



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 62.529

MSC 2010: 93B18, 93B52

**Экспериментальные исследования  
динамики сферического робота  
комбинированного типа**

**А. А. Килин, Ю. Л. Караваев**

В статье представлены результаты экспериментальных исследований движения по плоскости сфероробота комбинированного типа, приводимого в движение внутренней колесной тележкой с расположенной на ней ротором. Управление сферороботом построено на базе динамической модели в неголономной постановке при помощи гейтов. Рассмотрено движение сфероробота с постоянными управляющими воздействиями, а также движение при импульсном управлении. Проведен ряд экспериментов, демонстрирующих важность учета трения качения.

Ключевые слова: сфероробот комбинированного типа, динамическая модель, управление с помощью гейтов, трение качения

---

Получено 05 ноября 2015 года

После доработки 02 декабря 2015 года

---

Работа А. А. Килина (раздел 2) поддержана грантом РФФИ № 15-08-09261-а. Работа Ю. Л. Караваева (раздел 3) выполнена в рамках гранта РФФИ № 14-19-01303.

---

Килин Александр Александрович  
[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Караваев Юрий Леонидович  
[karavaev\\_yury@istu.ru](mailto:karavaev_yury@istu.ru)

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова  
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

## 1. Введение

На сегодняшний день существует большое количество работ, посвященных сферическим роботам. Подробные обзоры конструкций и принципов приведения в движение можно найти в работах [1–4]. Наиболее популярными способами реализации движения сферических роботов являются изменение положения центра масс [4–9] и изменение внутреннего гиросtatического момента [10–12]. Несмотря на большое количество моделей сферороботов и разнообразие их технической реализации, остается открытым вопрос, какой тип движителя является наиболее оптимальным с точки зрения простоты управления и эффективности совершения маневров. Экспериментальные исследования динамики сферороботов с различными внутренними движителями (маятник, роторы, омниколесная платформа) показали, что наиболее перспективным механизмом для управляемого движения может стать механизм, комбинирующий указанные выше эффекты. В данной работе мы изучаем динамику сфероробота комбинированного типа, использующего для движения как смещение центра масс, так и изменение гиросtatического момента. Теоретические исследования динамики подобной модели сферического робота, катящегося без проскальзывания по горизонтальной плоскости, проведены в работе [13]. В данной работе мы приведем результаты экспериментального исследования движения сфероробота комбинированного типа. В частности, мы указываем на существенное влияние трения качения на движение сфероробота.

## 2. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим качение без проскальзывания сфероробота комбинированного типа по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости. Сфероробот представляет собой сферическую оболочку радиуса  $R_s$ , в центре которой закреплен осесимметричный маятник (маятник Лагранжа). Маятник Лагранжа мы будем моделировать невесомым стержнем, на конце которого установлен массивный ротор. Ротор представляет собой осесимметричное тело (диск), вращающееся вокруг оси симметрии, совпадающей со стержнем (см. рис. 1). Технически конструкция сфероробота реализована так, что маятник может совершать колебания только в некоторой выделенной (связанной с оболочкой) плоскости, которую далее мы будем называть плоскостью вращения маятника. Сфероробот приводится в движение за счет вынужденных колебаний маятника и вращения ротора при помощи двух моторов.

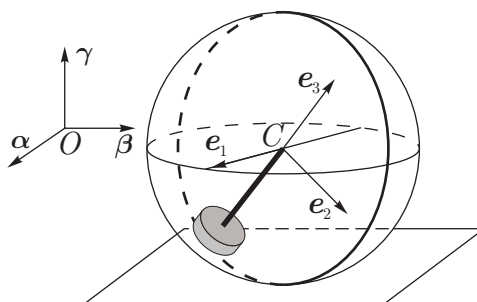


Рис. 1. Схематическая модель сфероробота комбинированного типа.

Для описания динамики сфероробота определим две системы координат. Первая система  $O\alpha\beta\gamma$  — неподвижная (инерциальная) с осями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Вторая система  $Ce_1e_2e_3$  — подвижная, с осями  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , оси этой системы жестко связаны с маятником так, что

орт  $e_1$  перпендикулярен плоскости вращения маятника, а орт  $e_3$  направлен вдоль его оси симметрии. Начало координат подвижной системы совпадает с геометрическим центром оболочки  $C$  (см. рис. 1). Далее (если не оговаривается иное) все векторы будем задавать в проекциях на оси подвижной системы координат  $Ce_1e_2e_3$ .

Положение системы будем задавать координатами центра сферы  $r = (x, y, 0)$ , углами поворота  $\theta$  и  $\varphi$  маятника вокруг осей  $e_1$  и  $e_3$  соответственно и матрицей перехода из неподвижной системы координат в подвижную  $Q$ , по столбцам которой стоят координаты неподвижных векторов  $\alpha, \beta, \gamma$ , записанные в проекциях на оси подвижной системы координат  $Ce_1e_2e_3$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение  $\mathcal{N} = \{(r, \theta, \varphi, Q)\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2 \times SO(3)$ .

Отсутствие проскальзывания в точке контакта оболочки с плоскостью описывается неголономной связью

$$F = v - R_s \Omega \times \gamma = 0, \tag{2.1}$$

где  $v, \Omega$  — скорость центра и угловая скорость вращения оболочки. Данная связь не исключает прокручивания сферической оболочки относительно вертикали, в отличие от так называемой модели «резинового» тела [14–16].

