



**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 531.38

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

**Об устойчивости перманентных вращений диска  
при наличии его соударений  
с горизонтальной плоскостью**

**А. П. Маркеев**

Исследуется устойчивость движения тонкого однородного диска в однородном поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Соударения диска и плоскости считаются абсолютно упругими, а трение пренебрежимо малым. В невозмущенном движении диск вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своего вертикального диаметра, а его центр тяжести в результате соударений совершает периодические колебания вдоль фиксированной вертикали. Задача об устойчивости зависит от двух безразмерных параметров, характеризующих величину угловой скорости диска и высоту его подскока над плоскостью в невозмущенном движении. Получено строгое решение задачи об устойчивости для всех физически допустимых значений этих параметров.

Ключевые слова: устойчивость, отображение, канонические преобразования

---

Получено 13 октября 2015 года  
После доработки 05 ноября 2015 года

---

Работа выполнена в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14.01.00380) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2363.2014.1).

---

Маркеев Анатолий Павлович  
[markeev@ipmnet.ru](mailto:markeev@ipmnet.ru)  
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН  
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 101, стр. 1

## 1. Введение. Уравнения движения

Пусть твердое тело движется в однородном поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Тело представляет собой тонкий однородный диск радиуса  $R$  и веса  $mg$ . Плоскость считается абсолютно гладкой, а соударения диска с плоскостью — абсолютно упругими.

Движение диска отнесем к неподвижной системе координат  $OXYZ$  с началом в произвольной точке  $O$  плоскости, над которой движется диск, и вертикальной осью  $OZ$  (рис. 1). Пусть  $G\xi\eta\zeta$  — система координат, образованная главными центральными осями инерции диска, ось  $G\zeta$  перпендикулярна плоскости диска. Главные центральные моменты инерции  $J_\xi$ ,  $J_\eta$ ,  $J_\zeta$  вычисляются по формулам

$$J_\xi = J_\eta = \frac{1}{4} mR^2, \quad J_\zeta = \frac{1}{2} mR^2.$$

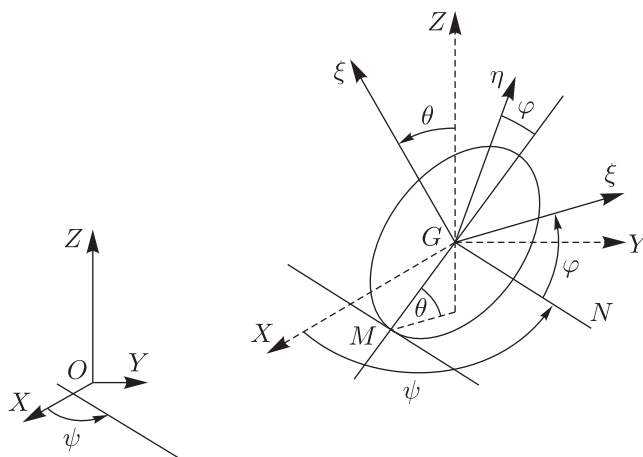


Рис. 1. Системы координат для описания движения диска над плоскостью.

Положение диска в пространстве определяется координатами  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  его центра тяжести  $G$  в системе координат  $OXYZ$  и тремя углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , задающими ориентацию трехгранника  $G\xi\eta\zeta$  относительно кёниговой системы координат  $GXYZ$ .

Ближайшая к плоскости  $OXY$  точка  $M$  диска во все время движения находится над этой плоскостью или лежит в ней. Поэтому (см. рис. 1) имеет место неудерживающая связь  $Z \geq R \sin \theta$ . Если вместо  $Z$  ввести новую обобщенную координату  $q$  по формуле  $q = Z - R \sin \theta$ , то неудерживающая связь запишется в виде неравенства  $q \geq 0$ .

В свободном полете, когда  $q > 0$ , движению диска отвечает функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} m \left[ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + (\dot{q} + R \cos \theta \dot{\theta})^2 \right] + \frac{1}{2} J_\xi (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_\zeta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 - mg(q + R \sin \theta). \quad (1.1)$$

Точкой обозначается производная по времени  $t$ .

При  $q = 0$  происходит соударение диска и плоскости. Условие абсолютно упругого соударения записывается [1] в виде равенства

$$\dot{q}^+ = -\dot{q}^-. \quad (1.2)$$

Здесь и далее индексами минус и плюс отмечены значения соответствующих величин непосредственно до и после удара.

При ударе неизменны все обобщенные координаты  $X, Y, q, \psi, \theta, \varphi$  и все обобщенные импульсы, кроме импульса  $p$ , соответствующего обобщенной координате  $q$  [1]. Замечая еще, что функция Лагранжа (1.1) не зависит от  $X, Y, \psi, \varphi$ , приходим к соотношениям

$$p_X = m\dot{X} = c_X, \quad p_Y = m\dot{Y} = c_Y, \quad (1.3)$$

$$p_\psi = J_\xi \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_\zeta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta = c_\psi, \quad p_\varphi = J_\zeta (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = c_\varphi, \quad (1.4)$$

где  $c_X, c_Y, c_\psi, c_\varphi$  — константы. Соотношения (1.3), (1.4) справедливы во все время движения, включающее в себя промежутки свободного полета диска и моменты его соударений с плоскостью.

Из (1.3) следует, что проекция центра тяжести диска на горизонтальную плоскость  $OXY$  движется равномерно и прямолинейно. Будем считать, что  $c_X = c_Y = 0$ , то есть центр тяжести движется по заданной неподвижной вертикали. При этом, согласно (1.4), проекции кинетического момента диска относительно центра тяжести на вертикаль и на ось симметрии  $G\zeta$  постоянны. Примем, что  $c_\varphi = 0$ , а  $c_\psi = J_\xi \omega$ , где  $\omega$  — произвольная постоянная (не ограничивая общности, будем считать ее положительной величиной). При этих предположениях из (1.4) имеем  $\dot{\psi} \sin^2 \theta = \omega$ , и из уравнений движения, задаваемых функцией Лагранжа (1.1), получаем, что в свободном полете диска справедливы уравнения

$$\ddot{Z} = -g, \quad \ddot{\theta} = \omega^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}. \quad (1.5)$$

Для описания свободного полета диска будем также использовать и гамильтонову форму уравнений движения. Введя импульсы

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{Z} = m(\dot{q} + R \cos \theta \dot{\theta}), \quad (1.6)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{q} + R \cos \theta \dot{\theta})R \cos \theta + J_\xi \dot{\theta}, \quad (1.7)$$

получим функцию Гамильтона

$$H = \frac{2}{mR^2} p_\theta^2 - \frac{4 \cos \theta}{mR} p_\theta p + \frac{1}{2m} (1 + 4 \cos^2 \theta) p^2 + \frac{mR^2 \omega^2}{8 \sin^2 \theta} + mg(q + R \sin \theta). \quad (1.8)$$

Из равенства (1.2) и уравнения  $\dot{q} = \partial H / \partial p$  следует, что значения  $p^-$  и  $p^+$  импульса  $p$  до и после удара связаны соотношением

$$p^+ = -p^- + \frac{8 \cos \theta}{R(1 + 4 \cos^2 \theta)} p_\theta. \quad (1.9)$$

Величины  $\theta, p_\theta, q$  во время удара не изменяются.

Из уравнений движения с функцией Гамильтона (1.8) и граничных условий (1.9) следует, что существует такое движение, когда диск вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг одного из своих диаметров, который остается на фиксированной вертикальной прямой. Для этого движения  $\theta = \pi/2, \dot{\psi} = \omega, \dot{\varphi} = 0$ , движение центра тяжести диска происходит вдоль упомянутой вертикальной прямой и при  $q > 0$  описывается первым

из уравнений (1.5) или эквивалентными ему двумя каноническими уравнениями с функцией Гамильтона  $p^2/(2m) + mgq$ , а связь значений импульса  $p$  до и после удара диска о плоскость, получаемая из (1.9) при  $\theta = \pi/2$ , имеет вид  $p^+ = -p^-$ . В результате соударений диска с плоскостью его центр тяжести совершает периодическое движение с периодом  $\tau = 2(2h/g)^{1/2}$ , где  $h$  — высота подскока наинизшей точки диска над плоскостью, величина  $\tau$  равна промежутку времени между двумя последовательными соударениями.

Целью статьи является исследование орбитальной устойчивости описанного периодического движения (перманентного вращения) диска. Эта задача рассматривалась ранее в статьях [2, 3], но ее решение осталось незавершенным, так как для некоторых физически допустимых значений параметров задачи требуется анализ уравнений возмущенного движения с учетом членов довольно высокой (выше третьей) степени относительно возмущений. В данной статье задача об устойчивости решена для всех допустимых значений параметров.

## 2. О методе исследования

В основе метода исследования лежит метод поверхностей сечения Пуанкаре [4]. Будем считать, что возмущенное движение рассматривается на том же уровне энергии, что и невозмущенное, то есть имеет место тождество

$$H(q, \theta, p, p_\theta) = c_0 \quad (c_0 = mg(h + R) + mR^2\omega^2/8), \quad (2.1)$$

где функция  $H$  задается равенством (1.8). Пусть  $\theta, p_\theta, q$  — прямоугольные координаты в трехмерном пространстве, определяемом тождеством (2.1). Движение диска изобразится кривой в этом пространстве, лежащей в области  $q \geq 0$ . В качестве поверхности сечения примем плоскость  $q = 0$ , которая отвечает моментам соударений. Невозмущенному периодическому движению диска отвечают точки оси  $\theta = \pi/2, p_\theta = 0$ .

