



**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 532.3

MSC 2010: 70Q05, 70Hxx, 76Vxx

**Управление движением твердого тела в жидкости  
с помощью двух подвижных масс**

**А. А. Килин, Е. В. Ветчанин**

В данной работе мы рассматриваем задачу движения в идеальной жидкости твердого тела с двумя внутренними массами, которые перемещаются по окружностям. Показана управляемость системы на нулевом уровне первых интегралов. Построены элементарные гейты, позволяющие реализовать перемещение тела из одной точки в другую. Указаны препятствия к управляемости движения вдоль произвольной траектории.

Ключевые слова: идеальная жидкость, уравнения Кирхгоффа, управление с помощью гейтов

---

Получено 03 сентября 2015 года  
После доработки 20 ноября 2015 года

---

Работа А. А. Килина выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00395-а. Работа Е. В. Ветчанина выполнена в рамках гранта РФФИ № 15-08-09093-а.

---

Килин Александр Александрович  
[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)  
Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1  
Институт математики и механики УрО РАН  
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Ветчанин Евгений Владимирович  
[eugene186@mail.ru](mailto:eugene186@mail.ru)  
Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова  
426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

## 1. Введение и исторические комментарии

Вопросы, связанные с самопродвижением тел в жидкости, имеют очевидное практическое значение, привлекая внимание ученых, работающих в различных областях, начиная от микробиологии (движение микроорганизмов, транспорт и диффузия лекарственных препаратов) и заканчивая созданием роботов-рыб. В данной работе рассматривается задача об управляемом движении тела в жидкости только за счет изменения распределения масс внутри тела. Теоретическая возможность такого передвижения была показана в [18]. Затем в работах [7, 13, 17] приведен ряд примеров управления телом за счет перемещения внутри тела точечной массы. Однако тело с перемещающейся внутри по сложному закону материальной точкой достаточно сложно реализовать технически. В связи с этим в настоящей работе проводится анализ движения в идеальной жидкости тела, несущего две материальные точки, которые движутся по круговым траекториям по заранее заданному закону. Такая система достаточно просто реализуема и представляет бóльший практический интерес.

В связи с самопродвижением в жидкости тел с неизменяемой оболочкой отметим также работы [5, 6, 12], посвященные движению (в том числе управляемому) тел в присутствии вихревых структур.

## 2. Уравнения движения и первые интегралы

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу о движении в бесконечном объеме идеальной несжимаемой жидкости твердого тела, несущего две материальные точки массы  $m$ , способные двигаться по окружностям радиуса  $r$ . Центры окружностей находятся с некоторой точкой  $o$  тела на одной прямой и отстоят от нее на расстояние  $R$  (см. рис. 1).

Пусть  $X, Y$  — оси неподвижной декартовой системы координат. Свяжем с телом подвижную декартову систему координат  $o\xi\eta$ . Тогда положение тела определяется тремя параметрами: углом поворота  $\alpha$  подвижной системы координат относительно неподвижной и радиус-вектором  $\mathbf{r} = (x, y)$  начала координат подвижной системы. Пусть  $(u, v)$  — компоненты абсолютной скорости  $\mathbf{v}$  точки  $o$  в подвижной системе координат  $o\xi\eta$ . Тогда

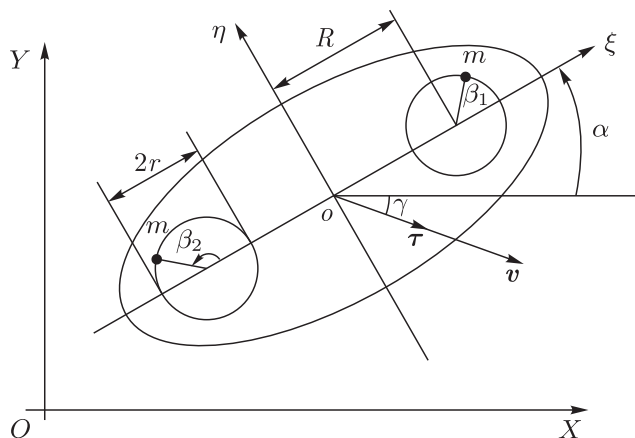


Рис. 1. Двумерное твердое тело, несущее две материальные точки массы  $m$ .

справедливы следующие кинематические соотношения:

$$\dot{x} = u \cos \alpha - v \sin \alpha, \quad \dot{y} = u \sin \alpha + v \cos \alpha, \quad \dot{\alpha} = \omega, \quad (2.1)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения тела. Положение материальных точек на окружностях будем задавать углами  $\beta_1, \beta_2$ , отсчитываемыми от оси  $\xi$  против часовой стрелки. При этом угловые скорости вращения точек  $\Omega_i(t) = \dot{\beta}_i(t)$  будем считать известными функциями времени (управлениями).

Рассмотрим далее вопрос об управлении движением тела с помощью надлежащего выбора зависимостей угловых скоростей вращения  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  материальных точек от времени.

