



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36, 531.53

MSC 2010: 70E55, 70H12, 70H14

Модифицированная модель связанных маятников

М. А. Гузев, А. А. Дмитриев

Рассматривается модифицированная система двух маятников, стержни которых пересекаются и скользят без трения друг относительно друга. Маятники связаны линейной упругой пружиной и расположены в фиксированной вертикальной плоскости однородного поля тяжести. Показано, что в модифицированной модели маятников существуют симметричные и несимметричные относительно вертикальной оси равновесные решения. Выявлено, что устойчивость рассматриваемой модели зависит от двух параметров, один из которых характеризует жесткость пружины, а второй определяет расстояние между точками подвеса. Для симметричного равновесного решения получены условия для этих параметров, выделяющие области устойчивости и неустойчивости в верхнем и нижнем положениях маятников. Проведен анализ несимметричного равновесного решения и сформулированы условия устойчивости для длинных маятников. Сравнение с моделью симпатичных маятников, предложенной Зоммерфельдом, указывает, что несимметричные решения существуют только в модифицированной модели маятников.

Ключевые слова: маятник, равновесие, стабильность

Получено 13 апреля 2015 года

После доработки 10 октября 2015 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00079).

Гузев Михаил Александрович

guzev@iam.dvo.ru

Дмитриев Александр Алексеевич

dmitriev@iam.dvo.ru

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт прикладной математики ДВО РАН

690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7

1. Введение

Связанные математические маятники были предметом рассмотрения многих исследователей. С точки зрения изучения различных физических процессов поучительной моделью является система симпатичных маятников: так называются два маятника, имеющие одинаковую длину и одинаковую массу материальных точек, прикрепленных к каждому из концов [1]. Взаимодействие между точками осуществляется пружиной, свойства которой определяют характер поведения системы. Случай малых линейных колебаний в окрестности положения равновесия подробно изучен и описан в научной литературе [1]. Исследование поведения системы маятников при других условиях можно найти, например, в работах [2–5].

Отметим, что характерной особенностью в поведении этой системы является существование бифуркационных режимов. В частности, при рассмотрении взаимодействующих маятников в поле силы тяжести отношение эффективной энергии пружины к потенциальной энергии маятника определяет бифуркационный параметр β системы (безразмерный параметр, характеризующий величину жесткости пружины) [4]. В зависимости от значений этого параметра выделяются различные положения равновесия системы и семейства движений. Однако для системы связанных маятников существует естественный кинематический параметр μ , определяемый отношением расстояния между точками подвеса к длине маятника. Задача исследования решений уравнений Лагранжа в зависимости от двух вышеназванных параметров не рассматривалась, поэтому этот пробел частично восполнен в данной работе.

Мы рассмотрим модифицированную модель системы маятников, в которой их стержни скользят без трения друг относительно друга, а взаимодействие между маятниками определяется линейной упругой пружиной. Для такой физической системы изучены равновесные решения, зависящие от параметров β , μ , и исследована устойчивость модифицированной модели для длинных маятников в линейном приближении. Следует отметить, что устойчивость системы взаимодействующих маятников с пересекающимися стержнями, содержащими жестко скрепленные массы, изучалась в работе [6].

2. Основные соотношения

Следуя [4], рассмотрим два математических маятника длины l и массы m в однородном поле тяжести. Предполагается, что точки подвеса O_1 и O_2 маятников расположены на неподвижной горизонтальной прямой, а расстояние между точками подвеса постоянно и равно a . Невесомая упругая пружина жесткости k связывает массы, так что расположение точек прикрепления B_1 , B_2 совпадает с положением масс. Предполагается, что движение маятников происходит в фиксированной вертикальной плоскости, проходящей через отрезок O_1O_2 (рис. 1), тогда для обеспечения такого движения можно предполагать, например, что стержни маятников скреплены невесомым кольцом.

Положение маятников зададим углами φ_1 , φ_2 , которые они составляют с горизонтальной прямой. Кинетическая энергия маятников равна [4]

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2). \quad (2.1)$$

Потенциальная энергия U складывается из энергии силы тяжести материальных точек и их энергии взаимодействия [2, 4]. Для маятников, связанных линейной упругой пружиной,