Пусть в возмущенном движении в момент первого соударения время  $t = 0$ , а  $\theta(0) = \theta_0, p_\theta(0) = p_{\theta_0}$ . В момент следующего соударения  $t = t_1, \theta(t_1) = \theta_1, p_\theta(t_1) = p_{\theta_1}$ . Отображение  $T: \theta_0, p_{\theta_0} \rightarrow \theta_1, p_{\theta_1}$  плоскости  $q = 0$  будет сохранять площадь [5]. Действительно, при соударении величины  $\theta, p_\theta$  остаются неизменными, а в промежутках между соударениями на изоэнергетическом уровне  $H = c_0$  движение описывается уравнениями, имеющими гамильтонову форму (уравнения Уиттекера) с независимой переменной  $q$  [6], и сохранение площади следует из теоремы Лиувилля. Неподвижная точка  $(\pi/2, 0)$  отображения  $T$  будет соответствовать невозмущенному периодическому движению диска, а ее устойчивость или неустойчивость будет означать орбитальную устойчивость или неустойчивость этого движения. Исследование устойчивости неподвижной точки отображения основывается на упрощении (нормализации) отображения при помощи канонических преобразований [5, 7, 8], теоремах второго метода Ляпунова [9] и теореме Мозера об инвариантных кривых [10–12].

## 3. Построение отображения

Пусть в возмущенном движении непосредственно перед первым соударением

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + u, \quad p_{\theta_0} = \frac{mR^2}{8} \sqrt{\frac{g}{2h}} v, \quad (3.1)$$



а перед вторым соударением

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + u_1, \quad p_{\theta_1} = \frac{mR^2}{8} \sqrt{\frac{g}{2h}} v_1. \quad (3.2)$$

Отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$  сохраняет площадь, а  $(0, 0)$  — его неподвижная точка, отвечающая невозмущенному движению диска. При достаточно малых  $u, v$  величины  $u_1, v_1$  будут аналитическими функциями относительно  $u, v$ . Алгоритм получения разложений функций  $u_1, v_1$  в ряды можно представить в виде следующей последовательности вычислений.

1. Сначала получим начальные (при  $t = 0$ ) условия для дифференциальных уравнений (1.5). Величина  $\theta_0$  определена первым из соотношений (3.1). Учитывая его, из равенства  $q = 0$  получаем  $Z_0 = R \cos u$ , а из (2.1), (1.7), (1.9) находим значение  $p^+$  импульса  $p$  после первого соударения:

$$p^+ = m\sqrt{2gh} + O_2.$$

Здесь и в дальнейшем через  $O_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) обозначается сходящийся степенной ряд, начинающийся с членов, степень которых не ниже  $k$ .

Далее из (1.6), (1.7) находим выражения для  $\dot{Z}_0, \dot{\theta}_0$ :

$$\dot{Z}_0 = \frac{p^+}{m}, \quad \dot{\theta}_0 = \frac{4}{mR^2}(p_{\theta_0} - R \cos \theta_0 p^+),$$

откуда, с учетом равенств (3.1), можно найти величины  $\dot{Z}_0$  и  $\dot{\theta}_0$  в виде рядов по степеням  $u, v$ .

2. Решение уравнений (1.5) записывается в виде

$$Z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{Z}_0 t + Z_0, \quad (3.3)$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\dot{\theta}_0 \sin \theta_0}{\Omega} \sin \Omega t - \cos \theta_0 \cos \Omega t\right), \quad \Omega^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{\omega^2}{\sin^2 \theta_0}. \quad (3.4)$$

Время  $t_1$  свободного полета диска от первого соударения с плоскостью до второго соударения определяется из уравнения  $Z(t_1) = R \sin \theta(t_1)$ . Получаем

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} + O_2. \quad (3.5)$$

3. Из (3.3)–(3.5) находим величины  $Z(t_1), \dot{Z}(t_1), \theta(t_1), \dot{\theta}(t_1)$  в виде рядов по степеням  $u, v$ . Но, согласно (3.2),

$$u_1 = \theta(t_1) - \frac{\pi}{2}, \quad v_1 = \frac{8}{mR^2} \sqrt{\frac{2h}{g}} p_{\theta}(t_1),$$

где  $p_{\theta}(t_1)$  вычисляется по формулам (1.6), (1.7). Поэтому из последних равенств определяются искомые разложения величин  $u_1, v_1$  в ряды по степеням  $u, v$ .

Описанная процедура несложна, но очень громоздка. Она была реализована при помощи компьютерных систем аналитических вычислений. Ряды для  $u_1, v_1$  были найдены с точностью до членов седьмой степени включительно относительно  $u, v$ . (Именно такая точность потребовалась для решения задачи об устойчивости движения диска при всех

допустимых значениях параметров задачи.) Оказалось, что ряды не содержат члены четных степеней относительно  $u$ ,  $v$ . Коэффициенты в этих рядах являются функциями двух безразмерных параметров  $\sigma$  и  $\delta$ , определяемых равенствами

$$\sigma = 2\omega \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad \delta = \frac{2g}{\omega^2 R}. \quad (3.6)$$

Выпишем полученное отображение  $u, v \rightarrow u_1, v_1$ , приведя явные выражения для коэффициентов членов рядов только до третьей степени включительно:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \partial S_4 / \partial v + O_5 \\ v + \partial S_4 / \partial u + O_5 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$a = d = \cos \sigma + \sigma \delta \sin \sigma, \quad b = \frac{1}{\sigma} \sin \sigma, \quad c = \sigma [(\sigma^2 \delta^2 - 1) \sin \sigma + 2\sigma \delta \cos \sigma], \quad (3.8)$$

а  $S_4$  — форма четвертой степени относительно  $u, v$

$$S_4(u, v) = \sum_{r+s=4} s_{rs} u^r v^s, \quad (3.9)$$

коэффициенты которой задаются равенствами

$$\begin{aligned} s_{40} &= 1 - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\delta^2} - \frac{1}{8}(19\delta - 7)\sigma^2 + \left(\delta^2 - \frac{4}{3}\delta + \frac{1}{4}\right)\delta^2\sigma^4 - \frac{1}{24}(\delta + 3)\delta^4\sigma^6 + \\ &+ \left[-\frac{17}{8}\sigma + \left(4\delta - \frac{9}{4}\right)\delta^2\sigma^3 + \frac{1}{24}\delta^4\sigma^5\right] \sin \sigma \cos \sigma + \\ &+ \left[-\frac{1}{\delta} + 6\delta^2\sigma^2 - \left(2\delta - \frac{17}{12}\right)\delta^3\sigma^4 + \frac{1}{12}\delta^5\sigma^6\right] \cos^2 \sigma + \\ &+ \left[\left(4\delta - \frac{1}{12}\right)\sigma - \left(4\delta - \frac{1}{3}\right)\delta^2\sigma^3 + \frac{1}{12}\delta^4\sigma^5\right] \sin \sigma \cos^3 \sigma + \\ &+ \left[1 - \left(6\delta - \frac{7}{24}\right)\delta\sigma^2 + \left(\delta - \frac{1}{12}\right)\delta^3\sigma^4 - \frac{1}{24}\delta^5\sigma^6\right] \cos^4 \sigma, \\ s_{31} &= -\frac{13}{3} + \frac{2}{\delta} + \left(4\delta^2 - 5\delta + \frac{3}{2}\right)\delta\sigma^2 - \frac{1}{6}(\delta + 3)\delta^3\sigma^4 + \\ &+ \left[-\frac{2}{\delta\sigma} + \left(12\delta - \frac{13}{2}\right)\delta\sigma + \frac{1}{3}\delta^3\sigma^3\right] \sin \sigma \cos \sigma + \left[12\delta - \left(8\delta - \frac{11}{2}\right)\delta^2\sigma^2 + \frac{1}{3}\delta^4\sigma^4\right] \cos^2 \sigma + \\ &+ \left[\frac{4}{\sigma} - \left(12\delta - \frac{5}{6}\right)\delta\sigma + \frac{1}{6}\delta^3\sigma^3\right] \sin \sigma \cos^3 \sigma - \left[12\delta - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(8\delta - 1)\delta^2\sigma^2 + \frac{1}{6}\delta^4\sigma^4\right] \cos^4 \sigma, \\ s_{22} &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{2}{\delta}\right) + 6\delta^2 - 7\delta + \frac{11}{4} - \frac{1}{4}(\delta + 3)\delta^2\sigma^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \left[\frac{(48\delta - 25)}{\sigma} + 3\delta^2\sigma\right] \sin \sigma \cos \sigma + \frac{1}{4} \left(2\sigma^2\delta^3 - 48\delta^2 + \frac{24}{\sigma^2} + 31\delta\right) \cos^2 \sigma - \\ &- \frac{(24\delta - 1)}{2\sigma} \sin \sigma \cos^3 \sigma - \left(\frac{6}{\sigma^2} + \frac{3}{4}\delta - 6\delta^2 + \frac{1}{4}\delta^3\sigma^2\right) \cos^4 \sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{13} &= \frac{1}{\sigma^2} \left( -\frac{13}{3} + 4\delta + \frac{2}{\delta} \right) - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{6}\delta^2 + \frac{2}{3\sigma^3} \left[ 3 \left( -\frac{1}{\delta} + 2 \right) + \delta\sigma^2 \right] \sin \sigma \cos \sigma + \\
&+ \frac{1}{3\sigma^2} (14 - 24\delta + \delta^2\sigma^2) \cos^2 \sigma - \frac{1}{6\sigma^3} (24 + \delta\sigma^2) \sin \sigma \cos^3 \sigma - \\
&- \frac{1}{6\sigma^2} (2 - 24\delta + \delta^2\sigma^2) \cos^4 \sigma, \\
s_{04} &= \frac{1}{\sigma^4} \left( 1 - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\delta^2} \right) - \frac{1}{24\sigma^2} (\delta + 3) + \frac{5}{24\sigma^3} \sin \sigma \cos \sigma + \\
&+ \frac{1}{12\sigma^4} \left[ 12 \left( -2 + \frac{1}{\delta} \right) + \delta\sigma^2 \right] \cos^2 \sigma - \frac{1}{12\sigma^3} \sin \sigma \cos^3 \sigma + \frac{1}{24\sigma^4} (24 - \delta\sigma^2) \cos^4 \sigma.
\end{aligned}$$

#### 4. О линеаризованном отображении

Характеристическое уравнение линеаризованного отображения (3.7) имеет вид

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0, \quad (4.1)$$

где  $a$  — функция параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , определяемая первым из равенств (3.8).