## 2.2. Уравнения движения и первые интегралы

Уравнения движения рассматриваемой системы (тело с двумя материальными точками, помещенное в жидкость) можно записать в виде уравнений Кирхгофа (см., например, [19]):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) - \omega \frac{\partial T}{\partial v} = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) + \omega \frac{\partial T}{\partial u} = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) + u \frac{\partial T}{\partial v} - v \frac{\partial T}{\partial u} = 0, \quad (2.2)$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы (тело + точки + жидкость).

Известно, что систему координат, жестко связанную с телом, можно выбрать так, что кинетическая энергия  $T_{bf}$  системы (тело + жидкость) примет вид

$$T_{bf} = \frac{a_1 u^2}{2} + \frac{a_2 v^2}{2} + \frac{b \omega^2}{2}.$$

Здесь постоянные коэффициенты  $a_1, a_2$  включают в себя массу тела и присоединенные массы тела,  $b$  — момент инерции и присоединенный момент тела. Так, если считать рассматриваемое тело эллипсом с полуосями  $d_1$  и  $d_2$ , то

$$a_1 = M + \pi \rho d_2^2, \quad a_2 = M + \pi \rho d_1^2, \quad b = \frac{M}{4}(d_1^2 + d_2^2) + \frac{\pi \rho}{8}(d_1^2 - d_2^2)^2,$$

где  $M$  — масса тела,  $\rho$  — плотность жидкости. Полная энергия системы получается добавлением к  $T_{bf}$  кинетической энергии материальных точек:

$$T = \frac{a_1 u^2}{2} + \frac{a_2 v^2}{2} + \frac{b \omega^2}{2} + \frac{m}{2} [(u + \dot{\xi}_1 - \omega \eta_1)^2 + (v + \dot{\eta}_1 + \omega \xi_1)^2 + (u + \dot{\xi}_2 - \omega \eta_2)^2 + (v + \dot{\eta}_2 - \omega \xi_2)^2], \quad (2.3)$$

где  $(\xi_i, \eta_i)$  — координаты  $i$ -й точки ( $i = 1, 2$ ) в системе координат  $o\xi\eta$ . Данные координаты и их производные выражаются через углы  $\beta_i$  следующим образом:

$$\xi_1 = r \cos \beta_1 + R, \quad \xi_2 = r \cos \beta_2 - R, \quad \eta_i = r \sin \beta_i, \\ \dot{\xi}_i = -\Omega_i r \sin \beta_i, \quad \dot{\eta}_i = \Omega_i r \cos \beta_i.$$

Уравнения (2.1), (2.2) с кинетической энергией (2.3), дополненные соотношениями  $\dot{\beta}_i = \Omega_i$ , представляют собой полную систему уравнений, описывающую движения тела и материальных точек.

Данные уравнения движения допускают три первых интеграла [18]:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial u} \cos \alpha - \frac{\partial T}{\partial v} \sin \alpha = c_1, \\ P_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial u} \sin \alpha + \frac{\partial T}{\partial v} \cos \alpha = c_2, \\ P_3 &= x \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - y \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial T}{\partial \omega} = c_3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 3. Полная управляемость на нулевом уровне первых интегралов

Рассмотрим вопрос об управляемости тела в случае, когда значения первых интегралов  $c_i$  равны нулю. Данное условие, в частности, выполняется, если движение начинается из состояния покоя. При этом из уравнений (2.4) следует

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial \omega} = 0. \quad (3.1)$$

В силу невырожденности  $T$  по скоростям  $u, v, \omega$  мы можем выразить данные скорости из уравнений (3.1):

$$\begin{aligned} u &= \frac{mr}{A_1} \left( (S\Phi_1 + \sin \beta_1)\Omega_1 + (S\Phi_2 + \sin \beta_2)\Omega_2 \right), \\ v &= -\frac{mr}{A_2} \left( (C\Phi_1 + \cos \beta_1)\Omega_1 + (C\Phi_2 + \cos \beta_2)\Omega_2 \right), \\ \omega &= \Phi_1\Omega_1 + \Phi_2\Omega_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= a_i + 2m, \quad S = \sin \beta_1 + \sin \beta_2, \quad C = \cos \beta_1 + \cos \beta_2, \\ \Phi_i &= \frac{-A_1 A_2 m r (r \pm R \cos \beta_i) + A_1 m^2 r^2 C \cos \beta_i + A_2 m^2 r^2 S \sin \beta_i}{A_1 A_2 (b + 2m(r^2 + R^2) + 2mrR(\cos \beta_1 - \cos \beta_2)) - A_2 m^2 r^2 S^2 - A_1 m^2 r^2 C^2}. \end{aligned}$$

Здесь знак «+» перед  $R$  берется при  $i = 1$  и «-» при  $i = 2$ .