Кинетическую и потенциальную энергии системы «сфера – маятник» можно представить в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I_s \Omega^2 + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + \frac{1}{2} (\omega, I_{bc} \omega), \quad U = -m_b R_b g(\gamma, e_3),$$

где  $m_s, I_s$  — масса и момент инерции сферической оболочки,  $m_b, I_{bc} = \text{diag}(I_{bc1}, I_{bc1}, I_{bc3})$  — масса и центральный тензор инерции маятника, а скорость  $v_b$  центра масс маятника и его угловая скорость  $\omega$  задаются соотношениями

$$v_b = v - R_b \omega \times e_3, \quad \omega = \Omega + e_1 \dot{\theta} + e_3 \dot{\varphi}, \tag{2.2}$$

где  $R_b$  — расстояние от центра сферы до центра масс маятника.

Уравнения динамики рассматриваемой системы можно записать в виде уравнений Даламбера – Лагранжа второго рода в квазискоростях с неопределенными множителями и вынуждающими воздействиями (подробный вывод см. в работе [13]). Как показано в [13], уравнения движения для переменных  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \Omega, \gamma$  отделяются от полной системы и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (e_3, I_{b3}(\dot{\Omega} + e_3 \ddot{\varphi})) &= K_\varphi, \\ (e_1, I_b(\dot{\Omega} + e_1 \ddot{\theta}) - m_b R_b R_s e_3 \times (\dot{\Omega} \times \gamma + \Omega \times \dot{\gamma})) - (e_1, m_b R_b R_s (\Omega \times \gamma) \times ((\Omega + \dot{\theta} e_1) \times e_3)) &+ \\ + (e_1, \Omega \times (m_b R_b R_s (\Omega \times \gamma) \times e_3 + (I_s + I_b) \Omega + e_1 I_{b1} \dot{\theta} + e_3 I_{b3} \dot{\varphi})) &+ \\ + m_b R_b g(e_1, \gamma \times e_3) &= K_\theta, \end{aligned} \tag{2.3}$$



$$\begin{aligned}
& m_b R_b R_s (\dot{\Omega} \times \gamma + \Omega \times \dot{\gamma}) \times e_3 + (\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_b) \dot{\Omega} + e_1 I_{b1} \ddot{\theta} + e_3 I_{b3} \ddot{\varphi} - m_b R_b R_s (\Omega \times \gamma) \times \\
& \quad \times \left( (\Omega + \dot{\theta} e_1) \times e_3 \right) + (\Omega + e_1 \dot{\theta}) \times \left( m_b R_b R_s (\Omega \times \gamma) \times e_3 + \right. \\
& \quad \left. + (\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_b) \Omega + e_1 I_{b1} \dot{\theta} + e_3 I_{b3} \dot{\varphi} \right) + m_b R_b g \gamma \times e_3 = \\
& = R_s \left( (m_s + m_b) R_s (\dot{\Omega} \times \gamma + \Omega \times \dot{\gamma}) - m_b R_b (\dot{\Omega} + \ddot{\theta} e_1) \times e_3 \right) \times \gamma + \\
& \quad + R_s \left( (\Omega + e_1 \dot{\theta}) \times \left( (m_s + m_b) R_s \Omega \times \gamma - m_b R_b (\Omega + \dot{\theta} e_1) \times e_3 \right) \right) \times \gamma, \\
& \dot{\gamma} = \gamma \times (\Omega + e_1 \dot{\theta}),
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}_b = \text{diag}(I_{b1}, I_{b1}, I_{b3}) = \text{diag}(I_{bc1} + m_b R_b^2, I_{bc1} + m_b R_b^2, I_{bc3})$  — тензор инерции маятника относительно центра сферы,  $K_\varphi, K_\theta$  — моменты внешних сил (управляющие воздействия), приложенные в точке крепления маятника к шару и в точке крепления ротора к стержню маятника.

Для реконструкции динамики по остальным переменным к уравнениям (2.3) необходимо добавить уравнения связей (2.1) и кинематические соотношения, описывающие движение центра сфероробота и поворот подвижных осей относительно неподвижных

$$\dot{\mathbf{Q}} = \tilde{\Omega} \mathbf{Q} + \dot{\theta} \mathbf{A} \mathbf{Q}, \quad \dot{r} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{v}, \quad (2.4)$$

где матрицы  $\tilde{\Omega}$  и  $\mathbf{A}$  имеют вид

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае свободного движения, то есть при отсутствии управляющих воздействий ( $K_\theta = K_\varphi = 0$ ), рассматриваемая система, помимо геометрического интеграла  $\gamma^2 = 1$ , допускает еще два интеграла движения:

– линейный по угловым скоростям интеграл

$$F_1 = (\Omega + e_3 \dot{\varphi}, e_3) = \Omega_3 + \dot{\varphi}; \quad (2.5)$$

– энергия

$$E = \frac{1}{2} m_s \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I_s \Omega^2 + \frac{1}{2} m_b \mathbf{v}_b^2 + \frac{1}{2} (\omega, \mathbf{I}_{bc} \omega) - m_b R_b g (\gamma, e_3). \quad (2.6)$$

Для полной интегрируемости приведенной системы (2.3) по теореме Эйлера–Якоби не хватает трех интегралов и инвариантной меры<sup>1</sup>. Можно показать, что система не допускает существования инвариантной меры, зависящей только от позиционных переменных  $\gamma$  и дополнительных первых интегралов, линейных по скоростям. Следовательно, по-видимому, она является неинтегрируемой.