Условие  $a^2 > 1$  является достаточным для неустойчивости неподвижной точки  $u = v = 0$  отображения, и не только в линейной задаче, но и при учете всех нелинейных членов в правой части равенства (3.7) [9]. Если же выполняется неравенство  $a^2 < 1$ , то неподвижная точка отображения устойчива в первом приближении. Последнее неравенство с учетом выражения для  $a$  из (3.8) может быть выражено через параметры  $\sigma$  и  $\delta$ :

$$\sin^2 \sigma \left( \sigma\delta - \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \right) \left( \sigma\delta + \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} \right) < 0. \quad (4.2)$$

В плоскости  $\sigma$ ,  $\delta$  существуют счетные множества областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении. Области устойчивости примыкают к оси  $\delta = 0$ . Занумеруем их числами 1, 2, 3, ... Область с номером  $n$  примыкает к интервалу оси  $\delta = 0$ , в котором  $\pi(n-1) < \sigma < \pi n$ . Правой ее границей служит прямая  $\sigma = \pi n$ , а левой границей является кривая  $\delta = \sigma^{-1} \operatorname{tg}(\sigma/2)$  при нечетном  $n$  и кривая  $\delta = -\sigma^{-1} \operatorname{ctg}(\sigma/2)$  при четном  $n$ ; в самих областях, соответственно,  $\sin \sigma > 0$ ,  $\delta < \sigma^{-1} \operatorname{tg}(\sigma/2)$  и  $\sin \sigma < 0$ ,  $\delta < -\sigma^{-1} \operatorname{ctg}(\sigma/2)$ . На рисунке 2, где  $0 \leq \sigma \leq 4\pi$ , показаны четыре области устойчивости в первом приближении и четыре области неустойчивости. На рисунке 3, где  $0 \leq \sigma \leq \pi$ , в более крупном масштабе показаны две из этих областей. Области неустойчивости на рисунках 2 и 3 выделены штриховкой.

Для строгого решения задачи об устойчивости неподвижной точки отображения при значениях параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , лежащих внутри областей 1, 2, 3, ... или на их границах, необходимо дополнительное исследование, учитывающее нелинейные члены в разложении (3.7).

Отметим, что это дополнительное исследование не требуется в предельном случае  $\sigma = 0$ . В этом случае высота подскока  $h$  равна нулю, то есть в невозмущенном движении диск все время касается плоскости нижним концом одного из своих диаметров, вокруг которого диск вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Устойчивость такого перманентного вращения диска на плоскости исследована ранее [13]. Показано, что при  $\delta \geq 1/2$  это вращение устойчиво, а при  $\delta < 1/2$  — неустойчиво.

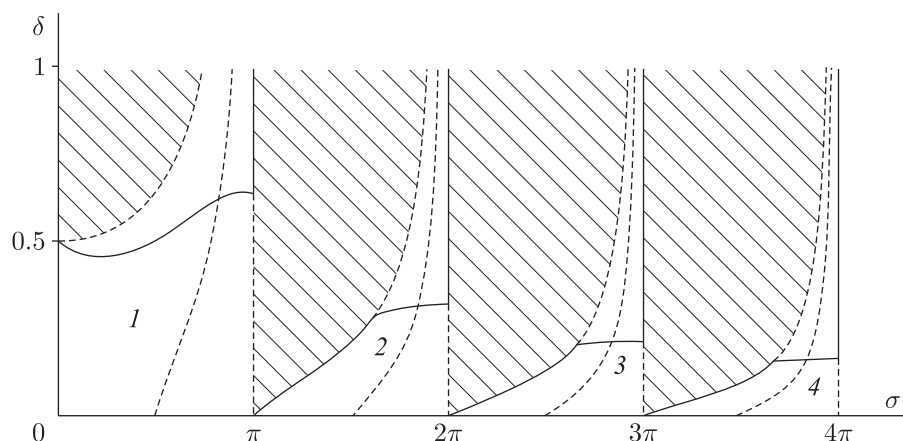
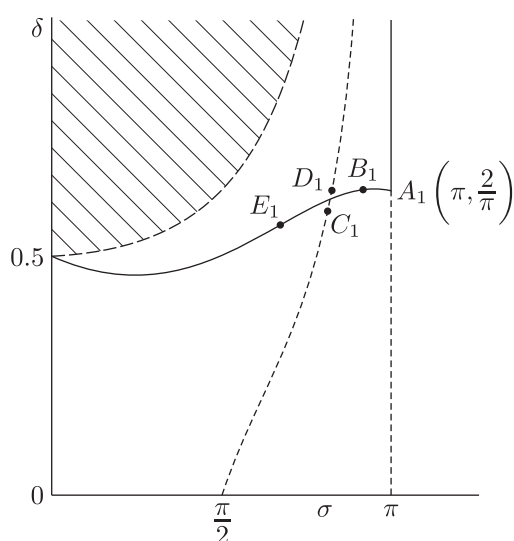


Рис. 2. Области неустойчивости и устойчивости в первом приближении.

Рис. 3. Области неустойчивости и устойчивости в первом приближении при  $0 < \sigma < \pi$ .

## 5. Анализ устойчивости для значений параметров, лежащих на границах областей 1, 2, 3, ...

Прямолинейные границы  $\sigma = \pi n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). При  $\sigma = \pi n$  для элементов (3.8) матрицы линеаризованного отображения (3.7) имеем такие выражения:  $a = d = (-1)^n$ ,  $b = 0$ ,  $c = (-1)^n 2\pi^2 n^2 \delta$ . Так как параметр  $\delta$  по его физическому смыслу отличен от нуля, при  $\sigma = \pi n$  матрица линеаризованного отображения (3.7) не приводится к диагональной форме и, следовательно [9], неподвижная точка  $u = v = 0$  отображения (3.7) неустойчива в первом приближении.

Для получения строгих выводов об устойчивости рассмотрим, следуя статье [8], нелинейное отображение. Предварительно сделаем в (3.7) линейную каноническую замену переменных  $u, v \rightarrow x, y$  по формулам

$$u = \frac{(-1)^n}{\pi n \sqrt{2\delta}} y, \quad v = \pi n \sqrt{2\delta} x.$$



Эта замена приводит матрицу линеаризованного отображения к вещественной нормальной форме. В новых переменных получим отображение  $x, y \rightarrow x_1, y_1$ , которое можно [14] представить как композицию линейного преобразования  $x_*, y_* \rightarrow x_1, y_1$  вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 1 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

и отображения  $x, y \rightarrow x_*, y_*$ , близкого к тождественному и задаваемого при помощи производящей функции  $F(x_*, y)$ ,

$$x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad y_* = \frac{\partial F}{\partial x_*}, \quad (5.2)$$

$$F = x_* y + \sum_{m=2}^{\infty} F_{2m}(x_*, y), \quad (5.3)$$

где  $F_{2m}$  — форма степени  $2m$  относительно  $x_*, y$ ,

$$F_{2m} = \sum_{r+s=2m} f_{rs} x_*^r y^s.$$

Коэффициенты  $f_{rs}$  выражаются через коэффициенты разложения (3.7) по алгоритму, описанному в статье [14]. Учитывая, что разложение (5.3) не содержит формы нечетных степеней, можно получить следующие выражения для нужных в дальнейших вычислениях коэффициентов форм  $F_4$  и  $F_6$ :

$$f_{40} = \frac{(-1)^n}{2} (\sigma^2 \delta^2 - 4), \quad f_{31} = \sigma^2 \delta^2 - 4, \quad (5.4)$$

$$f_{60} = (-1)^n \left[ (\sigma^2 \delta^2 - 4)^2 - \frac{3\sigma^4 \delta^4 + 16}{6\sigma^2 \delta} \right]. \quad (5.5)$$

Согласно теоремам 7 и 8 статьи [8], справедливо следующее утверждение, позволяющее судить об устойчивости и неустойчивости по членам третьей степени в отображении (3.7).

**Утверждение 2.** Если  $(-1)^n f_{40} < 0$ , то неподвижная точка отображения устойчива, а если  $(-1)^n f_{40} > 0$ , то неподвижная точка отображения неустойчива.

Отсюда и из (5.4) получаем, что на прямолинейных границах  $\sigma = \pi n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении при  $\delta < \frac{2}{\pi n}$  неподвижная точка отображения устойчива, а при  $\delta > \frac{2}{\pi n}$  — неустойчива. Точка  $A_n \left( \pi n, \frac{2}{\pi n} \right)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) разделяет границу  $\sigma = \pi n$  на участки устойчивости и неустойчивости. На рисунках 2 и 3 участки устойчивости изображены штриховыми линиями, а участки неустойчивости — сплошными линиями.

В точках  $A_n$  строгое решение задачи об устойчивости требует привлечения членов выше третьей степени в отображении (3.7). Принимая во внимание, что в разложении (5.3) нет форм нечетных степеней и что, согласно (5.4), величины  $f_{40}$  и  $f_{31}$  обращаются в нуль одновременно, получаем из теорем 7 и 8 статьи [8] такое утверждение.