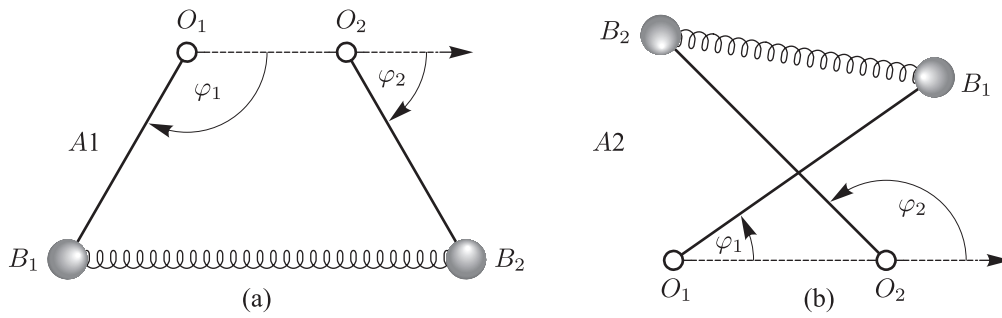


Рис. 1

потенциальная энергия U дается формулой

$$U = \frac{k(d - a)^2}{2} - mgl(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2). \quad (2.2)$$

Здесь величина d равна длине пружины,

$$d = \sqrt{[a + l(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)]^2 + l^2(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2},$$

при этом в ненапряженном состоянии длина пружины равна a . Маятники могут располагаться как ниже горизонтальной линии подвеса (область $A1$ на рис. 1а), так и выше этой горизонтальной линии (область $A2$ на рис. 1б). Выбор знака углов следующий: в области $A1$ предполагается, что углы φ_1, φ_2 больше нуля, в области $A2$ значения φ_1, φ_2 меньше нуля. Таким образом, φ_1, φ_2 принадлежат интервалу $(-\pi, \pi)$.

Из (2.1)–(2.2) следует, что лагранжиан системы маятников равен

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{k(d - a)^2}{2} + mgl(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2). \quad (2.3)$$

Введем вместо углов φ_1, φ_2 координаты q_1, q_2 , полагая $q_1 = (\pi - \varphi_1 - \varphi_2)/2, q_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$. Несложно установить, что областью определения переменных q_1, q_2 является квадрат с крайними точками (вершинами) $(-\pi/2, 0), (\pi/2, -\pi), (3\pi/2, 0), (\pi/2, \pi)$. Переходя к безразмерной переменной времени $\tau = t\sqrt{2g/l}$ и лагранжиану $\Lambda = L/2mgl$, запишем формулу (2.3) в виде

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Pi, \\ \Pi &= \Pi(q_1, q_2) = \beta \frac{(s - \mu)^2}{2} - \cos q_1 \cos q_2, \quad s = \sqrt{\sin^2 q_2 + 2\mu \cos q_1 \sin q_2 + \mu^2}, \\ \beta &= \frac{2kl}{mg}, \quad \mu = \frac{a}{2l}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Бифуркационный параметр β введен в работе [4] (формула (1.7), в которой также было учтено расположение пружины на стержне). Параметр μ зависит от метрических характеристик системы и имеет кинематический характер.

Дифференциальные уравнения движения маятников в форме уравнений Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} \Leftrightarrow \ddot{q}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$



Уравнения системы (2.5) допускают решения, соответствующие как модифицированной модели маятников, так и модели симпатичных маятников, поэтому при анализе системы (2.5) следует указать область допустимых решений.

Для модели симпатичных маятников сумма проекций длин стержней на ось точек подвеса меньше a , что приводит к условию

$$\mu + \cos q_1 \sin q_2 > 0. \quad (2.6)$$

Для модифицированной модели маятников сумма проекций длин стержней на ось точек подвеса больше a , и вместо (2.6) имеем условие

$$\mu + \cos q_1 \sin q_2 < 0. \quad (2.7)$$

Остановимся на классификации движений, которые мы будем рассматривать. Следуя работе [4], выделим два типа движений симпатичных маятников: первый характеризуется их колебаниями в одну сторону с одинаковой амплитудой, а второй — их симметричным положением относительно вертикальной оси. Движения второго типа были исследованы в [4], поэтому в данной работе мы рассмотрим модифицированную модель маятников и изучим симметричные и несимметричные ее положения равновесия.

3. Симметричные положения равновесия

Равновесные положения системы маятников характеризуются условием $\ddot{q}_i = 0$; как следует из (2.5), они определяются критическими точками потенциальной энергии системы:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0. \quad (3.1)$$

Учитывая выражение для потенциальной энергии (2.4), запишем (3.1) в виде

$$\sin q_1 \left(-\beta \frac{s-\mu}{s} \mu \sin q_2 + \cos q_2 \right) = 0, \quad (3.2)$$

$$\beta \frac{s-\mu}{s} (\mu \cos q_1 + \sin q_2) \cos q_2 + \cos q_1 \sin q_2 = 0. \quad (3.3)$$

Решения системы (3.2)–(3.3) дают набор равновесных конфигураций системы маятников как в симметричном, так и несимметричном случаях.

