстейна перестает действовать, а использование общих критериев, когда такая схема применима, упирается в множество соотношений, которые необходимо проверить и которые, к сожалению, не выполняются для конкретных систем.

В работе [9] вводится уравнение неголономного момента (обобщающее отображение момента), но несмотря на множество заявлений авторов, порой носящих рекламный характер, его полезность при решении конкретных задач не продемонстрирована (кстати, часть из этих задач, имеющихся в работах [9, 37], разобрана и разрешена нами в разделах 6.1–6.4). В [9] сделана также попытка систематизировать различные возможности «соотношения» действия групп симметрий и связей, но кроме хорошо известных действий, реализующихся в классических задачах, авторы вряд ли добавили что-нибудь новое по сравнению с Чаплыгиным (другие варианты в принципе не встречаются). Не касаясь здесь еще других вопросов, которые разбираются в работах [9, 37] (это перестановочные соотношения, идеи Картана, связность Эрисмана), остановимся подробнее на проблеме гамильтонизации.

**6.** В приложении C мы приведем кососимметрическую форму уравнений движений неголономных систем с линейными однородными по скоростям связями. В отличие от известной формы, представленной в работе [49], она получена в квазикоординатах и представляет собой некоторую частную форму записи уравнения Гамеля [30]. Возникающий в такой записи кососимметрический тензор удовлетворяет тождеству Якоби в том и только в том случае, если связи являются голономными. Тем не менее (как замечено, видимо, впервые в работе [32]), получающаяся после редукции система уравнений после некоторой замены времени может стать гамильтоновой (пуассоновой). Такая конформная гамильтоновость приведенной системы присуща многим неголономным системам, возникающим в приложениях (конформная гамильтонизация шара Чаплыгина была указана нами в работе [58]).

В работе [58] (см. также [66]) используемое при нахождении конформного множителя кососимметрическое представление отличается от формы, предложенной в [49], и вообще отметим, что кососимметрических представлений у неголономной системы может быть несколько, они никак не могут быть использованы для (конформной) гамильтонизации и бесполезны для динамического анализа. Поиск конформного гамильтонова представления является таким же искусством, как и поиск первых интегралов, полей симметрий. Единственным общим методом здесь является обобщенная теория приводящего множителя Чаплыгина (развитая для систем с двумя степенями свободы [10]). Некоторую альтернативу представляет метод Хоймана [33]. Препятствия к гамильтонизации (локальный и полулокальный) рассматриваются в работе [11].

Попытки разработать общую схему редукции, используя кососимметрическое представление, и связать ее с гамильтонизацией содержатся в работах [5, 29], хотя нам сложно о них судить, поскольку в них не решено каких-либо существенно новых задач.

Отметим, что предложенный в этой работе подход позволяет получить несколько более частный результат по различным классам $LL$-, $LR$-систем [66], хотя для такого сорта систем проблема редукции носит алгебраический характер и решается в конкретных задачах при помощи различных специальных подходов (например, вихревая теория интегрирования и редукция для таких систем обсуждается В. В. Козловым [68]).

В данной работе мы не используем язык геометрической механики, который в начальной стадии своего развития позволил придать геометрический инвариантный смысл многим утверждениям аналитической механики, а затем начал самостоятельное развитие, оторванное от конкретных приложений. Отметим, что уже выбор наиболее естественных переменных для конкретной задачи часто помогает решить проблему редукции (напомним, насколько плодотворными для механики оказались переменные, введенные еще Эйлером). Будет очень печально, если в будущем реализуется абстрактная и лингвистическая программа развития неголономной механики, заявленная в [25].

## 1.2. Проблема редукции динамических систем

Пусть на многообразии $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)\}$, где $x_1, \ldots, x_n$ — локальные координаты, задана динамическая система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}). \tag{1.1}$$

С практической точки зрения, *редукция* (*понижение порядка*) *системы* заключается в выборе подходящих координат $(Z_1, \ldots, Z_m, Y_1, \ldots, Y_{n-m})$ на $\mathcal{M}$, таких, что уравнения движения (1.1) представляются в форме

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i &= V_i(\boldsymbol{Z}), && i = 1, \ldots, m, \\ \dot{Y}_\alpha &= G_\alpha(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y}), && \alpha = 1, \ldots, n-m, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_m)$, $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_{n-m})$. Таким образом, отделяется подсистема меньшего порядка, описывающая эволюцию переменных $\boldsymbol{Z}$, которая и называется *редуцированной* (*приведенной*) *системой*.

Первоначально (в работах Эйлера, Лагранжа, Якоби, Пуанкаре и др.) редукция динамических систем выполнялась интуитивно: в качестве $\boldsymbol{Z}$, как правило, использовались некоторые «внутренние» переменные (например, проекции скорости на связанные с телом подвижные оси и т. п.). Начиная с работ Э. Нётер и С. Ли стало понятно, что возможность редукции тесно связана с симметриями системы.

Важно иметь в виду, что с локальной точки зрения (в окрестности неособой точки системы) задача о существовании координат, удовлетворяющих (1.2), оказывается тривиальной вследствие теоремы о выпрямлении векторного поля. В связи с этим в проблеме редукции и понижения порядка системы легко выделить три аспекта, которые можно рассматривать как по отдельности, так и в сочетании друг с другом:

– *глобальный*, то есть проблема понижения порядка на всем фазовом пространстве,

– *полулокальный*, то есть проблема редукции в окрестности инвариантных подмногообразий системы (неподвижных точек, периодических траекторий и т. д.),

– *конструктивный*, то есть явное нахождение или предъявление алгоритма построения координат $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y})$ для заданной системы.

В данной работе мы сосредоточимся на проблеме глобальной конструктивной редукции в динамических системах.

### 1.3. Геометрическая схема редукции

Для того чтобы конструктивно выполнять редукцию в конкретных динамических системах, полезно представлять себе общую геометрическую схему, стоящую за этим процессом. Геометрическое содержание соотношений (1.2) можно сформулировать следующим образом.

**Предложение 1.** *В окрестности некоторой точки* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$ *координаты* $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y})$, *приводящие систему* (1.1) *к виду* (1.2), *существуют тогда и только тогда, когда на* $\mathcal{M}$ *существует интегрируемое распределение* $\mathcal{S} \subset T\mathcal{M}$, *все подпространства которого имеют постоянную размерность в окрестности* $\boldsymbol{x}_0$: $\dim \mathcal{S}_x = n-m$ *и которое удовлетворяет условию*

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{v}}(\mathcal{S}_x) \subset \mathcal{S}_x, \tag{1.3}$$

*где* $\mathscr{L}_{\boldsymbol{v}}$ *— производная Ли вдоль поля* $\boldsymbol{v}$.

Другими словами, на $\mathcal{M}$ можно указать набор векторных полей $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}_{n-m}(\boldsymbol{x})$, которые в окрестности $\boldsymbol{x}_0$ линейно-независимы (в каждой точке) и удовлетворяют соотношениям

$$[\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{u}_\beta] = \sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_\gamma, \quad [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_\alpha] = \sum_\beta b^\beta_\alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_\beta, \tag{1.4}$$

где $c^\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})$, $b^\beta_\alpha(\boldsymbol{x})$ — некоторые функции на $\mathcal{M}$. Поля $\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{x})$ мы будем называть *обобщенными полями симметрий*, при этом переменные $\boldsymbol{Z}$, задающие редуцированную систему, являются их интегралами (см. рис. 1):

$$\boldsymbol{u}_\alpha\big(Z_i(\boldsymbol{x})\big) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha = 1, \ldots, n-m. \tag{1.5}$$

*Доказательство.* Действительно, вследствие интегрируемости распределения $\mathcal{S}$ через каждую точку $\boldsymbol{x}$ в окрестности $\boldsymbol{x}_0$ проходит подмногообразие (слой) $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ постоянной размерности $\dim \mathcal{O}_{\boldsymbol{x}} = n - m$, касающийся плоскостей $\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}$. Пусть $Z_i(\boldsymbol{x})$ — функции на $\mathcal{M}$, параметризующие слои $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$, тогда справедливы соотношения (1.5). Пользуясь уравнениями (1.4) и (1.5), получим

$$\boldsymbol{u}_\alpha\left(\boldsymbol{v}\big(Z_i(\boldsymbol{x})\big)\right) = [\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{v}]\big(Z_i(\boldsymbol{x})\big) - \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{u}_\alpha\big(Z_i(\boldsymbol{x})\big)\right) = -\sum_\beta b^\beta_\alpha \boldsymbol{u}_\beta\big(Z_i(\boldsymbol{x})\big) = 0.$$

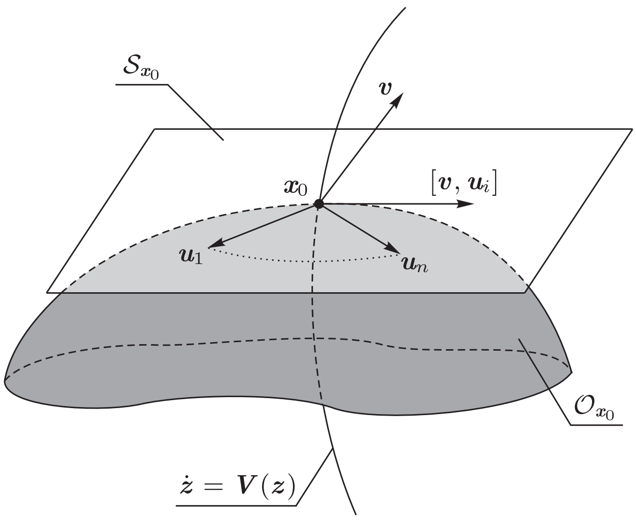


Рис. 1

Следовательно, $\dot{Z}_i = \boldsymbol{v}\big(Z_i(\boldsymbol{x})\big)$ — также интеграл полей $\boldsymbol{u}_\alpha$, который выражается через функции $Z_i(\boldsymbol{x})$. Достраивая эти функции до системы координат в окрестности $\boldsymbol{x}_0$ с помощью функций $Y_\alpha(x)$, получим представление (1.2). В обратную сторону доказательство очевидно: необходимо положить $\boldsymbol{u}_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial Y_\alpha}$. ■

Таким образом, с геометрической точки зрения возможность редукции (понижения порядка) обусловлена тем, что

> фазовое пространство $\mathcal{M}$ расслоено на орбиты $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ (слои симметрийного распределения $\mathcal{S}$) и поток системы (1.1) переводит одну орбиту в другую, так что система может быть *редуцирована на пространство орбит*.

Такое слоение фазового пространства мы будем называть *приводимым*. Как уже отмечалось выше, нас интересует случай, когда такое слоение является глобальным и может быть указано явно.

Замечание. В принципе, для того чтобы явно получить редуцированную систему, достаточно найти лишь один интеграл $Z_1(\boldsymbol{x})$ обобщенных полей симметрий, задающих базис распределения $\mathcal{S}$:

$$\boldsymbol{u}_\alpha(Z_1(\boldsymbol{x})) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n-m.$$

Подействуем на $Z_1(\boldsymbol{x})$ векторным полем исходной системы (1.1):

$$\boldsymbol{v}(Z_1(\boldsymbol{x})) = Z_2(\boldsymbol{x}).$$

Получившаяся функция также является интегралом полей $\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{u}_\alpha(Z_2) = \boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{v}(Z_1)) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}_\alpha(Z_1)) - \sum_\beta b_\alpha^\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_\beta(Z_1) = 0.$$

Повторяя эту процедуру, получим редуцированную систему в виде

$$\dot{Z}_1 = Z_2, \quad \ldots, \quad \dot{Z}_{m-1} = Z_m, \quad \dot{Z}_m = V_m(Z_1, \ldots, Z_m).$$

Выделим важный частный случай, когда система, описывающая динамику на пространстве орбит, является тривиальной:

$$\dot{Z}_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, $Z_i(x)$ — первые интегралы системы (1.1), и все слои являются инвариантными подмногообразиями $\mathcal{M}_{\boldsymbol{c}} = \{\boldsymbol{x}|Z_1(\boldsymbol{x}) = c_1, \ldots, Z_m(\boldsymbol{x}) = c_m\}$. В этом случае редуцированной называют систему, описывающую динамику на поверхности $\mathcal{M}_c$:

$$\dot{Y}_\alpha = G_\alpha(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{Y}),$$

где $\boldsymbol{c} = (c_1 \ldots c_m)$ — константы первых интегралов, которые играют роль параметров. Другими словами, в данной ситуации редукция заключается в ограничении потока на уровень первых интегралов.

Итак, в общем случае возможны два типа редукции системы:

– редукция потока на пространство слоев (орбит) приводимого слоения системы,
– ограничение векторного поля на уровень первых интегралов[1].

### 1.4. Группы симметрий и поля симметрий

Рассмотрим теперь наиболее важный с точки зрения приложений частный случай, когда распределение $\mathcal{S}$, соответствующие векторные поля $\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{x})$ и координаты $Z_i(\boldsymbol{x})$, $Y_\alpha(\boldsymbol{x})$ могут быть явно построены достаточно естественным образом, — это *системы с симметрией*. В этом случае на фазовом пространстве системы $\mathcal{M}$ действует группа $G$, сохраняющая форму уравнений (1.1), которая называется *группой симметрий* системы; при этом векторные поля соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ данной группы заведомо удовлетворяют соотношениям

$$[\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{v}] = 0, \quad [\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{u}_\beta] = \sum c_{\alpha\beta}^\gamma \boldsymbol{u}_\gamma, \tag{1.6}$$

где $c_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Мы видим, что эти соотношения — частный случай уравнений (1.4). Поскольку действие группы $G$ предполагается известным, то ее орбиты $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ и функции $Z_i(\boldsymbol{x})$, как правило, также можно конструктивно указать. Перепишем первое из соотношений (1.6) в другой форме:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u}_\alpha) = 0.$$

Следовательно, группа симметрий определяет естественные тензорные инварианты системы — *поля симметрий*. (Как хорошо известно, верно и обратное: всякий конечный набор полей симметрий в фазовом пространстве задает действие некоторой группы симметрий.)

Таким образом, в данном случае поток системы коммутирует с действием группы и переводит орбиту этого действия в другую орбиту, так что система может быть редуцирована на пространство орбит. Действие группы симметрий системы обладает важными (с точки зрения редукции) свойствами.

**Предложение 2.** *Пусть $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ — орбита действия группы симметрий системы* (1.1), *проходящая через точку $\boldsymbol{x}$. Тогда*

1) *если на орбите $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ нет неподвижных точек, то поток системы переводит ее в орбиту, диффеоморфную данной,*
2) *если на орбите $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ лежит неподвижная точка $\boldsymbol{x}_c$ системы, то есть $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_c) = 0$, то вся эта орбита лежит в семействе неподвижных точек, примыкающем к $\boldsymbol{x}_c$.*

[1]В приложениях также встречаются случаи, когда система обладает изолированным инвариантным подмногообразием (достаточно большой размерности), при этом возможно ограничение потока на это подмногообразие, в то время как вне его система нередуцируема.

*Доказательство.* Первое свойство — это следствие стандартного дифференциально-геометрического факта, заключающегося в том, что фазовый поток системы задает диффеоморфизм в любой окрестности неособой точки.

Для доказательства второго свойства выберем однопараметрическую подгруппу, такую, что порождаемое ей поле симметрий в неподвижной точке отлично от нуля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_c) \neq 0$; если такую подгруппу выбрать нельзя, то $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_c} = \boldsymbol{x}_c$. Зададим локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ в окрестности $\boldsymbol{x}_c$ таким образом, что поле симметрий спрямляется так, что $\boldsymbol{u} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, тогда векторное поле системы $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ и система уравнений, определяющих неподвижную точку, не зависят от $x_1$:

$$v_1(x_2, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, \ v_n(x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Эта система имеет (как минимум) однопараметрическое семейство решений, принадлежащих орбите $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0}$. Повторяя это рассуждение для всех однопараметрических подгрупп, порождающих ненулевое поле симметрий, приходим к свойству 2. ■

Отсюда следует, что *на траектории редуцированной системы не могут лежать точки, отвечающие орбитам разного топологического типа и, в частности, разной размерности;* кроме того, *если среди орбит группы симметрий имеются нульмерные, то есть изолированные точки, то эти точки заведомо являются неподвижными точками системы.*

Замечание. В некоторых ситуациях при наличии многопараметрической группы симметрий $G$ возникает необходимость выполнить редукцию только по некоторой подгруппе $G_1 \subset G$ (например, однопараметрической). Полезно иметь в виду, что в этом случае при естественном ограничении оставшихся (неиспользованных при редукции) полей симметрий на частично редуцированную систему получившиеся векторные поля, как правило, не являются полями симметрий, а образуют описанное выше симметрийное распределение (1.4).

Эти (нестрогие) наглядные рассуждения полезно иметь в виду при анализе систем с симметриями, дополняя их в конкретных задачах дополнительными деталями и формальными доказательствами (по мере необходимости).

В заключение этого обсуждения подчеркнем также, что *конструктивная редукция во всех известных примерах обусловлена существованием простейших тензорных инвариантов: первых интегралов и (обобщенных) полей симметрий.*

## 1.5. Конформные симметрии

Имеется еще одно естественное соображение, позволяющее в ряде случаев выполнить редукцию, а именно: симметрийное распределение $\mathcal{S}$ у системы может существовать после некоторой замены времени $dt \to \lambda^{-1}(\boldsymbol{x})\,dt$, то есть в соотношениях (1.3)–(1.6) необходимо также сделать замену

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \to \lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),$$

где $\lambda(\boldsymbol{x})$ — скалярная функция. В этом случае говорят, что система (1.1) допускает конформно-симметрийное распределение.

Замечание. Во многих случаях (хотя не всегда) существование множителя $\lambda(\boldsymbol{x})$ оказывается тесно связано с существованием у системы инвариантной меры.

В книге [70] (см. с. 78–79) рассматривается ситуация, когда система (1.1) допускает векторное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющее соотношению

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}] = \mu\boldsymbol{v} + \nu\boldsymbol{u}, \quad \mu, \nu - \text{const}.$$

Предположим, что функция $\lambda(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{u}(\lambda(\boldsymbol{x})) = \mu\lambda(\boldsymbol{x}), \tag{1.7}$$

тогда

$$[\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}] = \nu\lambda(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u},$$

следовательно, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ — обобщенное конформное поле симметрий. Пример редукции системы с конформной симметрией рассмотрен в приложении D.

## 1.6. Особенности редукции неголономных систем

С точки зрения теории динамических систем, неголономные системы — это достаточно общие системы дифференциальных уравнений, обладающие первым интегралом. Они выделяются из множества произвольных систем лишь тем, что заданы на некотором подмногообразии касательного расслоения конфигурационного пространства $\mathcal{M} \subset T\mathcal{N}$, которое задается линейными по скоростям соотношениями — связями:

$$\mathcal{M} = \left\{(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \Big| \sum_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i = 0,\ \mu = 1, \ldots, k\right\}.$$

Это приводит к естественному разделению переменных на позиционные — обобщенные координаты $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ и скорости $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$. В частности, первые интегралы неголономных систем, встречающиеся в примерах, являются полиномами по скоростям.

Важно также иметь в виду, что система со связями характеризуется не только уравнениями связей, но еще и принципом освобождения от связей, то есть способом их замены силами реакций. Этот принцип, вообще говоря, существенным образом определяется способом реализации связей [54]. Неголономные системы возникают при использовании принципа Даламбера–Лагранжа.

Голономные системы отличаются от неголономных наличием дополнительного тензорного инварианта — *пуассоновой структуры*, то есть являются гамильтоновыми. Именно этот тензорный инвариант (а не форма записи уравнений движения, которая зависит от выбора переменных) выделяет гамильтоновы системы среди всех остальных. Отметим, что имеются примеры гамильтоновых систем, в которых в фазовом пространстве невозможно выделить «конфигурационную часть»: например, система точечных вихрей на плоскости (см. [12]). Подробнее проблема гамильтонизации неголономных систем обсуждается в работе [11].

Как хорошо известно, вследствие теоремы Нётер в голономных потенциальных системах действие группы симметрий (в конфигурационном пространстве) приводит к существованию линейных[2] первых интегралов. Оба типа редукции, описанные выше (ограничение на уровень первых интегралов и редукция по полям симметрий), применяются одновременно, а соответствующая процедура известна как *редукция Рауса*.

Замечание. Для произвольных гамильтоновых систем (если они не получены из лагранжевых) возможны случаи, когда (локально-гамильтоново) поле симметрий не приводит к существованию глобального интеграла. Примером может служить задача о взаимодействии точечных вихрей на цилиндре и торе [40], в этом случае редукция Рауса также неприменима.

[2]В случае натуральных механических систем.

Для неголономных систем справедливо некоторое обобщение теоремы Нётер: линейные интегралы порождаются не общими, а некоторыми частными симметриями, такими, что сохраняют функцию Лагранжа, но не сохраняют связи. Следовательно, порождаемые этими симметриями векторные поля в общем случае не являются полями симметрий, а соответствующая редукция — это ограничение системы на уровень первых интегралов. Такие частные симметрии ниже мы будем называть *нётеровскими* симметриями. Если нётеровская симметрия оказывается общей симметрией, то редукция Рауса оказывается возможна и в этом случае (см. подробнее раздел 5).

## 2. Общие теоретические принципы редукции и реконструкции

Как уже отмечалось выше, редукция обусловлена существованием двух видов тензорных инвариантов: первых интегралов и (обобщенных) полей симметрий. В данном разделе мы кратко опишем основные теоретические результаты, которые используются для конструктивной глобальной редукции при наличии этих инвариантов.

Будем предполагать, что рассматриваемая динамическая система определена на некотором многообразии $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)\}$ при помощи векторного поля

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}). \tag{2.1}$$

Многообразие $\mathcal{M}$ называется *фазовым пространством системы*.