Подставив (3.2) в соотношения (2.1), приведем уравнения движения на нулевом уровне интегралов  $c_i$  к стандартному для теории управления виду

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^2 V_i \Omega_i, \quad (3.3)$$

где  $z = (x, y, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  — вектор в пятимерном конфигурационном пространстве  $G = \{z\}$ , векторные поля  $V_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} V_1 &= (X_1, Y_1, \Phi_1, 1, 0), \quad V_2 = (X_2, Y_2, \Phi_2, 0, 1), \\ X_i &= \frac{mr}{A_1} (S\Phi_i + \sin \beta_i) \cos \alpha + \frac{mr}{A_2} (C\Phi_i + \cos \beta_i) \sin \alpha, \\ Y_i &= \frac{mr}{A_1} (S\Phi_i + \cos \beta_i) \sin \alpha - \frac{mr}{A_2} (C\Phi_i + \cos \beta_i) \cos \alpha, \end{aligned}$$

а в качестве управлений выступают угловые скорости  $\Omega_i$ .

Рассмотрим вопрос об управляемости системы (3.3). Оказывается справедлива следующая теорема.



**Теорема 1.** Система (3.3) вполне управляема.

*Доказательство.* Следуя известному подходу [20], рассмотрим пять векторных полей

$$\mathbf{V}_1, \quad \mathbf{V}_2, \quad [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2], \quad [\mathbf{V}_1, [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]], \quad [\mathbf{V}_2, [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]], \quad (3.4)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — коммутатор векторных полей. Согласно теореме Рашевского–Чжоу [20], если среди полей  $\mathbf{V}_i$  и полей, составленных из них последовательным применением операции коммутирования, можно указать (в нашем случае) пять векторных полей, независимых в некоторой области  $G$ , то из любой точки этой области можно прийти в любую другую, смещаясь конечное число раз по траекториям полей  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ .

Условие линейной независимости векторов (3.4) состоит в том, что определитель матрицы  $5 \times 5$ , составленной из их компонент, отличен от нуля. Значение этого определителя с точностью до умножения на положительно определенную функцию равно

$$(a_1 - a_2)Q(\beta_1, \beta_2, m, r, R, b, a_1, a_2), \quad (3.5)$$

где  $Q$  — функция достаточно сложного вида. Поскольку мы рассматриваем тело эллиптической формы, то  $a_1 - a_2 \neq 0$ . Таким образом, при заданных параметрах системы уравнение

$$Q(\beta_1, \beta_2, m, r, R, b, a_1, a_2) = 0 \quad (3.6)$$

задает в конфигурационном пространстве  $G$  границу, разделяющую области управляемого по Рашевскому–Чжоу движения, в которых  $Q > 0$  или  $Q < 0$ .

Для доказательства управляемости системы (3.3) во всех точках конфигурационного пространства  $G$  покажем, что существуют управления, позволяющие перевести систему из области  $Q > 0$  в область  $Q < 0$ , а также из этих областей на их границу  $Q = 0$ .

Выберем в качестве начальных условий уравнения (3.3) произвольную точку  $\mathbf{z}_0$ , лежащую на поверхности (3.6). Из последних двух уравнений (3.3) следует, что с помощью управлений  $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)$  можно реализовать движение по траектории с любой наперед заданной зависимостью  $\beta_i(t)$ . Так как функция  $Q$  зависит только от  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , для любой точки границы  $\mathbf{z}_0$  существуют постоянные управления  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ , с помощью которых систему за заданное время можно перевести в области  $Q > 0$  и  $Q < 0$  соответственно. Очевидно, данные управления, взятые с обратным знаком, переводят систему из областей  $Q > 0$  и  $Q < 0$  в произвольную точку на границе (3.6). Кроме того, комбинация данных управлений, взятых с нужными знаками, переводит систему из области  $Q > 0$  в область  $Q < 0$  (или наоборот). Таким образом, рассматриваемая система вполне управляема. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Управляемость системы (3.3) во всем конфигурационном пространстве  $G$  можно показать, построив с помощью операций коммутирования другой (отличающийся от (3.4)) набор векторных полей, который не будет вырождаться в точках поверхности (3.6). Однако для этого необходимо вычислить последовательные коммутаторы большего числа векторных полей. Это приводит к чрезвычайно громоздким выражениям, аналитический анализ которых практически невозможен.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Условие  $a_1 \neq a_2$  является существенным. Действительно, если  $a_1 = a_2 = a$ , то из первых двух равенств (3.1) и соотношений (2.1) следует существование двух первых интегралов

$$\begin{aligned} ax + m[(x + \xi_1 \cos \alpha - \eta_1 \sin \alpha) + (x + \xi_2 \cos \alpha - \eta_2 \sin \alpha)] &= k_1, \\ ay + m[(y + \xi_1 \sin \alpha - \eta_1 \cos \alpha) + (y + \xi_2 \sin \alpha + \eta_2 \cos \alpha)] &= k_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$k_1, k_2 = \text{const.}$$

Выражения в квадратных скобках — это координаты подвижных материальных точек в неподвижных осях. Из соотношений (3.7) следует, что  $x, y$  — ограниченные функции времени, то есть тело не может уйти сколь угодно далеко от своего первоначального положения.

