



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 534.16

MSC 2010: 39A21, 74J30

## **Пилообразные волны в гистерезисных средах с насыщением нелинейных потерь**

**В. Е. Назаров, С. Б. Кияшко**

На основе анализа результатов экспериментальных исследований эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения предложено гистерезисное (неупругого вида) уравнение состояния поликристаллических твердых тел с насыщением нелинейных потерь. Проведено теоретическое исследование распространения несимметричных пилообразных волн в таких материалах. Определены закономерности для характеристик нелинейной пилообразной волны: амплитудно-зависимых потерь и изменения скорости распространения волны, а также для амплитуд ее высших гармоник. Проведен графический анализ эволюции формы волны и ее спектральных составляющих.

Ключевые слова: гистерезис, амплитудно-зависимое внутреннее трение, насыщение нелинейных потерь, пилообразные волны

Экспериментальные исследования амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) в поликристаллических твердых телах свидетельствуют о том, что их уравнения состояния описываются гистерезисной зависимостью  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ , где  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — напряжение и деформация [1–6], при этом во многих металлах (медь [4, 7], алюминий [8], индий [9, 10], цинк [11, 12], свинец [13]) и в сплавах меди [14] наблюдается насыщение нелинейных (гистерезисных) потерь. Причины АЗВТ и гистерезисного поведения поликристаллов

---

Получено 24 марта 2015 года

После доработки 10 октября 2015 года

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-05-05143а).

---

Назаров Вениамин Евгеньевич  
[nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru](mailto:nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru)

Кияшко Сергей Борисович  
[sergei-kiyashko@mail.ru](mailto:sergei-kiyashko@mail.ru)

Институт прикладной физики РАН  
603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46

связываются с движением дислокаций [2–6, 15, 16] и их взаимодействием с примесными атомами. Различают два основных вида «механических» гистерезисов: упругий (или гистерезис отрыва) и неупругий (гистерезис трения, или пластический гистерезис) [15–17]. Для упругого гистерезиса —  $\sigma(\varepsilon = 0) = 0$ , а для неупругого —  $\sigma(\varepsilon = 0) \neq 0$  и  $\varepsilon(\sigma = 0) \neq 0$ . Оба гистерезиса одинаково хорошо объясняют эффекты АЗВТ — декремент затухания и дефект модуля упругости, однако они существенно отличаются друг от друга. Из-за этих отличий, закономерности нелинейных волновых процессов в средах с упругим и неупругим гистерезисами качественно различны. Различия выявляются при изучении нелинейных искажений акустических волн и эффектов генерации их высших гармоник. На основе анализа закономерностей нелинейных волновых процессов, наблюдаемых в конкретном гистерезисном материале, можно, в принципе, определить, какого вида гистерезис имеет место для этого материала [17]; для этого необходимо знание закономерностей нелинейных волновых процессов, протекающих в средах с различными видами гистерезисов. Нелинейные волновые процессы в средах, описываемых упругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь, исследовались в работе [18].

В настоящей работе предложено уравнение состояния поликристаллических твердых тел, содержащее неупругий гистерезис с насыщением нелинейных потерь, и проводится теоретическое исследование нелинейного распространения несимметричных пилообразных волн в средах с неупругим квадратичным гистерезисом с насыщением нелинейных потерь.

Первое аналитическое описание гистерезисной зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  для объяснения АЗВТ в поликристаллах было дано Давиденковым в 1938 году [1]. В этой работе было предложено уравнение состояния, содержащее неупругий гистерезис:

$$\sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = E \left[ \varepsilon - \frac{\beta}{n} \begin{cases} (\varepsilon_m + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_m^n, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -(\varepsilon_m - \varepsilon)^n + 2^{n-1} \varepsilon_m^n, & \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases} \right], \quad (1)$$