Для симпатичных маятников симметричные конфигурации в области $A1$ характеризуются условием $q_1 = 0$, а в области $A2$ — условием $q_1 = \pi$, что дает $\sin q_1 = 0$, при этом q_2 принадлежит интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$. В этом случае уравнение (3.2) удовлетворяется тождественно, расстояние между маятниками (2.4) равно $s = |\mu \pm \sin q_2|$, а условие (2.6) эквивалентно требованию $\mu \pm \sin q_2 > 0$, то есть $s = \mu \pm \sin q_2$. Тогда уравнение (3.3) редуцируется к виду $\sin q_2 (1 \pm \beta \cos q_2) = 0$, структура решений которого изучена в [4].

Для модифицированной модели маятников равновесные конфигурации в области $A1$ определяются условием $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ ($q_1 = 0$) и изображены на рисунке 2. Мы можем записать условие (2.7) в виде $\sin q_2 + \mu < 0$, то есть $\mu < 1$, тогда расстояние $s = -(\sin q_2 + \mu)$ и уравнение (3.3) эквивалентно соотношению

$$\beta(2\mu + \sin q_2) \cos q_2 + \sin q_2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{2} \sin 2q_2 + \sqrt{4\beta^2\mu^2 + 1} \sin(q_2 - q^*) = 0, \quad (3.4)$$

где $q^* = -\arcsin \frac{2\beta\mu}{\sqrt{4\beta^2\mu^2 + 1}}$. Пусть $q^{**} = -\arcsin \mu$. В интервале (q^*, q^{**}) уравнение (3.4) при

$$\mu < \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}}, \quad \beta > 1 \tag{3.5}$$

имеет единственное решение \tilde{q} . Действительно, (3.4) равносильно равенству

$$\beta(2\mu + \sin q_2) = -\operatorname{tg} q_2. \tag{3.6}$$

Функция в правой части соотношения (3.6) убывает, равна $2\beta\mu$ в точке q^* и $\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$ в q^{**} . В левой части этого соотношения функция является возрастающей, меньше $2\beta\mu$ в q^* ($q^* < 0$) и равна $\beta\mu$ в q^{**} . При выполнении неравенства (3.5) графики этих функций пересекаются в единственной точке \tilde{q} .

Исследуем тип точки равновесия. Для матрицы вторых частных производных потенциала Π справедливы равенства

$$\Pi_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} = \beta \left[\left(\frac{\partial s}{\partial q_1} \right)^2 + (s - \mu) \frac{\partial^2 s}{\partial q_1^2} \right] + \cos q_1 \cos q_2, \tag{3.7}$$

$$\Pi_{22} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_2^2} = \beta \left[\left(\frac{\partial s}{\partial q_2} \right)^2 + (s - \mu) \frac{\partial^2 s}{\partial q_2^2} \right] + \cos q_1 \cos q_2, \tag{3.8}$$

$$\Pi_{12} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} = -\sin q_1 \left[\beta \frac{\mu^2}{s^2} \frac{\partial s}{\partial q_2} \sin q_2 + \beta \frac{s - \mu}{s} \cos q_2 + \sin q_2 \right], \tag{3.9}$$

где

$$\frac{\partial s}{\partial q_1} = -\frac{\mu}{s} \sin q_1 \sin q_2, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial q_1^2} = -\frac{1}{s} \left[\mu \cos q_1 \sin q_2 + \left(\frac{\partial s}{\partial q_1} \right)^2 \right], \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial s}{\partial q_2} = \frac{1}{s} (\mu \cos q_1 + \sin q_2) \cos q_2, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial q_2^2} = -\frac{1}{s} \left[\mu \cos q_1 \sin q_2 + \sin^2 q_2 - \cos^2 q_2 + \left(\frac{\partial s}{\partial q_2} \right)^2 \right]. \tag{3.11}$$

Из (3.9) видно, что для симметричных равновесий компоненты $\Pi_{12} = 0$, то есть матрица вторых частных производных диагональна. В точке \tilde{q} значения производных (3.10), (3.11)

$$\frac{\partial s}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial q_2} = -\cos \tilde{q}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial q_1^2} = -\frac{\mu}{s} \sin \tilde{q}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial q_2^2} = \sin \tilde{q}. \tag{3.12}$$

Поскольку $s = -(\sin \tilde{q} + \mu) > 0$, то уравнение (3.4) эквивалентно равенству $\beta(s - \mu) = \operatorname{tg} \tilde{q}$, в результате для (3.7), (3.8) получаем:

$$\Pi_{11} = \frac{\mu + \cos^2 \tilde{q} \sin \tilde{q}}{\cos \tilde{q} (\mu + \sin \tilde{q})}, \quad \Pi_{22} = \beta \cos^2 \tilde{q} + \frac{1}{\cos \tilde{q}}. \tag{3.13}$$