Из доказанной теоремы следует, что справедливо следующее утверждение:

*гидродинамически несимметричное твердое тело, движущееся в идеальной несжимаемой жидкости, можно перевести из любого начального в любое конечное положение с помощью движения двух внутренних материальных точек по окружностям одинакового радиуса. При этом начальные и конечные положения этих материальных точек на окружностях могут быть произвольными.*

## 4. Явное управление

### 4.1. Управление при помощи гейтов

Будем предполагать, что углы  $\beta_i(t)$ , определяющие положение подвижных материальных точек, — периодические функции времени с одним и тем же периодом  $T = 2\pi/\omega$ . Иными словами, мы рассматриваем замкнутые кривые в плоскости управляемых параметров  $(\beta_1, \beta_2)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Отметим, что в задачах подобного типа рассматривать именно замкнутые кривые в пространстве управляемых параметров  $\beta$  вполне естественно, поскольку самопродвижение как живых организмов, так и различных технических устройств обычно сопровождается периодическим изменением их формы или (и) циклическим перераспределением внутренних масс.

Каждой такой кривой соответствует (не обязательно замкнутая!) траектория в пространстве позиционных переменных  $\mathbf{g}$  (в нашем случае в  $E(2)$ ). В теории управления замкнутые кривые в пространстве  $\beta$ , которые обеспечивают наиболее «удачные» элементарные движения (например, разворот на месте или почти поступательное движение в каком-то направлении) в пространстве  $\mathbf{g}$ , принято называть *гейтами* (см., например, [8, 10, 11, 16]). Найдя для конкретной задачи ряд удачных гейтов, можно из них конструировать более сложные движения, решая тем самым те или иные задачи управления и оптимизации [8].

Для каждой кривой на плоскости  $(\beta_1, \beta_2)$  с помощью уравнений (3.3) найдем траекторию перемещения тела  $x(t)$ ,  $y(t)$  и угол поворота  $\alpha(t)$ . При этом скорость прохождения кривой в плоскости  $(\beta_1, \beta_2)$  влияет лишь на скорость прохождения телом траектории, но не на ее форму. Из (3.3) следует, что  $\dot{\alpha}$  — периодическая функция с периодом  $T$  и, следовательно,

$$\alpha(t) = \Omega t + \Phi(t), \quad (4.1)$$

где  $\Omega$  — среднее значение функции  $\dot{\alpha}(t)$  за период, а  $\Phi(t)$  —  $T$ -периодическая функция. Обозначив  $z = x + iy$ , первые два уравнения (3.3) запишем в виде

$$\dot{z} = \xi e^{i\alpha},$$

где  $\xi(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ . С учетом (4.1) получаем

$$\dot{z} = Z(t) \exp(i\Omega t),$$

где  $Z$  —  $T$ -периодическая функция. Разлагая ее в ряд Фурье и интегрируя последнее равенство по  $t$ , получим зависимость координат точки  $o$  тела от времени

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z_n}{i(n\omega + \Omega)} e^{i(n\omega + \Omega)t} + \text{const}, \quad (4.2)$$

где  $z_n$  — коэффициенты Фурье функции  $Z(t)$ . Если  $\Omega \neq n\omega$ , то ряд (4.2) сходится и представляет собой ограниченную функцию времени.

Равенство  $\Omega = 0$  — простейшее резонансное соотношение между частотами  $\Omega$  и  $\omega$ , при котором может быть создана тяговая сила: если  $z_0 \neq 0$  (типичная ситуация), то среднее значение  $\dot{z}$  отлично от нуля.

Пусть  $\gamma$  — замкнутый контур на плоскости  $(\beta_1, \beta_2)$ . Из третьего уравнения (3.3) следует, что при однократном прохождении этого контура приращение угла  $\alpha$  составляет

$$\Delta\alpha = T\Omega = \iint_S \left( \frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_2} \right) d\beta_1 d\beta_2,$$

где  $S$  — область, ограниченная контуром  $\gamma$ . Типичные линии уровня подынтегральной функции изображены на рисунке 2. Для обеспечения эффективного продвижения точки  $O$  тела (то есть ненулевых средних скоростей  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ) контур  $\gamma$  целесообразно выбирать так, чтобы приращение  $\Delta\alpha$  обращалось в нуль, следовательно, область  $S$  должна быть в некотором смысле «симметрична» относительно нулевого уровня подынтегральной функции (на рисунке 2 он выделен жирной линией). Таким свойством обладает контур  $\beta_1 = +\pi t$ ,  $\beta_2 = -\pi t$  (точки  $-\pi$  и  $\pi$  отождествлены): грузики, выставленные в начальный момент времени в крайнее правое положение, начинают вращаться в противоположные стороны с одинаковыми по модулю угловыми скоростями.