<sup>1</sup>Напомним, что инвариантной мерой для системы дифференциальных уравнений  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  называется функция  $\rho(\mathbf{x})$ , которая удовлетворяет уравнению  $\text{div}(\rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0$ .

## 2.1. Управление при помощи гейтов

В работе [13] получены уравнения для нахождения управлений, реализующих движение по заданной траектории. Однако данные уравнения не всегда разрешимы на заданном промежутке времени, что накладывает ограничения на возможные траектории и маневренность рассматриваемой конструкции. Одним из способов устранения недостатка построения управления на основе динамической модели является разработка модели управления на основе элементарных базовых маневров (гейтов), описанной в работах [4, 13].

В данном разделе описано управление движением сфероробота при помощи элементарных маневров (гейтов). В качестве элементарных маневров мы будем рассматривать стационарные решения свободной системы и движения, которые переводят систему с одного стационарного решения на другое. В работе [13] показано, что рассматриваемая динамическая система допускает два вида стационарных решений — движение по прямой и движение по окружности. Комбинируя эти решения, можно реализовать движение из любой начальной в любую конечную точку.

Особенности рассматриваемой конструкции сфероробота позволяют ему двигаться по прямой только в направлении, параллельном плоскости вращения маятника. Следовательно, прежде чем начать движение (разгон), необходимо совершить вращение вокруг вертикальной оси так, чтобы направление движения совпадало с плоскостью вращения маятника. Поэтому в качестве первого гейта рассмотрим поворот сфероробота на месте на некоторый заданный угол  $\psi_0$  вокруг вертикальной оси. Очевидно, данный гейт связывает два стационарных решения, соответствующих состоянию покоя.

**1. Вращение на месте.** Как показано в [13], поворот сфероробота связан с углом поворота ротора соотношением

$$\varphi_0 = -\frac{I_s + I_{b3}}{I_{b3}} \psi_0. \quad (2.7)$$

Поэтому поворот сфероробота на заданный угол  $\psi_0$  реализуется поворотом ротора на соответствующий угол  $\varphi_0$ . При этом реализующее данный поворот управляющее воздействие рассчитывается по формуле

$$K_\varphi = -I_s \ddot{\psi}. \quad (2.8)$$

**2. Изменение скорости при движении по прямой.** Данное движение включает разгон или торможение при движении по прямой. В частных случаях начальная или конечные скорости сфероробота могут быть равны нулю.

Рассматриваемый маневр реализуется отклонением маятника от вертикального положения в виде

$$\gamma = (0, \sin \vartheta, \cos \vartheta), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad (2.9)$$

где угол отклонения маятника от вертикали  $\vartheta$  удовлетворяет условиям

$$\vartheta(0) = \vartheta(T) = 0, \quad \dot{\vartheta}(0) = \dot{\vartheta}(T) = 0. \quad (2.10)$$

При таком маневре управляющее воздействие и угловое ускорение оболочки зависят от угла  $\vartheta$  следующим образом:

$$K_\theta = \frac{\ddot{\vartheta} \left( m_b^2 R_b^2 R_s^2 \cos^2 \vartheta + I_0 I_{b1} \right) + m_b R_b \sin \vartheta \left( m_b R_b R_s^2 \cos \vartheta \ddot{\vartheta} + g I_0 \right)}{m_b R_b R_s \cos \vartheta - I_0}, \quad (2.11)$$

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{m_b R_b \sin \vartheta (g + R_s \dot{\vartheta}^2) - \ddot{\vartheta} (m_b R_b R_s \cos \vartheta - I_{b1})}{m_b R_b R_s \cos \vartheta - I_0}.$$

**3. Движение по прямой.** Качение сфероробота по прямой с постоянной скоростью  $v_0$  соответствует стационарному решению системы (2.3), (2.4) при отсутствии управляющих моментов  $K_\theta = 0$  и  $K_\varphi = 0$ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \pm e_3, & \Omega &= \frac{v_0}{R_s} e_1, & \dot{\theta} &= -\frac{v_0}{R_s}, & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_0, \\ \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} \cos \psi_0 & -\sin \psi_0 & 0 \\ \sin \psi_0 & \cos \psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, & \dot{\mathbf{r}} &= \pm v_0 \mathbf{Q} e_2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\dot{\varphi}_0$  — произвольная постоянная скорость вращения ротора, а  $\psi_0$  — угол между прямой, по которой катится сфероробот, и осью  $OX$  неподвижной системы координат.

Как видно из (2.12), качение по прямой является движением с постоянными скоростями вращения маятника и ротора, при которых маятник расположен вертикально. В действительности же под влиянием трения качения маятник отклоняется от вертикального положения. Это, в частности, приводит к колебаниям поступательной скорости движения по прямой. Компенсация данных колебаний возможна либо с помощью учета трения качения, либо с помощью механизма обратной связи.