Очевидно, что $\Pi_{22} > 0$, а Π_{11} положительно, если

$$\mu + \cos^2 \tilde{q} \sin \tilde{q} < 0. \tag{3.14}$$



Решение неравенства (3.14) сводится к вычислению корней кубической параболы $x^3 - x - \mu$ при $x = \sin \tilde{q}$ и приводит к следующим ограничениям на параметр μ :

$$0 < \mu < \mu_* = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\phi(\mu) + \frac{\pi}{6}\right) < \sin \tilde{q} < \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\phi(\mu) - \frac{\pi}{6}\right), \quad (3.15)$$

$$\phi(\mu) = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\mu\right).$$

Отметим, что \tilde{q} больше $-2/\sqrt{3} \sin(\phi(\mu) + \pi/6)$ при $0 < \mu < \mu_* = 1/2\sqrt{2}$.

Таким образом, модифицированная модель маятников в области $A1$ при условии (3.5) имеет равновесное состояние, определяемое решением \tilde{q} уравнения (3.4), причем это состояние устойчиво, если выполнены неравенства (3.15).

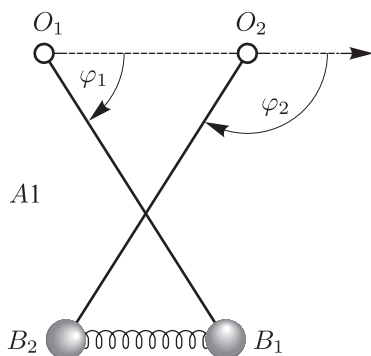


Рис. 2

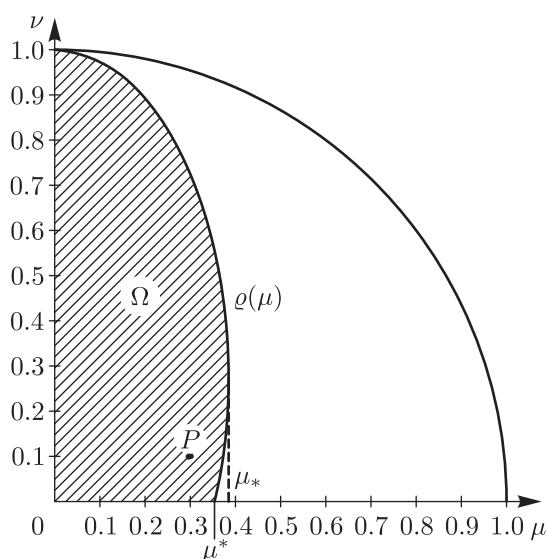


Рис. 3

На рисунке 3 в координатах $(\mu, 1/\beta)$ область существования решений ограничена кривой $1/\beta = \sqrt{1 - \mu^2}$ и отмечена сплошной линией. Кривая $\rho(\mu)$ определена из условия $\Pi_{11} = 0$ и является границей области устойчивости. Выражение для функции $\rho(\mu)$ оказывается слишком громоздким, и мы его не приводим. Однако следует отметить, что $\rho(\mu)$ состоит из двух ветвей, которые склеиваются в точке μ_* . Заштрихованная область Ω определяет параметры $\mu, 1/\beta$, при которых состояние устойчиво.

Если точка $(\mu, 1/\beta)$ не принадлежит области Ω , то соответствующая решению \tilde{q} уравнения (3.4) критическая точка потенциала Π — седловая.

В области $A2$ ($q_1 = \pi$ или $\varphi_1 + \varphi_2 = -\pi$) расстояние $s = \sin q_2 - \mu > 0$, то есть $q_2 > 0$, и уравнение (3.3) запишется в виде

$$\beta \sin q_2 = \operatorname{tg} q_2 + 2\beta\mu. \quad (3.16)$$

Положение маятников, соответствующее области $A2$, изображено на рисунке 4.

Поскольку $\sin q$ при $q \in (0, \pi/2)$ является вогнутой функцией, а $\operatorname{tg} q$ — выпуклой, то число решений уравнения (3.16) зависит от выбора параметров β, μ . В частности, единственное