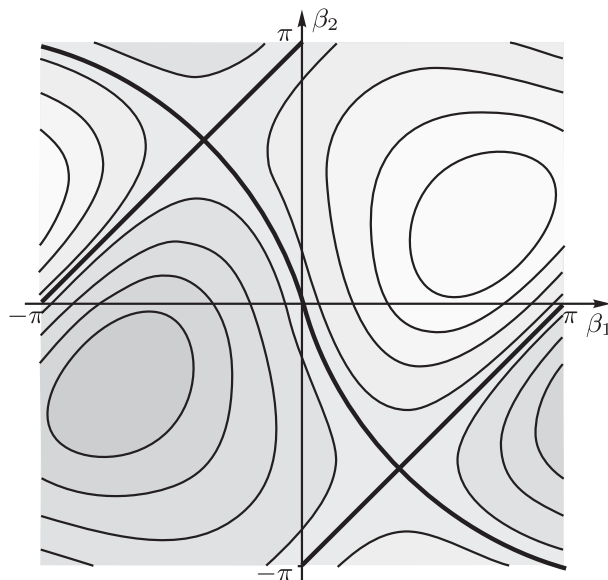


Рис. 2. Типичные линии уровня функции  $\frac{\partial\Phi_2}{\partial\beta_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\beta_2}$ . Нулевой уровень выделен жирной линией.

Центр тела при этом (рис. 3) движется «почти» прямолинейно. Отметим, что направление, в котором центр тела смещается «в среднем», существенно зависит от начального расположения грузиков.

Еще один гейт можно получить, если грузики вращать по закону  $\beta_1 = \omega t$ ,  $\beta_2 = \omega t + \pi$ . При этом, очевидно, тело будет вращаться с угловой скоростью

$$\dot{\alpha} = \frac{-2\omega mr(r + R \cos \omega t)}{b + 2mr^2 + 2mR^2 + 4mrR \cos \omega t}, \quad (4.3)$$

а его центр будет оставаться на месте.

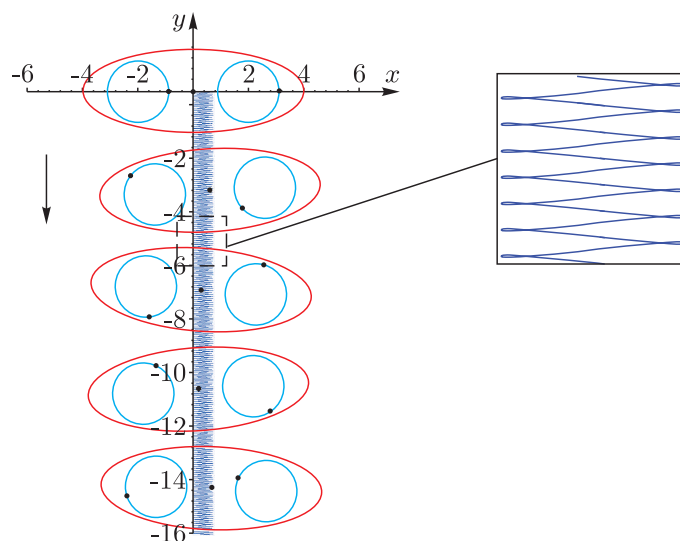


Рис. 3. Траектория центра тела для  $\beta_1 = -\beta_2 = \pi t$ .

Имея в своем распоряжении два гейта, обеспечивающих прямолинейное движение и разворот, мы можем с нужной точностью перевести тело из любой точки в наперед заданную.

#### 4.2. Управление движением вдоль произвольной траектории

Рассмотрим вопрос об управляемом движении тела вдоль заданной траектории  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  при произвольном вращении тела  $\alpha(t)$ . Для простоты далее будем считать, что заданная траектория не содержит точек возврата и остановок, то есть  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{y}(t)$  не обращаются в нуль одновременно на рассматриваемом промежутке времени (возможно, за исключением начальной и конечной точек). Для исследования управляемости мы будем применять методы, развиваемые в [2–4], где указаны явные алгоритмы для движения системы вдоль произвольной траектории. Однако, как будет показано ниже, ввиду нелинейной зависимости скоростей от управляющих воздействий (так как  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  зависят и от  $\beta_i$ , и от  $\dot{\beta}_i$ ) управляемое движение возможно не по всем траекториям.

Введем естественную параметризацию рассматриваемой траектории, тогда скорость тела может быть представлена в виде

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \xi(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s), \quad (4.4)$$

где  $s$  — длина пройденной за время  $t$  траектории, а  $\xi(s)$  и  $\boldsymbol{\tau}(s) = (\cos \gamma(s), \sin \gamma(s))$  — абсолютная величина скорости и единичный вектор, задающий ее направление (касательный к траектории) в точке  $s$  (см. рис. 1).