### 2.1. Редукция при наличии первых интегралов

Простейшими тензорными инвариантами системы, позволяющими выполнять редукцию, являются ее первые интегралы, то есть такие *глобальные* функции $F_\mu(\boldsymbol{x})$, $\mu = 1, \ldots, n-m$, на $\mathcal{M}$, которые удовлетворяют соотношению

$$\dot{F}_\mu = \boldsymbol{v}(F_\mu(\boldsymbol{x})) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_j} v_j(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Редукция при этом сводится к ограничению системы на совместную $m$-мерную поверхность уровня $\mathcal{M}_{\boldsymbol{c}} = \{\boldsymbol{x} \mid F_1(\boldsymbol{x}) = c_1, \ldots, F_{n-m}(\boldsymbol{x}) = c_{n-m}\}$.

Возникающее при этом на многообразии $\mathcal{M}_c$ векторное поле

$$\dot{\boldsymbol{x}}\big|_{\mathcal{M}_c} = \boldsymbol{v}_c(\boldsymbol{x}) \tag{2.2}$$

зависит от констант интегралов как от параметров. В зависимости от параметров системы и констант первых интегралов $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_{n-m})$ многообразия $\mathcal{M}_{\boldsymbol{c}}$ имеют различный топологический тип, от которого во многом зависят свойства векторного поля (2.2).

Для анализа перестроек интегральных многообразий $\mathcal{M}_{\boldsymbol{c}}$ используется метод бифуркационных диаграмм и бифуркационных комплексов (см., например, [55]).

### 2.2. Редукция и реконструкция при наличии полей симметрий

Предположим теперь, что векторное поле (2.1) обладает набором полей симметрий $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{u}_{m_s}(\boldsymbol{x})$, то есть

$$[\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{v}] = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m_s, \tag{2.3}$$

где $[\cdot\,,\cdot]$ — скобка Ли (коммутатор) векторных полей.

Из тождества Якоби следует, что коммутатор полей симметрий также является полем симметрий, поэтому (без ограничения общности) можно считать, что поля симметрий образуют алгебру Ли

$$[\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{u}_\beta] = \sum_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{u}_\gamma, \tag{2.4}$$

где $c^\gamma_{\alpha\beta}$ — некоторые константы. Всюду далее будем предполагать, что эта алгебра конечномерная.

В каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$ поля симметрий задают некоторое подпространство $\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}$ касательного пространства $T\mathcal{M}_{\boldsymbol{x}}$, размерность которого положим равной $n-m$. Совокупность подпространств $\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}$ образует распределение на $\mathcal{M}$, которое, согласно теореме Фробениуса, оказывается интегрируемым; следовательно, многообразие $\mathcal{M}$ расслаивается на подмногообразия меньшей размерности. Соответствующее подмногообразие, проходящее через точку $\boldsymbol{x}_0$, обозначим $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0}$, его размерность равна размерности линейной оболочки векторов: $\dim\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0} = \dim\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}_0} = n-m$.

Как известно, алгебра Ли (2.4) векторных полей отвечает некоторой группе Ли $G$, действующей на $\mathcal{M}$, причем исходная система инварианта относительно этого действия. Подмногообразия $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ являются, очевидно, *орбитами действия этой группы симметрий.* Орбиты максимальной размерности $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ называются регулярными, остальные — сингулярными.

Замечание. Если выбрать максимальный набор полей симметрий $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-m}$, которые линейно-независимы в каждой регулярной точке (то есть в каждой точке $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-m}$ образуют базис $\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}$), то имеют место соотношения

$$[\boldsymbol{u}_\alpha, \boldsymbol{u}_\beta] = \sum_{\gamma=1}^{n-m} c^\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_\gamma,$$

где $c^\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})$ — функции, а не константы. Из условия (2.3) следует, что все $c^\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x})$ являются первыми интегралами системы (2.1).

**Редукция.** С локальной точки зрения редукция системы (2.1) описывается следующей теоремой.

**Теорема 1 (С. Ли).** *В окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{M}$, через которую проходит многообразие $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0}$ максимальной размерности $\dim\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0} = n-m$, существуют координаты $Z_1, \ldots, Z_m, Y_1, \ldots, Y_{n-m}$, такие, что*

1) $\boldsymbol{u}_\alpha(Z_i) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, m_s$, $i = 1, \ldots, m$,
2) $\dot{Z}_i = \boldsymbol{v}(Z_i) = V_i(Z_1, \ldots, Z_m)$.

Переменные $Y_1, \ldots, Y_{n-m}$ в литературе называют *циклическими* (или *игнорируемыми*).

*Доказательство.* Вследствие регулярности $\boldsymbol{x}_0$, в ее окрестности можно выбрать максимальный набор линейно-независимых векторных полей $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-m}$, образующих в каждой точке базис $\mathcal{S}_{\boldsymbol{x}}$. Согласно теореме Фробениуса, распределение, задаваемое этими полями, интегрируемо так, что вся окрестность $\boldsymbol{x}_0$ расслоена на подмногообразия $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$ одинаковой размерности $n-m$. Выберем в этой окрестности координаты $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y})$ таким образом, что $\boldsymbol{Z} = Z_1, \ldots, Z_m$ параметризуют слои $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}}$, а $\boldsymbol{Y} = Y_1, \ldots, Y_{n-m}$ являются координатами на этих слоях. Тогда по построению $\boldsymbol{u}_\alpha(Z_i) = 0$.

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что функция $\dot{Z}_i(\boldsymbol{x})$ тоже представляет собой интеграл полей симметрий. Это следует из цепочки равенств

$$\boldsymbol{u}_\alpha(\dot{Z}_i) = \boldsymbol{u}_\alpha\big(\boldsymbol{v}(Z_i)\big) = \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{u}_\alpha(Z_i)\big) = \boldsymbol{v}(0) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m_s. \tag{2.5}$$

■

Другими словами, *набор (независимых) первых интегралов полей симметрий задает координаты редуцированной системы.*

Следует подчеркнуть, что хотя теорема 1 носит локальный характер, она не является следствием теоремы о выпрямлении векторного поля (так, в частности, в рассматриваемой окрестности могут содержаться особые точки системы). Кроме того, для конструктивной редукции особенно важно то, что поля симметрий $\boldsymbol{u}_\alpha(\boldsymbol{x})$ в примерах оказываются существенно проще векторного поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ исходной системы и их интегралы выражаются явно.

Отметим также, что общие результаты, касающиеся глобальной редукции, как правило, невозможно использовать в примерах, поскольку возникающие при их формулировке условия редко встречаются на практике (только в простейших системах). Более продуктивным является исследование глобальной картины редукции для конкретных систем: в большинстве случаев интегралы полей симметрий $Z_1, \ldots, Z_m$ оказываются глобально (а не локально) определенными функциями на $\mathcal{M}$.

**Реконструкция и абсолютная динамика.** Для систем, допускающих редукцию, возникает естественная проблема: каким образом по решениям редуцированной системы восстановить динамику полной системы. Эта процедура в литературе называется *реконструкцией* (*динамики*); для краткости эволюцию полной системы мы будем называть *абсолютной динамикой* (в противовес динамике редуцированной системы).

Локально реконструкция также описана С. Ли.

**Теорема 2 (С. Ли).** *Если алгебра Ли* (2.4) *полей симметрий $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-m}$ разрешима, то в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, через которую проходит регулярная орбита $\mathcal{O}_{\boldsymbol{x}_0}$, существуют координаты $Z_1, \ldots, Z_m, Y_1, \ldots, Y_{n-m}$, такие, что исходная система* (2.1) *представляется в виде*

$$\dot{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Z}), \quad \boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_m), \quad \boldsymbol{V} = (V_1, \ldots, V_m),$$
$$\dot{Y}_1 = G_1(\boldsymbol{Z}), \quad \dot{Y}_2 = G_2(\boldsymbol{Z}, Y_1), \; \ldots, \; \dot{Y}_{n-m} = G_{n-m}(\boldsymbol{Z}, Y_1, \ldots, Y_{n-m-1}).$$

Здесь мы не будем приводить доказательство, отметим лишь, что в книге [70] приводится подробное доказательство частного случая этой теоремы — об интегрируемости в квадратурах системы, допускающей $(n-1)$-мерную разрешимую алгебру полей симметрий. Метод доказательства, использованный в этой книге (см. гл. II, § 3), допускает естественное обобщение на данный случай. (См. также [43] и оригинальные работы С. Ли.)

Таким образом, для разрешимой алгебры полей симметрий решение полной системы в принципе может быть получено в виде последовательных квадратур из решений редуцированной системы. Единственной проблемой является нахождение соответствующих переменных $(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y})$, однако в приложениях поля симметрий оказываются таковы, что указать эти переменные оказывается возможным, хотя, как правило, подбор переменных требует некоторого искусства.

Заметим, что даже в случае, когда редуцированная система оказывается интегрируемой, анализ динамики полной системы при помощи квадратур является сложной проблемой. Современное изложение аналитических вопросов, возникающих при исследовании квадратур, содержится в работе В. В. Козлова [71]. В работе [14] на примере анализа поведения точки контакта в задаче о качении шара Чаплыгина проиллюстрировано применение различных (в том числе топологических) методов в проблеме реконструкции.

Замечание. Отметим работу [23], в которой исследуются свойства решений уравнения Матье с квазипериодическим возмущением. Возникающие при этом динамические эффекты также могут встретиться при реконструкции динамики.

## 2.3. Пример: шар на поверхности вращения

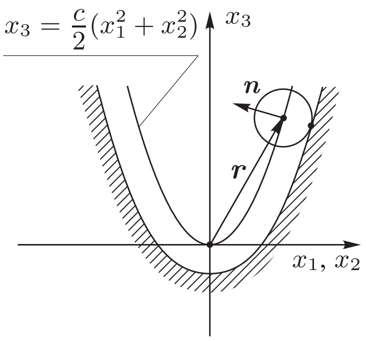


Рис. 2

Для демонстрации рассмотрим систему, описывающую качение без проскальзывания однородного шара по осесимметричной поверхности, такой, что центр шара движется по параболоиду, уравнение которого в неподвижной системе координат $Ox_1, x_2, x_3$ имеет вид

$$x_3 = \frac{c}{2}(x_1^2 + x_2^2), \tag{2.6}$$

где $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты центра масс, а ось симметрии вертикальна (см. рис. 2). В неподвижных осях уравнения движения, описывающие эволюцию радиус-вектора центра масс $\boldsymbol{r}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, оказываются замкнутыми и представляются в форме

$$\dot{\boldsymbol{r}} = R\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}, \quad (m + m_e)\dot{\boldsymbol{\omega}} = m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\dot{\boldsymbol{n}} - \mu R\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_3, \quad m_e = \frac{I}{R^2}, \quad \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1), \tag{2.7}$$

где $R$, $m$, $I$ — радиус, масса и центральный момент инерции шара, $\mu$ — его вес в поле тяжести, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности (2.6):

$$\boldsymbol{n} = \left(c\frac{x_1}{k_0}, c\frac{x_2}{k_0}, -\frac{1}{k_0}\right), \quad k_0 = \sqrt{1 + c^2(x_1^2 + x_2^2)}.$$

В системе (2.7) уравнение для $\dot{x}_3$ можно исключить, пользуясь соотношением (2.6); таким образом, фазовое пространство системы (2.7) имеет вид $\mathbb{R}^5 = \{(x_1, x_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)\}$.

Очевидно, что эта система обладает полем симметрий, которое соответствует вращению вокруг вертикали:

$$\boldsymbol{u} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{2.8}$$

Пользуясь теоремой 2, выберем новые координаты в фазовом пространстве системы:

$$Z_1 = cR\omega_3, \quad Z_2 = cR\big(c(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) - \omega_3\big), \quad Z_3 = \frac{c^2 R(\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1)}{\sqrt{1 + c^2(x_1^2 + x_2^2)}},$$
$$Z_4 = c^2(x_1^2 + x_2^2), \quad Y_1 = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2};$$

для таких координат выполнены соотношения

$$\boldsymbol{u}(Z_i) = 0, \quad \boldsymbol{u}(Y_1) = 1, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Дифференцируя в силу системы (2.7), получим

$$\dot{Z}_1 = \overline{m}\,\frac{Z_3 Z_2}{1 + Z_4}, \quad \dot{Z}_2 = -Z_3 Z_1, \quad \dot{Z}_4 = 2Z_3,$$
$$\dot{Z}_3 = \frac{Z_3^2}{Z_4(1 + Z_4)} + \frac{1}{Z_4}\left(Z_1 + \frac{Z_2}{1 + Z_4}\right)\left(Z_1 + \left(1 - \overline{m}\,\frac{Z_4}{1 + Z_4}\right)Z_2\right) - \frac{\mu c R^2}{m + m_e}\frac{Z_4}{1 + Z_4}, \tag{2.9}$$
$$\dot{Y}_1 = -\frac{\sqrt{1 + Z_4}}{Z_4}\left(Z_1 + \frac{Z_2}{1 + Z_4}\right),$$

где $\overline{m} = \dfrac{m}{m + m_e}$. Первые четыре уравнения образуют редуцированную систему, а последнее уравнение (для $Y_1$) позволяет выполнить реконструкцию.

Как видно из (2.9), редуцированная система $\dot{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Z})$ допускает конформную симметрию. Действительно, справедливо соотношение

$$\left[\frac{1}{Z_3}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Z}), \frac{\partial}{\partial Z_3}\right] = \Phi(\boldsymbol{Z})\frac{\partial}{\partial Z_3},$$

которое означает, что линейная оболочка вектора $\dfrac{\partial}{\partial Z_3}$ образует симметрийное распределение $\mathcal{S}_{\boldsymbol{Z}}$. После замены времени $Z_3 dt = d\tau$ получим еще один раз редуцированную систему в форме

$$\frac{dZ_1}{d\tau} = \overline{m}\frac{Z_2}{1 + Z_4}, \quad \frac{dZ_2}{d\tau} = -Z_1, \quad \frac{dZ_4}{d\tau} = 2.$$

Ее решение может быть найдено в элементарных функциях (см. подробнее [19]).

## 3. Уравнения движения неголономных систем

Прежде всего напомним кратко некоторые формы уравнений движения неголономных систем.

### 3.1. Неголономные связи и принцип Даламбера – Лагранжа

Состояние неголономной системы описывается обобщенными координатами $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, задающими точку в конфигурационном пространстве $\mathcal{N}$, и соответствующими обобщенными скоростями $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$. В отличие от голономного случая, на них налагаются связи

$$f_\mu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k, \tag{3.1}$$

*которые предполагаются неинтегрируемыми.* Здесь и далее предполагаем, что все эти уравнения линейно-независимы.

Замечание. Для неоднородных неголономных связей вида $\sum\limits_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i = b_\mu(\boldsymbol{q})$ используемый ниже подход, основанный на применении квазискоростей, требует некоторой модификации (см., например, [18]), поэтому в данной работе системы с неоднородными связями не рассматриваются.

С геометрической точки зрения, связи (3.1) задают $(2n - k)$-мерное подмногообразие $\mathcal{M} = \{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \mid \sum\limits_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})v_i = 0\}$ в $T\mathcal{N}$, которое и является пространством состояний (фазовым пространством) неголономной системы.

Кроме того, на $T\mathcal{N}$ задана функция Лагранжа свободной системы $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, то есть вычисляемая без учета связей (3.1) функция, которая удовлетворяет условию невырожденности $\det\left\|\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i\, \partial \dot{q}_j}\right\| \neq 0$.

Как известно, в случае идеальных связей уравнения движения системы могут быть получены из принципа Даламбера – Лагранжа, согласно которому для произвольных возможных (то есть удовлетворяющих уравнениям связей) перемещений $\delta\boldsymbol{q} = (\delta q_1, \ldots, \delta q_n)$

работа сил реакции равна нулю, откуда

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-Q_i\right]\delta q_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\delta q_i=0, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=(Q_1(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\ldots,Q_n(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))$ — обобщенные непотенциальные внешние силы, действующие на систему.

Пользуясь методом неопределенных множителей, из (3.2) находим (см., например, [54])

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\sum_{\mu}\lambda_\mu\frac{\partial f_\mu}{\partial \dot q_i},\quad i=1,\ldots,n, \tag{3.3}$$

где $\lambda_\mu$ — неопределенные множители (обобщенные реакции связей). Дифференцируя по времени связи (3.1), получим $n+k$ уравнений, из которых определяются ускорения $\ddot q_1,\ldots,\ddot q_n$ и множители $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ как функции координат и скоростей. Тем самым мы получаем расширенную систему уравнений движения (в избыточных переменных) во всем касательном расслоении $T\mathcal{N}$. При этом связи (3.1) по построению оказываются первыми интегралами этой расширенной системы, то есть подмногообразия $\mathcal{M}_{\boldsymbol{c}}=\{f_\mu(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=c_\mu,\ \mu=1,\ldots,k\}\subset T\mathcal{N}$ являются инвариантными. Искомые уравнения движения неголономной системы получаются в этом случае ограничением векторного поля на $\mathcal{M}_{\boldsymbol{c}}$ при $\boldsymbol{c}=0$.

Во многих примерах вместо обощенных скоростей $\dot{\boldsymbol{q}}$ удобно пользоваться квазискоростями $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, которые выражаются линейно через $\dot q_i$:

$$\dot q_i=\sum_{s=1}^{n}E_{si}(\boldsymbol{q})\omega_s. \tag{3.4}$$

При этом уравнения (3.3) и связи (3.1) переписываются в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\widetilde L}{\partial\omega_s}\right)-\boldsymbol{E}_s(\widetilde L)=\sum_{r,p}c^p_{rs}(\boldsymbol{q})\omega_r\frac{\partial\widetilde L}{\partial\omega_p}+\widetilde Q_s+\sum_\mu\widetilde\lambda_\mu\frac{\partial\widetilde f_\mu}{\partial\omega_s},\\ \widetilde f_\mu=\sum_s\left(\sum_i a_{\mu i}E_{si}\right)\omega_s=0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\widetilde L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})$, $\widetilde Q_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})=\sum\limits_i E_{si}Q_i$ — функция Лагранжа и обобщенные силы, выраженные в квазискоростях с помощью соотношений (3.4), $\boldsymbol{E}_s=\sum\limits_i E_{si}(\boldsymbol{q})\dfrac{\partial}{\partial q_i}$ — базис векторных полей, отвечающих преобразованию (3.4), и $c^p_{rs}(\boldsymbol{q})$ — коэффициенты разложения их коммутаторов:

$$[\boldsymbol{E}_r,\boldsymbol{E}_s]=\sum_p c^p_{rs}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}_p.$$

Вообще говоря, существует множество различных способов исключения неопределенных множителей в уравнениях (3.3) либо (3.5), и каждому такому способу соответствует своя форма уравнений неголономной механики (например, уравнения Воронца, Гамеля, Маджи, Аппеля и т. д.). В приложениях и примерах, как правило, удобнее пользоваться исходной формой (3.3) либо (3.5), а неопределенные множители исключать таким методом, который наиболее оптимально согласуется со спецификой задачи. Здесь для примера мы приведем одну общую форму уравнений движения в квазискоростях, позволяющую наиболее естественным образом *явно* исключить неопределенные множители.

### 3.2. Уравнения движения в естественной параметризации

Определим два набора векторных полей на конфигурационном пространстве $\mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\mu(\boldsymbol{q}) &= \sum_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad \mu = 1, \ldots, k, \\ \boldsymbol{\tau}_s(q) &= \sum_i \tau_{si}(\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial q_i}, \qquad s = 1, \ldots, n-k, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где вектор $\boldsymbol{\tau}_s$ в каждой точке $\boldsymbol{q} \in \mathcal{N}$ принадлежит подпространству $\mathcal{D}_q$, задаваемому связями, то есть

$$\sum_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\tau_{si}(\boldsymbol{q}) \equiv 0, \tag{3.7}$$

а векторы $\boldsymbol{a}_\mu(\boldsymbol{q})$, соответственно, трансверсальны $\mathcal{D}_q$.

Замечание. В качестве $\boldsymbol{\tau}_s(\boldsymbol{q})$ можно взять $n-k$ произвольных линейно-независимых решений уравнения

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{x} = 0,$$

где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \|a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\|$.

В каждой касательной плоскости $T\mathcal{N}$ сделаем линейную замену обобщенных скоростей вида

$$\dot{q}_i = \sum_{s=1}^{n-k}\tau_{si}\omega_s + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu i}w_\mu. \tag{3.8}$$

Другими словами, набор величин $(q_1, \ldots, q_n, \omega_1, \ldots, \omega_{n-k}, w_1, \ldots, w_k)$ задает новые локальные координаты в $T\mathcal{N}$; величины $\omega_s$, $w_\mu$ будем называть *естественными квазискоростями.*

Поскольку величины $w_\mu\,dt$ параметризуют перемещения в направлении, трансверсальном подпространству $\mathcal{D}_q$, определяемому связями, а $\omega_s\,dt$ — перемещения вдоль $\mathcal{D}_q$, то в новых переменных уравнения связей принимают вид

$$w_\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k, \tag{3.9}$$

при этом фазовое пространство системы параметризуется естественным образом:

$$\mathcal{M} = \{(q_1, \ldots, q_n, \omega_1, \ldots, \omega_{n-k})\}.$$

Для формального доказательства запишем

$$\sum_i a_{\mu i}\dot{q}_i = \sum_{i,s} a_{\mu i}\tau_{si}\omega_s + \sum_{i,\nu} a_{\mu i}a_{\nu i}w_\nu = 0.$$

Первое слагаемое вследствие уравнения (3.7) обращается в нуль, а $(k \times k)$-матрица $\Gamma = \Big\| \sum\limits_i a_{\mu i}a_{\nu i} \Big\|$ является матрицей Грамма векторов $\boldsymbol{a}_\mu$ и вследствие их линейной независимости невырожденна, отсюда получим (3.9).