**Утверждение 3.** Если  $f_{40} = 0$  и  $(-1)^n f_{60} < 0$ , то неподвижная точка отображения устойчива, а если  $f_{40} = 0$  и  $(-1)^n f_{60} > 0$ , то неподвижная точка отображения неустойчива.

Из (5.4), (5.5) следует, что и для четных, и для нечетных  $n$  при  $f_{40} = 0$  имеем  $(-1)^n f_{60} = -\frac{32}{3\sigma} < 0$ . Поэтому во всех точках  $A_n \left( \pi n, \frac{2}{\pi n} \right)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), разделяющих на прямолинейных границах  $\sigma = \pi n$  участки устойчивости и неустойчивости, имеет место устойчивость.

*Криволинейные границы.* На границах  $\delta = \sigma^{-1} \operatorname{tg}(\sigma/2)$  нечетных областей ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) и границах  $\delta = -\sigma^{-1} \operatorname{ctg}(\sigma/2)$  четных областей ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ) величины (3.8) задаются равенствами  $a = d = (-1)^{n+1}$ ,  $b = \sigma^{-1} \sin \sigma$ ,  $c = 0$ . Матрица линеаризованного отображения (3.7) не приводится к диагональной форме, и неподвижная точка  $u = v = 0$  отображения (3.7) неустойчива в первом приближении.

Для проведения нелинейного исследования сделаем предварительно в (3.7) каноническое преобразование  $u, v \rightarrow x, y$  по следующим формулам ( $n$  — номер области):

$$u = \sqrt{\frac{|\sin \sigma|}{\sigma}} x, \quad v = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\sigma}{|\sin \sigma|}} y.$$

В новых переменных получим отображение  $x, y \rightarrow x_1, y_1$ , которое представимо в виде аналогичного (5.1) линейного преобразования  $x_*, y_* \rightarrow x_1, y_1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 1 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

и близкого к тождественному преобразования  $x, y \rightarrow x_*, y_*$ , задаваемого равенствами вида (5.2)–(5.4).

Как и в случае прямолинейных границ, при исследовании устойчивости для значений параметров  $\sigma, \delta$ , соответствующих криволинейным границам, потребуются только два коэффициента  $f_{40}$  и  $f_{31}$  формы  $F_4$  и коэффициент  $f_{60}$  формы  $F_6$ . Вычисления показывают, что на криволинейных границах нечетных областей эти три коэффициента задаются следующими равенствами:

$$f_{40} = \frac{3 + 5c}{2(1 + c)} + \frac{s(c^2 - 14c - 19)}{4(1 + c)\sigma} + \frac{2s^2}{\sigma^2}, \quad f_{31} = 2f_{40}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} f_{60} = & \frac{(3 + 5c)^2}{(1 + c)^2} - \frac{45c^4 - 538c^3 - 523c^2 + 560c + 392}{6s(1 + c)\sigma} - \\ & - \frac{9c^5 - 260c^4 + 2962c^3 + 4088c^2 - 2467c - 3564}{24(1 + c)\sigma^2} - \\ & - \frac{s(18c^3 - 271c^2 - 114c + 319)}{3\sigma^3} + \frac{8s^2(1 + c)(8 - 9c)}{3\sigma^4}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь и часто в дальнейшем для краткости записи принимаются обозначения

$$c = \cos \sigma, \quad s = \sin \sigma. \quad (5.9)$$



Выражение для коэффициента  $f_{40}$  на криволинейных границах четных областей совпадает со взятой с обратным знаком правой частью первого из равенств (5.7), если в ней заменить  $c$  на  $-c$ , а  $s$  на  $-s$ . Аналогично из (5.8) получается выражение для коэффициента  $f_{60}$ . Кроме того, на криволинейных границах четных областей  $f_{31} = -2f_{40}$ .

Для значений параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , лежащих на криволинейных границах, справедливы приведенные выше утверждения 1 и 2, надо только в них число  $n$  заменить на  $n + 1$ .

Если на границе нечетной области величина  $f_{40}$ , задаваемая первым из равенств (5.7), отрицательна, то неподвижная точка отображения (3.7) устойчива; неподвижная точка отображения (3.7) неустойчива, если величина  $f_{40}$  положительна. На границе же четной области наоборот: имеет место устойчивость, если отвечающий этой границе коэффициент  $f_{40}$  положителен, и неустойчивость, если он отрицателен.

Рассмотрим криволинейную границу первой области, где  $0 < \sigma < \pi$ . График функции  $f_{40}$ , соответствующей этой границе, представлен на рисунке 4. На всей границе  $f_{40} < 0$ , и, следовательно, для значений параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , лежащих на ней, имеет место устойчивость. Отметим еще, что, как уже ранее отмечалось, в предельной точке  $(0, 1/2)$  этой границы также имеет место устойчивость.

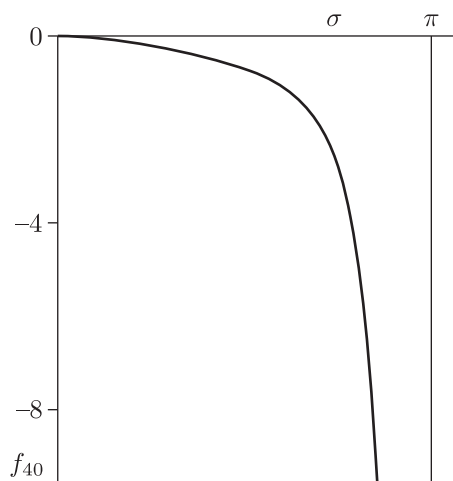


Рис. 4. Зависимость коэффициента  $f_{40}$  от  $\sigma$  на криволинейной границе области 1.

На криволинейных границах всех других областей, начиная со второй области, величина  $f_{40}$  может обращаться в нуль. Рассматривая правую часть первого из равенств (5.7) как квадратный трехчлен относительно величины  $1/\sigma$ , получим, что на границах нечетных областей величина  $f_{40}$  равна нулю только в двух случаях, для которых

$$\frac{1}{\sigma} = \varphi_{1,2}(\sigma) = \frac{19 + 14c - c^2 \pm \sqrt{(1-c)(169 + 189c + 27c^2 - c^3)}}{16(1+c)s}. \quad (5.10)$$

Для четных областей величины  $c$  и  $s$  в правой части равенства (5.10) надо заменить, соответственно, на  $-c$  и  $-s$ .

Нетрудно убедиться, что функции  $\varphi_1$  (верхний знак в (5.10)) и  $\varphi_2$  (нижний знак в (5.10)) вещественны. Функция  $\varphi_1$  положительна как для четных, так и для нечетных областей; ее минимальное значение, равное 1.7855, достигается при  $\cos \sigma = 0.4096$  в случае нечетных областей и при  $\cos \sigma = -0.4096$  в случае четных областей. Отсюда следует, что случай  $1/\sigma = \varphi_1$  невозможен, так как для всех областей, начиная со второй,  $1/\sigma < 1/\pi = 0.3183$ .

Случай же  $1/\sigma = \varphi_2$  возможен, но, очевидно, только тогда, когда  $\varphi_2 > 0$ . Можно проверить, что последнее требование удовлетворяется при  $\cos \sigma > -3/5$  для нечетных областей и при  $\cos \sigma < 3/5$  для четных областей.

Вычисления показали, что на каждой криволинейной границе области с номером  $n \geq 2$  существует только одна точка  $A'_n(\sigma, \delta)$ , в которой  $1/\sigma = \varphi_2$  (т. е.  $f_{40} = 0$ ). Например, для  $n = 2, 3, 4$  имеем

$$A'_2(5.0864, 0.2884), \quad A'_3(8.3517, 0.2013), \quad A'_4(11.5387, 0.1536).$$

В качестве иллюстрации к проведенным вычислениям на рисунке 5 показаны графики функций  $\varphi_2$  и  $1/\sigma$  для случая криволинейной границы третьей области, по оси абсцисс отложена величина  $\cos \sigma$  ( $-3/5 \leq \cos \sigma < 1$ ). Пересечение графиков соответствует точке  $A'_3$ .

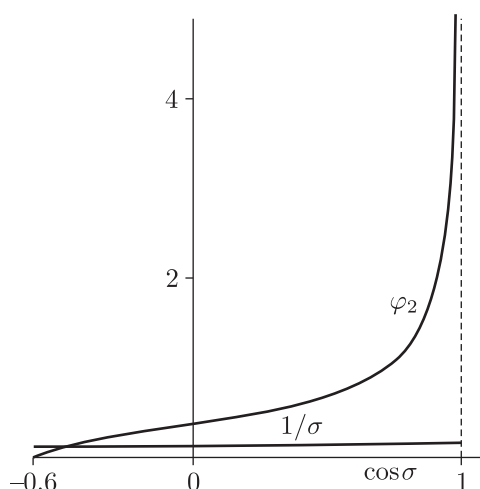


Рис. 5. К анализу уравнения  $f_{40} = 0$  на криволинейной границе области 3.

Для координат  $\sigma, \delta$  точек  $A'_n$  при больших  $n$  (т. е. при больших  $\sigma$ ) было найдено асимптотическое представление. Показано, что для нечетных  $n$

$$\cos \sigma = -\frac{3}{5} + \frac{512}{625\sigma} + \frac{110976}{78125\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} - \frac{64}{25\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \quad (5.11)$$

а если  $n$  четно, то

$$\cos \sigma = \frac{3}{5} + \frac{512}{625\sigma} - \frac{110976}{78125\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} + \frac{64}{25\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right). \quad (5.12)$$

На участке криволинейной границы  $n$ -й области, лежащем правее и выше точки  $A'_n$ , имеет место устойчивость неподвижной точки  $u = v = 0$  отображения (3.7), а на участке, лежащем левее и ниже точки  $A'_n$ , — неустойчивость. На рисунках 2 и 3 участки устойчивости выделены штриховыми, а участки неустойчивости — сплошными линиями.