решение q_0 существует, если графики функций имеют общую касательную, то есть $\beta \cos q_0 = 1/\cos^2 q_0$. Подставляя найденное из этого соотношения значение β в (3.16), получаем

$$2\mu = \sin^3 q_0. \tag{3.17}$$

Следовательно, на плоскости (β, μ) задана кривая

$$\mu(\beta) = \frac{1}{2} \left(1 - \beta^{-2/3}\right)^{3/2}, \tag{3.18}$$

точки которой определяют единственное решение $q_0(\beta) = \arccos \sqrt{1 - \beta^{-2/3}}$ уравнения (3.16). Решение $q_0(\beta)$ является точкой бифуркации: если пошевелить параметры μ, β , то уравнение (3.16) не имеет решений или имеет два решения q_- и q_+ ($q_- < q_0(\beta) < q_+$). Из выпуклости $\operatorname{tg} q$, вогнутости $\sin q$ и (3.18) вытекает, что условие существования двух решений определяется неравенством

$$\mu < \frac{1}{2} \left(1 - \beta^{-2/3}\right)^{3/2}, \tag{3.19}$$

из которого вытекает, что $\mu \leq 1/2$. Более того, при $\beta \rightarrow \infty$ $\sin q_- \rightarrow 2\mu + 0$ и $q_+ \rightarrow \pi/2 - 0$, причем при фиксированном значении μ функция q_- является возрастающей функцией β , а q_+ — убывающей; следовательно, для решений уравнения (3.16) справедливы неравенства

$$2\mu < \sin q_- < \sin q_0(\beta) < \sin q_+. \tag{3.20}$$

Аналогично равенству (3.13) несложно установить, что в рассматриваемом случае

$$P_{11} = \frac{\mu - \cos^2 q_{\pm} \sin q_{\pm}}{\cos q_{\pm}(\sin q_{\pm} - \mu)}, \quad P_{22} = \beta \cos^2 q_{\pm} - \frac{1}{\cos q_{\pm}}.$$

Функция $\beta - 1/\cos^3 q$ убывает и равна нулю в точке $q_0(\beta)$, поэтому $P_{22} < 0$ для корня q_+ уравнения (3.16); следовательно, маятники неустойчивы в положении равновесия, определяемого решением q_+ .

Величина P_{11} положительна в области, в которой функция $h(q) = \mu - \cos^2 q \sin q$ больше нуля. Эта область определяется неравенствами

$$\sin q < \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \phi(\mu)\right) = x_1(\mu), \quad x_2(\mu) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{6} + \phi(\mu)\right) < \sin q, \quad \text{если } 0 < \mu < \mu_1.$$

Если $\mu_1 < \mu < \frac{1}{2}$, то эта область совпадает с отрезком $[0, 1/2]$. Функция $\phi(\mu) + \arcsin 2\mu$ больше¹ $\pi/6$, следовательно, $x_1(\mu) < 2\mu$. Равенство

$$\frac{1}{\beta} = \frac{x_2(\mu)}{[x_2(\mu) - 2\mu]\sqrt{1 - x_2^2(\mu)}} = \varrho(\mu)$$

определяет соотношение между параметрами β и μ , при которых $P_{11} = 0$. Выразив в (3.18) β через μ , рассмотрим функцию $(1 - (2\mu)^{2/3})^{3/2} - \varrho(\mu)$. Построение графика этой функции показывает, что она неотрицательна и равна нулю в единственной точке $\hat{\mu}$, вычисленное

¹Данная функция имеет единственный максимум при $\mu^2 = 13/96$ и больше $\pi/6$ при $0 < \mu < \mu_*$.



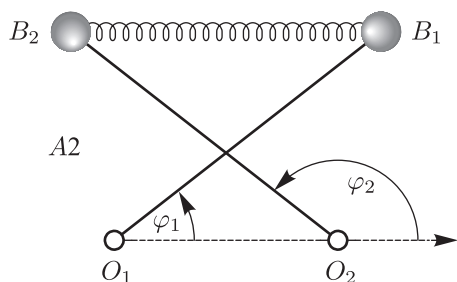


Рис. 4

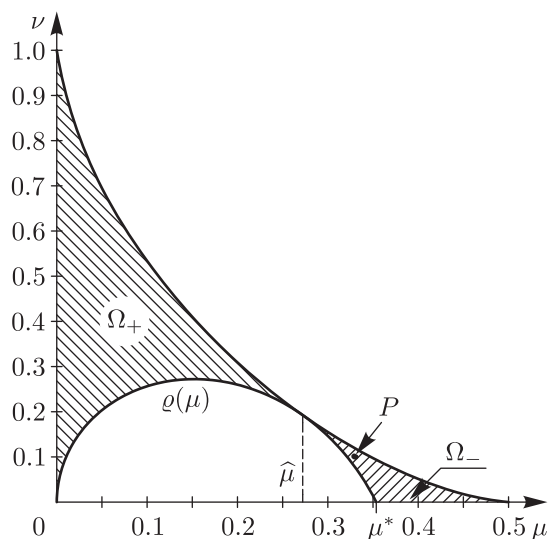


Рис. 5

значение которой равно ≈ 0.272166 , а соответствующее значение $\hat{\beta} \approx 5.19615$. При $\mu = \hat{\mu}$ и $\beta > \hat{\beta}$ или $\mu < \hat{\mu}$ и $\beta = \hat{\beta}$ значение Π_{11} в точке q_+ положительно, а в q_- — отрицательно.