**4. Движение по окружности.** Движение по окружности соответствует неподвижным точкам приведенной системы (2.3) при отсутствии управляющих моментов  $K_\theta = 0$  и  $K_\varphi = 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{v_0}{R_s \gamma_3}, & \gamma &= (\sin \xi, 0, \cos \xi), & \Omega &= \frac{v_0}{\rho} \gamma - \frac{v_0}{R_s \gamma_3} e_1, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{(-R_s^2((m_s + m_b)\rho + m_b R_b \gamma_1) - R_s \gamma_3(m_b R_b \rho + \gamma_1(I_{b1} - I_{b3})) + I_s \rho) v_0^2 + m_b R_b g R_s \rho^2 \gamma_1}{\rho R_s v_0 I_{b3} \gamma_1}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\rho$ ,  $v_0$ ,  $\xi$  — параметры семейства. В абсолютном пространстве данным неподвижным точкам соответствует движение по окружности радиуса  $\rho$  со скоростью  $v_0$ , при котором плоскость качания маятника наклонена на угол  $\xi$  относительно вертикали.

Комбинируя рассмотренные гейты, можно осуществить движение сфероробота из любой начальной в любую конечную точку, однако перед каждым изменением направления движения необходимо остановиться. Поворот без остановки можно реализовать с помощью согласованного изменения управляющих моментов  $K_\theta$  и  $K_\varphi$ , при котором система переходит с одного стационарного решения на другое. Для сфероробота с маятником Лагранжа (не ограниченного одной плоскостью качания) такие повороты реализуются с помощью качания маятника под разными углами к направлению движения [5]. Теоретическое построение аналогичных гейтов для рассматриваемой конструкции является достаточно сложной и пока не решенной задачей.

На практике поворот без остановки можно реализовать, используя указанные выше гейты (поворот и разгон) и добавив к ним систему обратных связей, стабилизирующих стационарные движения сфероробота.

Приведем далее результаты экспериментов, позволяющих лучше понять процесс движения сфероробота комбинированного типа и влияние на него трения качения.



### 3. Экспериментальные исследования траектории движения сфероробота

В лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета разработана конструкция сферического робота комбинированного типа. Модель, изображенная на рисунке 1, реализована с помощью тележки, центр масс которой движется в экваториальной плоскости сферической оболочки. Ротор закреплен на тележке таким образом, что его ось вращения направлена вдоль радиуса сферической оболочки. На рисунке 2 приведены трехмерная модель сфероробота комбинированного типа и фото натурального образца.



Рис. 2. (a) модель сфероробота комбинированного типа; (b) фото натурального образца.

Сферическая оболочка изготовлена из прозрачного материала ПЭТ и имеет следующие характеристики (здесь и далее все численные величины приведены в соответствии с СИ):  $R_s = 0.150$  м,  $m_s = 1.625$  кг,  $\mathbf{I}_s = \text{diag}(25.27 \cdot 10^{-3}, 20.73 \cdot 10^{-3}, 25.27 \cdot 10^{-3})$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>. Для обеспечения непроскальзывания колеса тележки, изготовленные из резины, синхронно приводятся двумя двигателями постоянного тока с редуктором. Синхронность обеспечивается датчиками угловых скоростей, установленными на выходных валах двигателей и формирующими с системой управления контур обратной связи по скорости. Ротор представляет собой однородный алюминиевый диск радиусом  $R_r = 0.087$  м, массой  $m_r = 2.46$  кг и осевым моментом инерции  $I_r = 5.64 \cdot 10^{-3}$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>. Характеристики внутренней колесной тележки (с установленным на ней ротором):  $m_b = 3.25$  кг,  $\mathbf{I}_b = \text{diag}(31.88 \cdot 10^{-3}, 30.59 \cdot 10^{-3}, 8.76 \cdot 10^{-3})$  кг  $\cdot$  м<sup>2</sup>.

Управления для сферического робота комбинированного типа задавались в виде зависимостей углов  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ , так как в реальных условиях на выходных валах двигателей, отвечающих за изменение соответствующих углов, установлены энкодеры, по данным с которых система управления обеспечивала заданное изменение углов  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$ .

#### 3.1. Движение при постоянных управляющих воздействиях

Рассмотрим маневр, состоящий из разгона по прямой из состояния покоя и последующего увеличения угловой скорости вращения ротора  $\dot{\varphi}(t)$  до некоторого постоянного значения. Данный маневр будем реализовывать следующими зависимостями управляющих



воздействий от времени

$$\dot{\theta}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 = 0, \\ 1.57 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)^2, & t_1 \leq t \leq t_1^* = 1.5, \\ 1.57, & t > t_1^*, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_2 = 2.6, \\ 11.304 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{13}{15}\pi\right)^2, & t_2 \leq t \leq t_2^* = 4.1, \\ 11.304, & t > t_2^*, \end{cases} \quad (3.2)$$

графики которых приведены на рисунке 3. Маркерами на графиках обозначены моменты времени, связанные с изменением управлений (с учетом последовательности изменений), причем моменты завершения изменений обозначены символом \*.