Обозначим функцию Лагранжа системы после замены переменных (3.8) следующим образом:

$$\widetilde{L}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w}) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w})),$$

где $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ — первоначальная функция Лагранжа, а $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-k})$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_k)$. Дифференцируя ее, с учетом (3.8) получим соотношения

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{s,j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \tau_{sj}}{\partial q_i} \omega_s + \sum_{\mu,j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial a_{\mu j}}{\partial q_i} w_\mu,$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tau_{sj}, \quad \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\mu} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} a_{\mu j}.$$

Отсюда находим

$$\begin{gathered} \left( \left( \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \sum_i \tau_{si} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_i} \right) \bigg|_{\boldsymbol{w}=0} = \sum_i \tau_{si} \left( \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \\ - \sum_{i,j,r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left( \tau_{si} \frac{\partial \tau_{rj}}{\partial q_i} - \tau_{ri} \frac{\partial \tau_{sj}}{\partial q_i} \right) \omega_r + (\boldsymbol{\tau}_s, \boldsymbol{Q})\big|_{\boldsymbol{w}=0}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Для сокращения записи воспользуемся специальным обозначением для операции ограничения произвольной функции на связи:

$$f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w})\big|_{\boldsymbol{w}=0} = f^*(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}).$$

Для функции общего положения справедливы очевидные соотношения

$$\left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)^* = \frac{\partial f^*}{\partial q_i}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial \omega_s} \right)^* = \frac{\partial f^*}{\partial \omega_s}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial w_\mu} \right)^* \not\equiv \frac{\partial f^*}{\partial w_\mu} \equiv 0.$$

Используя уравнения (3.3) и соотношения (3.6), (3.7), уравнения (3.10) можно переписать в форме

$$\left( \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \omega_s} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \boldsymbol{\tau}_s(\widetilde{L}^*) - \sum_{j,r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} [\boldsymbol{\tau}_s, \boldsymbol{\tau}_r]_j \, \omega_r = \left( \widetilde{\boldsymbol{\tau}}_s(\widetilde{L}) \right)^*,$$

где $[\cdot,\cdot]$ — скобки Ли (коммутатор) векторных полей, $\widetilde{\boldsymbol{\tau}}_s$ — продолжение векторных полей на $T\mathcal{N}$ (см. приложение А). Как мы видим, неопределенные множители автоматически исключились из этих уравнений. Чтобы упростить правую часть, воспользуемся соотношением

$$[\boldsymbol{\tau}_s, \boldsymbol{\tau}_r] = \sum_t c_{sr}^t(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{\tau}_t + \sum_\mu c_{sr}^\mu(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{a}_\mu, \tag{3.11}$$

где второе слагаемое в случае неголономных связей не обращается в нуль. Окончательно, с учетом ограничения уравнений (3.8) на связь и незначительных упрощений, получим (см. также [64])

**Предложение 3.** *Уравнения движения неголономной системы со связями* (3.1) *и функцией Лагранжа* $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ *в переменных* $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{\omega}$ *не содержат явно неопределенных множителей и образуют замкнутую систему, которая представляется в форме*

$$\begin{gathered} \left( \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \omega_s} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \tau_s(\widetilde{L}^*) = - \sum_{r,t} c_{sr}^t \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \omega_t} \omega_r - \sum_{\mu,r} c_{sr}^\mu \left( \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\mu} \right)^* \omega_r + (\boldsymbol{\tau}_s, \boldsymbol{Q}^*), \\ \dot{q}_i = \sum_s \tau_{si} \omega_s, \end{gathered} \tag{3.12}$$

*где* $\widetilde{L}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w}) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big|_{\boldsymbol{q} \mapsto (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w})}$, *а* $(\ )^*$ *обозначает ограничение на связь.*

Соотношения (3.12) задают уравнения Воронца–Гамеля [31] для специального выбора квазискоростей. В случае голономных связей второе слагаемое в сумме (3.11) исчезает (так как $c^{\mu}_{sr} = 0$), а уравнения (3.12) превращаются в известные уравнения Вольтерры–Пуанкаре [51] (которые являются частным случаем уравнений Гамеля).

Замечание. В ряде примеров квазискорости удобнее определять несколько иным способом:

$$\widetilde{\omega}_s = \sum_i \tau_{si}\dot{q}_i, \quad \widetilde{w}_\mu = \sum_i a_{\mu i}\dot{q}_i.$$

Связи задаются аналогичными (3.9) соотношениями:

$$\widetilde{w}_\mu = 0.$$

## 3.3. Пример: сани Чаплыгина

Пусть твердое тело опирается на плоскость двумя (или более) абсолютно гладкими ножками и невесомым колесиком с острой кромкой (диском или лезвием), которое препятствует проскальзыванию точки контакта $Q$ в перпендикулярном плоскости колесика направлении. Выберем две системы координат — неподвижную $Oxy$ и жестко связанную с телом $O_1x_1y_1$, начало отсчета которой $O_1$ расположено на пересечении прямой, проходящей через точку контакта колесика $Q$ перпендикулярно его плоскости, с прямой, проходящей через центр масс $C$ параллельно плоскости колесика (рис. 3); $a$ — расстояние от точки $O_1$ до центра масс, $b$ — расстояние от точки $O_1$ до точки контакта колесика. Конфигурационное пространство $\mathcal{N}$ в данном случае совпадает с группой движений плоскости $SE(2)$, для его параметризации выберем декартовы координаты $(x, y)$ начала подвижных осей $O_1$ и их угол поворота $\varphi$, то есть $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{q} = (x, y, \varphi)\}$.

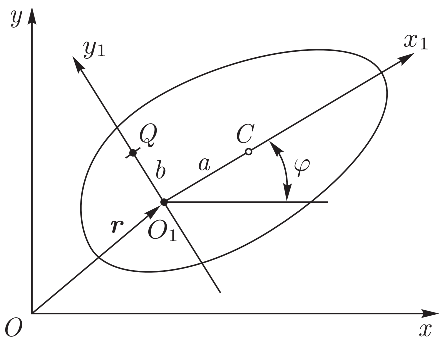

Рис. 3

Уравнение связи в данных переменных представляется в форме

$$f_c = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi. \tag{3.13}$$

Функция Лагранжа свободной системы имеет, соответственно, вид

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I\omega^2 + ma\omega\left(-\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi\right) - U(x, y, \varphi), \tag{3.14}$$

где $m$ — масса тела, $I$ — его момент инерции относительно точки $O'$, $U(x, y, \varphi)$ — потенциальная энергия внешних сил.

Определим согласно положениям предыдущего раздела трансверсальное и касательное к распределению связей векторные поля следующим образом:

$$\boldsymbol{a} = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi},$$

так что

$$[\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2] = -\boldsymbol{a}. \tag{3.15}$$

Квазискорости теперь определяются соотношением (3.8):

$$\dot{\boldsymbol{q}} = V_1\boldsymbol{\tau}_1 + \omega\boldsymbol{\tau}_2 + V_2\boldsymbol{a}; \tag{3.16}$$

здесь величины ($V_1$, $V_2$) совпадают с проекциями скорости точки $O_1$ на подвижные оси, а $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость тела. Связь (3.13) перепишется в форме

$$V_2 = 0.$$

Подставляя эти выражения в (3.12), получим уравнения движения системы в общей форме:

$$\left(\frac{\partial\widetilde{L}^*}{\partial V_1}\right)^{\displaystyle\cdot} - \cos\varphi\frac{\partial\widetilde{L}^*}{\partial x} - \sin\varphi\frac{\partial\widetilde{L}^*}{\partial y} = \left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial V_2}\right)^{*}\omega, \quad \left(\frac{\partial\widetilde{L}^*}{\partial \omega}\right)^{\displaystyle\cdot} - \frac{\partial\widetilde{L}^*}{\partial\varphi} = -\left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial V_2}\right)^{*}V_1,$$
$$\dot{x} = V_1\cos\varphi, \quad \dot{y} = V_1\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

Функция Лагранжа (3.14), выраженная в новых переменных, имеет вид

$$\widetilde{L} = \frac{1}{2}m\left(V_1^2 + V_2^2\right) + \frac{1}{2}I\omega^2 + ma\omega V_2 - U(x, y, \varphi).$$

Ограничивая на связь, находим

$$\begin{gathered}\widetilde{L}^* = \frac{1}{2}\left(mV_1^2 + I\omega^2\right) - U(x, y, \varphi),\\ \frac{\partial\widetilde{L}^*}{\partial V_1} = mV_1, \quad \frac{\partial\widetilde{L}^*}{\partial\omega} = I\omega, \quad \left(\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial V_2}\right)^{*} = ma\omega,\end{gathered} \tag{3.17}$$

отсюда с учетом (3.15), (3.16) получим окончательно уравнения на $\mathcal{M} = \{(x, y, \varphi, V_1, \omega)\} \subset$ $\subset T\mathcal{N}$:

$$\begin{gathered}m\dot{V}_1 = ma\omega^2 - \cos\varphi\frac{\partial U}{\partial x} - \sin\varphi\frac{\partial U}{\partial y}, \quad I\dot{\omega} = -ma\omega V_1 - \frac{\partial U}{\partial\varphi},\\ \dot{x} = V_1\cos\varphi, \quad \dot{y} = V_1\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega.\end{gathered} \tag{3.18}$$

## 4. Симметрии и циклические переменные

Как мы видели выше, уравнения движения неголономных систем определяются лагранжианом и связями, поэтому желательно иметь такие критерии существования необходимых для редукции тензорных инвариантов (полей симметрий и первых интегралов), которые могут быть сформулированы в терминах только функции Лагранжа $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ и уравнений связей $f_\mu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0$ (без явной записи соответствующих уравнений движения).

### 4.1. Редукция при действии группы симметрий

Описание редукции неголономных систем начнем с наиболее распространенной в приложениях (как в голономной, так и в неголономной динамике) ситуации, когда система допускает некоторую группу симметрий $G$, которая естественным образом действует на конфигурационном пространстве $\mathcal{N}$. Как правило, в примерах преобразования симметрии обусловлены инвариантностью относительно выбора некоторой системы координат. При этом, поскольку векторное поле самой системы задано на фазовом пространстве $\mathcal{M}$, которое является подмногообразием в $T\mathcal{N}$, возникает необходимость в продолжении действия группы и соответствующих векторных полей в касательное расслоение $T\mathcal{N}$. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, напомним кратко основные определения и обозначения (подробнее см. приложение A).

Предположим, что на конфигурационном пространстве $\mathcal{N}$ действует однопараметрическая группа преобразований

$$T_\xi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{N},$$

где $\xi$ — параметр. Соответствующее этому действию векторное поле обозначим

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}) = \sum_i u_i(\boldsymbol{q}) \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad u_i(\boldsymbol{q}) = \frac{d}{d\xi}\big(T_\xi(\boldsymbol{q})\big)_i\Big|_{\xi=0}. \tag{4.1}$$

Продолжения действия $T_\xi$ и векторного поля $\boldsymbol{u}$ на $T\mathcal{N}$ через обобщенные координаты и скорости представляются в форме

$$\begin{gathered} \widetilde{T}_\xi\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = (T_\xi(\boldsymbol{q}), dT_\xi(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}), \quad (dT_\xi \dot{\boldsymbol{q}})_i = \sum_j \frac{\partial T_\xi(\boldsymbol{q})_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_i, \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \dot{u}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, \quad \dot{u}_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial q_j}\,\dot{q}_j. \end{gathered} \tag{4.2}$$

**Теорема 3.** *Пусть в конфигурационном пространстве $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{q}\}$ неголономной системы, для которой $\boldsymbol{Q} = 0$, действует однопараметрическая группа преобразований $T_\xi(\boldsymbol{q})$, такая, что связи $f_\mu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0$, $\mu = 1, \ldots, m$, и функция Лагранжа $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ свободной системы инвариантны относительно этого действия (точнее, его продолжения в $T\mathcal{N}$), то есть для векторного поля $\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ этого действия, определенного согласно* (4.2), *выполнены соотношения*

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}\big(L\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big)^* = 0, \quad \widetilde{\boldsymbol{u}}\big(f_\mu\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big)^* = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k,$$

*где $(\ )^*$ обозначает ограничение на связи.*

*Тогда $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ — поле симметрий уравнений движения данной неголономной системы.*

Это утверждение следует из стандартных симметрийных соображений. Действительно, как известно, вид уравнений (3.2) не меняется при замене переменных в конфигурационном пространстве. С другой стороны, всякая замена переменных, порождаемая действием $T_\xi$ группы симметрий, сохраняет также лагранжиан $L$ и связи $f_\mu$, а следовательно, получаемые при этом из (3.2) уравнения движения оказываются заведомо инвариантными относительно преобразований $\widetilde{T}_\xi$ (то есть поток системы коммутирует с действием группы). Соответствующее векторное поле $\widetilde{u}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ является полем симметрий (формальное доказательство приведено в приложении B), этот результат содержится в работах [8, 9, 37].

**Следствие.** *Пусть уравнения связей $f_\mu\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ и функция Лагранжа $L\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ инвариантны относительно (продолжения) действия некоторой $m_s$-параметрической группы $G$:*

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha\big(L\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big)^* = 0, \quad \widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha\big(f_\mu\,(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big)^* = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m_s, \quad \mu = 1, \ldots, k. \tag{4.3}$$

*Тогда уравнения движения допускают $m_s$ полей симметрий $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha$.*

Замечание. При $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \neq 0$ условия (4.3) необходимо дополнить требованием инвариантности 1-формы обобщенных внешних сил $\mathscr{L}_{\widetilde{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{Q}) = 0$, которое в компонентах записывается в виде

$$\sum_k u_k \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \dot{u}_k \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \frac{\partial u_k}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, в данном случае, вследствие инвариантности связей, действие группы симметрий ограничивается на фазовое пространство неголономной системы $\mathcal{M} = \{(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \mid f_\mu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0\}$ и система естественным образом редуцируется на пространство орбит этого действия. Чтобы выполнить редукцию явно, необходимо выбрать в качестве переменных редуцированной системы такие функции $Z_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, $(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathcal{M}$, которые являются интегралами полей симметрий

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha\big(Z_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m_s.$$

Согласно сказанному выше (см. раздел 2.2), их эволюция описывается замкнутой — *редуцированной* — системой:

$$\dot{Z}_i = V_i(\boldsymbol{Z}).$$

Координаты на орбитах $\mathcal{O}$ действия группы называются *циклическими*.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, когда редукция несколько упрощается.

### 4.2. Редукция в окрестности регулярных орбит

Если предположить, что действие группы свободное[3] и собственное[4] (именно этот случай наиболее важен с точки зрения приложений), то редуцированная система глобально определена на пространстве орбит, которое оказывается гладким многообразием [9]. При этом в окрестности некоторой точки конфигурационного пространства $\boldsymbol{q}_0 \in \mathcal{N}$ размерность орбиты действия группы совпадает с размерностью группы

$$\dim \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}_0} = \dim G = n - m. \tag{4.4}$$

В этом случае локально конфигурационное пространство $\mathcal{N}$ устроено как произведение $\mathbb{R}^m \times G$, где второй сомножитель отвечает инвариантам действия группы. Следуя [9], параметризуем $\mathcal{N}$ парой $(\boldsymbol{z}, g)$, где $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$, $g \in G$, тогда скорости системы удобно параметризовать функциями $\dot{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{\Omega} = g^{-1}\dot{g}$, которые оказываются заведомо инвариантными относительно (продолжения) действия группы и, кроме того, являются линейными функциями относительно исходных обобщенных скоростей. Вследствие такого выбора, согласно теореме 1 (раздел 2.2), уравнения, описывающие эволюцию переменных $\boldsymbol{z}$, $\dot{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{\Omega}$, замыкаются:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\Omega}), \quad \ddot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\Omega}). \tag{4.5}$$

Лагранжиан системы и связи не содержат групповых переменных:

$$\begin{gathered} L = L(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{\Omega}), \\ f_\mu = \sum_i A_{\mu i}(\boldsymbol{z})\dot{z}_i + \sum_\beta B_{\mu\beta}(\boldsymbol{z})\Omega_\beta = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k; \end{gathered} \tag{4.6}$$

[3]Группа действует свободно, если ни одно из преобразований $T_g(\boldsymbol{q})$ не обладает неподвижными точками.

[4]Действие группы собственное, если для отображений $T\colon G \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ прообраз любого компактного множества компактен.

ниже для сокращения записи коэффициенты перед $\Omega_\beta$ объединим в $k \times (n-m)$-матрицу $\mathbf{B}(\boldsymbol{z}) = \|B_{\mu\beta}(\boldsymbol{z})\|$.

Связи (4.6) определяют инвариантное подмногообразие системы (4.5). Таким образом, чтобы получить окончательно редуцированную систему, достаточно ограничить уравнения (4.5) на связи (4.6). Для этого в данной ситуации наиболее естественно, пользуясь уравнениями связей (4.6), исключить максимально возможное число квазискоростей $\Omega_\beta$, отвечающих касательным векторам орбиты $\mathcal{O}_q$ (поскольку координаты вдоль орбит мы уже исключили). Оказывается, что условия разрешимости уравнений связей относительно этих величин проще всего выражаются в терминах касательных пространств $T\mathcal{O}_q$ и $\mathcal{D}_q$, так что можно выделить два случая.

**C-1.** В первом случае в окрестности неособой точки $\boldsymbol{q}$ имеем

$$T\mathcal{O}_q \cap \mathcal{D}_q = 0. \tag{4.7}$$

Это так называемые обобщенные системы Чаплыгина, которые подробно рассматриваются далее.

В этом случае заведомо выполнено неравенство $\dim T\mathcal{O}_q + \dim \mathcal{D}_q \leqslant n$, откуда следует, что число уравнений связей $n - \dim \mathcal{D}_q$ всегда превосходит количество квазискоростей $\Omega_\beta$, равное $\dim T\mathcal{O}_q$. Кроме того, матрица $\mathbf{B}$ имеет максимальный ранг ($\operatorname{rank} \mathbf{B} = n - m$), так как в противном случае это привело бы к существованию решения системы (4.6) с $\dot{z}_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, то есть касательного вектора к $T\mathcal{O}_q$, который одновременно лежит в $\mathcal{D}_q$, что противоречит (4.7). Отсюда следует, что связи можно также представить в форме

$$\Omega_\beta = \sum_i b_{\beta i}(\boldsymbol{z})\dot{z}_i, \quad \sum_i d_{\alpha i}(\boldsymbol{z})\dot{z}_i = 0, \quad \beta = 1, \ldots, n-m, \quad \alpha = 1, \ldots, k-(n-m).$$

Итак, все квазискорости $\Omega_\beta$ исключаются из уравнений при помощи связей, и редуцированная система естественным образом записывается в переменных $\boldsymbol{z}$, $\dot{\boldsymbol{z}}$. Этот случай регулярно встречается в приложениях, поэтому он подробно разбирается в разделе 4.4.

**C-2.** Вторая возможная ситуация:

$$T\mathcal{O}_q \cap \mathcal{D}_q = \mathcal{C}_q \neq 0.$$

Другими словами, система (4.6) допускает такие (ненулевые) решения, для которых все $\dot{z}_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, или, что то же самое, система уравнений

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-m}) \tag{4.8}$$

допускает нетривиальные решения. Отсюда, в частности, следует, что $\operatorname{rank} \mathbf{B} < n - m$ (то есть ранг матрицы $\mathbf{B}$ не превосходит размерность орбиты).

В данном случае в связи с тем, что касательное пространство к орбите содержит подпространство $\mathcal{C}_q$, удобно перейти от $\boldsymbol{\Omega}$ к новым квазискоростям $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w})$ следующим образом. Пусть $\boldsymbol{\chi}_s(\boldsymbol{z})$, $s = 1, \ldots, m_0$, — линейно-независимые решения уравнения (4.8), которые дополним до базиса в $\mathbb{R}^{n-m}$ некоторыми векторами $\boldsymbol{\pi}_\sigma(\boldsymbol{z})$, $\sigma = m_0 + 1, \ldots, n-m$, удовлетворяющими условию $\mathbf{B}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{\pi}_\sigma(\boldsymbol{z}) \neq 0$. После замены

$$\Omega_\beta = \sum_s \chi_{s\beta}(\boldsymbol{z})\omega_s + \sum_\sigma \pi_{\sigma\beta}(\boldsymbol{z})w_\sigma$$

уравнения связей (4.6) можно представить в форме

$$\begin{aligned} w_\sigma &= \sum_{i=1}^m b_{\sigma i}(\boldsymbol{z})\dot z_i, \quad \sigma = m_0+1,\ldots,n-m,\\ \sum_{i=1}^m & d_{\alpha i}(\boldsymbol{z})\dot z_i = 0, \quad \alpha = 1,\ldots,k-m_0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Следовательно, квазискорости $\omega_s$, $s=1,\ldots,m_0$, не входят в уравнения связей, поэтому для всех связей $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial\omega_s}\equiv 0$. Это приводит к тому, что уравнения, описывающие эволюцию величин $\dfrac{\partial L}{\partial\omega_s}$, по форме не отличаются от голономных (так как в них не входят неопределенные множители). Запишем эти уравнения в форме (6.26) (см. приложение A):

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\omega_s}\right)^{\cdot} - \widetilde{\boldsymbol{E}}_s(L) = 0, \quad s = 1,\ldots,m_0, \tag{4.10}$$

где мы для простоты положили $\boldsymbol{Q}=0$. В данном случае $\widetilde{\boldsymbol{E}}_s$ — это продолжение векторных полей $\boldsymbol{E}_s$, касательных к $\mathcal{C}_q$, которые соответствуют квазискоростям $\omega_s$, то есть

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \sum_s \boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{q})\omega_s.$$

После исключения квазискоростей $w_\sigma$ уравнения (4.10) могут быть представлены в форме

$$\left(\frac{\partial L^*}{\partial\omega_s}\right)^{\cdot} = \sum_{p=1}^{m_0} C_s^p(\boldsymbol{z},\dot{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{\omega})\frac{\partial L^*}{\partial\omega_p} + \sum_{\sigma=m_0+1}^{n} C_s^\sigma(\boldsymbol{z},\dot{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{\omega})\left(\frac{\partial L}{\partial w_\sigma}\right)^*,$$

где $(\ )^*$ — обозначает ограничение на первую группу связей (4.9), а функции $C_s^p$ и $C_s^\sigma$ выражаются через коэффициенты разложения коммутаторов полей $\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{q})$ с соответствующими базисными векторными полями в $T\mathcal{N}$ (из-за громоздкости мы здесь опускаем их явный вид). Для получения замкнутой системы эти уравнения необходимо дополнить уравнениями для эволюции $\boldsymbol{z}$, $\dot{\boldsymbol{z}}$ (которые ничем особенным не выделяются, поэтому мы их здесь не рассматриваем).