Из условия отсутствия точек возврата следует, что  $\xi(s)$  не обращается в нуль на рассматриваемой траектории. Подставив (4.4) в первые три уравнения системы (3.3) и сделав замену переменных и времени

$$\theta_1 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}, \quad \delta = \gamma - \alpha, \quad \xi(t) dt = ds, \quad (4.5)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\tau}_{rel}, \quad \delta' = \gamma' - (\mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta}'), \quad (4.6)$$



где

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 K, & A_{21} &= -a_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 K, \\ A_{12} &= a_2 \cos \theta_1 (\sin \theta_2 K + 4m^2 r^2 (r \sin \theta_2 + R \sin \theta_1)) - 8m^3 r^3 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_2^2, \\ A_{22} &= a_1 \sin \theta_1 (\sin \theta_2 K + 4m^2 r^2 (r \sin \theta_2 + R \sin \theta_1)) - 4m^2 r^2 (2mr \sin \theta_1 \sin \theta_2 + a_1 R) \cos \theta_2^2, \\ b_1 &= \frac{a_1 a_2 K}{2mr} - D, & b_2 &= -2mr \cos \theta_1 \cos \theta_2 (Ra_1 a_2 - 2mr \sin \theta_1 \sin \theta_2 (a_1 - a_2)), \\ K &= 2mr(b + 2mR^2 + 2mRr \sin \theta_1 \sin \theta_2), \\ D &= a_1 a_2 (b + 2mR^2 + 2mr^2 + 4mRr \sin \theta_1 \sin \theta_2) - 4m^2 r^2 \cos^2 \theta_2 (a_1 \cos \theta_1^2 + a_2 \sin \theta_1^2), \end{aligned}$$

штрих обозначает дифференцирование по переменной  $s$ ,  $\tau_{rel} = (\cos \delta, \sin \delta)$  — единичный касательный к траектории вектор, записанный в проекциях на оси, связанные с телом, а  $\gamma'$  имеет смысл кривизны траектории.

Система (4.6) с учетом (4.5) описывает эволюцию управлений  $\beta_i$  и ориентации тела  $\alpha$ , при которых реализуется движение вдоль заданной траектории. Таким образом, вопрос о возможности движения вдоль заданной траектории сводится к поиску (или доказательству существования) начальных условий системы (4.6), для которых существует непрерывное решение на всем промежутке времени (с учетом замены времени (4.5)). Препятствием для осуществления движения тела вдоль заданной траектории может являться существование особенностей потока, в частности, «предельных» множеств в системе (4.6).

Проанализируем особенности системы (4.6). Нетрудно показать, что  $\det \mathbf{A} \sim \sin \theta_2$ . Следовательно, плоскость  $\theta_2 = 0$  является особой для рассматриваемой системы. Действительно, выразив  $\theta'_i$  из уравнений (4.6), получим

$$\begin{aligned} \theta'_1 &= \frac{1}{\cos \theta_2} (f_1(\theta_1, \theta_2, \delta) + f_2(\theta_1, \theta_2) \theta'_2), \\ \theta'_2 &= \frac{a_1 \cos \theta_1 \cos \delta + a_2 \sin \theta_1 \sin \delta}{2mr \sin \theta_2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — функции, не имеющие особенностей, явный вид которых можно получить, обратив матрицу  $\mathbf{A}$ .

Из (4.7) видно, что при приближении к плоскости  $\theta_2 = 0$  скорости  $\theta'_i$  стремятся к бесконечности. Исключение составляют две кривые на этой плоскости, задаваемые соотношением

$$a_1 \cos \theta_1 \cos \delta + a_2 \sin \theta_1 \sin \delta = 0, \quad (4.8)$$

на которых производные  $\theta'_i$  могут быть конечными. Кривые (4.8) делят плоскость  $\theta_2 = 0$  на две области. К первой области траектории системы притягиваются ( $\theta'_2 \theta_2 < 0$ ), а от второй — отталкиваются ( $\theta'_2 \theta_2 > 0$ ), или, что то же самое, притягиваются в обратном времени. Пример таких кривых и соответствующие области на плоскости  $\theta_2 = 0$  приведены на рисунке 4. С помощью разложения (4.7) в ряд вблизи плоскости  $\theta_2 = 0$  можно показать, что данное притяжение (отталкивание) к плоскости происходит за конечное время (то есть на конечном интервале изменения  $s$ ). Кроме того, вычислив из (4.6) и (4.7)  $\frac{d\theta_1}{d\theta_2}$  и  $\frac{d\delta}{d\theta_2}$ , можно показать, что траектории «втыкаются» в плоскость  $\theta_2 = 0$  под конечным углом. Таким образом, возможны два варианта поведения фазовых траекторий вблизи плоскости  $\theta_2 = 0$ :

*траектории системы (4.6) либо притягиваются плоскостью  $\theta_2 = 0$  за конечное время, либо трансверсально пересекают ее по кривым (4.8).*