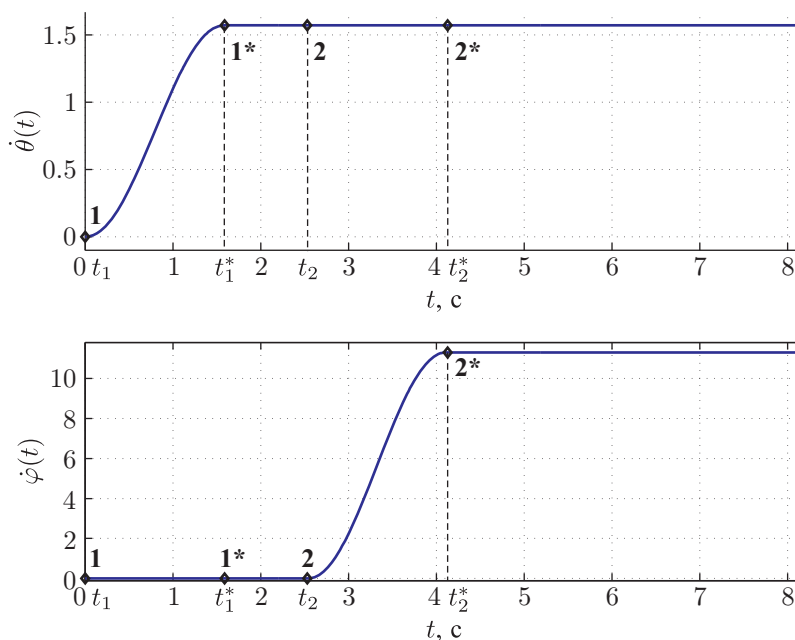


Рис. 3. Управляющие воздействия (3.1), (3.2)

В соответствии с теоретической моделью на промежутке  $t \in [t_1, t_1^*]$  происходит разгон сфероробота по прямой. Строго говоря, приведенная зависимость  $\dot{\theta}(t)$  (3.1) реализует разгон по прямой до постоянной скорости только с некоторой точностью. После увеличения  $\dot{\theta}(t)$  до максимального значения сфероробот будет катиться по прямой с небольшими колебаниями. Однако для практического применения такой точности оказывается вполне достаточно. На промежутке  $t \in [t_1^*, t_2]$  сфероробот (почти) равномерно катится по прямой. На промежутке  $t \in [t_2, t_2^*]$  происходит плавное увеличение угловой скорости вращения ротора, и при  $t > t_2^*$  сфероробот движется с постоянными управляющими воздействиями.

Траектория, по которой движется сфероробот при управлении (3.1), (3.2) в рамках рассмотренной выше модели, изображена на рисунке 4 пунктирной линией. Как видно из данного рисунка, финальное движение сфероробота (при постоянных управлениях) в этом случае близко к движению по окружности (2.13). Отклонения от движения по окружности



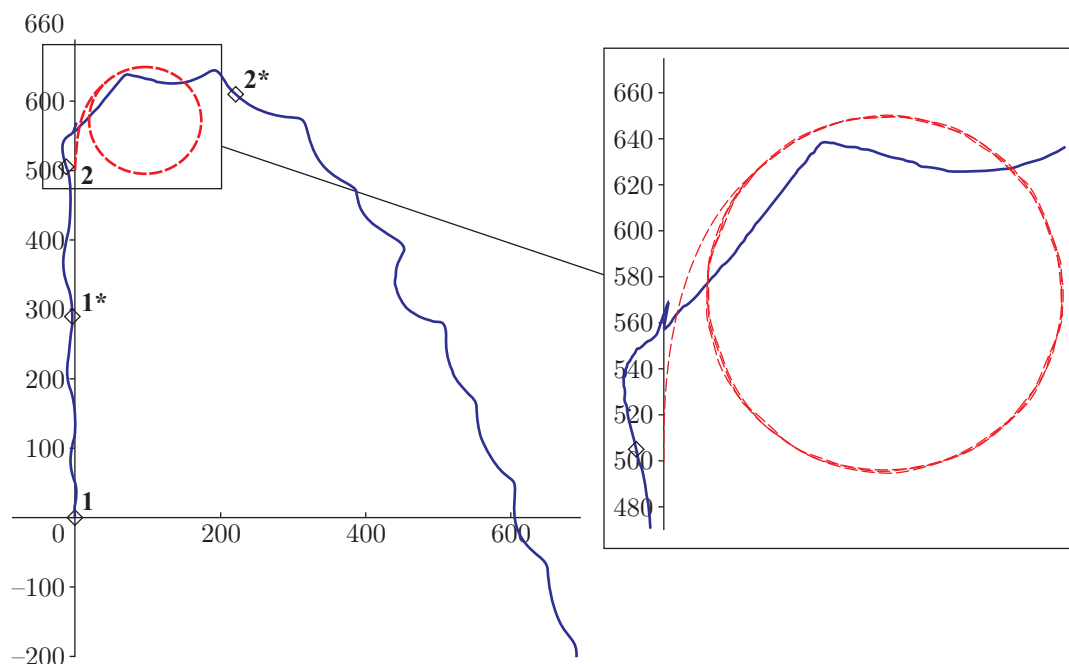


Рис. 4. Теоретическая и экспериментальная траектории движения сфероробота при управлениях (3.1), (3.2); справа (увеличено) — колебания, сопровождающие движение сфероробота по окружности.

объясняются неточным обеспечением необходимых начальных условий (положения маятника) в момент начала движения с постоянными управляющими воздействиями. Однако, в среднем, траекторию можно считать окружностью с хорошей степенью точности.

В рамках данной работы была проведена серия экспериментов по движению сфероробота в соответствии с управляющими воздействиями (3.1), (3.2). В ходе экспериментов положение сфероробота и ротора определялось с помощью системы захвата движения по световозвращающим маркерам, размещенным на тележке и роторе. Траектория сфероробота, восстановленная по экспериментальным данным, приведена на рисунке 4 сплошной линией.