Отметим также, что уравнения (4.10) во многих работах представлены в несколько иной форме. Чтобы получить ее, напомним, что векторные поля $\boldsymbol{E}_s$ касаются также орбиты $T\mathcal{O}_q$, поэтому они выражаются через поля симметрий $\boldsymbol{u}_\beta(\boldsymbol{q}) = \sum\limits_i u_{\beta i}(\boldsymbol{q})\dfrac{\partial}{\partial q_i}$:

$$\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{q}) = \sum_\beta \xi_{s\beta}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}_\beta(\boldsymbol{q}).$$

Для продолжения этих полей на $T\mathcal{N}$ получим

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_s = \sum_\beta \xi_{s\beta}\widetilde{\boldsymbol{u}}_\beta + \sum_i \widetilde{\xi}_{si}\frac{\partial}{\partial\dot q_i}, \quad \widetilde{\xi}_{si} = \sum_{\beta,l}\frac{\partial\xi_{s\beta}}{\partial q_l}\dot q_l u_{\beta i}.$$

Отсюда с учетом инвариантности лагранжиана $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\beta(L)=0$ получаем уравнения

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\omega_s}\right)^{\cdot} = \left(\sum_i E_{si}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\right)^{\cdot} = \sum_i \widetilde{\xi}_{si}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}. \tag{4.11}$$

Записанная в векторной форме, эта система называется *уравнением неголономного момента*. Заметим, что хотя коэффициенты разложения $\xi_{s\beta}$ и векторные поля $\boldsymbol{u}_\beta$ зависят от координат на орбите $\boldsymbol{y}$, после упрощения и исключения связей правая часть (4.11) будет зависеть только от инвариантов $\boldsymbol{z}$, $\dot{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Комментарий. Во многих работах уравнению неголономного момента придается очень важное значение (см., например, [8]), однако не известно ни одного примера, в котором с помощью данного уравнения была бы получена какая-либо информация о динамике системы.

Замечание. В ряде случаев вместо обобщенных координат $z_1, \ldots, z_m$ удобно использовать (например, с целью алгебраизовать уравнения движения) избыточные переменные $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})$, число которых превышает $n - m$. Это приводит к тому, что возникают геометрические соотношения вида

$$g_\alpha(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Например, вместо сферических координат $(\theta, \varphi)$ часто удобно использовать декартовы координаты $x_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = \cos\theta$, которые удовлетворяют соотношению

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Замечание. Если группа действует несвободно, то могут возникнуть различные (технические) проблемы, связанные с тем, что в этом случае пространство орбит, как правило, не является гладким многообразием.

Это может быть связано с существованием орбит меньшей размерности: например, для систем, инвариантных относительно вращений, особые орбиты отвечают точкам на оси вращения.

Может также оказаться, что орбита не лежит целиком в конфигурационном пространстве. Например, для действия группы $SO(3)$ на $S^2$ орбита продолжения действия в $TS^2$ оказывается трехмерной, а инварианты этого действия оказываются нелинейными функциями скоростей. Так, если сфера $S^2$ задана в $\mathbb{R}^3$ соотношением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

то действие $SO(3)$ в $TS^2$ задается соотношением

$$g \cdot (\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = (\mathbf{Q}\boldsymbol{x}, \mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{x}}),$$

где $Q$ — ортогональная матрица размерности $3 \times 3$. Единственным инвариантом в этом случае является функция

$$\Phi = (\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}).$$

## 4.3. Пример: качение без проскальзывания выпуклого тела по горизонтальной плоскости

Рассмотрим редукцию в классической задаче о качении без проскальзывания твердого тела по горизонтальной плоскости. В силу общих принципов динамики и функция Лагранжа, и связи не должны зависеть от выбора неподвижной (точнее, инерциальной) системы отсчета, связанной с плоскостью, поэтому в конфигурационном пространстве заведомо действует группа симметрий $SE(2)$, задающая смену неподвижной системы координат. Эти сведения позволяют с самого начала выбрать подходящие переменные (среди которых необходимое число инвариантов действия группы симметрий) и фактически совместить редукцию и вывод уравнений движения.

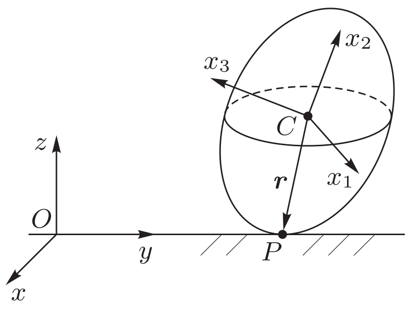


Рис. 4

Зафиксируем две системы координат: одна — неподвижная $Oxyz$ с началом $O$ в плоскости качения и осью $Oz$, перпендикулярной этой плоскости, вторая — подвижная $Cx_1x_2x_3$ с началом в центре масс тела и осями, совпадающими с главными осями инерции (см. рис. 4).

Конфигурационное пространство системы $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2 \times SO(3)$, где первый сомножитель отвечает положению точки контакта (которое параметризуем ее координатами $(x, y)$ относительно неподвижных осей $Oxyz$), а второй сомножитель задает ориентацию тела в пространстве (ее будем задавать ортогональной матрицей $\mathbf{Q}$ размерности $3 \times 3$). Столбцы матрицы $\mathbf{Q}$ задают координаты неподвижных ортов $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ в подвижных осях $Cx_1x_2x_3$, ее параметризация углами Эйлера $(\theta, \varphi, \psi)$ имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

В выбранных переменных $(x, y, \theta, \varphi, \psi)$ действие группы симметрий $SE(2) = \{g(a_1, a_2, \alpha), \alpha \bmod 2\pi\}$ в $\mathcal{N}$ имеет вид

$$g(a_1, a_2, \alpha) \cdot (x, y, \theta, \varphi, \psi) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha + a_1, x\sin\alpha + y\cos\alpha + a_2, \theta, \varphi, \psi + \alpha),$$

а соответствующие векторные поля —

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \boldsymbol{u}_\alpha = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\psi}.$$

Мы видим, что $\theta$, $\varphi$ — инварианты этого действия, но в данном случае удобно воспользоваться вместо этих угловых избыточными переменными

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta,$$

которые представляют собой компоненты нормали к плоскости в подвижных осях. Компоненты вектора $\boldsymbol{r}$ в подвижных осях $Cx_1x_2x_3$ также не меняются при смене неподвижной системы координат и, следовательно, тоже выражаются через $\theta$, $\varphi$ (или через $\boldsymbol{\gamma}$), в общем случае связь между ними определяется обращением гауссова отображения

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\nabla_r f}{|\nabla_r f|},$$

где $\nabla_r = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$.

Для параметризации скоростей также воспользуемся инвариантными (относительно действия группы) переменными — компонентами векторов угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и скорости его центра масс $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ в подвижных осях, тогда

$$\dot\theta = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi, \quad \dot\varphi = \omega_3 - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi), \quad \dot\psi = \frac{\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi}{\sin\theta},$$

$$\dot{\boldsymbol{R}}_p = \mathbf{Q}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \dot{\boldsymbol{r}}), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\dot\theta + \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\dot\varphi,$$

где $\boldsymbol{R}_p = (x, y, 0)$ — радиус-вектор точки контакта $P$ в неподвижных осях $Oxyz$.

Условие качения без проскальзывания в выбранных переменных записывается в виде

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 0. \tag{4.13}$$

Функция Лагранжа тела в поле тяжести имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - U, \quad U = -mg(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{4.14}$$

где $m$, $\mathbf{I}$ — масса и центральный тензор инерции тела, $g$ — ускорение свободного падения.

Опуская процедуру коммутации векторных полей, отвечающих квазискоростям $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{v}$ (см. подробно, например, [59]), запишем для данного случая уравнения (3.5) с неопределенными множителями $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ в векторной форме

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{v} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \times \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial x_c} \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial y_c} \boldsymbol{\beta} + \frac{\partial L}{\partial z_c} \boldsymbol{\gamma} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{v}},\end{gathered} \tag{4.15}$$

где $f_i$ — компоненты векторного уравнения связи (4.13), $(x_c, y_c, z_c)$ — координаты центра масс в неподвижных осях $Oxyz$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ — орты неподвижной системы координат, спроецированные на подвижные оси $Cx_1x_2x_3$, то есть столбцы матрицы $\mathbf{Q}$ (4.12).

Подставляя в эти уравнения функцию Лагранжа (4.14) и учитывая, что $U$ не зависит от $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $x_c$, $y_c$, $z_c$, найдем неопределенные множители из второго векторного уравнения в (4.15) и уравнения связи (4.13):

$$\boldsymbol{\lambda} = m\,(\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) = -m\,(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})),$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. С помощью этого соотношения перепишем первое уравнение в (4.15) в виде

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + m\boldsymbol{r} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}) = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})) \times \boldsymbol{\omega} - m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}. \tag{4.16}$$

Дополним его уравнением Пуассона, описывающим эволюцию компонент неподвижных векторов в подвижных осях,

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{4.17}$$

**Предложение 4.** *Если твердое тело катится без проскальзывания по плоскости в потенциальном поле, с потенциалом, зависящем только от $\boldsymbol{\gamma}$, то редуцированная по действию группы $SE(2)$ система представляется в виде уравнений* (4.16), (4.17).

Таким образом, в данном случае оказывается удобным процедуру редукции совместить с выводом уравнений движения. В работе [63] та же система получена при помощи исключения сил реакций непосредственно из динамических уравнений Ньютона–Эйлера.

Замечание. Предложенные выше при формальном описании редукции инвариантные квазискорости, связанные с действием группы $\boldsymbol{\Omega} = g^{-1}\dot{g}$, приводят для данной системы к существенно более громоздким редуцированным уравнениям.

В заключение отметим, что в данном примере $\dim T\mathcal{N}_q = 6$, а $\mathcal{D}_q$ и $T\mathcal{O}_q$ являются трехмерными пространствами, поэтому

$$\mathcal{D}_q \cap T\mathcal{O}_q = \mathcal{C}_q \neq 0.$$

Можно показать, что при этом $\mathcal{C}_q$ является линейной оболочкой векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial\psi}$. Используя (4.8), получим для момента $p_\psi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot\psi}$ уравнение

$$\dot p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\psi}. \tag{4.18}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial\psi} = \boldsymbol{u}_\alpha + y\boldsymbol{u}_1 - x\boldsymbol{u}_2$, из уравнения неголономного момента эволюция $p_\psi$ представится в виде

$$\dot p_\psi = \dot y\frac{\partial L}{\partial\dot x} - \dot x\frac{\partial L}{\partial\dot y}. \tag{4.19}$$

Мы видим, что уравнения (4.18) и (4.19) не позволяют сделать каких-либо выводов о динамике системы. Таким образом, в общем случае формализм неголономного момента [9] не дает никаких преимуществ в записи уравнений движения по сравнению с традиционным подходом.

## 4.4. Обобщенный метод редукции Чаплыгина

Рассмотрим теперь подробно важный с точки зрения приложений класс неголономных систем, который в разделе 4.2 был отмечен как случай **C-1**. Напомним, что и эти системы удовлетворяют двум условиям:

1°. они допускают действующую на конфигурационном пространстве группу симметрий $G$, действие которой свободное и собственное;

2°. все поля симметрий, порожденные этим действием, трансверсальны связям, то есть $T\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}} \cap \mathcal{D}_q = 0$.

Как отмечалось выше, из последнего условия следует, что размерность орбиты $T\mathcal{O}_q$ не превосходит числа уравнений связей, то есть $\dim\mathcal{D}_{\boldsymbol{q}} \geqslant \dim T\mathcal{O}_q$. Отметим также, что в некоторых случаях в качестве такой группы симметрий может выступать некоторая подгруппа общей группы симметрий системы.

Замечание. В работе С. А. Чаплыгина [76] и в работах [9, 36] делается дополнительное предположение, что размерность группы симметрий $G$ (и, следовательно, размерность орбиты общего положения) совпадает с числом связей, наложенных на систему ($\dim T\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}} = \operatorname{codim}\mathcal{D}_q$). Как видно из последующих рассуждений, это предположение не требуется для применения данного метода редукции.

Для неособой орбиты $\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}$ положим $\dim\mathcal{O}_{\boldsymbol{q}} = n-m$ и, пользуясь тем, что ее окрестность в конфигурационном пространстве представляет собой прямое произведение $\mathbb{R}^m \times \mathcal{O}_{\boldsymbol{q}}$, выберем локальные координаты $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ в $\mathcal{N}$ таким образом, что $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ являются инвариантами действия группы $G$, а соответствующие поля симметрий (порожденные действием $G$) имеют вид

$$\boldsymbol{u}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n-m} u_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial y_\beta}, \quad \alpha = 1, \ldots, n-m,$$

где $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{n-m})$ — локальные координаты на орбите.

В качестве переменных в касательных плоскостях $T\mathcal{N}_q$ в данном случае выберем обобщенные скорости $\dot z_i$, $i = 1, \ldots, m$, и произвольные квазискорости $w_\mu$, $\mu = 1, \ldots, n-m$, инвариантные относительно действия группы, при этом

$$\dot{y}_\mu = \sum_{\beta=1}^{n-m} E_{\mu\beta}(\boldsymbol{y}) w_\beta. \tag{4.20}$$

В общем случае (когда группа симметрий некоммутативна) соответствующие векторные поля $\boldsymbol{E}_\mu = \sum\limits_{\beta=1}^{n-m} E_{\mu\beta}\dfrac{\partial}{\partial y_\beta}$ также не коммутируют относительно скобки Ли:

$$[\boldsymbol{E}_\mu, \boldsymbol{E}_\nu] = \sum_\sigma c_{\mu\nu}^\sigma \boldsymbol{E}_\sigma. \tag{4.21}$$

При таком выборе переменных лагранжиан $L$ и обобщенные силы $\boldsymbol{Q}$ не зависят от части переменных $\boldsymbol{y}$, а уравнения связей при условиях $1^\circ$, $2^\circ$ могут быть разбиты на две группы (см. также раздел 4.2):

$$w_\mu = \sum_{j=1}^{m} b_{\mu j}(\boldsymbol{z})\dot{z}_j, \quad \mu = 1, \ldots, n-m, \tag{4.22.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{si}(\boldsymbol{z})\dot{z}_i = 0, \quad s = 1, \ldots, k < m, \tag{4.22.2}$$

то есть $b_{\mu j}$ и $d_{si}$ также не зависят от последних $n-m$ переменных.

Для сокращения записи положим $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_{n-m})$ и, как и выше, выраженные через квазискорости, то есть после подстановки (4.20), функцию Лагранжа и обобщенные силы обозначим $\widetilde{L}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{w})$ и $\widetilde{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \boldsymbol{w})$, а обозначение $(\ )^*$ будем в данном случае использовать для ограничения произвольной функции только на первую группу связей (4.22.1), например, $\widetilde{L}^*(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}) = \widetilde{L}\Big(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}, \sum\limits_i b_{\mu j}\dot{z}_j\Big)$.

**Предложение 5.** *Уравнения движения, описывающие эволюцию переменных* $(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}})$*, отделяются и представляются в форме*

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \dot{z}_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{m} S_{ij}\dot{z}_j + \widetilde{Q}_i^* + \sum_{\mu=1}^{n-m} b_{\mu i}\widetilde{Q}_\mu^* + \sum_{s=1}^{k}\lambda_s d_{si}, \quad i = 1\ldots m\\ S_{ij}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}}) = \sum_{\mu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\mu}\right)^*\left(\frac{\partial b_{\mu i}}{\partial z_i} - \frac{\partial b_{\mu j}}{\partial z_i} - \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}^\mu b_{\alpha i} b_{\beta j}\right),\end{gathered} \tag{4.23}$$

*где* $c_{\alpha\beta}^\mu$ *— коэффициенты в разложении коммутатора* (4.21)*,* $\lambda_s$ *— неопределенные множители, отвечающие второй группе связей* (4.22.2)*.*

*Доказательство.* Запишем уравнения движения (3.5) для данного случая с учетом условия $\boldsymbol{E}_\mu(\widetilde{L}) = 0$:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{z}_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial z_i} = \widetilde{Q}_i - \sum_\mu \lambda_\mu b_{\mu i} + \sum_{s=1}^{k}\lambda_s d_{si}, \quad \left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\mu}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\mu}^\beta w_\alpha \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\beta} + \widetilde{Q}_\mu + \lambda_\mu,\\ i = 1, \ldots, m, \quad \mu, \alpha, \beta = 1, \ldots, n-m.\end{gathered} \tag{4.24}$$

Последние $n-m$ уравнений позволяют выразить неопределенные множители через фазовые переменные. Пользуясь стандартным правилом дифференцирования сложных функций с учетом уравнений связей (4.22.1), находим

$$\frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \dot{z}_i} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{z}_i} + \sum_{\mu} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\mu} b_{\mu i}, \quad \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial z_i} = \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial z_i} + \sum_{\mu,j} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\mu} \frac{\partial b_{\mu j}}{\partial z_i} \dot{z}_j,$$
$$i,k = 1,\ldots,m, \quad \mu = 1,\ldots,n-m.$$

Подставляя эти соотношения в первые $m$ уравнений (4.24), после приведения подобных получим (4.23). ■

Таким образом, в данном случае можно совместить редукцию по симметриям и ограничение системы на часть связей.

В большинстве физических примеров группа симметрий $G$, рассматриваемая в данном разделе, является коммутативной (именно этот случай рассматривал первоначально сам С. А. Чаплыгин [76]). При этом все величины $c^\sigma_{\mu\nu}$ обращаются в нуль и уравнения (4.23) несколько упрощаются. В работе [36] такие неголономные системы предложено называть абелевыми системами Чаплыгина.

Отметим, что, как правило, при записи связей в форме (4.22) в коэффициентах $b_{\mu i}(\boldsymbol{z})$ могут возникать особенности при некоторых значениях координат $\boldsymbol{z}$.

Если число связей в точности совпадает с размерностью группы симметрий $G$, то можно также показать, что в случае потенциальных внешних сил (при $\boldsymbol{Q}=0$) уравнения (4.23) после преобразования Лежандра представляются в псевдогамильтоновой форме (см. приложение C).

## 4.5. Пример: сани Чаплыгина на наклонной плоскости

Выше (см. раздел 3.3) мы получили уравнения движения данной системы с произвольным потенциальным полем в квазискоростях. Рассмотрим теперь ее в качестве системы Чаплыгина, когда сани движутся по наклонной плоскости [65]. Функция Лагранжа (3.14) в этом случае имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\, m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\, I\omega^2 + ma\omega\left(-\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi\right) - mg\sin\alpha_0(y + a\sin\varphi),$$

где $\alpha_0$ — угол наклона плоскости, $g$ — ускорение силы тяжести, а неподвижная система координат выбрана таким образом, что ось $Oy$ направлена по линии наибольшего ската. Связь задается уравнением (3.13).

Мы видим, что система инвариантна относительно однопараметрической группы $\mathbb{R}^1$ переносов вдоль оси $Ox$, соответствующее поле симметрий

$$\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}.$$

В этом случае связь представляется в форме (4.22) следующим образом:

$$\dot{x} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\, \dot{y}. \tag{4.25}$$

Ограничивая лагранжиан на связь, получим (в данном случае $\widetilde{L} = L$, поэтому волну в записи опускаем)

$$L^* = \frac{1}{2}\left(m\frac{\dot{y}^2}{\sin^2\varphi} + I\dot{\varphi}^2\right) - mg\sin\alpha_0(y + a\sin\varphi). \tag{4.26}$$

Единственный элемент матрицы $S_{y\varphi} = S$ вычислим, пользуясь (4.23):

$$S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^* \left(\frac{\partial b_{xy}}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_{x\varphi}}{\partial y}\right) = -\frac{m}{\sin^3 \varphi}\left(\dot{y}\cos\varphi - a\dot{\varphi}\sin^2\varphi\right).$$

Окончательно уравнения движения (4.23) представляются в виде

$$\left(m\frac{\dot{y}}{\sin^2\varphi}\right)^{\displaystyle\cdot} + mg\sin\alpha_0 = S\dot{\varphi}, \quad I\ddot{\varphi} - m\frac{\dot{y}^2}{\sin^3\varphi}\cos\varphi + mga\sin\alpha_0\cos\varphi = -S\dot{y}. \tag{4.27}$$

Эволюция $x$ описывается в данном случае уравнением (4.25).

## 4.6. Пример: однородный шар без прокручивания и проскальзывания[5]

Рассмотрим теперь качение полностью динамически симметричного (в частности, однородного) шара по произвольной поверхности при условии, что отсутствует не только проскальзывание в точке контакта, но также и верчение (прокручивание) шара относительно нормали к поверхности. Формально эти связи можно представить в виде

$$\boldsymbol{v}_c - a\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n} = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}) = 0, \tag{4.28}$$

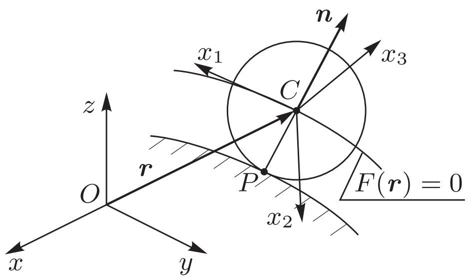


Рис. 5

где $\boldsymbol{v}_c$, $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость шара, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности в точке контакта (см. рис. 5), $a$ — радиус шара.