На рисунке 5 в координатах $(\mu, 1/\beta)$ заштрихованы области Ω_+ , в которой $\Pi_{11} < 0$ при соответствующем q_+ , и Ω_- , в которой $\Pi_{11} > 0$ при соответствующем q_- . Отметим, что $h(q)$ при $q = \pi/4$ и $\mu = \mu^*$ равно нулю, причем уравнение (3.16) имеет два решения, если $\beta > \beta^* = (1 - 2^{-1/3})^{3/2} \approx 10.6722$. Если $\beta^* < \beta$ и $\mu^* \leq \mu < 1/2$, то значение Π_{11} отрицательно для q_+ и положительно для q_- . При этих значениях параметров критическая точка потенциала Π , соответствующая q_+ , — седловая, а q_- определяет точку максимума.

Таким образом, в области $A2$ состояния равновесия модифицированной модели маятников определяются двумя решениями q_- , q_+ уравнения (3.16), которые существуют при параметрах β , μ , удовлетворяющих условию (3.19).

Если параметры μ , $1/\beta$ принадлежат области Ω_+ , то соответствующая решению q_+ критическая точка потенциала Π является точкой максимума; в противном случае она седловая.

Если параметры μ , $1/\beta$ принадлежат области Ω_- , то соответствующее решению q_- положение равновесия модифицированной модели маятников устойчиво; в противном случае соответствующая критическая точка потенциала Π — седловая.

4. Несимметричные положения равновесия

Для симпатичных маятников и модифицированной модели маятников в несимметричном положении равновесия значение $\sin q_1 \neq 0$. В этом случае из (3.2) следует уравнение

$$-\beta \frac{s - \mu}{s} \mu \sin q_2 + \cos q_2 = 0. \quad (4.1)$$

Комбинируя (4.1) и (3.3), получаем соотношение

$$\cos^2 q_2 \sin q_2 + \mu \cos q_1 = 0. \quad (4.2)$$



Подстановка (4.2) в (2.4) позволяет найти расстояние s между маятниками:

$$s^2 = \mu^2 - \sin^2 q_2 + 2 \sin^4 q_2. \quad (4.3)$$

Решение уравнений (4.1)–(4.2) при s , удовлетворяющем равенству (4.3), определяет равновесное состояние маятников. Заметим, что (4.3) можно записать в замкнутом виде относительно s , если воспользоваться (4.1). В результате получаем

$$(s^2 - \mu^2)(s^2 + z^2)^2 = s^2(s^2 - z^2), \quad z = \beta\mu(s - \mu). \quad (4.4)$$

Естественный вопрос, на который следует ответить: для какой физической модели реализуется несимметричное равновесие? Выполним анализ равновесного решения в асимптотическом случае для длинных маятников. Это позволяет, используя теорию возмущений для (4.2), получить приближенное выражение для $\sin q_2$ с точностью до μ^3 включительно в следующем виде:

$$\sin q_2 = -\mu \cos q_1 (1 + \mu^2 \cos^2 q_1). \quad (4.5)$$

Для модели симпатичных маятников должно выполняться кинематическое неравенство (2.6). Подставляя в него (4.5) и решая полученное неравенство относительно $\cos^2 q_1$, получаем

$$\cos^2 q_1 < \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\mu^2}}. \quad (4.6)$$

Поступая аналогичным образом для модифицированной модели маятников, представим неравенство (2.7) в следующем виде:

$$\cos^2 q_1 > \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\mu^2}}. \quad (4.7)$$

Поскольку маятники являются длинными ($\mu \ll 1$), то из (4.6), (4.7) получаем условие, разделяющее модель симпатичных маятников и модифицированную модель:

$$q_1^2 > \mu^2, \quad q_1^2 < \mu^2 \quad \text{в области } A1, \quad (4.8)$$

$$(q_1 - \pi)^2 > \mu^2, \quad (q_1 - \pi)^2 < \mu^2 \quad \text{в области } A2. \quad (4.9)$$

Определим порядок по μ величин s и $|q_1|$. Подставляя $s = \mu\eta$ в (4.4), имеем

$$\mu^2(\eta^2 - 1)(\eta^2 + \rho^2)^2 = \eta^2(\eta^2 - \rho^2), \quad \rho = \beta\mu(\eta - 1). \quad (4.10)$$