где  $E$  — модуль упругости,  $\varepsilon_m$  — амплитуда деформации,  $n$  и  $\beta$  — параметры гистерезиса,  $n > 1$ ,  $\beta > 0$ . Петля гистерезиса (1) состоит из двух (положительной ( $\dot{\varepsilon} > 0$ ) и отрицательной ( $\dot{\varepsilon} < 0$ )), симметричных параболических ветвей степени  $n$ , непрерывно переходящих друг в друга при  $\varepsilon = \pm \varepsilon_m$ . В модели Давиденкова гистерезисное поведение материала связывается с его микропластической деформацией [1, 15, 16], вызванной необратимым движением дислокаций под действием внешнего переменного напряжения. Отметим, что такая же гистерезисная зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  при  $n = 2$  для объяснения эффектов АЗВТ в гистерезисных материалах рассматривалась в работах [19, 20]. Из уравнения (1) получаем выражение для амплитудно-зависимого декремента затухания:

$$\eta_h(\varepsilon_m) = \frac{1}{\varepsilon_m^2} \oint \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) d\varepsilon = \frac{2^{n+1}(n-1)\beta\varepsilon_m^{n-1}}{n(n+1)}. \quad (2)$$

Из выражения (2) видно, что  $\eta_h(\varepsilon_m) \propto \beta\varepsilon_m^{n-1}$ , и, следовательно, в гистерезисе (1) нет насыщения нелинейных потерь. Для того чтобы гистерезис Давиденкова (1) описывал насыщение нелинейных потерь, перед гистерезисной функцией (перед фигурной скобкой) можно ввести множитель  $[1 + \gamma_0 \varepsilon_m^{n-1}]^{-1}$ , где  $\gamma_0$  — параметр насыщения,  $\gamma_0 > 0$ . В этом случае выражение для амплитудно-зависимого декремента затухания имеет вид  $\eta_h(\varepsilon_m) = \frac{2^{n+1}(n-1)\beta\varepsilon_m^{n-1}}{n(n+1)[1 + \gamma_0 \varepsilon_m^{n-1}]}$ .



При  $\gamma_0 \varepsilon_m^{n-1} \ll 1$  имеем выражение (2), а при  $\gamma_0 \varepsilon_m^{n-1} \gg 1$  получаем насыщение нелинейных потерь:  $\eta_h(\varepsilon_m) = \frac{2^{n+1}(n-1)\beta}{n(n+1)\gamma_0} = \text{const}$ .

Измерения эффектов АЗВТ показывают, что при относительно небольших амплитудах  $\varepsilon_m$ , когда  $\gamma_0 \varepsilon_m^{n-1} \ll 1$  и насыщения нелинейных потерь нет, для многих поликристаллических металлов (например, медь [7], цинк [11, 12]) и горных пород (гранит, магнетит, известняк [21, 22]) показатель степени гистерезиса  $n = 2$ . Однако для этих материалов разные эффекты АЗВТ — декремент затухания и дефект модуля упругости — определяются разными параметрами нелинейности, и, следовательно, при  $n = 2$  гистерезисная петля  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  состоит из двух квадратичных несимметричных параболических ветвей. Уравнение состояния с неупругим квадратичным (вообще говоря, несимметричным) гистерезисом с насыщением нелинейных потерь можно представить в следующем виде (рис. 1):

$$\sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})], \tag{3}$$

$$f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = \frac{\alpha \varepsilon_m \varepsilon}{1 + \gamma_0 \varepsilon_m} + \frac{1}{2(1 + \gamma_0 \varepsilon_m)} \begin{cases} \beta_1 \varepsilon^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0, \\ -\beta_2 \varepsilon^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \tag{4}$$