Как показали эксперименты, на начальном этапе реальная траектория достаточно хорошо совпадает с теоретической. Однако после установления постоянных управляющих воздействий сфероробот движется не по окружности, а по траектории с увеличивающимся радиусом кривизны. Зависимость радиуса кривизны от пройденного пути приведена на рисунке 5. Для каждого значения пройденного пути радиус кривизны вычислялся методом наименьших квадратов по 200 ближайшим точкам траектории (что соответствует двум секундам движения сфероробота). Как видно из рисунка 5, радиус кривизны траектории увеличивается от значения, близкого к теоретическому (отмеченному на рисунке пунктирной линией при  $\rho = 73$  мм), до значения, соответствующего движению по прямой, с точностью до погрешностей измерения. Такое увеличение радиуса кривизны объясняется действием сил трения качения, в особенности трения верчения<sup>2</sup>, которое приводит к постепенному уменьшению вращения сфероробота вокруг вертикали.

<sup>2</sup>Под силой трения верчения мы понимаем вертикальную компоненту момента сил трения качения.

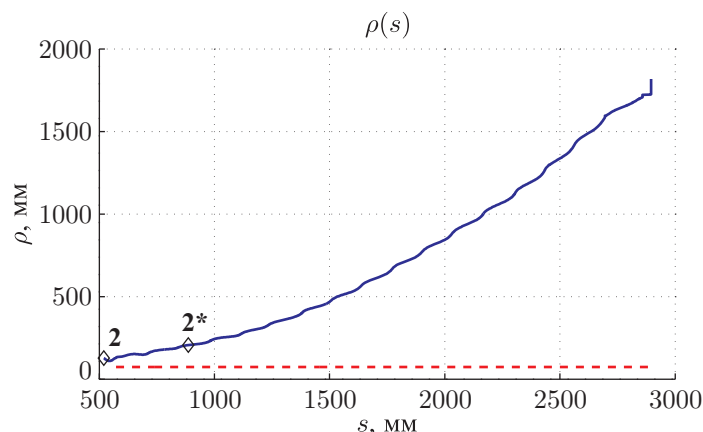


Рис. 5. Зависимость радиуса кривизны траектории от пройденного пути.

По результатам проведенных экспериментов можно сделать вывод, что *движение по окружности при постоянных управлениях (2.13) на практике не реализуется*. Его использование возможно только в случае компенсации сил трения, что ограничивается техническими и конструктивными характеристиками приводов.

С другой стороны, данный маневр можно использовать для поворота во время движения, однако при этом следует учесть, что угол поворота будет зависеть от коэффициента трения верчения, а поворот на большие углы невозможен с помощью одного маневра. С учетом данных недостатков рассмотрим движение сфероробота при импульсном изменении управляющих воздействий.

### 3.2. Импульсное управление

Рассмотрим движение, когда при постоянном значении управления  $\dot{\theta}(t)$  управляющее воздействие  $\dot{\varphi}(t)$  включается на некоторое время, после чего отключается. На практике это соответствует тому, что при движении сфероробота по прямой с постоянной скоростью ротор разгоняется, а через некоторый промежуток времени вращение ротора прекращается, при этом движение тележки по ободу сферы продолжается. Зависимость управлений от времени будем задавать в следующем виде:

$$\dot{\theta}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 = 0, \\ 1.57 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)^2, & t_1 \leq t \leq t_1^* = 1.5, \\ 1.57, & t > t_1^*, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_2 = 1.9, \\ 11.304 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{19}{30}\pi\right)^2, & t_2 \leq t \leq t_2^* = 3.4, \\ 11.304, & t_2^* < t \leq t_3 = 6.9, \\ 11.304 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{23}{10}\pi\right)^2, & t_3 \leq t \leq t_3^* = 8.4, \\ 0, & t > t_3^*. \end{cases} \quad (3.4)$$

Графики зависимостей управляющих воздействий от времени приведены на рисунке 6а. Траектория, по которой движется сфероробот при управлении (3.3), (3.4) в рамках рас-