Полагая $\eta = \mu^\alpha \text{const}$ с некоторым показателем α , потребуем согласование по μ величин в (4.10) — это позволяет определить $\alpha = 2$ и $\text{const} = \beta$. В результате находим

$$s \approx \mu^3 \beta. \quad (4.11)$$

С другой стороны, расстояние s вычисляется из (4.3) и (4.5):

$$s^2 = \mu^2 \sin^2 q_1 + 7\mu^6 \cos^6 q_1 + O(\mu^8). \quad (4.12)$$

Согласование порядков по μ величин в формулах (4.11), (4.12) возникает при условии

$$|q_1| \leq \varepsilon \quad \text{в области } A1, \quad |q_1 - \pi| \leq \varepsilon, \quad \text{в области } A2, \quad \varepsilon \approx \mu^2. \quad (4.13)$$

Из (4.8), (4.9) видно, что для модели симпатичных маятников соответствующие неравенства не выполняются при условии (4.13). Они справедливы для модифицированной модели.

Таким образом, для длинных маятников несимметричное положение равновесия реализуется только в модифицированной модели.



5. Устойчивость длинных маятников модифицированной модели

Применим полученные соотношения к исследованию устойчивости длинных маятников модифицированной модели. Линеаризуя (2.5), получаем характеристическое уравнение в виде

$$\det \|\Pi_{ij} - \lambda \delta_{ij}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \|\Pi_{ij}\| + \det \|\Pi_{ij}\| = 0, \quad (5.1)$$

где производные Π_{ij} вычисляются для равновесного состояния. В области $A1$ для симметричного равновесия они даются формулой (3.13). Решение \tilde{q} уравнения (3.6) при $\mu \ll 1$ вычисляется по теории возмущений: $\tilde{q} \approx -2\beta\mu/(1+\beta)$. Тогда компоненты матрицы вторых производных равны $\Pi_{11} \approx 1$, $\Pi_{22} \approx 1 + \beta$ и модель является устойчивой.

В области $A2$ вычисляем решение уравнения (3.17) $q_0(\mu) \approx (2\mu)^{1/3}$ и решения уравнения (3.16)

$$q_{\pm} \approx q_0 \pm z, \quad z \approx 2\sqrt{\frac{(\beta_0 - \beta)\mu}{\beta q_0}},$$

где β_0 — точка кривой (3.18) при заданном μ , а q_0 — соответствующее значение $q_0(\beta)$. Отсюда и из (3.20) в ведущем порядке по q_0 и z получаем $\Pi_{11} \approx -1$, $\Pi_{22} \approx \beta - 1$. Соответствующие характеристические числа равны $\lambda_+ = \Pi_{22}$ и $\lambda_- = \Pi_{11}$, и модель является неустойчивой в области $A2$.

Рассмотрим несимметричное равновесие. Подставляя (3.10) в (3.7), получаем

$$\Pi_{11} = \frac{\beta\mu}{s} \left(\frac{\partial s}{\partial q_1} \right)^2 + \left(-\beta \frac{s-\mu}{s} \mu \sin q_2 + \cos q_2 \right) \cos q_1.$$

Так как в равновесии справедливо равенство (4.1), то

$$\Pi_{11} = \frac{\beta\mu}{s} \left(\frac{\partial s}{\partial q_1} \right)^2 \geq 0. \quad (5.2)$$

Из (3.8) и (3.11) следует, что

$$\Pi_{22} = \frac{\beta\mu}{s} \left(\frac{\partial s}{\partial q_2} \right)^2 + \beta \frac{s-\mu}{s} (\cos^2 q_2 - \sin^2 q_2) + \left(-\beta \frac{s-\mu}{s} \mu \sin q_2 + \cos q_2 \right) \cos q_1.$$

Отсюда, используя (4.1), получаем

$$\Pi_{22} = \frac{\beta\mu}{s} \left(\frac{\partial s}{\partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \cos 2q_2 \operatorname{ctg} q_2. \quad (5.3)$$

Равенство (4.2) позволяет записать производную $\frac{\partial s}{\partial q_2}$ в виде $\frac{1}{s} \sin^3 q_2 \cos q_2$, поэтому производная (3.9), с учетом (4.1), равна

$$\Pi_{12} = -\sin q_1 \left(\frac{\beta\mu^2}{s^3} \sin^4 q_2 \cos q_2 + \frac{1}{\sin q_2} \right). \quad (5.4)$$

Соотношения (5.2)–(5.4) позволяют найти детерминант матрицы вторых производных:

$$\det ||\Pi_{ij}|| = \frac{\beta\mu^2}{s^3} \sin^2 q_1 \sin^2 q_2 \operatorname{ctg} q_2 - 4\frac{\beta\mu^2}{s^3} \sin^2 q_1 \sin^4 q_2 \operatorname{ctg} q_2 + \frac{\sin^2 q_1}{\sin^2 q_2}. \quad (5.5)$$