При исследовании устойчивости для значений параметров  $\sigma, \delta$ , отвечающих точкам  $A'_n$ , где  $f_{40} = 0$ , будем опираться на утверждение 2: если  $n$  — нечетное число, то при  $f_{60} < 0$  будет устойчивость, а при  $f_{60} > 0$  — неустойчивость; если же  $n$  четно, то наоборот: при  $f_{60} < 0$  имеет место неустойчивость, а при  $f_{60} > 0$  — устойчивость.

Рассмотрим нечетные области. Пусть  $f_{60}^*$  — функция (5.8), вычисленная при условии  $f_{40} = 0$ , то есть при выполнении равенства  $1/\sigma = \varphi_2$ , где  $\varphi_2$  определяется равенством (5.10). Для этой функции можно получить следующее выражение:

$$f_{60}^* = f_{60}^*(\cos \sigma) = -\frac{1}{3072(1+c)^4} [(1-c)(3c^6 - 248c^5 + 179c^4 + 18120c^3 + 84729c^2 + 123312c + 56529) - (3c^5 - 209c^4 - 1962c^3 - 1050c^2 + 4967c + 4395)\sqrt{(1-c)(169 + 189c + 27c^2 - c^3)}]. \quad (5.13)$$

Здесь используются обозначения (5.9).

График функции  $f_{60}^*$  показан на рисунке 6. Видим, что эта функция положительна для всех значений  $\cos \sigma$  из интервала  $-3/5 < \cos \sigma < 1$ , а значит, и во всех точках  $A'_n$ , в которых  $f_{40} = 0$ . Следовательно, согласно утверждению 2, для значений параметров  $\sigma, \delta$ , отвечающих точкам  $A'_n$  из нечетных областей, неподвижная точка отображения (3.7) неустойчива.

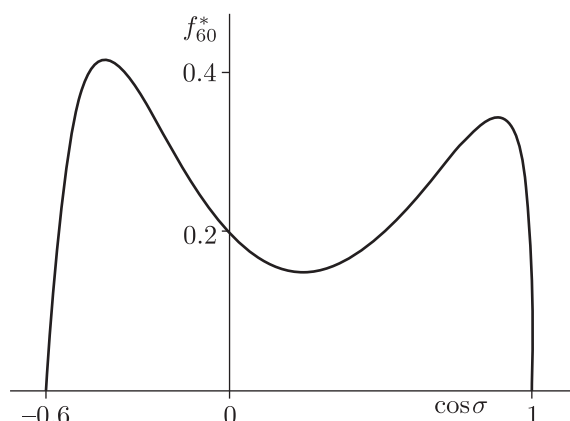


Рис. 6. Зависимость функции  $f_{60}^*$  от  $\sigma$  в случае нечетных областей устойчивости в первом приближении ( $n = 3, 5, 7, \dots$ ).

В точках  $A'_n$ , лежащих на криволинейных границах четных областей, также будет неустойчивость. Это следует из того, что аналогичная  $f_{60}^*$  функция  $f_{60}^{**}$ , вычисленная на этих границах, может быть определена тождеством  $f_{60}^{**} = -f_{60}^*(-\cos \sigma)$ . Поэтому для всех значений  $\cos \sigma$  из интервала  $-1 < \cos \sigma < 3/5$  функция  $f_{60}^{**}$  отрицательна. Отсюда, согласно утверждению 2, и следует, что в точках  $A'_n$  из четных областей имеет место неустойчивость.

## 6. Исследование устойчивости для значений параметров, лежащих внутри областей 1, 2, 3, ...

Пусть параметры  $\sigma, \delta$  лежат в областях  $|a| < 1$  устойчивости в первом приближении. Положим

$$\cos \alpha = a, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - a^2}. \quad (6.1)$$

В этих обозначениях один из двух комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (4.1) представляется в виде

$$\rho = \cos \alpha + i \sin \alpha. \quad (6.2)$$

Сделаем в отображении (3.7) замену переменных  $u, v \rightarrow x, y$  по формулам

$$u = \frac{1}{\sigma} \sin \sigma x, \quad v = \sin \alpha y.$$

В новых переменных получим отображение  $x, y \rightarrow x_1, y_1$ , задаваемое равенством

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Зависимость  $x_*, y_*$  от  $x, y$  определяется из соотношения вида (5.2), (5.3).

Коэффициенты форм  $F_{2m}$  в разложении (5.3) выражаются через коэффициенты разложения правой части равенства (3.7) [14]. В частности, форма  $F_4$  вычисляется по форме  $S_4$  согласно формуле [15]

$$F_4 = \frac{\sigma}{\sin \sigma \sin \alpha} S_4(\sigma^{-1} \sin \sigma x, \sin \alpha y) = \sum_{r+s=4} f_{rs} x^r y^s. \quad (6.4)$$

В первом приближении отображение (6.3) представляет собой поворот на угол  $\alpha$ .

Мы будем рассматривать нелинейную задачу об устойчивости неподвижной точки отображения. При этом, вообще, существенно наличие или отсутствие резонансов. Наименьшее натуральное число  $k$ , для которого  $\varrho^k = 1$ , называют порядком резонанса. Внутри областей  $1, 2, 3, \dots$  устойчивости в первом приближении возможны только такие резонансы, порядок которых выше второго.

*Случай отсутствия резонанса четвертого порядка.* При исследовании нелинейной задачи об устойчивости неподвижной точки  $u = v = 0$  отображения (3.7) учтем сначала в отображении (6.3) нелинейные члены наименьшей степени. Эти члены имеют третью степень и определяются формой  $F_4$ . Отсутствие в (6.3) членов второй степени приводит к тому, что на решение задачи об устойчивости по третьему приближению наличие резонанса третьего порядка не влияет. Этот резонанс может оказаться существенным при рассмотрении пятого приближения. Здесь же, в третьем приближении, существенным является наличие или отсутствие резонанса четвертого порядка.

Резонансу четвертого порядка отвечает случай  $a = 0$ , где  $a$  определяется первым из равенств (5.8). В плоскости  $(\sigma, \delta)$  этот резонанс реализуется на кривых

$$\delta = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{ctg} \sigma. \quad (6.5)$$

На рисунках 2 и 3 эти кривые изображены внутри областей устойчивости в первом приближении штриховыми линиями.

Пусть параметры  $\sigma, \delta$  лежат внутри областей устойчивости в первом приближении и не попадают на кривые (6.5) резонансов четвертого порядка. Рассмотрим величину  $c_2 = -(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04})/(4\pi)$ . Для нее из (3.9) и (6.4) можно получить следующее выражение через параметры  $\sigma$  и  $\delta$ :

$$c_2 = \frac{\sin \sigma}{16\pi \sin \alpha \sigma^3 \delta^2} \Delta_2, \quad (6.6)$$

где  $\Delta_2$  — многочлен четвертой степени относительно  $\delta$ , имеющий такой вид (используем обозначения (5.9)):

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & 2\sigma^3 [(1 + 2c^2)\sigma - 3sc] \delta^4 - \sigma^2 s(8\sigma c - 25s)\delta^3 - \\ & - 4[\sigma^2(1 + 5c^2) + 4\sigma sc + 6s^2] \delta^2 + 32s(\sigma c + s)\delta - 16s^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Рассмотрим множество параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , для которых величина  $c_2$  обращается в нуль. Примем во внимание, что внутри областей  $1, 2, 3, \dots$  равенство  $c_2 = 0$  равносильно равенству  $\Delta_2 = 0$ .

Анализ показывает, что в каждой из областей  $1, 2, 3, \dots$  существует один участок кривой  $c_2 = 0$ . На прямолинейных границах  $\sigma = n\pi$  областей имеем  $\Delta_2 = 6n^2\pi^2\delta^2(n^2\pi^2\delta^2 - 4)$ . На криволинейных границах нечетных областей

$$\Delta_2 = -12\frac{(1-c)}{1+c}f_{40}, \quad (6.8)$$

где  $f_{40}$  вычисляется по формуле (5.7). На криволинейных границах четных областей величина  $\Delta_2$  равна взятой с обратным знаком правой части равенства (6.8), в которой  $c$  и  $s$  заменены, соответственно, на  $-c$  и  $-s$ . Из сказанного следует, что участки кривой  $c_2 = 0$  имеют своими конечными точками те точки границ областей  $1, 2, 3, \dots$ , которые разделяют эти границы на участки устойчивости и неустойчивости, указанные в предыдущем разделе статьи.

На рисунках 2 и 3 участки кривой  $c_2 = 0$  внутри областей  $1, 2, 3, \dots$  областей устойчивости в первом приближении изображены сплошными линиями.

При больших значениях параметра  $\sigma$  кривая  $c_2 = 0$  имеет такое аналитическое представление:

$$\delta = \frac{2}{\sigma} + \frac{s(33s - 20c)}{2(4sc - 3c^2 - 3)\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right).$$

Согласно теореме 9 статьи [8], для значений параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , лежащих в областях  $1, 2, 3, \dots$  и не попадающих на кривые (6.5) резонансов четвертого порядка и на участки кривых  $c_2 \neq 0$ , неподвижная точка отображения (3.7) устойчива.