Выберем две системы координат:

– $Oxyz$ — неподвижная (инерциальная) система координат,

– $Cx_1x_2x_3$ — подвижная система координат, жестко связанная с шаром.

Ориентацию шара (то есть ориентацию подвижных осей $Cx_1x_2x_3$ относительно неподвижных $Oxyz$) будем описывать при помощи углов Эйлера ($\theta$, $\varphi$, $\psi$). Положение шара в пространстве будем задавать радиус-вектором центра масс $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ в системе координат $Cxyz$. Вследствие того, что шар катится по некоторой двумерной поверхности $S_p \subset \mathbb{R}^3$, его центр масс также движется вдоль двумерной поверхности $S_c \subset \mathbb{R}^3$ (эквидистантной к $S_p$), уравнение которой запишем в неявном виде

$$F(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{4.29}$$

Нормаль к поверхности (4.29) совпадает с нормалью к поверхности $S_p$ в точке контакта и задается соотношением

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{\nabla F(\boldsymbol{r})}{|\nabla F(\boldsymbol{r})|},$$

где $\nabla$ — градиент по переменным $\boldsymbol{r}$.

[5] Отметим, что система, описывающая качение без проскальзывания и прокручивания произвольного (выпуклого) твердого тела по плоскости, также является обобщенной системой Чаплыгина. Прямыми вычислениями это было показано в работе [17].

Таким образом, конфигурационное пространство данной системы можно представить в виде

$$\mathcal{N} = S_c \times SO(3) = \{(\boldsymbol{r}, \theta, \varphi, \psi) \mid F(\boldsymbol{r}) = 0\}.$$

Если внешние силы, приложенные к шару, не зависят от его ориентации, то от вектора связанной с ним системы координат $Cx_1x_2x_3$ ничего не зависит (вследствие полной динамической симметрии шара), а значит, эта система координат определена с точностью до преобразований группы $SO(3)$, которая и является в данном случае группой симметрий. Соответствующие поля симметрий на $\mathcal{N}$, порожденные этим действием, имеют вид

$$u_1 = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad u_2 = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}, \quad u_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Инвариантами действия (точнее, его продолжениями) этой группы симметрий на $T\mathcal{N}$ являются $\boldsymbol{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$, а также компоненты угловой скорости шара на неподвижные оси

$$\omega_x = \cos\psi\dot{\theta} + \sin\theta\sin\psi\dot{\varphi}, \quad \omega_y = \sin\psi\dot{\theta} - \sin\theta\cos\psi\dot{\varphi}, \quad \omega_z = \cos\theta\dot{\varphi} + \dot{\psi}. \tag{4.30}$$

Функция Лагранжа данной системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2 - U(\boldsymbol{r}),$$

где $m$, $I$ — масса и центральный момент инерции шара (для однородного шара $I = \frac{2}{5}ma^2$), $U(\boldsymbol{r})$ — потенциал внешних сил.

Для того чтобы воспользоваться результатами раздела 4.4, представим связи в форме (4.22), для этого умножим векторно на $\boldsymbol{n}$ первое из уравнений (4.28) и учтем, что $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}) = 0$; получим

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{a}\,\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{r}}, \quad (\boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{r}}) = 0, \tag{4.31}$$

где мы учли $\boldsymbol{v}_c = \dot{\boldsymbol{r}}$, второе из этих уравнений — это следствие связи (4.29).

Мы видим, что для записи редуцированных (по действию группы $SO(3)$) уравнений движения можно воспользоваться предложением 5. Обращая соотношение (4.30), находим

$$\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{\psi}\end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_x\omega_x + \boldsymbol{E}_y\omega_y + \boldsymbol{E}_z\omega_z, \quad \boldsymbol{E}_x = \begin{bmatrix}\cos\psi\\ \dfrac{\sin\psi}{\sin\theta}\\ -\dfrac{\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_y = \begin{bmatrix}\sin\psi\\ -\dfrac{\cos\psi}{\sin\theta}\\ \dfrac{\cos\theta\cos\psi}{\sin\theta}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_z = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Отсюда и из уравнений связей (4.31) получаем

$$[\boldsymbol{E}_\mu, \boldsymbol{E}_\nu] = -\sum_\sigma \varepsilon_{\mu\nu\sigma}\boldsymbol{E}_\sigma, \quad b_{\mu\nu} = -\sum_\sigma \varepsilon_{\mu\nu\sigma}n_\sigma,$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$ — антисимметричный тензор Леви-Чивиты, $\mu$, $\nu$, $\sigma$ — индексы, отвечающие осям $Oxyz$.

После достаточно громоздких прямых вычислений (с использованием соотношения $\boldsymbol{n}^2 = 1$) для данного случая получим

$$\mathbf{S}\dot{\boldsymbol{r}} = -(\dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{n},$$

где $\dot{\boldsymbol{n}}_\sigma = \dfrac{\partial n_\sigma}{\partial x}\,\dot{x} + \dfrac{\partial n_\sigma}{\partial y}\,\dot{y} + \dfrac{\partial n_\sigma}{\partial z}\,\dot{z}$, а $\mathbf{S}$ — кососимметрическая матрица из предложения 5. Отсюда, пользуясь (4.23), получим уравнения движения для радиус-вектора центра шара в виде

$$\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L^*}{\partial \boldsymbol{r}} = (\lambda_0 - (\dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{n}}))\,\boldsymbol{n},$$
$$L^* = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}),$$

где $\lambda_0$ — неопределенный множитель, отвечающий голономной связи $(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{n}) = 0$.

Переопределяя неопределенный множитель $\lambda_0 - (\dot{\boldsymbol{r}}, \dot{\boldsymbol{n}}) \to \lambda_0$, получаем следующее утверждение.

**Предложение 6.** *При качении шара по поверхности без проскальзывания и прокручивания в потенциальном поле, не зависящем от ориентации шара, его центр масс движется как материальная точка массы* $m + \dfrac{I}{a^2}$ *по поверхности* (4.29) *в потенциальном поле* $U(\boldsymbol{r})$.

В частности, при отсутствии внешних сил центр масс движется по геодезической поверхности (4.29). Этот факт был другим способом указан в работе [15].

# 5. Симметрия и первые интегралы

## 5.1. Обобщение теоремы Нётер

Оказывается, что неголономные системы при некоторых дополнительных предположениях обладают первыми интегралами, обобщающими известные интегралы Э. Нётер в гамильтоновой механике (см. подробнее обзор [28]). Отметим, что в данном случае система не обладает симметрией в общепринятом смысле: возникающие векторные поля на конфигурационном пространстве $\mathcal{N}$ (и соответствующее действие группы) сохраняют функцию Лагранжа, но не сохраняют связи и потому, как правило, не могут быть продолжены до полей симметрии. Такие частные симметрии мы будем называть нётеровскими симметриями.

**Теорема 4 (Козлов – Колесников [69, 72]).** *Если неголономная система* (3.3) *допускает векторное поле в конфигурационном пространстве* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{q})\dfrac{\partial}{\partial q_i}$, *удовлетворяющее условиям*

$$(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})u_i(\boldsymbol{q}) = 0, \quad \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}, \boldsymbol{u}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i}u_i = \sum_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})u_i = 0, \tag{5.1}$$

*а его продолжение* $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ *сохраняет функцию Лагранжа*

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(L)\Big|_{\mathcal{D}} = 0, \tag{5.2}$$

*то существует первый интеграл*

$$P_u = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}u_i(q). \tag{5.3}$$

*Доказательство.* Запишем естественную цепочку равенств

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(L) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} u_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{u}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} u_i\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) u_i.$$

При ограничении на $\mathcal{D}$ мы можем последнее слагаемое в этом равенстве заменить с помощью уравнения (3.3) (которое, строго говоря, не определено вне распределения):

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(L)\Big|_{\mathcal{D}} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} u_i\right) - Q_i u_i - \left(\sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \dot{q}_i} u_i\right).$$

Отсюда мы видим, что при сформулированных в теореме условиях

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} u_i\right) = 0.$$

■

Другими словами, *если неголономная система допускает векторное поле* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$ *в конфигурационном пространстве, которое принадлежит распределению* $\mathcal{D}$*, задаваемому неголономными связями* (3.1)*, и* $(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{u}) = 0$*, а лагранжиан* $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ *инвариантен относительно продолжения* $\widetilde{\boldsymbol{u}}$*, то система обладает первым интегралом.*

Замечание. В первоначальной формулировке в работе [72] было использовано более сильное требование $\widetilde{\boldsymbol{u}}(L) = 0$ (без ограничения на $\mathcal{D}$). Очевидно, что этому условию удовлетворяет более узкий класс функций Лагранжа $L$, чем в случае (5.2).

Для краткости векторное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$, для которого выполнено условие (5.1), а для его продолжения $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ выполнено условие (5.2), мы будем называть *векторным полем Нётер*, или *нётеровским полем*.

Замечание. Замечательная особенность нётеровских полей заключается в том, что они позволяют найти первые интегралы системы (3.3), даже не выписывая явно уравнения движения! (См. примеры в разделах 5.2, 6.1– 6.4.)

Замечание. Эта теорема допускает естественное обобщение на случай многомерных групп (и, соответственно, большего числа полей симметрий).

Теорема 4 допускает естественное обращение, то есть для всякой неголономной системы с невырожденной по скоростям функцией Лагранжа, обладающей первым интегралом в форме

$$P = \sum_i u_i^{(0)}(\boldsymbol{q}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

из векторного поля $\boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{q}) = (u_1^{(0)}(\boldsymbol{q}), \ldots, u_n^{(0)}(\boldsymbol{q}))$ можно построить нётеровское векторное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$, удовлетворяющее условиям (4.26), (4.27). Здесь мы сформулируем это утверждение для наиболее распространенного в приложениях случая натуральных систем, когда лагранжиан (без учета связи) имеет вид

$$L = T - U(\boldsymbol{q}), \quad T = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{q}}, \mathbf{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{5.4}$$

где $T$, $U$ — кинетическая и потенциальная энергия соответственно.

**Теорема 5.** *Линейная функция $F = (\boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{q}), \mathbf{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}})$ является первым интегралом неголономной системы, отвечающей лагранжиану* (5.4) *и распределению связей $\mathcal{D}$, тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(L)\Big|_{\mathcal{D}} = 0, \quad \boldsymbol{u} = \mathbf{\Pi}^{\mathbf{B}}_{\mathcal{D}}\boldsymbol{u}^{(\mathbf{0})},$$

*где $\mathbf{\Pi}^{\mathbf{B}}_{\mathcal{D}}$ — оператор ортогональной проекции на $\mathcal{D}$ в метрике, задаваемой кинетической энергией, а $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ обозначает продолжение поля $\boldsymbol{u}$ на $T\mathcal{N}$.*

Таким образом, для натуральной системы, зная линейный по скоростям интеграл, легко построить соответствующее нётеровское поле. В такой формулировке этот результат приводится в работе [28], при этом ее авторы ссылаются на И. Илиева.

Комментарий. В литературе подобные результаты часто называют неголономными теоремами Нётер [28, 35]. Как известно, в гамильтоновой механике всякий первый интеграл $F(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ вследствие существования бивекторного тензорного инварианта — пуассоновой структуры — порождает гамильтоново поле симметрий $\boldsymbol{X}_F$ в фазовом пространстве. Для интеграла Нётер это поле симметрий обладает той особенностью, что его «конфигурационная часть» не зависит от скоростей, то есть $\boldsymbol{X}_F(q_i) = f_i(\boldsymbol{q})$. Кроме того (также вследствие наличия скобки Пуассона), поле $\boldsymbol{X}_F$ всюду касается поверхности $F = \mathrm{const}$, поэтому возможна одновременная редукция на поверхность уровня интеграла и по полю симметрий.

*В неголономной механике в общем случае пуассонова структура отсутствует, поэтому векторное поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$, удовлетворяющее условиям теоремы, при продолжении на $T\mathcal{N}$ приводит к полю $\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, которое может и не быть полем симметрий системы* (3.3)*, теперь этот факт требует отдельного анализа.*

Замечание. Напомним, что, согласно теореме 3, эта проверка сводится к выяснению того, что продолжение поля $\tilde{\boldsymbol{u}}$ касается распределения $\mathcal{D}$, заданного связями, то есть

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(f_\mu)\Big|_{\mathcal{D}} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, k$$

(либо, что то же самое, $L_{\boldsymbol{u}}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$).

## 5.2. Пример: сфера Рауса

Рассмотрим качение по плоскости без проскальзывания шара со смещенным центром, предполагая, что тензор инерции динамически симметричный, причем ось симметрии проходит через центр масс (см. рис. 6).

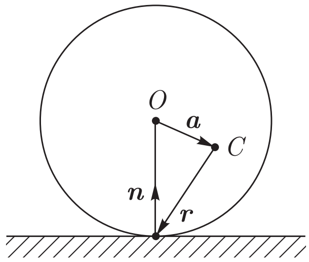

Рис. 6

Конфигурационное пространство в данном случае $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2 \times SO(3) = \{((x, y), \mathbf{Q})\}$, где $(x, y)$ — координаты центра шара, а $\mathbf{Q}$ — ортогональная матрица, задающая ориентацию шара. Выберем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, связанную с шаром, полагая ее начало в центре шара, а оси $Ox_i$ направим вдоль главных осей инерции; матрицу $\mathbf{Q}$ выберем так, что по ее столбцам располагаются координаты неподвижных ортов в подвижных осях.

Для параметризации $SO(3)$ выберем углы Эйлера так, что матрица $\mathbf{Q}$ имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Нормаль и плоскости в подвижных осях совпадают с последним столбцом $\mathbf{Q}$:

$$\boldsymbol{n} = (\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, \cos\theta). \tag{5.6}$$

В подвижных осях угловая скорость тела определяется соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi,\ \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,\ \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi), \tag{5.7}$$

из соотношений (5.5) и (5.7) скорость центра масс в подвижных осях может быть найдена по формуле

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{Q}\,\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{V}_0 = (\dot x, \dot y, 0)$ — скорость геометрического центра шара в неподвижных осях, $\boldsymbol{a} = (0, 0, a)$ — вектор смещения. Лагранжиан системы имеет вид (обобщенные силы $Q_i$ полагаем равными нулю)

$$L = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - mga\cos\theta. \tag{5.8}$$

Из условия непроскальзывания точки контакта $\mathbf{Q}\,\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(-R\boldsymbol{n}) = 0$, где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к точке контакта, находим уравнения связей

$$f_x = \dot x - R\dot\theta\sin\psi + R\dot\varphi\sin\theta\cos\psi = 0, \quad f_y = \dot y + R\dot\theta\cos\psi + R\dot\varphi\sin\theta\sin\psi = 0. \tag{5.9}$$

Рассмотрим теперь векторные поля $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$ на конфигурационном пространстве $\mathcal{N} = \{\boldsymbol{q} = (x, y, \theta, \varphi, \psi)\}$, которые строятся следующим образом:

1. пусть $\boldsymbol{u}_0 = \big(u_\theta(\theta,\varphi,\psi), u_\varphi(\theta,\varphi,\psi), u_\psi(\theta,\varphi,\psi)\big)$ — произвольное векторное поле на $SO(3)$,
2. пользуясь уравнениями связей (5.9), вычислим $u_x$, $u_y$ по формулам

   $$u_x = R(u_\theta\sin\psi - u_\varphi\sin\theta\cos\psi), \quad u_y = -R(u_\theta\cos\psi + u_\varphi\sin\theta\sin\psi)$$

   и получим векторное поле $\boldsymbol{u}$ на $\mathcal{N}$, порождаемое полем $\boldsymbol{u}_0$,

   $$\boldsymbol{u} = (R(u_\theta\sin\psi - u_\varphi\sin\theta\cos\psi), -R(u_\theta\cos\psi + u_\varphi\sin\theta\sin\psi), u_\theta, u_\varphi, u_\psi), \tag{5.10}$$

   которое всюду касается распределения, заданного связями.

Теперь продолжим это поле на $T\mathcal{N}$ и воспользуемся критерием

$$\widetilde{u}(L)\big|_{\mathcal{D}} = 0,$$

откуда, решая достаточно простую систему линейных уравнений в частных производных, найдем неизвестные функции $u_\theta$, $u_\varphi$, $u_\psi$. Можно показать, что линейно-независимые решения порождаются полями на $SO(3)$ следующего вида:

$$\boldsymbol{u}_0^{(R)} = (0, a, R), \quad \boldsymbol{u}_0^{(J)} = \big(0, \rho(I_1 + ma(a + R\cos\theta)), \rho mR(a + R\cos\theta)\big),$$
$$\rho = \big(I_1I_3 + mR^2I_1\sin^2\theta + m(a + R\cos\theta)^2I_3\big)^{-1/2}.$$

Подставляя результат в (5.10), получим два независимых нётеровских поля $\boldsymbol{u}^{(R)}$, $\boldsymbol{u}^{(J)}$ на $\mathcal{N}$.

Теперь, пользуясь теоремой Козлова – Колесникова, найдем соответствующие им первые интегралы:

$$\begin{gathered} P_R = (a + R\cos\theta)I_3\dot\varphi + \big(RI_1\sin^2\theta + RI_3\cos\theta(a + R\cos\theta)\big)\dot\psi, \\ P_J = \rho\big(I_3(I_1 + m(a + R\cos\theta)^2)\dot\varphi + \cos\theta\rho^{-2}\dot\psi - mRI_1\sin\theta(\dot x\cos\psi + \dot y\sin\psi)\big). \end{gathered} \tag{5.11}$$

При этом (как можно убедиться прямой проверкой) поля $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(R)}$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(J)}$ *не являются полями симметрии для векторного поля системы.* Вопросы конформной гамильтоновости данной системы обсуждается в [7].

Комментарий. Если воспользоваться уравнениями связей (5.9), а затем с помощью (5.7) и выразить интегралы (5.11) через компоненты угловой скорости в подвижных осях, то получим

$$P_J = \big(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \boldsymbol{r}\big), \quad P_R = \frac{\omega_3}{\rho}. \tag{5.12}$$

В такой форме эти интегралы хорошо известны — они были независимо указаны Раусом и Чаплыгиным. Кроме того, как было показано Джеллетом [34], первый из этих интегралов существует и при более общих допущениях, а именно: точка контакта может проскальзывать, но для возникающих при этом сил трения проекция момента на вертикаль равна нулю. Поэтому в литературе $P_J$ зачастую называют интегралом Джеллета, а $P_R$ — интегралом Рауса либо интегралом Чаплыгина.

Если предполагать, что интегралы (5.12) известны, то нётеровские поля $\boldsymbol{u}^{(R)}$, $\boldsymbol{u}^{(J)}$ можно построить и без решения уравнений для функций $u_\theta$, $u_\varphi$, $u_\psi$ — для этого необходимо воспользоваться теоремой 5. Отметим, что нётеровские поля в задаче о сфере Рауса были впервые построены в работе [35], где автор использовал интегралы (5.12), но не применял теорему 5.

Замечание. Как известно (см., например, [16]), в случае качения тела вращения по плоскости и сфере система также обладает парой линейных по скоростям интегралов, которые в общем случае находятся из решения системы линейных уравнений. При этом также можно построить соответствующие нётеровские поля на $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$, если использовать в качестве порождающего поля на $SO(3)$

$$\boldsymbol{u}_0 = \big(0, u_\varphi(\theta), u_\psi(\theta)\big).$$

Функции $u_\varphi(\theta)$ и $u_\psi(\theta)$ удовлетворяют системе линейных уравнений с коэффициентами, зависящими от $\theta$.

## 5.3. Циклические переменные и редукция по Раусу

Рассмотрим теперь ситуацию, когда продолжение векторного поля Нётер $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ является также полем симметрий. В этом случае помимо ограничения на уровень интеграла Нётер можно выполнить и редукцию по циклической переменной, то есть понизить порядок системы на две единицы (как и в голономных системах). Технически эту процедуру удобно выполнить при помощи редукции Рауса, которую мы опишем подробнее для данного случая.

Выберем координаты на $\mathcal{N}$, в которых нётеровское поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q})$ выпрямляется:

$$\boldsymbol{u}(q_1) = \ldots = \boldsymbol{u}(q_{n-1}) = 0, \quad \boldsymbol{u}(q_n) = 1;$$

тогда, согласно условиям теоремы 4,

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(L) = \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \quad P_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \mathrm{const}.$$

Отсюда следует, что в уравнения связи (3.1) не входит $\dot{\boldsymbol{q}}_n$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}_i = 0.$$

Таким образом, как было сказано в разделе 4, переменная $q_n$ является *циклической*.

На уровне интеграла $P_u = p$, выразим скорость $\dot{q}_n$, учитывая, что $L$ не зависит от $q_n$:

$$\dot{q}_n = \chi(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, p).$$

Определяя стандартным образом функцию Рауса

$$\mathcal{R} = L\big|_{\dot{q}_n=\chi} - p\chi,$$

уравнения движения можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_i} = \left(Q_i + \sum \lambda_\mu a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\right)\bigg|_{\dot{q}_n=\chi}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Вследствие того, что $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ есть поле симметрий, правая часть не зависит от $q_n$, а значит, порядок системы понижается на две единицы, при этом функция Рауса зависит от $p$ как от параметра.