Поскольку нас интересует асимптотическое представление для этого объекта при $\mu \ll 1$, то, учитывая (4.5), (4.11) и (4.13), получаем, что в ведущем порядке по μ он имеет сингулярное поведение, определяемое первым вкладом справа в (5.5):

$$\det ||\Pi_{ij}|| \approx \frac{\sin^2 q_1 \sin q_2}{\mu^7 \beta^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\det ||\Pi_{ij}|| \approx -\frac{q_1^2}{\mu^6 \beta^2} \quad \text{в области } A1, \quad \det ||\Pi_{ij}|| \approx \frac{(q_1 - \pi)^2}{\mu^6 \beta^2} \quad \text{в области } A2. \quad (5.6)$$

Выполняя аналогичным способом асимптотический анализ поведения $\operatorname{tr} ||\Pi_{ij}||$, получаем, что в ведущем порядке по μ он также имеет сингулярное поведение, определяемое Π_{22} :

$$\operatorname{tr} ||\Pi_{ij}|| = \Pi_{11} + \Pi_{22} \approx \frac{1}{\mu^2 \beta^2} + \frac{1}{\mu \sin q_2}.$$

Из этой формулы, при учете (4.5), (4.13), следуют соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} ||\Pi_{ij}|| &\approx \frac{1}{\mu^2 \beta^2} - \frac{1}{\mu^2} \quad \text{в области } A1, \\ \operatorname{tr} ||\Pi_{ij}|| &\approx \frac{1}{\mu^2 \beta^2} + \frac{1}{\mu^2} \quad \text{в области } A2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.6), (5.7) ясно, что характеристические числа, вычисляемые из уравнения (5.1), неотрицательны в области $A2$, поэтому модель является устойчивой. В области $A1$ характеристические числа имеют разные знаки, поэтому модель является неустойчивой (соответствующая критическая точка седловая).

6. Заключение

Первоначально мотивацией для выполнения данной работы было желание исследовать решения лагранжевой системы, соответствующей физической модели классических симпатичных маятников, в зависимости от двух параметров модели. Но при переходе к лагранжевой формулировке уравнений возникла задача исследования физического смысла решений построенной математической модели. Оказалось, что полученные результаты справедливы для модифицированной модели маятников, стержни которых дополнительно соединены, то есть в начальном плане нашего исследования эта физическая система не рассматривалась. Именно для этой системы в работе построены равновесные решения, зависящие от двух параметров β и μ . Таким образом, анализ решений уравнений Лагранжа позволил выявить физические системы, соответствующие рассматриваемой математической модели.

Список литературы

- [1] Зоммерфельд А. Механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 368 с.
- [2] Денисова Н. В., Козлов В. В. О хаотизации колебаний связанных маятников // Докл. РАН, 1999, т. 367, № 2, с. 191–193.
- [3] Huynh H. N., Chew L. Y. Two-coupled pendulum system: Bifurcation, chaos and the potential landscape approach // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2010, vol. 20, no. 8, pp. 2427–2442.
- [4] Маркеев А. П. О движении связанных маятников // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 27–38.
- [5] Torre C. G. Linear chain of coupled oscillators // Foundations of wave phenomena: Book 19. http://digitalcommons.usu.edu/foundation_wave/1 (2014).
- [6] Ramachandran P., Krishna S. G., Ram Y. M. Instability of a constrained pendulum system // Amer. J. Phys., 2011, vol. 79, no. 4, pp. 395–400.

A modified model of coupled pendulums

Mikhail A. Guzev¹, Alexandr A. Dmitriev²

^{1,2}Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences

Radio 7, Vladivostok, 690041, Russia

¹guzev@iam.dvo.ru, ²dmitriev@iam.dvo.ru

We consider a modified system of two pendulums rods of which intersect and slide without any friction. The pendulums are connected by an elastic linear spring and arranged in a fixed vertical plane of the uniform gravity field. We have shown that there are symmetric and asymmetric equilibrium solutions with respect to the vertical axis. It is revealed that the stability of the model depends on two parameters, the first one specifies the spring stiffness, and the second one defines the distance between the hinges. The conditions of stability and instability of the symmetric equilibrium are obtained in the upper and lower position of pendulums. The analysis of asymmetric equilibrium solutions and stability conditions is carried out for long pendulums. Comparison with the sympathetic pendulums model proposed by Sommerfeld indicates that asymmetric solutions exist only for the modified model.

MSC 2010: 70E55, 70H12, 70H14

Keywords: pendulum, equilibrium, stability

Received April 13, 2015, accepted October 10, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 709–720 (Russian)