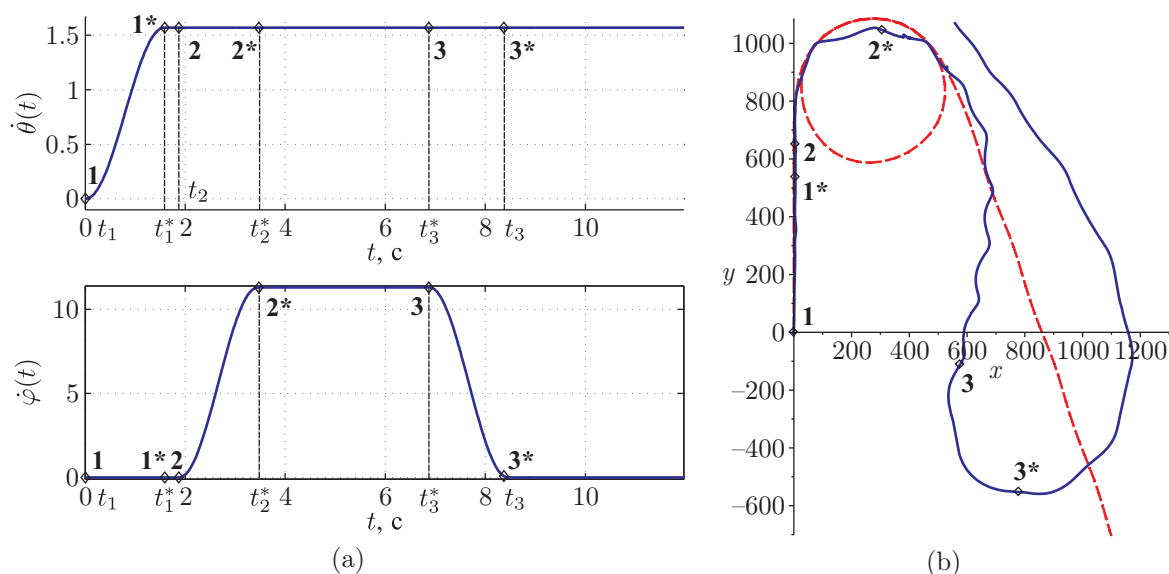


Рис. 6. Управляющие воздействия (а) и соответствующая им траектория движения сфероробота (б).

смотренной теоретической модели, изображена на рисунке 6б пунктирной линией. Данную траекторию можно разбить на три участка: ускоренное движение по прямой  $t \in [t_1, t_1^*]$ , движение по траектории, близкой к окружности  $t \in [t_2^*, t_3]$ , движение по траектории, близкой к прямой  $t > t_3^*$ . Угол между прямыми, по которым движется сфероробот на первом и на третьем участках, зависит от продолжительности импульса  $\Delta t_\varphi = t_3 - t_2^*$ .

Траектория движения сфероробота при управляющих воздействиях (3.3), (3.4), восстановленная из экспериментальных данных, приведена на рисунке 6б сплошной линией. Маркерами на рисунке изображены положения сфероробота в моменты времени, соответствующие изменению управляющих воздействий. По номеру маркера на рисунке 6б можно определить положение сфероробота в момент соответствующего изменения управляющего воздействия. На промежутке  $t \in [t_1, t_3]$  траектория движения аналогична траектории сфероробота при выполнении маневра (3.1), (3.2). В процессе остановки вращения ротора ( $t \in [t_3, t_3^*]$ ) происходит поворот сфероробота в обратную сторону (относительно первоначального поворота), и через некоторое время траектория сфероробота становится прямолинейной.

В зависимости от величины  $\Delta t_\varphi$  можно выделить три типа возможных движений сфероробота при импульсном управлении.

1. «Длинный» импульс — при продолжительном вращении ротора с постоянной скоростью движение сфероробота успевает приобрести прямолинейный характер. Остановка ротора приводит к повороту в обратном направлении, в результате финальное движение происходит по прямой, параллельной начальному движению. Близким к данному типу является движение сфероробота при управлениях в виде (3.3), (3.4), траектория которого приведена на рисунке 6б.

2. «Средний» импульс — после разгона ротора движение сфероробота не успевает стать прямолинейным, однако за время импульса  $\Delta t_\varphi$  сила трения качения существенно сказывается на траектории движения. В результате после маневра происходит поворот сфероробота на некоторый угол. Данный угол сильно зависит от коэффициента трения, а траектория сфероробота существенно отличается от теоретической. Пример экспериментальной траек-

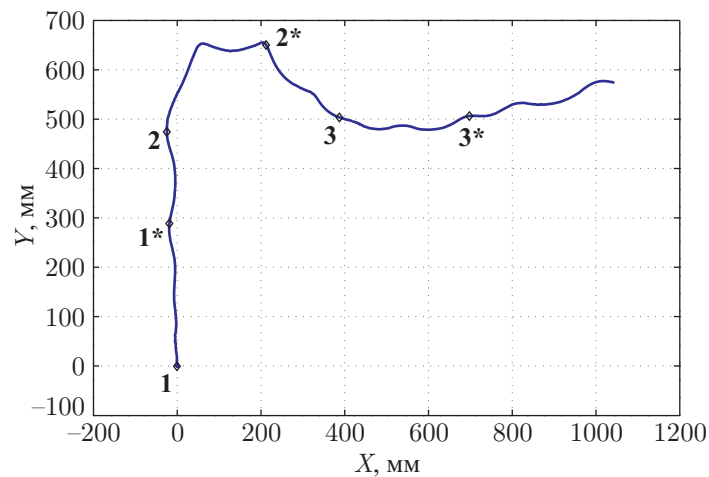


Рис. 7. Траектория движения сфероробота при  $\Delta t_\varphi = 1$  с.

тории, соответствующей данному типу поведения при длине импульса  $\Delta t_\varphi = 1$  с, приведен на рисунке 7.

3. «Короткий» импульс — за время действия импульса силы трения качения не успевают существенно повлиять на траекторию движения сфероробота. В результате реальная траектория наиболее близка к теоретической. При этом угол поворота можно регулировать как амплитудой импульса (максимальным значением  $\dot{\varphi}$ ), так и его длиной (в определенных пределах). Примеры теоретически рассчитанных траекторий с поворотом на разные углы в зависимости от величины  $\Delta t_\varphi$ , приведены на рисунке 8.