## 5.4. Пример: шар Чаплыгина

Проиллюстрировать редукцию Рауса удобно при помощи хорошо известной задачи Чаплыгина о качении по плоскости без проскальзывания неоднородного уравновешенного шара (подробная библиография и современный анализ этой системы даны в работе [14]). Конфигурационное пространство в рассматриваемой задаче $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2 \otimes SO(3)$; воспользуемся локальными координатами: углами Эйлера $\theta$, $\varphi$, $\psi$ и декартовыми координатами центра шара $x$, $y$. В подвижной системе координат, связанной с главными осями шара, вектор угловой скорости имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi).$$

Уравнения связей, выражающие условия отсутствия проскальзывания точки контакта, можно представить в форме

$$f_x = \dot x - R\dot\theta\sin\psi + R\dot\varphi\sin\theta\cos\psi = 0, \quad f_y = \dot y + R\dot\theta\cos\psi + R\dot\varphi\sin\theta\sin\psi = 0. \tag{5.13}$$

Таким образом, рассматриваемая система относится к абелевым системам Чаплыгина и допускает двумерную группу симметрий $\mathbb{R}^2$ — трансляции вдоль плоскости качения, порождаемые векторными полями

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \widetilde{\boldsymbol{u}}_y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Мы не будем использовать при редукции представление (4.24), а воспользуемся непосредственно уравнениями движения в форме (3.3). Уравнения движения с неопределенными множителями имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot x}\right) = \lambda_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot y}\right) = \lambda_y, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot\psi}\right) = 0,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial\theta} = \lambda_x\frac{\partial f_x}{\partial\dot\theta} + \lambda_y\frac{\partial f_y}{\partial\dot\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial\varphi} = \lambda_x\frac{\partial f_x}{\partial\dot\varphi} + \lambda_y\frac{\partial f_y}{\partial\dot\varphi},
\end{gathered} \tag{5.14}$$

где $T_0$ — кинетическая энергия шара без учета связей (5.13) (которая, очевидно, не зависит от $x$, $y$, $\psi$):

$$T_0 = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3).$$

Система инвариантна относительно вращений шара вокруг вертикали, причем соответствующее векторное поле симметрий $\boldsymbol{u}_\psi = \dfrac{\partial}{\partial\psi}$ согласовано со связями. Согласно теореме Козлова–Колесникова, это приводит, как мы видим, к сохранению интеграла $\dfrac{\partial T_0}{\partial \psi}$.

Исключим неопределенные множители $\lambda_x$, $\lambda_y$ с помощью первых двух уравнений в (5.14) и связей (5.13), получаем

$$\lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot\theta} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot\theta} = -mR^2(\ddot\theta + \dot\psi\dot\varphi\sin\theta),$$
$$\lambda_x \frac{\partial f_x}{\partial \dot\varphi} + \lambda_y \frac{\partial f_y}{\partial \dot\varphi} = -mR^2(\ddot\varphi\sin\theta + \dot\theta\dot\varphi\cos\theta - \dot\theta\dot\psi)\sin\theta.$$

Следовательно, уравнения движения для углов $\theta$, $\varphi$ не зависят от $\psi$, а зависят только от $\dot\psi$. Таким образом, мы видим, что $\psi$ — циклическая переменная, которая может быть исключена при помощи редукции Рауса, после чего уравнения движения для $\theta$, $\varphi$ могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = -\dot\varphi S, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi} = \dot\theta S,\\ S = mR^2 \sin\theta\left(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi\right).\end{gathered} \tag{5.15}$$

Здесь $\mathcal{R}$ — функция Рауса

$$\mathcal{R}(\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi) = T_0 - \dot\psi \frac{\partial T_0}{\partial \dot\psi},$$

в которую $\dot x$, $\dot y$ необходимо подставить из уравнений связей, а $\dot\psi$ исключается с помощью уравнения для циклического интеграла

$$\frac{\partial T_0}{\partial \dot\psi} = (I_1 - I_2)\dot\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + I_3\dot\varphi\cos\theta + \\ + \left((I_1\sin^2\varphi + I_2\cos^2\varphi)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot\psi = c = \mathrm{const}. \tag{5.16}$$

Таким образом, в результате редукции мы получаем систему (5.15) на $TS^2$. Эта система оказывается конформно-гамильтоновой [58].

# 6. Более сложные примеры

## 6.1. Тело с острой кромкой

Пусть тело с острым краем, который имеет форму окружности радиуса $R$, движется по плоскости, покрытой льдом [57, 72]. Это означает, что точка касания окружности с плоскостью не может двигаться (проскальзывать) в направлении, перпендикулярном плоскости окружности. Будем также предполагать, что центр масс $C$ системы располагается на оси симметрии окружности и отстоит от ее плоскости на расстояние $b$, причем распределение масс тела симметрично относительно этой оси (см. рис. 7).

Как и во всех подобных системах, конфигурационное пространство данной системы $\mathcal{N} = \mathbb{R}^2 \times SO(3) = \{(x, y), \mathbf{Q}\}$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — координаты точки контакта на плоскости, $\mathbf{Q} \in SO(3)$ — ортогональная матрица, задающая ориентацию тела. Свяжем с телом

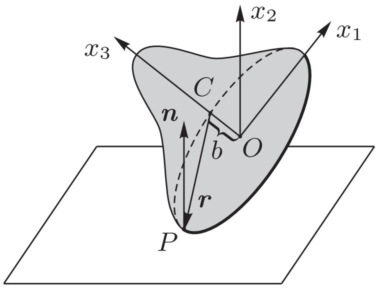


Рис. 7

систему координат $Cx_1x_2x_3$, начало которой расположим в центре масс, а оси направим вдоль главных осей инерции так, что $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$, где вследствие динамической симметрии совпадают два момента инерции; все остальные векторы и тензоры также полагаем заданными в этих осях. Как и выше, будем полагать, что по столбцам матрицы $\mathbf{Q}$ стоят орты неподвижного базиса в подвижных осях $Cx_1x_2x_3$, и матрицу $\mathbf{Q}$ параметризуем углами Эйлера $\theta$, $\varphi$, $\psi$ по формуле (5.5).

Пусть $\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий центр масс $C$ с точкой контакта $P$, через компоненты вектора нормали к плоскости (5.6) он выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{r} = \left(-\frac{Rn_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}, -\frac{Rn_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}, -b\right).$$

Лагранжиан системы (без учета связей) записывается в виде

$$L = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_c^2 + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}), \tag{6.1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела (5.7), а $\boldsymbol{v}_c$ — скорость центра масс, которая складывается из скорости точки контакта $\boldsymbol{v}_p$ и (абсолютной) скорости изменения вектора $(-\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{v}_p + (-\boldsymbol{r})^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}\times(-\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{v}_p = \mathbf{Q}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Используя это соотношение, условие непроскальзывания острого края тела в точке контакта можно переписать в форме

$$(\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{v}_p - \dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{e}_3) = 0, \quad \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1).$$

В локальных координатах это уравнение (неголономной) связи переписывается в форме

$$\dot{x}\sin\psi - \dot{y}\cos\psi = 0. \tag{6.2}$$

Замечание. Условие сохранения контакта нижней точки диска с плоскостью (которое выражается соотношением $(\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = 0$) при используемой параметризации заведомо выполнено.

Вследствие однородности связи (5.6) система допускает интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_c^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + mg(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}). \tag{6.3}$$

Нётеровское векторное поле на $\mathcal{N}$ будем искать в форме

$$\boldsymbol{u} = (u_r(\theta,\varphi,\psi)\cos\psi, u_r(\theta,\varphi,\psi)\sin\psi, u_\theta(\theta,\varphi,\psi), u_\varphi(\theta,\varphi,\psi), u_\psi(\theta,\varphi,\psi)).$$

Продолжая его до $\widetilde{\boldsymbol{u}}$, запишем уравнения $\widetilde{\boldsymbol{u}}(L)\big|_{\mathcal{D}} = 0$ с функцией Лагранжа (6.2). В левой части получим полином по обобщенным скоростям $\left(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}\right)$, каждый коэффициент которого следует приравнять к нулю. Получившаяся система довольно естественно решается, откуда находим

$$u_\theta = 0, \quad u_\varphi = f(\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{df}{d\theta}, \quad u_\psi = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{df}{d\theta},$$
$$u_r = C_1 R - \frac{R\cos\theta - b\sin\theta}{\sin\theta}\frac{df}{d\theta},$$
$$f(\theta) = C_1\frac{mR^2}{2I_1}\left((1+\cos\theta)\ln(1+\cos\theta) + (1-\cos\theta)\ln(1-\cos\theta) - \frac{2b}{R}\theta\right) - C_2\cos\theta + C_3,$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные. Таким образом, данная система допускает три линейно-независимых нётеровских поля $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$.

Замечание. Условие $\widetilde{\boldsymbol{u}}(L) = 0$ необходимо проверять с учетом связи (6.2).

Соответствующие первые интегралы имеют вид (см. также [57])

$$P_1 = I_1\left(\frac{\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi}{R} - \dot{\psi}\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}I_3\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\left((1+\cos\theta)\ln(1+\cos\theta) + (1-\cos\theta)\ln(1-\cos\theta) - \frac{2b}{R}\theta\right),$$
$$P_2 = I_1\dot{\psi}\sin^2\theta + I_3\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\cos\theta, \qquad P_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = \omega_3.$$

Отметим, что среди соответствующих векторных полей $\widetilde{\boldsymbol{u}}_i$, $i = 1, 2, 3$, только поле $\widetilde{\boldsymbol{u}}_3 = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ является полем симметрий (поля $\widetilde{\boldsymbol{u}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}_2$ таковыми не являются).

На поверхности уровня первых интегралов $\mathcal{M}_{\boldsymbol{c}} = \{x | P_1(x) = c_1,\ P_2(x) = c_2,\ P_3(x) = c_3\}$ (с учетом связи) обобщенные скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ могут быть представлены как функции угла нутации $\theta$. Подставляя их в интеграл энергии (6.3), получим единственное уравнение, описывающее эволюцию $\theta$ в стандартном виде:

$$\dot{\theta}^2 = R_{\boldsymbol{c},E}(\theta).$$

*Решение системы сводится к квадратурам, причем, как мы видим, для этого нет необходимости выписывать уравнения движения, поскольку оказывается возможным явно найти достаточное число нётеровских полей.*

## 6.2. Снейкборд

Рассмотрим теперь задачу о снейкборде, которая является одним из стандартных примеров, иллюстрирующих законы сохранения в неголономной механике [8, 9, 44]. Снейкборд представляет собой платформу, снабженную двумя одинаковыми уравновешенными независимыми колесными парами (см. рис. 8). Здесь мы, следуя большинству работ, рассмотрим лишь упрощенную модель системы, для которой условия качения колес без проскальзывания заменяются связями Чаплыгина: скорость точек крепления колесных пар в направлении, перпендикулярном плоскости колес, равна нулю.[6] Будем также предполагать (для упрощения), что центр масс $C$ доски находится в середине отрезка, соединяющего точки

[6] В более общей модели необходимо добавить степени свободы, описывающие углы поворота колес на осях. При этом оказывается, что эволюция переменных, задающих положение и ориентацию самой доски, описывается теми же уравнениями, что и в упрощенной модели при подходящем выборе параметров.

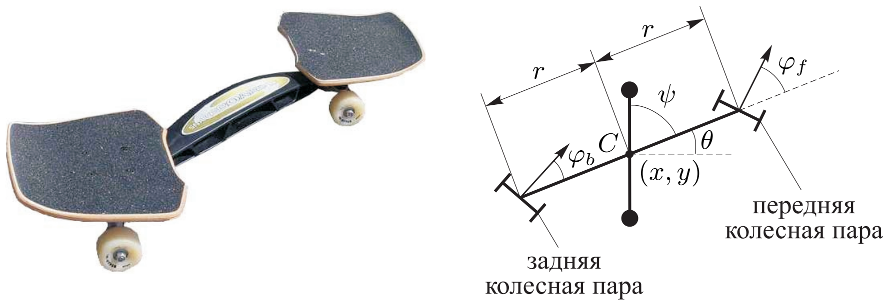


Рис. 8

крепления колесных пар, а человеческое тело моделируется уравновешенным ротором, закрепленным в центре масс (рис. 8).

Конфигурационное пространство такой системы $\mathcal{N} = SE(2) \times S^1 \times S^1 \times S^1 = \{(x, y, \theta, \varphi_f, \varphi_b, \psi)\}$, где $(x, y, \theta) \in SE(2)$ — координаты центра масс и угол поворота доски в неподвижной (инерциальной) системе координат, $\varphi_f$, $\varphi_b$, $\psi$ — углы поворота колесных пар и ротора относительно доски (см. рис. 8).

Замечание. В задачах, связанных с управлением снейкбордом, ротор, закрепленный в центре, не является свободным. В этом случае возможны две постановки:

1) предполагается, что вращение ротора задано (то есть известна функция $\psi(t)$), и требуется определить движение доски,
2) необходимо подобрать управление вращением ротора $\psi(t)$ так, чтобы траектория движения снейкборда удовлетворяла некоторым заданным условиям.

В выбранных координатах уравнения связи для передней и задней осей записываются в виде

$$\dot{x}\sin(\theta + \varphi_f) - \dot{y}\cos(\theta + \varphi_f) - r\dot{\theta}\cos\varphi_f = 0, \quad \dot{x}\sin(\theta + \varphi_b) - \dot{y}\cos(\theta + \varphi_b) + r\dot{\theta}\cos\varphi_b = 0,$$

где $r$ — расстояния от центра масс до точек крепления колесных пар. Разрешая эти уравнения относительно $\dot{x}$, $\dot{y}$, представим их в форме Чаплыгина

$$\dot{x} = \frac{r\dot{\theta}(2\cos\varphi_f\cos\varphi_b\cos\theta - \sin(\varphi_f + \varphi_b)\sin\theta)}{\sin(\varphi_f - \varphi_b)}, \quad \dot{y} = \frac{r\dot{\theta}(\sin(\varphi_f + \varphi_b)\cos\theta + 2\cos\varphi_f\cos\varphi_b\sin\theta)}{\sin(\varphi_f - \varphi_b)}. \tag{6.4}$$

Функция Лагранжа системы в данном случае совпадает с кинетической энергией, которая складывается из кинетической энергии доски, колесных пар и ротора. Для вычисления введем следующие обозначения параметров конструкции: $m_0$, $I_0$ — масса и центральный момент инерции доски без колесных пар, $m_w$, $I_w$ — полная масса и центральный момент инерции одной колесной пары, $m_r$, $I_r$ — масса и центральный момент инерции ротора. Суммируя, получим

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w\Big((\dot{\theta} + \dot{\varphi}_f)^2 + (\dot{\theta} + \dot{\varphi}_b)^2\Big) + \frac{1}{2}I_r(\dot{\theta} + \dot{\psi})^2, \tag{6.5}$$

где $m = m_0 + 2m_w + m_r$ — полная масса всей системы, $I = I_0 + 2m_w r^2$.

Замечание. В этой упрощенной модели мы не учитываем кинетическую энергию вращения колес.

Покажем теперь, что *для анализа данной системы нет необходимости записывать уравнения движения в форме* (3.3), *оказывается достаточно использовать процедуры редукции по Раусу и Чаплыгину, описанные ранее.*

Прежде всего заметим, что векторное поле $\boldsymbol{u}_\psi = \dfrac{\partial}{\partial\psi}$ принадлежит распределению, заданному связями (6.4); продолжая его в $T\mathcal{N}$, для кинетической энергии (6.5) получим

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_\psi(T) = \frac{\partial T}{\partial\psi} = 0.$$

Следовательно, согласно теореме Козлова–Колесникова, заключаем, что система имеет первый интеграл вида

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = I_r(\dot\theta + \dot\psi). \tag{6.6}$$

Кроме того, не только кинетическая энергия (6.5), но и связи (6.4) не зависят явно от $\psi$, поэтому $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\psi = \dfrac{\partial}{\partial_\psi}$ *является полем симметрий данной системы, а* $\psi$ *— циклическая переменная.*

Выполняя редукцию по циклической переменной, находим функцию Рауса в форме

$$R = T - \dot\psi\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\bigg|_{\dot\psi\to p_\psi} = \frac{1}{2}\,m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{1}{2}\,I\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\,I_w\left((\dot\theta + \dot\varphi_f)^2 + (\dot\theta + \dot\varphi_b)^2\right) + p_\psi\dot\theta - \frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{I_r}.$$

Пользуясь (3.3), несложно показать, что последние два слагаемых в этом выражении не входят в уравнения движения, описывающие эволюцию оставшихся переменных. Это приводит к следующему результату.

*Свободное движение снейкборда с ротором, закрепленном в центре масс, эквивалентно свободному движению снейкборда без ротора* (*но с соответствующим образом увеличенной массой*) *и описывается уравнениями* (3.3) *со связями* (6.4) *и функцией Лагранжа вида*

$$L = \frac{1}{2}\,m\left(\dot x^2 + \dot y^2\right) + \frac{1}{2}\,I\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\,I_w\left((\dot\theta + \dot\varphi_f)^2 + (\dot\theta + \dot\varphi_b)^2\right). \tag{6.7}$$

При этом скорость угла поворота ротора $\dot\psi$ на каждом фиксированном уровне $p_\psi = c_\psi = \mathrm{const}$ задается соотношением (6.6).

Теперь заметим, что связи (6.4) не зависят от $\dot\varphi_f$, $\dot\varphi_b$, а лагранжиан (6.7) не зависит от $\varphi_f$, $\varphi_b$; следовательно, векторные поля

$$\boldsymbol{u}_f = \frac{\partial}{\partial\varphi_f}, \quad \boldsymbol{u}_b = \frac{\partial}{\partial\varphi_b}$$

являются нётеровскими полями системы. Отсюда следует, что имеется еще два линейных интеграла:

$$p_f = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_f} = I_w(\dot\theta + \dot\varphi_f), \quad p_b = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_b} = I_w(\dot\theta + \dot\varphi_b). \tag{6.8}$$

Кроме того, вследствие однородности связей по скоростям, энергия системы также сохраняется; после ограничения на связи она представляется в виде

$$E = \frac{1}{2}\frac{G(\varphi_f, \varphi_b)}{\sin^2(\varphi_f - \varphi_b)}\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\,I_w\left((\dot\theta + \dot\varphi_f)^2 + (\dot\theta + \dot\varphi_b)^2\right), \tag{6.9}$$
$$G(\varphi_f, \varphi_b) = I\sin^2(\varphi_f - \varphi_b) + mr^2\sin^2(\varphi_f + \varphi_b) + 4mr^2\cos^2\varphi_f\cos^2\varphi_b.$$

Сопоставляя (6.8) и (6.9), заключаем, что сохраняются также линейные интегралы вида

$$p_\theta^{(\pm)} = \pm\frac{\sqrt{G(\varphi_f,\varphi_b)}}{\sin(\varphi_f-\varphi_b)}\,\dot\theta. \tag{6.10}$$

Мы видим, что совместная двумерная поверхность уровня первых интегралов устроена достаточно сложно, поэтому полное описание ограничения на нее векторного поля системы оказывается достаточно длинным (требует более одной координатной карты). Здесь мы ограничимся лишь одной из проекций; для этого заметим, что на поверхности уровня $p_f = c_f$, $p_b = c_b$ и $p_\theta^{(\pm)} = c_\theta^{(\pm)}$ уравнения для $\varphi_f$ и $\varphi_b$ не зависят от $\theta$.

*Таким образом, окончательно получим:*

– *редуцированную систему на двумерном торе $S^1\times S^1 = \{(\varphi_f,\varphi_b)\}$ вида*

$$\dot\varphi_f = \frac{c_f}{I_w}\mp\frac{\sin(\varphi_f-\varphi_b)}{\sqrt{G(\varphi_f,\varphi_b)}}\,c_\theta^{(\pm)},\quad \dot\varphi_b = \frac{c_b}{I_w}\mp\frac{\sin(\varphi_f-\varphi_b)}{\sqrt{G(\varphi_f,\varphi_b)}}\,c_\theta^{(\pm)},\quad c_f,\ c_b,\ c_\theta^{(\pm)} = \mathrm{const}, \tag{6.11}$$

– *эволюция переменных $\theta$, $\varphi$ находится путем интегрирования соотношений* (6.6), (6.8) *при $p_\psi = c_\psi$, $p_f = c_f$, $p_b = c_b$:*

$$\begin{aligned}&\theta(t) = \theta_0^{(f)} + \frac{c_f}{I_w}\,t - \varphi_f(t) \quad \left(\text{либо } \theta(t) = \theta_0^{(b)} + \frac{c_b}{I_w}\,t - \varphi_b(t)\right),\\ &\psi(t) = \psi_0 + \frac{c_\psi}{I_r}\,t - \theta(t), \quad c_\psi = \mathrm{const},\end{aligned}$$

*где $\psi_0$, $\theta_0^{(f)}$, $\theta_0^{(b)}$ — константы интегрирования,*

– *реконструкция эволюции переменных $x$, $y$ дается квадратурами, которые находятся из уравнений связей* (6.4) *и уравнения* (6.10) *при $p_\theta^{(\pm)} = c_\theta^{(\pm)}$:*

$$\begin{aligned}\dot x &= \pm\frac{rc_\theta^{(\pm)}(2\cos\varphi_f\cos\varphi_b\cos\theta - \sin(\varphi_f+\varphi_b)\sin\theta)}{\sqrt{G(\varphi_f,\varphi_b)}},\\ \dot y &= \pm\frac{rc_\theta^{(\pm)}(\sin(\varphi_f+\varphi_b)\cos\theta + 2\cos\varphi_f\cos\varphi_b\sin\theta)}{\sqrt{G(\varphi_f,\varphi_b)}}.\end{aligned}$$

Замечание. Вследствие того, что одной картой покрыть поверхность уровня первых интегралов невозможно, векторное поле (6.11) имеет особенность при $\varphi_f = \varphi_b = \pi/2$. При данном положении колесных пар связи (6.4) оказываются вырожденными по скоростям.