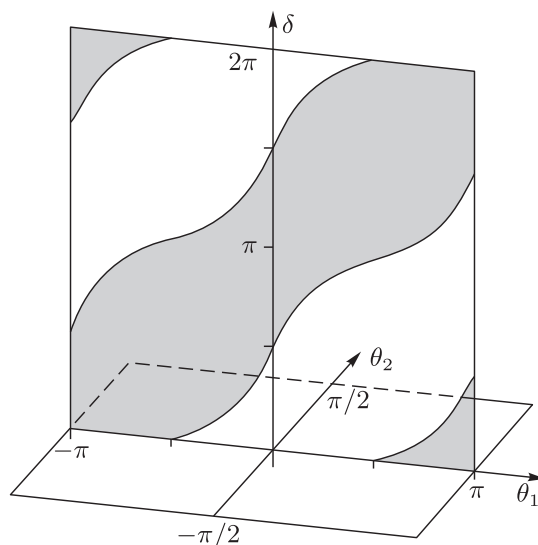


Рис. 4. Особая плоскость  $\theta_2 = 0$  системы (4.6). Серым цветом обозначены области притяжения траекторий, белым — области отталкивания.

Теперь можно сформулировать следующее

**Утверждение 1.** *Движение вдоль заданной траектории возможно, если существуют начальные условия системы (4.6), при которых за заданное время движения траектория системы (4.6) не притягивается к плоскости  $\theta_2 = 0$ .*

Для строгого доказательства данного утверждения необходимо показать, что других притягивающих за конечное время множеств в системе (4.6) нет.

В качестве примера рассмотрим прямолинейное движение тела. В этом случае кривизна траектории равна нулю, следовательно, система (4.6) становится автономной системой трех дифференциальных уравнений. Типичный фазовый портрет данной системы приведен на рисунке 5. Как показывают численные эксперименты, все траектории данной системы притягиваются к плоскости  $\theta_2 = 0$ . Кроме того, система (4.6) в случае прямой, по-видимому, обладает первым интегралом движения. Таким образом, можно высказать следующую гипотезу.

*Движение тела вдоль прямой с помощью управления эксцентриками возможно только на ограниченном отрезке.*

Для строгого доказательства данной гипотезы необходимо показать, что в рассматриваемом случае отсутствуют траектории, не притягивающиеся плоскостью  $\theta_2 = 0$ .

В качестве еще одного примера может быть рассмотрено движение по периодической траектории, то есть случай, когда кривизна  $\gamma'(s)$  является периодической функцией. В этом случае система (4.6) является системой трех дифференциальных уравнений с периодическим возмущением. Системы такого типа можно исследовать, например, с помощью построения трехмерного отображения через период и исследования его методами, развиваемыми в [1, 9, 14, 15].

В заключение данного раздела проиллюстрируем прохождение фазовой траекторией плоскости  $\theta_2 = 0$  на примере гейта, рассмотренного в разделе 4.1 Для этого построим графики функций  $\sin \theta_2$  и  $a_1 \cos \theta_1 \cos \delta + a_2 \sin \theta_1 \sin \delta$  в зависимости от времени (см. рис. 6).

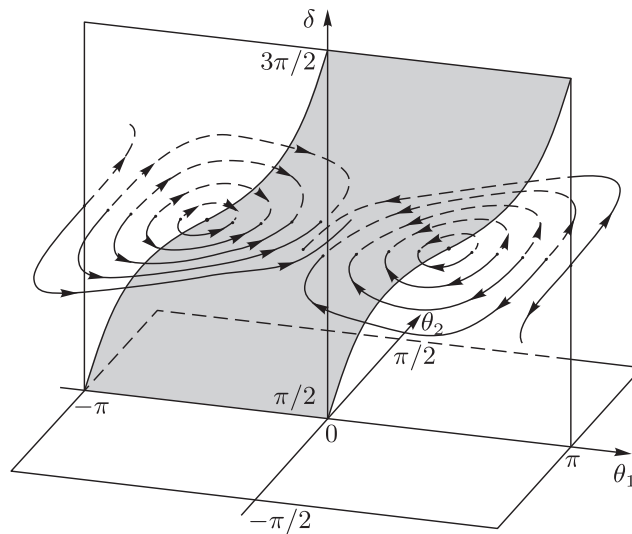


Рис. 5. Фазовые траектории системы (4.6) в случае движения по прямой при  $\delta(0) = \pi$ .