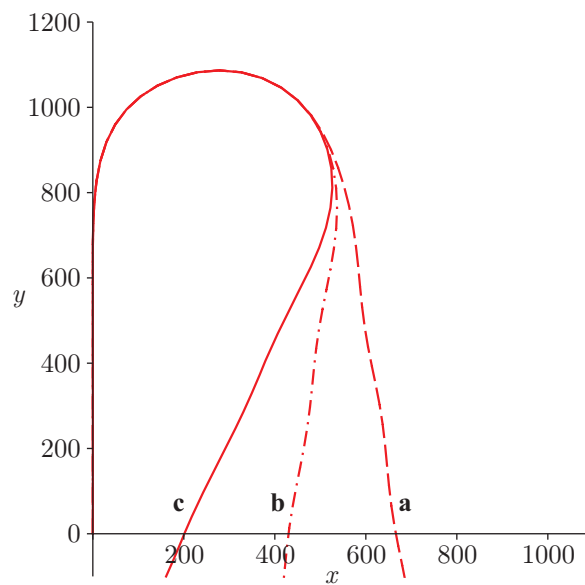


Рис. 8. Угол поворота сфероробота в зависимости от длительности «импульса» вращения ротора: (a)  $\Delta t_\varphi = 0.1$  с, (b)  $\Delta t_\varphi = 0.25$  с, (c)  $\Delta t_\varphi = 0.4$  с.

## 4. Заключение

Результаты теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в данной работе, а также в работе [13], позволяют сделать следующие выводы.

1. Управление при помощи гейтов может быть использовано для управления движением сферического робота комбинированного типа. Для повышения точности движения и маневренности полезно было бы разработать гейты, обеспечивающие плавный переход с одного стационарного движения на другое (например, соединить два движения по прямой).

2. Интересно было бы рассмотреть теоретическую модель аналогичного сфероробота с системой обратных связей. Введение в системы обратных связей позволит повысить эффективность управления с помощью гейтов и устойчивость движения.

3. Наиболее важной задачей для сферических роботов данного типа является разработка модели движения с учетом возникающих сил трения (в особенности трения верчения), ввиду их существенного влияния на траекторию и характер движения.

## 5. Благодарности

Авторы благодарят А. В. Борисова, И. С. Мамаева, Е. Н. Пивоварову за плодотворные обсуждения полученных результатов.

## Список литературы

- [1] Chase R., Pandya A. A review of active mechanical driving principles of spherical robots // *Robotics*, 2012, vol. 1, no. 1, pp. 3–23.
- [2] Crossley V. A. A literature review on the design of spherical rolling robots. Pittsburgh, Pa., 2006. 6 pp.
- [3] Ylikorpi T., Suomela J. Ball-shaped robots // *Climbing and walking robots: Towards new applications* / H. Zhang (Ed.). Vienna: InTech, 2007. P. 235–256. *См. также:* Иликорпи Т., Суомела Ю. Сферические роботы // *Мобильные роботы: Робот-колесо и робот-шар* / А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Ю. Л. Караваяев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. С. 29–50.
- [4] Karavaev Yu. L., Kilin A. A., The dynamics and control of a spherical robot with an internal omniwheel platform // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 134–152. *См. также:* Караваяев Ю. Л., Килин А. А. Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой // *Нелинейная динамика*, 2015, т. 11, № 1, с. 187–204.
- [5] Иванова Т. Б., Пивоварова Е. Н. Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 3, с. 507–520.
- [6] Svinin M., Bai Y., Yamamoto M. Dynamic model and motion planning for a pendulum-actuated spherical rolling robot // *Proc. of the 2015 IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 656–661.
- [7] Zhan Q. Motion planning of a spherical mobile robot // *Motion and operation planning of robotic systems* / G. Carbone, F. Gomez-Bravo (Eds.). Cham: Springer, 2015. P. 361–381.
- [8] Gajbhiye S., Banavar R. N. Geometric modeling and local controllability of a spherical mobile robot actuated by an internal pendulum // *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2015.
- [9] Borisov A. V., Mamaev I. S. Two non-holonomic integrable problems tracing back to Chaplygin // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 191–198.

- [10] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307.
- [11] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76.
- [12] Morinaga A., Svinin M., Yamamoto M. A motion planning strategy for a spherical rolling robot driven by two internal rotors // IEEE Trans. on Robotics, 2014, vol. 30, no. 4, pp. 993–1002.
- [13] Kilin A. A., Pivovarova E. N., Ivanova T. B. Spherical robot of combined type: Dynamics and control // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 6, pp. 716–728.
- [14] Koiller J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 127–152.
- [15] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 4, с. 721–754.
- [16] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328. *См. также:* Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202.

## Experimental research of dynamic of spherical robot of combined type

Alexander A. Kilin<sup>1</sup>, Yury L. Karavaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>2</sup>M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Studencheskaya st. 7, Izhevsk, 426069, Russia

<sup>1</sup>aka@rcd.ru, <sup>2</sup>karavaev\_yury@istu.ru

This paper presents the results of experimental investigations for the rolling of a spherical robot of combined type actuated by an internal wheeled vehicle with rotor on a horizontal plane. The control of spherical robot based on nonholonomic dynamical by means of gaits. We consider the motion of the spherical robot in case of constant control actions, as well as impulse control. A number of experiments have been carried out confirming the importance of rolling friction.

MSC 2010: 93B18, 93B52

Keywords: spherical robot of combined type, dynamic model, control by means of gaits, rolling friction

Received November 05, 2015, accepted December 02, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 721–734 (Russian)