Замечание. Как было показано выше, для интегралов (6.10) легко построить соответствующие нётеровские векторные поля $\boldsymbol{u}_\theta^{(\pm)}$. Для этого необходимо при помощи метрики, задаваемой кинетической энергией, спроецировать векторные поля, порождающие интегралы (6.10), на распределение $\mathcal{D}$ связей (6.4):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_\theta^{(\pm)} &= \pm\Pi_{\mathcal{D}}^{B}\left(\mathbf{B}^{-1}\frac{\sqrt{G(\varphi_f,\varphi_b)}}{\sin(\varphi_f-\varphi_b)}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \pm\frac{\sin(\varphi_f-\varphi_b)}{\sqrt{G(\varphi_f,\varphi_b)}}\left(r\frac{2\cos\varphi_f\cos\varphi_b\cos\theta - \sin(\varphi_f+\varphi_b)\cos\theta}{\sin(\varphi_f-\varphi_b)}\frac{\partial}{\partial x} + \right.\\ &\left. + r\frac{\sin(\varphi_f+\varphi_b)\cos\theta + 2\cos\varphi_f\cos\varphi_b\sin\theta}{\sin(\varphi_f-\varphi_b)}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\varphi_f} - \frac{\partial}{\partial\varphi_b}\right),\end{aligned}$$

где $\mathbf{B}$ — гессиан функции Лагранжа (6.7). Продолжения $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\theta^{(\pm)}$ этих полей в фазовое пространство также *не являются полями симметрий.*

### 6.3. Скейтборд

Рассмотрим теперь модификацию конструкции снейкборда, в которой колесные пары вращаются зависимо таким образом, что на углы поворота налагается (голономная) связь [8]:

$$\varphi_f = -\varphi_b = \varphi. \tag{6.12}$$

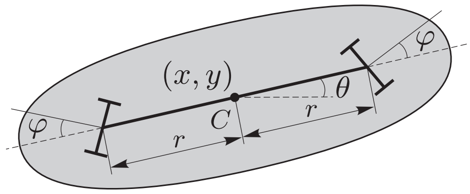


Рис. 9

При этом получим (упрощенную) модель другого спортивного снаряда — скейтборда.

Как и выше (в случае снейкборда), можно показать, что наличие ротора (закрепленного в центре масс) не влияет на свободное движение скейтборда, поэтому здесь мы будем рассматривать эту систему без ротора. Конфигурационное пространство в данном случае $\mathcal{N} = SE(2) \times S^1 = \{(x, y, \theta, \varphi)\}$, где $(x, y, \theta) \in SE(2)$ — положение и ориентация доски относительно неподвижной системы координат, а $\varphi$ — угол поворота одной из колесных пар.

Подставляя (6.12) в (6.4), получим уравнения связей для данной системы:

$$\dot{x} = \frac{r\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta}{\sin\varphi}, \quad \dot{y} = \frac{r\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta}{\sin\varphi}. \tag{6.13}$$

Функция Лагранжа совпадает с кинетической энергией системы:

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\,I\dot{\theta}^2 + I_w\dot{\varphi}^2, \\ m = m_0 + 2m_w, \quad I = I_0 + 2m_w r^2 + 2I_w, \end{gathered} \tag{6.14}$$

где $m_0$, $I_0$ — масса и центральный момент инерции доски, $m_w$, $I_w$ — масса и центральный момент инерции одной колесной пары.

Замечаем, что в данном случае связи (6.13) не зависят от $\dot{\varphi}$, а кинетическая энергия не зависит от $\varphi$; следовательно, система допускает очевидное нётеровское векторное поле:

$$\boldsymbol{u}_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Это приводит к тому, что существует линейный первый интеграл:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 2I_w\dot{\varphi}. \tag{6.15}$$

Энергия системы $E$ также сохраняется, и после ограничения на связи получим

$$E = \frac{1}{2}\frac{G_1(\varphi)}{\sin^2\varphi}\,\dot{\theta}^2 + I_w\dot{\varphi}^2, \quad G_1(\varphi) = I\sin^2\varphi + mr^2\cos^2\varphi.$$

Отсюда заключаем, что система допускает также линейные интегралы

$$p_\theta^{(\pm)} = \pm\frac{\sqrt{G_1(\varphi)}}{\sin\varphi}\,\dot{\theta}. \tag{6.16}$$

Ограничим теперь систему на поверхность уровня интегралов $p_\varphi = c_\varphi$, $p_\theta^{(\pm)} = c_\theta^{(\pm)}$, где $c_\varphi$, $c_\theta^{(\pm)} = \mathrm{const}$.

*В задаче о свободном движении скейтборда:*

– *полностью редуцированная система определена на окружности* $S^1 = \{(\varphi)\}$*:*

$$\dot{\varphi} = \frac{c_\varphi}{2I_w}, \tag{6.17}$$

– *эволюция ориентации доски описывается квадратурой:*

$$\dot{\theta} = \pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{G_1(\varphi)}}\,c_\theta^{(\pm)}, \tag{6.18}$$

– *положение центра масс системы находится при помощи квадратур:*

$$\dot{x} = \pm\frac{rc_\theta^{(\pm)}\cos\varphi\cos\theta}{\sqrt{G_1(\varphi)}}, \qquad \dot{y} = \pm\frac{rc_\theta^{(\pm)}\cos\varphi\sin\theta}{\sqrt{G_1(\varphi)}}. \tag{6.19}$$

Первые два уравнения (6.17), (6.18) в данном случае удобно объединить и рассматривать их как векторное поле на двумерном торе $T^2 = \{(\varphi, \theta)\}$. Поскольку функция $G_1(\varphi)$ строго положительна, это поле (при $c_\varphi \neq 0$) не имеет особенность, а кроме того, так как

$$\left\langle \frac{\sin\varphi}{\sqrt{G_1(\varphi)}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{G_1(\varphi)}} = 0,$$

все траектории на торе замкнутые с одним и тем же периодом

$$T = \frac{4\pi I_w}{c_\varphi}.$$

Замечание. Аналогично, пользуясь теоремой 5, можем найти векторные поля Нётер, отвечающие интегралу (6.16):

$$\boldsymbol{u}_\theta^{(\pm)} = \pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{G_1(\varphi)}}\left(\frac{r\cos\varphi}{\sin\varphi}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Их продолжения $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\theta^{(\pm)}$ на $T\mathcal{N}$ также *не являются полями симметрий.*

## 6.4. Доска с неподвижной осью

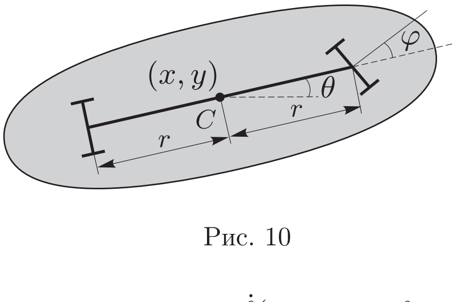


Рис. 10

Рассмотрим еще один частный случай снейкборда, когда одна из осей неподвижно прикреплена к раме перпендикулярно отрезку, соединяющему колесные пары (см. рис. 10 [22, 47]). Для такой системы получаем:

$$\varphi_b = 0, \quad \varphi_f = \varphi.$$

Подставляя эти соотношения в (6.4), получим уравнения связей для данной конструкции:

$$\dot{x} = \frac{r\dot{\theta}(2\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta)}{\sin\varphi}, \quad \dot{y} = \frac{r\dot{\theta}(2\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)}{\sin\varphi}. \tag{6.20}$$

Как и выше, кинетическая энергия системы задает ее функцию Лагранжа:

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}\, m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\, I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\, I_w\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)^2, \\ m = m_0 + 2m_w, \quad I = I_0 + 2m_w r^2 + I_w, \end{gathered} \tag{6.21}$$

где параметры имеют тот же смысл, что и в задаче о скейтборде.

Замечание. Здесь мы также исключим из рассмотрения ротор, закрепленный в центре масс, который не влияет на свободное движение системы.

Действуя по аналогии с предыдущими случаями, находим нётеровское векторное поле этой системы:

$$\boldsymbol{u}_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Ему соответствует линейный интеграл

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = I_w\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right). \tag{6.22}$$

Еще два линейных интеграла находятся из условия сохранения энергии:

$$p_\theta^{(\pm)} = \pm\frac{\sqrt{G_2(\varphi)}}{\sin\varphi}\,\dot{\theta}, \quad G_2(\varphi) = (I + mr^2)\sin^2\varphi + 4mr^2\cos^2\varphi. \tag{6.23}$$

Окончательно получим (см. также [56]) следующие результаты.

*На поверхности уровня первых интегралов* $p_\varphi = c_\varphi$, $p_\theta^{(\pm)} = c_\theta^{(\pm)}$, *где* $c_\varphi$, $c_\theta^{(\pm)} = \mathrm{const}$, *для данной системы выполнено следующее:*

– *редуцированная система определена на окружности* $S^1 = \{(\varphi)\}$*:*

$$\dot{\varphi} = \frac{c_\varphi}{I_w} \pm \frac{\sin\varphi}{\sqrt{G_2(\varphi)}}\, c_\theta^{(\pm)},$$

– *эволюция угла поворота (находится из интегрирования соотношения* (6.22) *при* $p_\varphi = c_\varphi$*) дается уравнением*

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{c_\varphi}{I_w}\, t - \varphi(t),$$

*где* $\theta_0$ *— постоянная интегрирования,*

– *движение центра масс задается квадратурами*

$$\dot{x} = \pm\frac{rc_\theta^{(\pm)}(2\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta)}{\sqrt{G_2(\varphi)}}, \quad \dot{y} = \pm\frac{rc_\theta^{(\pm)}(2\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)}{\sqrt{G_2(\varphi)}}.$$

Замечание. Нётеровские поля, отвечающие интегралам (6.23), можно найти и с помощью теоремы 5:

$$\boldsymbol{u}_\theta^{(\pm)} = \pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{G_2(\varphi)}}\left(\frac{2\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Здесь продолжение $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\theta^{(\pm)}$ также *не является полем симметрий.*

# Приложение A. Продолжение векторных полей и общие уравнения динамики

## 1. Продолжение действия группы и векторных полей

Предположим, что на конфигурационном пространстве $\mathcal{N}$ действует однопараметрическая группа преобразований

$$T_\xi \colon \mathcal{N} \to \mathcal{N},$$

где $\xi$ — параметр, причем $T_{\xi_1} \circ T_{\xi_2} = T_{\xi_1+\xi_2}$. Это действие порождает векторное поле $\boldsymbol{u}$ на $\mathcal{N}$

$$\boldsymbol{u}\big(f(\boldsymbol{q})\big) = \sum_i u_i(\boldsymbol{q}) \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{d}{d\xi} f\big(T_\xi(\boldsymbol{q})\big)\Big|_{\xi=0}, \quad u_i(\boldsymbol{q}) = \frac{d}{d\xi}\Big(T_\xi(\boldsymbol{q})\Big)_i\Big|_{\xi=0}.$$

Функция на $\mathcal{N}$ инвариантна относительно преобразований $T_\xi$ тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{u}\big(f(\boldsymbol{q})\big) \equiv 0.$$

Это действие группы естественным образом продолжается на касательное расслоение $T\mathcal{N}$. Обозначая (здесь и далее) продолжение действия через $\widetilde{T}_\xi$, а продолжение векторного поля — через $\widetilde{\boldsymbol{u}}$, получим:

$$\begin{gathered}
\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \Big(T_\xi(\boldsymbol{q}), \dot{T}_\xi(\boldsymbol{q})\Big), \quad \Big(\dot{T}_\xi(\boldsymbol{q})\Big)_i = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(T_\xi(\boldsymbol{q})\right)_i, \\
\widetilde{\boldsymbol{u}}\big(F(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big) = \frac{d}{d\xi} F\left(\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right)\Big|_{\xi=0} = \sum_i u_i \frac{\partial F}{\partial q_i} + \dot{u}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}, \\
\dot{u}_i(\boldsymbol{q}) = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial q_j}\dot{q}_j.
\end{gathered} \tag{6.24}$$

Функция координат $\boldsymbol{q}$ и скоростей $\dot{\boldsymbol{q}}$ оказывается инвариантна относительно $T_\xi$, если

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}\big(F(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\big) = 0.$$

Действие многопараметрической группы Ли $G$ на конфигурационном пространстве задается преобразованиями $T_g(\boldsymbol{q})$, $g \in G$, такими, что $T_{g_1}(T_{g_2}(\boldsymbol{q})) = T_{g_1 \circ g_2}(\boldsymbol{q})$, где $\circ$ — умножение в группе[7]. Параметризуем группу локальными координатами $G = \{g(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m)\}$, невырожденными в окрестности единицы группы $e$, и положим $g(\boldsymbol{\xi})\big|_{\boldsymbol{\xi}=0} = e$, тогда соответствующие векторные поля на $\mathcal{N}$, порождаемые этим действием, задаются уравнениями

$$\boldsymbol{u}_\alpha(f(\boldsymbol{q})) = \frac{d}{d\xi_\alpha}\Big(f(T_{g(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{q}))\Big)\Big|_{\boldsymbol{\xi}=0} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\xi_\alpha}\left(T_{g(\boldsymbol{\xi})}(\boldsymbol{q})\right)_i\Big|_{\boldsymbol{\xi}=0} \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Эти поля определяют алгебру (относительно скобки Ли), изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$ данной группы. Их продолжение на $T\mathcal{N}$ также определяется в соответствии с (6.24).

[7]Строго говоря, таким образом задается левое действие группы, в то время как для правого действия порядок умножения меняется: $T_{g_1}(T_{g_2}(\boldsymbol{q})) = T_{g_2 \circ g_1}(\boldsymbol{q})$.

Замечание. Всякому элементу $\boldsymbol{\zeta}$ алгебры $\mathfrak{g} \approx TG_e$ ставится в соответствие векторное поле на $\mathcal{N}$, задаваемое соотношением

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{q}) = \frac{d}{d\xi}\big(T_{\exp(\xi\boldsymbol{\zeta})}(\boldsymbol{q})\big)\Big|_{\xi=0}.$$

Если $\boldsymbol{\zeta} = \sum\limits_{\alpha} \zeta_\alpha \dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$, то $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\zeta}} = \sum\limits_{\alpha} \zeta_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha$, $\zeta_\alpha = \mathrm{const}$.

## 2. Продолжение полей в неголономном базисе и общие уравнения динамики

Если в касательном расслоении $T\mathcal{N}$ в качестве координат вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ использовать квазискорости $\omega_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$, определяющие компоненты скорости

$$\dot{q}_i = \sum_{\alpha} E_{\alpha i}(\boldsymbol{q})\omega_\alpha$$

в неголономном[8] базисе векторных полей $\boldsymbol{E}_\alpha = \sum\limits_i E_{\alpha i}(\boldsymbol{q}) \dfrac{\partial}{\partial q_i}$, то продолжение векторного поля представляется в форме

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})) = \sum_i u_i(\boldsymbol{q}) \frac{\partial F}{\partial q_i} + \sum_{\alpha,\beta} c_\beta^\alpha(\boldsymbol{q})\omega_\beta \frac{\partial F}{\partial \omega_\alpha}, \qquad [\boldsymbol{E}_\beta, \boldsymbol{u}] = \sum_\alpha c_\beta^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}_\alpha, \tag{6.25}$$

где коэффициенты в разложении коммутатора $c_\beta^\alpha(\boldsymbol{q})$ в явном виде могут быть записаны следующим образом:

$$c_\beta^\alpha(\boldsymbol{q}) = \sum_{i,j} E_{i\alpha}^{-1} \left( E_{\beta j} \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - u_j \frac{\partial E_{\beta i}}{\partial q_j} \right).$$

Отсюда также следует, что квазискорости $\omega_\alpha(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ являются интегралами поля $\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{q})$ тогда и только тогда, когда

$$[\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{u}] = 0$$

для всех $\alpha$.

Продолжение базисных векторных полей представляется, соответственно, в форме

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}_\alpha(F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})) = \sum_i E_{\alpha i} \frac{\partial F}{\partial q_i} + \sum_{\beta,\gamma} c_{\beta\alpha}^\gamma \omega_\beta \frac{\partial F}{\partial \omega_\gamma},$$
$$[\boldsymbol{E}_\beta, \boldsymbol{E}_\alpha] = \sum_\gamma c_{\beta\alpha}^\gamma(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}_\gamma.$$

Пользуясь этими соотношениями, общие уравнения динамики системы со связями (3.5) можно представить следующим образом:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \omega_\alpha} \right)^{\displaystyle\cdot} - \widetilde{\boldsymbol{E}}_\alpha(L) = Q_\alpha + \sum_\mu \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \omega_\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{6.26}$$

где $L(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$, $f_\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$ — функция Лагранжа и связи, выраженные через квазискорости, $\widetilde{\boldsymbol{E}}_\alpha$ — продолжения векторных полей $\boldsymbol{E}_\alpha$ в $T\mathcal{N}$.

[8] Напомним, что неголономным называется базис, образованный некоммутирующими между собой векторными полями (эта неголономность не имеет ничего общего с неинтегрируемостью связей).

# Приложение B. Доказательство теоремы о полях симметрий

Здесь мы приводим формальное доказательство теоремы 3 из раздела 4.1 о полях симметрий неголономных систем.

Если уравнения движения разрешены относительно производных

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \tag{6.27}$$

то из условия инвариантности относительно семейства преобразований $\widetilde{T}_\xi$ находим

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{x})\right)^{\cdot} - \boldsymbol{v}\left(\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{x})\right)\right]\Big|_{\xi=0} = [\boldsymbol{v}, \widetilde{\boldsymbol{u}}] = 0,$$

то есть $\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{d}{d\xi}\left(T_\xi(\boldsymbol{x})\right)|_{\xi=0}$ — поле симметрий.

Пусть теперь уравнения движения задаются неявно в форме системы

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad \boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n). \tag{6.28}$$

Будем также предполагать, что $\det\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) \neq 0$, так что, согласно теореме о неявной функции, (в принципе) эту систему можно разрешить относительно $\dot{\boldsymbol{x}}$, получая (6.27).

Если $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ инвариантна относительно действия группы

$$\frac{d}{d\xi} F\left(\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{x}), \left(\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{x})\right)^{\cdot}\right)\Big|_{F(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=0, \xi=0} = 0, \tag{6.29}$$

то в результате разрешения уравнения (6.28) относительно $\dot{\boldsymbol{x}}$ получим систему в форме (6.27), также инвариантную относительно $\widetilde{T}_\xi$, а значит, и $\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ также будет полем симметрий.

Обозначим $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ и воспользуемся уравнениями неголономной механики в форме (3.2), которые в данном случае имеют вид

$$\sum_i \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0, \quad \sum_i a_{\mu i}(q)\delta q_i = 0.$$

Напомним, что продолжение действия групп в $T\mathcal{N}$ имеет вид

$$\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}') = \left(T_\xi(\boldsymbol{q}), \frac{\partial T_\xi(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\,\dot{\boldsymbol{q}}\right),$$

и с точностью до первого порядка по $\xi$ имеем

$$\widetilde{T}_\xi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \xi\widetilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) + O(\xi^2) = \left(\boldsymbol{q} + \xi\boldsymbol{u} + O(\xi^2), \dot{\boldsymbol{q}} + \xi\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial q}\,\dot{\boldsymbol{q}} + O(\xi^2)\right) + O(\xi^2).$$

Применяя это преобразование и пользуясь его групповым свойством $\left(\widetilde{T}_\xi\right)^{-1} = \widetilde{T}_{-\xi}$, находим

$$L'_\xi(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}') = L\left(\widetilde{T}_{-\xi}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right),$$

$$(\delta q')_i = \delta(q_i + \xi u_i) + O(\xi^2) = \sum_k \left(\delta_{ik} + \xi\frac{\partial u_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k + O(\xi^2),$$

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial L'_\xi}{\partial \dot q'_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L'_\xi}{\partial q'_i} = \sum_k \left(\delta_{ik} - \xi \frac{\partial u_k}{\partial q_i}\right)\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right] + O(\xi^2),\\
a'_{\mu i}\left(\boldsymbol{q}'\right) = a_{\mu i}(\boldsymbol{q}) + \xi \sum_k u_k \frac{\partial a_{\mu i}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k} + O(\xi^2).
\end{gathered}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{gathered}
\sum_i \left[\left(\frac{\partial L'_\xi}{\partial \dot q'_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L'_\xi}{\partial q'_i}\right](\delta q')_i = \sum_i \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i + O(\xi^2),\\
\sum_i a'_{\mu i}\left(\boldsymbol{q}'\right)\delta q'_i = \sum_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\delta q_i + \sum_{i,j} \xi \left(u_j \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial q_i}\, q_j\right)\delta q_j + O(\xi^2).
\end{gathered}
$$

Напомним, что из условий теоремы

$$
\widetilde{u}(f_\mu)\Big|_{\boldsymbol{f}=0} = \sum_{i,j}\left(u_j \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial q_j} + \frac{\partial u_j}{\partial q_i}\, a_{\mu j}\right)\dot q_i\Big|_{\boldsymbol{f}=0} = 0,
$$

откуда вследствие линейной независимости уравнений находим

$$
\sum_j \left(u_j \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial q_j} + \frac{\partial u_j}{\partial q_i}\, a_{\mu j}\right) = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) a_{\mu i}, \quad \det\|\Lambda_{\mu\nu}\| \neq 0.
$$

Таким образом, форма уравнений, определяющих возможные перемещения $\delta q'_i$ с точностью до линейных по $\xi$ членов, не меняется.

Окончательно получим систему, определяющую уравнения движения для переменных $(\boldsymbol{q}', \dot{\boldsymbol{q}}')$, в форме

$$
\sum_i \left[\left(\frac{\partial L'_\xi}{\partial \dot q'_i}\right) - \frac{\partial L'_\xi}{\partial q'_i}\right](\delta q')_i + O\left(\xi^2\right) = 0, \quad \sum a'_{\mu i}\left(\boldsymbol{q}'\right)\delta q'_i + O(\xi^2) = 0.
$$

Так как функция Лагранжа инвариантна относительно преобразований $\widetilde{T}_\xi$, то в первом уравнении лагранжева производная в квадратных скобках не имеет линейных по $\xi$ слагаемых. Следовательно, система, определяющая уравнения движения системы со связями, удовлетворяет условию (6.29).