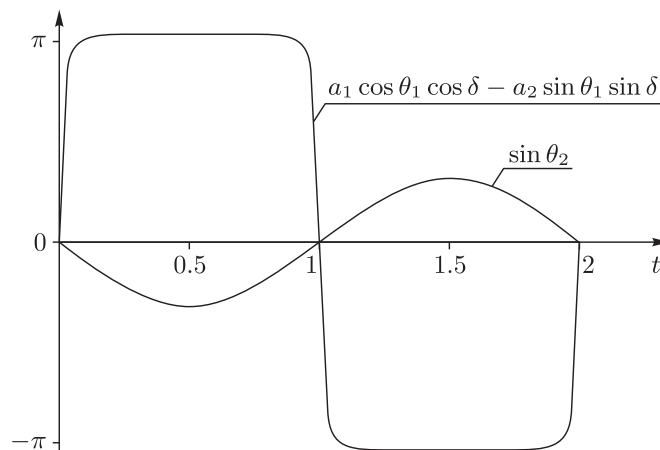


Рис. 6. Зависимости  $\sin \theta_2$  и  $a_1 \cos \theta_1 \cos \delta - a_2 \sin \theta_1 \sin \delta$  от времени при управлении  $\beta_1 = -\beta_2 = \pi t$ .

Как видно из графиков, обе функции обращаются в нуль одновременно, то есть происходит трансверсальное пересечение плоскости  $\theta_2 = 0$  в точках, удовлетворяющих соотношению (4.8).

### Заключение

В заключение приведем ряд нерешенных проблем в рассматриваемой задаче, решения которых интересны как с теоретической, так и с практической точек зрения.

1. Исследование управляемости движения в идеальной жидкости при наличии циркуляции поля скорости жидкости вокруг тела.
2. Поиск более экономичных и эффективных гейтов.
3. Проведение численного моделирования данной задачи, в том числе с учетом вязкости.
4. Создание экспериментальной модели и проведение натуральных экспериментов по управлению ее движением.



## Благодарности

Авторы благодарят А. В. Борисова и И. С. Мамаева за продуктивные обсуждения.

## Список литературы

- [1] Borisov A. V., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [2] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307.
- [3] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control the Chaplygin ball using rotors: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: 2 // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76.
- [4] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859. *См. также:* Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 4, с. 721–754.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos, 2006, vol. 16, no. 1, 013118, 7 pp.
- [6] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Dynamic interaction of point vortices and a two-dimensional cylinder // J. Math. Phys., 2007, vol. 48, no. 6, 065403, 9 pp.
- [7] Childress S., Spagnolie S. E., Tokieda T. A bug on a raft: Recoil locomotion in a viscous fluid // J. Fluid Mech., 2011, vol. 669, pp. 527–556.
- [8] Cochran J., Kanso E., Kelly S. D., Xiong H., Krstic M. Source seeking for two nonholonomic models of fish locomotion // IEEE Trans. on Robotics, 2009, vol. 25, no. 5, pp. 1166–1176.
- [9] Kazakov A. O. Strange attractors and mixed dynamics in the unbalanced rubber ball on a plane problem // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508–520.
- [10] Marsden J. E., Ostrowski J. Symmetries in motion: Geometric foundations of motion control // Nonlinear Sci. Today, 1996. 21 pp.
- [11] Murray R. M., Burdick J. W., Kelly S. D., Radford J. Trajectory generation for mechanical systems with application to robotic locomotion // Robotics: The algorithmic perspective (Houston, Tex., 1998). Natick, Mass.: A. K. Peters, 1998. P. 81–90.
- [12] Ramodanov S. M., Tenenev V. A., Treshev D. V. Self-propulsion of a body with rigid surface and variable coefficient of lift in a perfect fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 547–558. *См. также:* Рамоданов С. М., Тенев В. А., Трещев Д. В. Самопродвижение в идеальной жидкости тела с твердой оболочкой и переменной циркуляцией // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4, с. 799–813.
- [13] Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 100–117.
- [14] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // Докл. РАН, 2006, т. 408, № 2, с. 192–195.
- [15] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [16] Иванова Т. Б., Пивоварова Е. Н. Динамика и управление сферическим роботом с осесимметричным маятниковым приводом // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 3, с. 507–520.



- [17] Козлов В. В., Онищенко Д. А. О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // ПММ, 2003, т. 67, № 4, с. 620–633.
- [18] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ, 2001, т. 65, № 4, с. 592–601.
- [19] Ламб Г. Гидродинамика. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1947. 929 с.
- [20] Ращевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук, 1938, т. 3, № 2, с. 83–94.

## The control of the motion through an ideal fluid of a rigid body by means of two moving masses

Alexander A. Kilin<sup>1</sup>, Evgeny V. Vetchanin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

ul. S. Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

<sup>2</sup>M. T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Studencheskaya st. 7, Izhevsk, 426069, Russia

<sup>1</sup>aka@rcd.ru, <sup>2</sup>eugene186@mail.ru

In this paper we consider the problem of motion of a rigid body in an ideal fluid with two material points moving along circular trajectories. The controllability of this system on the zero level set of first integrals is shown. Elementary “gaits” are presented which allow the realization of the body’s motion from one point to another. The existence of obstacles to a controlled motion of the body along an arbitrary trajectory is pointed out.

MSC 2010: 70Q05, 70Hxx, 76Bxx

Keywords: ideal fluid, Kirchhoff equations, controllability of gaits

Received September 03, 2015, accepted November 20, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 633–645 (Russian)