*Анализ устойчивости при резонансе четвертого порядка.* Пусть параметры  $\sigma$ ,  $\delta$  лежат на кривых (6.5) резонанса четвертого порядка. В этом случае, как будет видно далее, для строгого решения задачи об устойчивости неподвижной точки отображения достаточно рассмотреть в (3.7) члены до пятой степени включительно. Вычисления показывают, что для коэффициентов соответствующих форм  $F_4$  и  $F_6$  разложения (5.3) имеют место следующие соотношения:

$$f_{40} = f_{04} = \frac{1}{8c^2s^3a^3} [8c^2s^4 - cs(c^4 + 6c^2 - 8)a + (4 - 5c^2)a^2], \quad (6.9)$$

$$f_{22} = \frac{1}{4c^2sa^2} [cs(8 - 5c^2) - (10c^4 - 3c^2 - 4)a], \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} f_{60} = f_{06} = & \frac{1}{48c^4s^2a^6} [64s^8c^3 + 24s^5c^2(3c^2 - 4)(5c^2 - 1)a - \\ & - s^2c(43c^8 + 614c^6 - 1404c^4 + 804c^2 - 48)a^2 - \\ & - s(60c^8 + 312c^6 - 787c^4 + 416c^2 - 16)a^3 - 6c(5c^2 - 4)^2a^4], \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} f_{42} = f_{24} = & \frac{1}{16c^4s^2a^5} [32s^5c^2(11c^4 - 15c^2 + 1) - \\ & - s^2c(44c^8 + 888c^6 - 2163c^4 + 1324c^2 - 48)a - \\ & - s(500c^8 + 44c^6 - 1627c^4 + 1024c^2 - 16)a^2 - 2c(8c^2 + 7)(5c^2 - 4)^2a^3], \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$f_{31} = f_{13}, \quad f_{51} = f_{15}. \quad (6.13)$$

Явные выражения для коэффициентов  $f_{31}$ ,  $f_{13}$ ,  $f_{51}$ ,  $f_{15}$  и  $f_{33}$  не понадобятся.

Принимая во внимание соотношения (6.9)–(6.13) и то, что в разложении (5.3) нет форм нечетной степени, можно из теорем 11 и 12 статьи [8] получить условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки отображения (3.7) при резонансе четвертого порядка. Введем обозначения

$$\chi_1 = f_{40}(2f_{40} + f_{22}), \quad \chi_2 = 3f_{60}f_{40} + f_{60}f_{22} + f_{42}f_{40}. \quad (6.14)$$

**Утверждение 4.** Если  $\chi_1 > 0$ , то неподвижная точка отображения (3.7) устойчива, а если  $\chi_1 < 0$ , то неподвижная точка отображения неустойчива. Если же  $\chi_1 = 0$ , то при  $\chi_2 > 0$  имеет место устойчивость, а при  $\chi_2 < 0$  — неустойчивость.

Анализ функции  $\chi_1$  показывает, что в  $n$ -й области устойчивости в первом приближении ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) на кривой (6.5) резонанса четвертого порядка существует один интервал неустойчивости  $(C_n, D_n)$ . В концевых точках  $C_n$  и  $D_n$  этого интервала функция  $\chi_1$  обращается в нуль. Интервал неустойчивости содержит внутри себя точку  $(\sigma, \delta)$  пересечения кривой  $c_2 = 0$  и кривой (6.5). Для первых четырех областей ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) это будут точки

$$(2.5820, 0.6184), \quad (5.7805, 0.3147), \quad (8.9366, 0.2107), \quad (12, 0.848, 0.1583).$$

При больших  $\sigma$  для координат точек пересечения имеет место такая асимптотика:

$$\cos \sigma = (-1)^n \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{73\sqrt{5}}{1750\sigma} - \frac{470\,269\sqrt{5}}{17\,150\,000\sigma^2} \right) + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} - \frac{73}{70\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right).$$

Концевые точки  $C_n, D_n$  интервалов неустойчивости при  $n = 1, 2, 3, 4$  будут такими:

$$C_1(2.5570, 0.5909), \quad D_1(2.5954, 0.6338), \quad C_2(5.7708, 0.3081), \quad D_2(5.7857, 0.3183), \\ C_3(8.9307, 0.2079), \quad D_3(8.9398, 0.2123), \quad C_4(12.0806, 0.1568), \quad D_4(12.0871, 0.1592).$$

При больших  $\sigma$  для координат точек  $C_n$  справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\cos \sigma = (-1)^n \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{32\sqrt{5}}{625\sigma} - \frac{3324\sqrt{5}}{78\,125\sigma^2} \right) + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} - \frac{32}{25\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right),$$

а для координат точек  $D_n$  —

$$\cos \sigma = (-1)^n \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{41\sqrt{5}}{1125\sigma} - \frac{193\,387\sqrt{5}}{9\,112\,500\sigma^2} \right) + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} - \frac{41}{45\sigma^2} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right).$$

Вне отрезков  $[C_n, D_n]$  на резонансных кривых (6.5) неподвижная точка отображения устойчива.

На рисунке 2 интервалы неустойчивости  $(C_n, D_n)$  не показаны ввиду их малости. На рисунке 3 интервал неустойчивости  $(C_1, D_1)$  выделен на кривой (6.5) сплошной линией.

При исследовании устойчивости для значений параметров  $\sigma, \delta$ , отвечающих концевым точкам  $C_n$  и  $D_n$  интервалов неустойчивости, надо, согласно утверждению 3, выяснить знак величины  $\chi_2$  в этих точках.





Из уравнения  $\chi_1 = 0$  следует, что координаты  $\sigma$  точек  $D_n$  и  $C_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) являются корнями уравнений  $1/\sigma = \psi_1$  и  $1/\sigma = \psi_2$  соответственно, где

$$\psi_1 = \frac{c^4 + 11c^2 - 16 + \sqrt{c^2(c^6 - 298c^4 + 345c^2 - 32)}}{16cs(1 - c^2)}, \quad (6.15)$$

$$\psi_2 = \frac{c^4 + 6c^2 - 8 + \sqrt{c^8 + 12c^6 - 140c^4 + 192c^2 - 64}}{16cs(1 - c^2)}. \quad (6.16)$$

В (6.15) и (6.16) используются обозначения (5.9).

В уравнениях  $1/\sigma = \psi_i$  ( $i = 1, 2$ ) функции  $\psi_i$  должны быть положительными. Проведя несложный анализ, получим, что для этого величина  $c$  должна лежать в интервале  $-2\sqrt{5}/5 < c < -0.7243$ , если  $n$  нечетно, и в интервале  $0.7243 < c < 2\sqrt{5}/5$ , если  $n$  четно.

Вычисления показывают, что координаты  $\sigma$  точек  $D_n$  таковы, что  $-2\sqrt{5}/5 < c \leq -0.8545$ , если  $n$  нечетно, и  $0.8788 \leq c < 2\sqrt{5}/5$ , если  $n$  — четное число. А для координат  $\sigma$  точек  $C_n$  выполняется неравенство  $-2\sqrt{5}/5 < c \leq -0.8339$  при нечетном  $n$  и  $0.8716 \leq c < 2\sqrt{5}/5$  при четном  $n$ .

Нетрудно показать, что в рассматриваемом сейчас случае  $\chi_1 = 0$  (когда  $1/\sigma = \psi_1$  или  $1/\sigma = \psi_2$ ), функция  $\chi_2$ , определяемая равенствами (6.14) и (6.9)–(6.12), будет зависеть только от  $c = \cos \sigma$ . Явное выражение для функции  $\chi_2$  не приводим, отметим только, что она будет четной относительно  $c$ .

Пусть  $n$  — нечетное число. На рисунках 7 и 8 представлены графики функции  $\chi_2$  для случаев  $1/\sigma = \psi_1$  и  $1/\sigma = \psi_2$  соответственно. В обоих случаях функция  $\chi_2$  обращается в нуль при  $c = -2\sqrt{5}/5$  и  $c = c_0 = -0.7296$ . При  $-2\sqrt{5}/5 < c < c_0$  функция  $\chi_2$  отрицательна в случае  $1/\sigma = \psi_1$  (рис. 7) и положительна в случае  $1/\sigma = \psi_2$  (рис. 8).

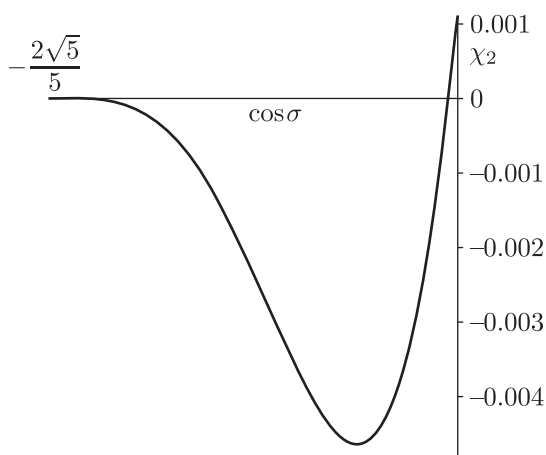


Рис. 7. К анализу резонанса четвертого порядка. График функции  $\chi_2$  в случае  $1/\sigma = \psi_1$  ( $-2\sqrt{5}/5 \leq \cos \sigma \leq -0.7243$ ).

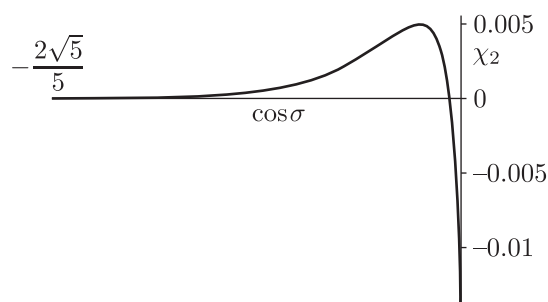


Рис. 8. К анализу резонанса четвертого порядка. График функции  $\chi_2$  в случае  $1/\sigma = \psi_2$  ( $-2\sqrt{5}/5 \leq \cos \sigma \leq -0.7243$ ).