# Приложение C. Псевдогамильтонова форма уравнений движения

## 1. Псевдогамильтоново представление полной системы

В работе [49] предложено представление уравнений движения неголономных систем в псевдогамильтоновой форме во всем фазовом пространстве:

$$
\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{x})\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \mathbf{J}^T(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{J}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{M}, \tag{6.30}
$$

где кососимметрическая матрица $\mathbf{J}(\boldsymbol{x})$ не удовлетворяет тождеству Якоби (если связи неинтегрируемы). Наиболее естественным образом это представление можно получить при помощи уравнений (3.12) (см. раздел 3.2). Для этого положим, что силы, действующие на систему, потенциальны, то есть $\boldsymbol{Q} = 0$, и сделаем преобразование Лежандра $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M})$ по формуле

$$M_s = \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \omega_s}, \quad s = 1, \ldots, n-k.$$

Выражая отсюда квазискорости $\omega_s(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M})$ как функции координат и моментов, построим аналог функции Гамильтона

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M}) = \left(\sum_s M_s\omega_s - \widetilde{L}^*\right)\Big|_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega}\mapsto\boldsymbol{q},\boldsymbol{M}}.$$

**Предложение 7.** *В переменных $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M})$ уравнения движения неголономной системы записываются в псевдогамильтоновой форме:*

$$\begin{aligned}\dot{M}_s &= -\sum_i \tau_{si}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{t,r} c_{sr}^t M_t \frac{\partial H}{\partial M_r} - \sum_{\mu,r} c_{sr}^\mu p_\mu \frac{\partial H}{\partial M_r},\\ \dot{q}_i &= \sum_s \tau_{si}\frac{\partial H}{\partial M_s},\end{aligned} \tag{6.31}$$

*где* $p_\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M}) = \left(\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial w_\mu}\right)^*\Big|_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega}\mapsto\boldsymbol{q},\boldsymbol{M}}$.

Определим $(n-k)\times(n-k)$-матрицу и $(n-k)\times n$-матрицу следующего вида:

$$\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M}) = \left\|\sum_t c_{sr}^t(\boldsymbol{q})M_t + \sum_\mu c_{sr}^\mu(\boldsymbol{q})p_\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M})\right\|,$$
$$\mathbf{T}(\boldsymbol{q}) = \|\tau_{si}(\boldsymbol{q})\|,$$

причем $\mathbf{\Pi}^T = -\mathbf{\Pi}$, вследствие кососимметричности скобки Ли.

Если обозначить $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{M})$, то кососимметрическая матрица $\mathbf{J}(\boldsymbol{x})$ в (6.30) записывается в блочной форме следующим образом:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{T}^T \\ -\mathbf{T} & -\mathbf{\Pi}\end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

Замечание. Как следует из соотношения (3.7), ядро этой матрицы порождается векторными полями вида $(\boldsymbol{a}_\mu, 0)$, $\mu = 1, \ldots, k$. При этом, как известно [74], тождество Якоби для матрицы (6.32) эквивалентно условию интегрируемости распределения, заданного этими полями.

В голономном случае все коэффициенты $c_{sr}^\mu = 0$, поэтому последнее слагаемое в первом из уравнений (6.31) исчезает и получаются уравнения Пуанкаре–Четаева [59]. В этом случае матрица (6.32) заведомо удовлетворяет тождеству Якоби.

В качестве примера приведем к псевдогамильтоновой форме уравнения движения (3.18) (см. раздел 3.3), описывающие движение саней Чаплыгина в потенциальном поле. Пользуясь (3.17) и (3.18), сделаем преобразование Лежандра

$$P = \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial V_1} = mV_1, \quad M = \frac{\partial L^*}{\partial \omega} = I\omega,$$
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{m} + \frac{M^2}{I}\right) + U(x, y, \varphi).$$

Получим псевдогамильтоново представление данной системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & \dfrac{ma}{I}M \\ 0 & 0 & -1 & -\dfrac{ma}{I}M & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{6.33}$$

где $\boldsymbol{x} = (x, y, \varphi, P, M)$.

## 2. Псевдогамильтоново представление системы, редуцированной по Чаплыгину

Рассмотрим частный случай систем, описанных в разделе 4.4, когда, во-первых, силы, действующие на систему, потенциальны и, во-вторых, число связей совпадает с размерностью группы симметрий.

Тогда уравнения движения редуцированной системы (4.21) представляются в форме

$$\left(\frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \dot{z}_i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^{m} S_{ij}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}})\dot{z}_j, \quad i = 1\ldots m,$$

причем $S_{ij} = -S_{ji}$, $i, j = 1 \ldots m$.

Выполним преобразование Лежандра

$$p_i = \frac{\partial \widetilde{L}^*}{\partial \dot{z}_i}, \quad i = 1 \ldots m,$$

$$H(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}) = \Big(\sum_{i=1}^{m} p_i \dot{z}_i - \widetilde{L}^*\Big)\Big|_{\boldsymbol{z},\dot{\boldsymbol{z}} \to \boldsymbol{z},\boldsymbol{p}},$$

где $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, и сделаем также замену $\widetilde{S}_{ij}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{p}) = S_{ij}(\boldsymbol{z}, \dot{\boldsymbol{z}})\Big|_{\boldsymbol{z},\dot{\boldsymbol{z}} \to \boldsymbol{z},\boldsymbol{p}}$.

**Предложение 8.** *Уравнения движения обобщенной системы Чаплыгина после редукции по симметрии в переменных* $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{p})$ *представляются в псевдогамильтоновой форме:*

$$\dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{m} \widetilde{S}_{ij}\frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

В этом случае кососимметрическая $(2m\times 2m)$-матрица «псевдопуассоновой» структуры в блочной форме имеет вид

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{E}_m\\ -\mathbf{E}_m & \widetilde{\mathbf{S}}\end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E}_m$ — единичная $(m\times m)$-матрица, $\widetilde{S}=||\widetilde{S}_{ij}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{p})||$.

Мы проиллюстрируем это представление при помощи саней Чаплыгина в потенциальном поле, не зависящем от координаты $x$ (см. раздел 4.5). Для этого выполним преобразование Лежандра в системе (4.26), (4.27):

$$p_y=\frac{\partial L^*}{\partial \dot y}=\frac{m\dot y^2}{\sin^2\varphi},\quad p_\varphi=\frac{\partial L^*}{\partial\dot\varphi}=I\dot\varphi,$$

$$H=\dot y p_y+\dot\varphi p_\varphi-L^*=\frac{1}{2}\left(\sin^2\varphi\frac{p_y^2}{m}+\frac{p_\varphi^2}{I}\right)+mg\sin\alpha_0(y+a\sin\varphi).$$

Получаем псевдогамильтоново представление уравнений движения в виде

$$\dot y=\frac{\partial H}{\partial p_y},\quad \dot\varphi=\frac{\partial H}{\partial p_\varphi},$$

$$\dot p_y=-\frac{\partial H}{\partial y}+\widetilde{S}\frac{\partial H}{\partial p_\varphi},\quad \dot p_\varphi=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}-\widetilde{S}\frac{\partial H}{\partial p_y},$$

$$\widetilde{S}=-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}p_y+\frac{ma}{I}\frac{p_\varphi}{\sin\varphi}.$$

Оно отличается от псевдогамильтонова представления (6.33) тем, что отсутствует уравнение, описывающее эволюцию $\dot x$.

## Приложение D. Редукция в системе с однородным силовым полем

Рассмотрим систему ньютоновского типа

$$\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}),\quad \boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n, \tag{6.34}$$

для которой будем полагать, что сила $\boldsymbol{f}$ является однородной степени однородности $\alpha$:

$$\boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{q})=\lambda^\alpha\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}). \tag{6.35}$$

Подобные уравнения описывают, например, движение материальных точек в различных силовых полях (например, для гравитационного поля степень однородности $\alpha=-2$).

Перепишем эту систему в форме уравнений первого порядка стандартным образом:

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{p},\quad \dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}),\quad \boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^n. \tag{6.36}$$

Эти уравнения сохраняют инвариантную меру с постоянной плотностью

$$\mu=dq_1\ldots dq_n\ldots dp_1\ldots dp_n$$

и являются обратимыми, то есть инварианты относительно преобразования

$$\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q},\quad \boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p},\quad t\to -t.$$

Кроме того, вследствие однородности (6.35) система инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований координат и времени:

$$\boldsymbol{q} \to \lambda \boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{p} \to \lambda^{\frac{1+\alpha}{2}} \boldsymbol{p}, \quad t \to \lambda^{\frac{1-\alpha}{2}} t. \tag{6.37}$$

Если сила не является потенциальной $\left(\text{то есть } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \neq \dfrac{\partial U(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\right)$, то система (6.36) не обладает интегралом энергии и не является (априори) гамильтоновой.

Для того чтобы выполнить редукцию в данном случае, сделаем естественную проекцию конфигурационного пространства $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{q}\}$ на единичную сферу $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x}|\ \boldsymbol{x}^2 = 1\}$:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{q}}{R}, \quad R = \sqrt{q_1^2 + \ldots + q_n^2}.$$

Замечание. Для потенциальных сил (то есть в гамильтоновом случае) редукция однородных систем подробно обсуждается в работе [13].

Теперь от скоростей $\boldsymbol{p}$ перейдем к переменным

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{R^{\frac{1+\alpha}{2}}}\Big(\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\Big), \quad Z = \frac{1}{R^{\frac{1+\alpha}{2}}}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}).$$

При этом по построению $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$, то есть переменные $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ задают избыточные координаты в $TS^{n-1}$.

В новых переменных $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, Z, R)$ уравнения движения (6.36) переписываются в виде

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{x}} = R^{\frac{\alpha-1}{2}} \boldsymbol{y}, \quad \dot{\boldsymbol{y}} = R^{\frac{\alpha-1}{2}}\Big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{x} - \frac{\alpha+3}{2} Z \boldsymbol{y}\Big), \\ \dot{Z} = R^{\frac{\alpha-1}{2}}\Big((\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) - \frac{\alpha+1}{2} Z \boldsymbol{y}\Big), \quad \dot{R} = R^{\frac{\alpha-1}{2}} R Z.\end{gathered} \tag{6.38}$$

Здесь необходимо ограничиться рассмотрением динамики на инвариантном многообразии, задаваемом соотношениями

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0.$$

Мы видим, что в (6.38) после замены времени $R^{\frac{\alpha-1}{2}} dt = d\tau$ уравнения для переменных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $Z$ отделяются и образуют редуцированную систему. Соответствующее (конформное) поле симметрий имеет вид

$$\boldsymbol{u}_1 = R\frac{\partial}{\partial R}.$$

Как следует из (6.38), имеется также исключительный случай

$$\alpha = -3,$$

при этом отделяется система уравнений для $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \boldsymbol{y}, \quad \frac{d\boldsymbol{y}}{d\tau} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \Big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\Big)\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{x}.$$

Отметим, что в этом случае не зависящее от времени второе поле симметрий явно указать не удается, однако оказывается, что существует конформно-симметрийное распределение $\mathcal{S}$, образованное полями $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, где

$$\boldsymbol{u}_2 = R^2\frac{\partial}{\partial Z}.$$

Коммутационные соотношения $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ и $\rho\boldsymbol{v}$, где $\rho = R^{\frac{1-\alpha}{2}}$ (при $\alpha = -3$), следующие:

$$[\rho\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1] = 0, \quad [\rho\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2] = -u_1,$$
$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = 2\boldsymbol{u}_2,$$

мы видим, что они удовлетворяют условиям (1.4).

В исходных переменных $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ векторные поля $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ имеют вид

$$\boldsymbol{u}_1 = \sum_i q_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1+\alpha}{2}p_i\frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \sum_i q_i\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

В такой форме поля $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ были указаны в работе [1].

Замечание. Аналогичную процедуру редукции можно выполнить, если вместо функции $R(\boldsymbol{q})$ использовать произвольную положительно-определенную однородную функцию степени однородности 1 (см. подробнее [1]).

## Список литературы


[1] Albouy A. On the force fields which are homogeneous of degree −3, arXiv:1412.4150 (2014). 6 pp.

[2] Albouy A. There is a projective dynamics // Eur. Math. Soc. Newsl., 2013, vol. 89, pp. 37–43.

[3] Albouy A., Chenciner A. Le problème des $n$ corps et les distances mutuelles // Invent. Math., 1998, vol. 131, no. 1, pp. 151–184.

[4] Aref H., Stremler M. A. On the motion of three point vortices in a periodic strip // J. Fluid Mech., 1996, vol. 314, pp. 1–25.

[5] Balseiro P., Fernandez O. E. Reduction of nonholonomic systems in two stages, arXiv:1409.0456 (2014). 36 pp.

[6] Birkhoff G. D. Dynamical systems with two degrees of freedom // Trans. Amer. Math. Soc., 1917, vol. 18, no. 2, pp. 199–300.

[7] Bizyaev I. A., Tsiganov A. V. On the Routh sphere problem // J. Phys. A, 2013, vol. 46, no. 8, 085202, 11 pp.

[8] Bloch A. Nonholonomic mechanics and control. (Interdiscip. Appl. Math., vol. 24.) New York: Springer, 2003. 503 pp.

[9] Bloch A. M., Krishnaprasad P. S., Marsden J. E., Murray R. M. Nonholonomic mechanical systems with symmetry // Arch. Rational Mech. Anal., 1996, vol. 136, no. 1, pp. 21–99.

[10] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Geometrisation of Chaplygin's reducing multiplier theorem // Nonlinearity, 2015, vol. 28, no. 7, pp. 2307–2318.

[11] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 116, no. 5, pp. 443–464.

[12] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics: 4 // Regul. Chaotic Dyn., 1999, vol. 4, no. 1, pp. 23–50.

[13] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Multiparticle systems: The algebra of integrals and integrable cases // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 1, pp. 18–41. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Многочастичные системы: Алгебра интегралов и интегрируемые случаи // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 1, с. 53–82.

[14] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 4, с. 721–754.

[15] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280.

[16] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a rigid body on a plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение твердого тела по плоскости и сфере: Иерархия динамики // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. С. 173–205.

[17] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 8, no. 3, pp. 277–328. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.

[18] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Jacobi integral in nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 383–400. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Интеграл Якоби в неголономной механике // Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 2, с. 377–396.

[19] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.

[20] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Two-body problem on a sphere: Reduction, stochasticity, periodic orbits // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265–279.

[21] Borisov A. V., Pavlov A. E. Dynamics and statics of vortices on a plane and a sphere: 1 // Regul. Chaotic Dyn., 1998, vol. 3, no. 1, pp. 28–38.

[22] Bottema O. Die Bewegung eines einfachen Wagenmodells // Z. Angew. Math. Mech., 1964, vol. 44, no. 12, pp. 585–593.

[23] Broer H., Simó C. Hill's equation with quasi-periodic forcing: Resonance tongues, instability pockets and global phenomena // Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.), 1998, vol. 29, no. 2, pp. 253–293.

[24] Cartan É. Lessons on integral invariants. Paris: Hermann, 1922. 229 pp.

[25] de León M. A historical review on nonholomic mechanics // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM, 2012, vol. 106, no. 1, pp. 191–224.

[26] Dullin H. R. The Lie – Poisson structure of the reduced $n$-body problem // Nonlinearity, 2013, vol. 26, no. 6, pp. 1565–1579.

[27] Engel F., Faber K. Die Liesche Theorie der Partiellen Differentialgleichungen Erster Ordnung. Leipzig: B. G. Teubner, 1932. 367 pp.

[28] Fassò F., Sansonetto N. An elemental overview of the nonholonomic Noether theorem // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 2009, vol. 6, no. 8, pp. 1343–1355.

[29] García-Naranjo L. C. Reduction of almost Poisson brackets for nonholonomic systems on Lie Groups // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 4, pp. 365–388.

[30] Hamel G. Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik // Z. Math. u. Phys., 1904, vol. 50, pp. 1–57.

[31] Hamel G. Über nichtholonome Systeme // Math. Ann., 1924, vol. 92, nos. 1–2, pp. 33–41.

[32] Hermans J. A symmetric sphere rolling on a surface // Nonlinearity, 1995, vol. 8, no. 4, pp. 493–515.

[33] Hojman S. A. The construction of a Poisson structure out of a symmetry and a conservation law of a dynamical system // J. Phys. A, 1996, vol. 29, no. 3, pp. 667–674.

[34] Jellett J. H. A treatise on the theory on friction. London: MacMillan, 1872. 220 pp. *См. также*: Джеллет Д. Х. Трактат по теории трения. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 264 с.

[35] Kim B. Routh symmetry in the Chaplygin's rolling ball // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 6, pp. 663–670.

[36] Koiller J. Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry // Arch. Rational Mech. Anal., 1992, vol. 118, no. 2, pp. 113–148.

[37] Koon W. S., Marsden J. E. Poisson reduction for nonholonomic mechanical systems with symmetry // Rep. Math. Phys., 1998, vol. 42, nos. 1–2, pp. 101–134.

[38] Lagrange J. L. Mécanique analytique: Vol. 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 392 pp.

[39] Laura E. Sul moto parallelo ad un piano di un fluido in cui vi sono $N$ vortici elementari // Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, 1902, vol. 37, pp. 469–476.

[40] Lie S. Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen // Math. Ann., 1874, vol. 8, no. 2, pp. 215–303.

[41] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen: In 3 Vols. 2nd ed. Providence, R.I.: AMS, 1970. 2043 pp.

[42] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen: Mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig: Teubner, 1912. 575 pp.

[43] Olver P. J. Applications of Lie groups to differential equations. 2nd ed. (Grad. Texts in Math., vol. 107.) New York: Springer, 2000. 513 pp.

[44] Ostrowski J. P. The mechanics and control of undulatory robotic locomotion: PhD Thesis. Pasadena: California Institute of Technology, 1996. 149 pp.

[45] Shchepetilov A. V. Reduction of the two-body problem with central interaction on simply connected spaces of constant sectional curvature // J. Phys. A, 1998, vol. 31, no. 29, pp. 6279–6291.

[46] Smale S. Topology and mechanics: 1 // Invent. Math., 1970, vol. 10, no. 4, pp. 305–331.

[47] Stückler B. Über die Berechnung der an rollenden Fahrzeugen wirkenden Haftreibungen // Arch. Appl. Mech., 1955, vol. 23, no. 4, pp. 279–287.

[48] Stability of motion: A collection of early scientific publications by E. J. Routh, W. K. Clifford, C. Sturm, and M. Bôcher / A. T. Fuller (Ed.). London: Taylor & Francis, 1975. 228 pp.

[49] van der Schaft A. J., Maschke B. M. On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems // Rep. Math. Phys., 1994, vol. 34, no. 2, pp. 225–233.

[50] van Kampen E. R., Wintner A. On a symmetrical canonical reduction of the problem of three bodies // Amer. J. Math., 1937, vol. 59, no. 1, pp. 153–166.

[51] Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche // Atti della R. Acc. delle scienze di Torino, 1897/98, vol. 33, pp. 451–475.

[52] Whittaker E. T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. 456 pp.

[53] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 4-е изд. Москва: МЦНМО, 2012. 384 с.

[54] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.

[55] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2, с. 71–132.

[56] Борисов А. В., Луценко С. Г., Мамаев И. С. Динамика колесного экипажа на плоскости // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2010, № 4, с. 39–48.

[57] Борисов А. В., Мамаев И. С. Интегрируемая система с неинтегрируемой связью // Матем. заметки, 2006, т. 80, № 1, с. 131–134.

[58] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.

[59] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. 2-е изд. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[60] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.

[61] Борисов А. В., Мамаев И. С. Нелинейные скобки Пуассона и изоморфизмы в динамике // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т. 2, № 3–4, с. 72–89.

[62] Борисов А. В., Мамаев И. С. Редукция задачи двух тел на плоскости Лобачевского // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 3, с. 279–285.

[63] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.

[64] Борисов А. В., Мамаев И. С. Уравнения движения неголономных систем // УМН, 2015, т. 70, № 6(426), с. 203–204.

[65] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика саней Чаплыгина // ПММ, 2009, т. 73, № 2, с. 219–225.

[66] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Интегрируемые неголономные системы на группах Ли // Матем. заметки, 1988, т. 44, № 5, с. 604–619.

[67] Воронец П. В. Преобразования уравнений динамики с помощью линейных интегралов (с приложением к задаче о $n$ телах). Киев: Изв. ун-та Св. Владимира, 1907, т. 47, № 1–2, 192 с.

[68] Козлов В. В. Общая теория вихрей. 2-е изд., испр. и дополн. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 324 с.

[69] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.

[70] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 429 с.

[71] Козлов В. В. О поведении циклических переменных в интегрируемых системах // ПММ, 2013, т. 77, № 2, с. 179–190.

[72] Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики // ПММ, 1978, т. 42, № 1, с. 28–33.

[73] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. 520 с.

[74] Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля. Москва: МЦНМО, 2005. 584 с.

[75] Пуанкаре А. Избранные труды: В 3-х тт.: Т. 2: Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. Москва: Наука, 1972. 360 с.

[76] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314.

## Symmetries and reduction in nonholonomic mechanics

Alexey V. Borisov[1], Ivan S. Mamaev[2]

[1,2]Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia
[1]borisov@rcd.ru, [2]mamaev@rcd.ru

This paper is a review of the problem of the constructive reduction of nonholonomic systems with symmetries. The connection of reduction with the presence of the simplest tensor invariants (first integrals and symmetry fields) is shown. All theoretical constructions are illustrated by examples encountered in applications. In addition, the paper contains a short historical and critical sketch covering the contribution of various researchers to this problem.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 37C10
Keywords: reduction, symmetry, tensor invariant, first integral, symmetry group, symmetry field, nonholonomic constraint, Noether theorem

Received August 01, 2015, accepted September 10, 2015
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 763–823 (Russian)