Учитывая, что значения  $c = \cos \sigma$  для координат  $\sigma$  точек  $D_n$  и  $C_n$  лежат внутри интервала  $(-2\sqrt{5}/5, c_0)$ , получаем, что при нечетном  $n$  значения функции  $\chi_2$  отрицательны в точках  $D_n$  и положительны в точках  $C_n$ . Опираясь на свойство четности функции  $\chi_2(c)$ , тот же вывод о знаках  $\chi_2$  в точках  $D_n$  и  $C_n$  можно получить и для четных  $n$ .

Таким образом, согласно утверждению 3, во всех концевых точках  $D_n$  интервалов неустойчивости  $(C_n, D_n)$  на кривых (6.5) резонансов четвертого порядка неподвижная точка отображения (3.7) неустойчива, а в точках  $C_n$  — устойчива.

*Анализ устойчивости для значений параметров  $\sigma$  и  $\delta$ , принадлежащих кривой  $c_2 = 0$ .* Нам осталось рассмотреть устойчивость при значениях параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , лежащих на кривой  $c_2 = 0$ .

Об устойчивости при резонансе третьего порядка. Сначала рассмотрим точки участков кривой  $c_2 = 0$ , в которых реализуется резонанс третьего порядка. В этих точках

$$\delta = -\frac{1 + 2 \cos \sigma}{2 \sigma \sin \sigma}, \quad (6.17)$$

и величины (6.1) имеют такие значения:  $\cos \alpha = -1/2$ ,  $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$ .

Из (6.6) и (6.17) следует, что в точках резонанса третьего порядка величина  $1/\sigma$  будет функцией величин  $c = \cos \sigma$  и  $s = \sin \sigma$ , задаваемой формулой

$$\frac{1}{\sigma} = \mu(c, s) = \frac{4c^4 + 32c^3 + 33c^2 - 45c - 51 + \sqrt{P_8}}{32s(2c + 1)(1 - c^2)}, \quad (6.18)$$

где  $P_8$  — многочлен восьмой степени относительно  $c$ :

$$P_8 = 16c^8 + 256c^7 - 1272c^6 - 3880c^5 - 2583c^4 + 2470c^3 + 4483c^2 + 1518c - 279.$$

При этом (чтобы функция  $\mu$  была положительной) величина  $c$  должна лежать в интервале  $c^* < c < -0.9356$ , если  $n$  нечетно, и в интервале  $c^{**} < c < 1$ , если  $n$  четно. Здесь

$$c^* = -\frac{1}{10} - \frac{\sqrt{19}}{5} = -0.9718, \quad c^{**} = -\frac{1}{10} + \frac{\sqrt{19}}{5} = 0.7718. \quad (6.19)$$

Анализ уравнения (6.18) показывает, что на участке кривой  $c_2 = 0$ , лежащем в  $n$ -й области устойчивости в первом приближении, существует одна точка  $B_n$  резонанса третьего порядка. Для первых четырех областей это будут такие точки:

$$B_1(2.8844, 0.6367), \quad B_2(5.4884, 0.3065), \quad B_3(9.1809, 0.2122), \quad B_4(11.8320, 0.1567).$$

Первая из этих точек показана на рисунке 3.

При больших значениях  $\sigma$  для координат  $(\sigma, \delta)$  точек  $B_n$  в случае нечетных  $n$  можно получить такое асимптотическое представление:

$$\cos \sigma = c^* - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{287}{1875} - \frac{5401\sqrt{19}}{142500} \right) + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

а в случае четных  $n$  —

$$\cos \sigma = c^{**} - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{287}{1875} + \frac{5401\sqrt{19}}{142500} \right) + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Численный анализ уравнения (6.18) показывает, что координаты  $\sigma$  точек  $B_n$  таковы, что  $c^* < c \leq -0.9671$  при нечетных  $n$  и  $0.7005 \leq c < c^{**}$  при четных  $n$ .

Для решения вопроса об устойчивости при значениях параметров  $\sigma, \delta$ , соответствующих точкам  $B_n$ , воспользуемся теоремой 10 статьи [8]. Следуя [8], составим функцию  $\chi_3 = |c_3| - \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$ , где величины  $c_3, d_3, e_3$  выражаются (см. формулы (4.41) в статье [8]) через коэффициенты форм  $F_4$  и  $F_6$  разложения (5.3) (с учетом того, что это разложение не содержит форм нечетной степени). Согласно теореме 10, неподвижная точка отображения (3.7) устойчива при  $\chi_3 > 0$  и неустойчива при  $\chi_3 < 0$ .

Анализ показал, что величина  $d_3$  равна нулю, а  $\chi_3$  — функция от  $c = \cos \sigma$ . Эта функция записывается довольно громоздко, и ее явное выражение здесь не приводится. На рисунках 9 и 10 представлены графики функции  $\chi_3$  в случае нечетных и четных  $n$  соответственно. Функция  $\chi_3$  положительна для всех значений  $\sigma$ , удовлетворяющих уравнению (6.18), и, следовательно, во всех точках  $B_n$ . Поэтому, согласно упомянутой теореме 10 статьи [8], во всех точках  $B_n$  резонанса третьего порядка, лежащих на кривой  $c_2 = 0$ , неподвижная точка отображения (3.7) устойчива.

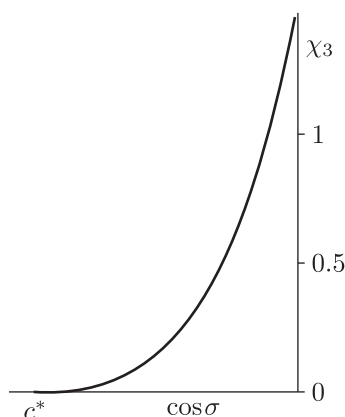


Рис. 9. К анализу резонанса третьего порядка. График функции  $\chi_3$  в случае нечетных  $n$  ( $c^* \leq \cos \sigma \leq -0.9356$ ).

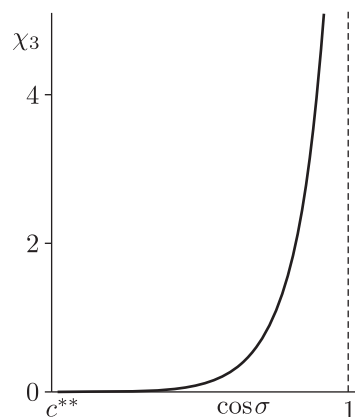


Рис. 10. К анализу резонанса третьего порядка. График функции  $\chi_3$  в случае четных  $n$  ( $c^{**} \leq \cos \sigma < 1$ ).

О резонансах пятого и шестого порядков. В каждой из областей устойчивости в первом приближении существуют две кривые, на которых реализуется резонанс пятого порядка. Для этого резонанса

$$\cos \alpha = \frac{\pm \sqrt{5} - 1}{4}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4},$$

а соответствующие кривые задаются уравнениями

$$\delta = \frac{\pm \sqrt{5} - 1 - 4 \cos \sigma}{4\sigma \sin \sigma}. \tag{6.20}$$

Каждая из кривых (6.20) пересекает участок кривой  $c_2 = 0$ , лежащий в какой-либо из областей устойчивости в первом приближении, в одной точке.

Но наличие на кривой  $c_2 = 0$  точек, где реализуется резонанс пятого порядка, не влияет на результаты исследования устойчивости неподвижной точки отображения (3.7). Это обусловлено тем, что в разложении функции (5.3) нет форм нечетных степеней, а вопрос об устойчивости полностью решается (как мы увидим ниже) анализом форм не выше восьмой степени в этом разложении.



При резонансе шестого порядка  $\cos \alpha = 1/2$ ,  $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$ . В плоскости  $(\sigma, \delta)$  ему отвечает кривая

$$\delta = \frac{1 - 2 \cos \sigma}{2\sigma \sin \sigma}. \quad (6.21)$$

Из (6.21) и (6.6) следует, что на участках кривой  $c_2 = 0$  в точках резонанса шестого порядка величину  $\sigma$  можно выразить через  $c = \cos \sigma$  и  $s = \sin \sigma$  в соответствии с равенством

$$\frac{1}{\sigma} = -\mu(-c, s), \quad (6.22)$$

где  $\mu$  — функция из правой части равенства (6.18). В  $n$ -й области устойчивости в первом приближении существует одна точка  $E_n$  резонанса шестого порядка.

При  $n = 1, 2, 3, 4$  имеем

$$E_1(2.1204, 0.5654), \quad E_2(6.0362, 0.3183), \quad E_3(8.6723, 0.2075), \quad E_4(12.3240, 0.1592).$$

Точка  $E_1$  показана на рисунке 3.

При больших нечетных значениях  $n$  для координат точек  $E_n$  справедлива такая асимптотика:

$$\cos \sigma = c' + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{287}{1875} + \frac{5401\sqrt{19}}{142500} \right) + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

а при четных  $n$  —

$$\cos \sigma = c'' + \frac{1}{\sigma} \left( -\frac{287}{1875} + \frac{5401\sqrt{19}}{142500} \right) + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad \delta = \frac{2}{\sigma} + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Здесь (см. (6.19))  $c' = -c^{**} = -0.7718$ ,  $c'' = -c^* = 0.9718$ .

Рассмотрим функцию  $\chi_4 = |c_3| - \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$ , где величины  $c_3, d_3, e_3$  вычисляются по формулам (4.54) статьи [8]. Согласно теореме 14 этой статьи, неподвижная точка отображения (3.7) устойчива, если  $\chi_4 > 0$ , и неустойчива, если  $\chi_4 < 0$ .

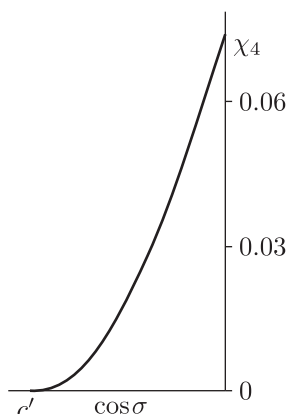
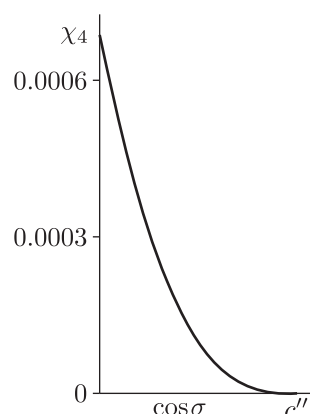
Можно проверить, что  $d_3$  при условии (6.22) равно нулю, а  $\chi_4$  будет функцией величины  $c = \cos \sigma$ . Численный анализ уравнения (6.22) показывает, что координаты точек  $E_n$  таковы, что для них величина  $c$  лежит в промежутке  $c' < c \leq -0.5224$ , когда  $n$  нечетно, и в промежутке  $0.9697 \leq c < c''$ , когда  $n$  четно.

На рисунках 11 и 12 (для нечетных и четных  $n$  соответственно) показаны графики функции  $\chi_4$  для значений  $c$ , лежащих в указанных промежутках. Функция  $\chi_4$  положительна и, следовательно, согласно упомянутой теореме из статьи [8], для значений параметров  $\sigma, \delta$ , соответствующих точкам  $E_n$  резонанса шестого порядка, неподвижная точка отображения (3.7) устойчива.

С л у ч а й о т с у т с т в и я р е з о н а н с о в 3-го, 4-го и 6-го п о р я д к о в. Пусть параметры  $\sigma, \delta$  отвечают точкам кривой  $c_2 = 0$ , отличным от точек  $B_n$  и  $E_n$  резонансов третьего и шестого порядков и от точек пересечения кривой  $c_2 = 0$  с кривыми (6.5) резонанса четвертого порядка. Тогда при помощи близкой к тождественной канонической замены переменных  $x, y \rightarrow q, p$  отображение (6.3) можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_* \\ p_* \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$



Рис. 11. К анализу резонанса шестого порядка. График функции  $\chi_4$  в случае нечетных  $n$ .Рис. 12. К анализу резонанса шестого порядка. График функции  $\chi_4$  в случае четных  $n$ .

где

$$q_* = q + \frac{3\pi}{2} c_3 (q^2 + p^2)^2 p + O_7, \quad p_* = p - \frac{3\pi}{2} c_3 (q^2 + p^2)^2 q + O_7. \quad (6.24)$$

Величина  $c_3$  выражается через коэффициенты форм  $F_4$  и  $F_6$  по формулам (4.24) статьи [8]. При выполнении неравенства  $c_3 \neq 0$  неподвижная точка отображения (3.7) устойчива [10–12].

Анализ показал, что на участке кривой  $c_2 = 0$  из  $n$ -й области устойчивости в первом приближении существует одна точка  $P_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), в которой величина  $c_3$  обращается в нуль. При  $n = 1, 2, 3, 4$  это будут следующие точки:

$$P_1(2.5761, 0.6178), \quad P_2(5.7784, 0.3146), \quad P_3(8.9353, 0.2107), \quad P_4(12.0839, 0.1583).$$

При больших  $n$  для координат  $\sigma, \delta$  точек  $P_n$  справедливо представление

$$\sigma = \pi n - \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{470347}{2156000\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \delta = \frac{2}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Все точки  $P_n$  лежат очень близко к точкам пересечения кривой  $c_2 = 0$  с кривой резонанса четвертого порядка. На рисунках 2 и 3 точки  $P_n$  не показаны.

Об устойчивости в случае  $c_2 = c_3 = 0$ . Проведенный выше анализ позволил решить задачу об устойчивости неподвижной точки отображения (3.7) для всех значений параметров  $\sigma, \delta$ , кроме параметров, отвечающих точкам  $P_n$ , в которых величины  $c_2$  и  $c_3$  одновременно обращаются в нуль. Для исследования устойчивости в этих точках надо в отображении (6.3) учесть члены до седьмой степени включительно относительно  $x, y$ .

Проверка показывает, что в точках  $P_n$  отсутствуют резонансы до восьмого порядка включительно. Поэтому при помощи близкой к тождественной канонической замены переменных  $x, y \rightarrow q, p$  отображение (6.3) можно привести к форме (6.23), в которой

$$q_* = q + \pi c_4 (q^2 + p^2)^3 p + O_9, \quad p_* = p - \pi c_4 (q^2 + p^2)^3 q + O_9. \quad (6.25)$$

По алгоритму статьи [8] величина  $c_4$  выражается через коэффициенты форм  $F_4, F_6$  и  $F_8$  из разложения (5.3).

Вычисления показали, что для  $n = 1, 2, 3, 4$  величина  $c_4$  будет, соответственно, такой:

$$c_4 = 0.18543, \quad c_4 = -0.00763, \quad c_4 = 0.00135, \quad c_4 = -0.00041. \quad (6.26)$$

При значениях  $n \geq 5$  для величины  $c_4$  можно получить (используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа [16]) следующее представление:

$$c_4 = (-1)^{n+1} \left( \frac{0.09038}{n^4} + \frac{0.04783}{n^5} \right) + \frac{k}{n^6}, \quad (|k| < 0.03). \quad (6.27)$$

Из (6.26), (6.27) следует, что  $c_4$  ни в одной из точек  $P_n$  не обращается в нуль: если  $n$  нечетно, то  $c_4 > 0$ , а если  $n$  четно, то  $c_4 < 0$ . Следовательно [10–12], во всех точках  $P_n$  неподвижная точка отображения (3.7) устойчива.

## Выводы

Задача об устойчивости перманентного вращения диска вокруг вертикали при наличии его соударений с неподвижной горизонтальной плоскостью решена для всех физически допустимых значений параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , определяемых равенствами (3.6). Полученные результаты состоят в следующем.

1. В плоскости  $(\sigma, \delta)$  существуют счетные множества областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении. Области неустойчивости на рисунках 2 и 3 заштрихованы. Областям устойчивости в первом приближении на рисунках 2 и 3 отвечают незаштрихованные области;  $n$ -я область ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) примыкает к интервалу  $\pi(n-1) < \sigma < \pi n$  оси  $\delta = 0$ , ее прямолинейная граница задается уравнением  $\sigma = \pi n$ , а криволинейная — уравнением  $\delta = \sigma^{-1} \operatorname{tg}(\sigma/2)$  при нечетном  $n$  и уравнением  $\delta = -\sigma^{-1} \operatorname{ctg}(\sigma/2)$  при четном  $n$ .

2. Границы областей устойчивости в первом приближении разбиваются (точками  $A_n$ , если граница прямолинейная, и точками  $A'_n$ , если граница криволинейная) на два участка. На одном из этих участков вращение диска устойчиво, а на другом неустойчиво. На рисунках 2 и 3 участки устойчивости изображены штриховыми, а участки неустойчивости — сплошными линиями. В самих точках  $A_n$  прямолинейных границ имеет место устойчивость, а в точках  $A'_n$  криволинейных границ — неустойчивость.

3. Внутри областей устойчивости в первом приближении вращение диска устойчиво для всех значений параметров  $\sigma$ ,  $\delta$ , кроме значений, принадлежащих полуинтервалам  $(C_n, D_n]$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), лежащим на кривых (6.5) резонанса четвертого порядка. В этих полуинтервалах вращение диска неустойчиво.

## Список литературы

- [1] Аппель П. Теоретическая механика: Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. Москва: Физматгиз, 1960. 487 с.
- [2] Маркеев А. П. Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ, 1994, т. 58, № 3, с. 71–81.
- [3] Алехин А. К., Маркеев А. П. Об устойчивости периодического движения диска над горизонтальной плоскостью // МТТ, 2000, № 4, с. 16–22.
- [4] Пуанкаре А. Избранные труды: Т. 2: Новые методы небесной механики. Москва: Наука, 1972. 999 с.



- [5] Маркеев А. П. О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // МГТ, 1996, № 2, с. 37–54.
- [6] Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1937. 500 с.
- [7] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. Москва: Наука, 1978. 312 с.
- [8] Маркеев А. П. Об устойчивости неподвижных точек отображений, сохраняющих площадь // Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 3, с. 503–545.
- [9] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.
- [10] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Москва: Мир, 1973. 167 с.
- [11] Зигель К., Мозер Ю. Лекции по небесной механике. Ижевск: РХД, 2001. 384 с.
- [12] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.
- [13] Маркеев А. П. Теоретическая механика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
- [14] Маркеев А. П. Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // ПММ, 2014, т. 78, № 5, с. 611–624.
- [15] Маркеев А. П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // МГТ, 2004, № 6, с. 3–12.
- [16] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х тт.: Т. 2. Москва: Физматлит, 1966. 607 с.

## On stability of permanent rotation of a disk that collides with an horizontal plane

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences  
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia  
markeev@ipmnet.ru

Stability of the motion of a thin homogeneous disk in a uniform gravitational field above a fixed horizontal plane is investigated. Collisions between the disk and the plane are assumed to be absolutely elastic, and friction is negligible. In unperturbed motion, the disk rotates at a constant angular velocity about its vertical diameter, and its center of gravity makes periodic oscillations along a fixed vertical as a result of collisions. The stability problem depends on two dimensionless parameters characterizing the magnitude of the angular velocity of the disk and the height of his jump above the plane in the unperturbed motion. An exact solution of the problem of stability is obtained for all physically admissible values of these parameters.

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

Keywords: stability, map, canonical transformations

Received October 13, 2015, accepted November 05, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 685–707 (Russian)