где  $f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  — гистерезисная функция,  $|f_\varepsilon(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll 1$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ ,  $\alpha, \gamma_0, \beta_{1,2}$  — параметры гистерезисной нелинейности,  $\gamma_0 \geq 0$ ,  $\beta_{1,2} \geq 0$ ,  $|\alpha| \varepsilon_m \ll 1$ ,  $|\beta_{1,2}| \varepsilon_m \ll 1$ . Все параметры уравнений состояния (1), (3) для каждого конкретного материала определяются экспериментально, при этом, в отличие от симметричного гистерезиса (1), гистерезис (4) — несимметричен (при  $\beta_1 \neq \beta_2$ ). В уравнении (4) первое (негистерезисное) слагаемое определяет дефект модуля (или нелинейную поправку к скорости распространения волны), второе (гистерезисное) слагаемое — нелинейные потери, а множитель  $[1 + \gamma_0 \varepsilon_m]^{-1}$  отвечает за насыщение эффектов АЗВТ. При  $\gamma_0 = 0$  и  $\alpha = \beta_1 = \beta_2$  уравнения (3), (4) описывают симметричный квадратичный гистерезис Давиденкова [1]. Из рисунка 1 видно, что с ростом параметра  $\gamma_0$  площадь гистерезиса (4) и его наклон уменьшаются, что и соответствует насыщению эффектов АЗВТ.

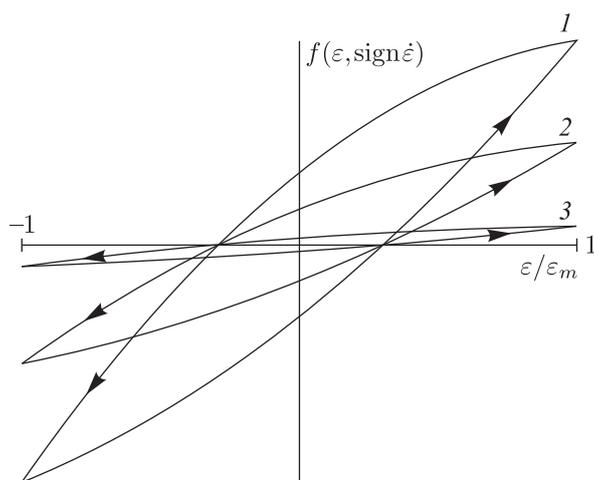


Рис. 1. Качественный вид гистерезисной функции  $f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  при различных параметрах  $\gamma_0$ : (1)  $\gamma_0 = 0$ , (2)  $\gamma_0 = \gamma_{01}$ , (3)  $\gamma_0 = \gamma_{02} > \gamma_{01}$ .

Далее мы рассмотрим распространение первоначально несимметричной периодической пилообразной волны в среде с неупругим квадратичным гистерезисом с насыщением нелинейных потерь. Подставляя уравнение состояния (3) в уравнение движения  $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$  [23] и переходя к сопровождающей системе координат  $\tau = t - x/C_0$ ,  $x' = x$ , получим эволюционное уравнение для положительного ( $\varepsilon_\tau > 0$ ) и отрицательного ( $\varepsilon_\tau < 0$ ) фронтов волны деформации  $\varepsilon(x, \tau) = \partial U(x, \tau)/\partial x$ , бегущей в положительном направлении оси  $x$ :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})}{\partial \tau}, \quad (5)$$

где  $U$  — смещение,  $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ .

Граничное условие для одного периода ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) несимметричной периодической пилообразной волны, содержащей разрывы при  $\theta = 0$  и  $\theta = 2\pi$ , имеет следующий вид:

$$\varepsilon(0, \theta) = \varepsilon_0[1 - (\theta/\pi)], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_0$ ,  $T$ ,  $\omega = 2\pi/T$  — амплитуда, период и частота волны,  $\theta = \omega\tau$ .

При решении уравнения (5) мы будем пользоваться методом «сшивания» простых волн, отвечающих каждой ветви гистерезиса (4) [17]. Уравнение (5) с граничным условием (6) имеет точное решение в виде пилообразной волны с непрерывно изменяющейся формой (и без разрывов при  $x > 0$ ). Один период такой волны определяется выражением

$$e(z, \theta) = \frac{(1 + \mu)e_m(z)}{\pi} \begin{cases} \frac{1}{1 - e_m(z)} \left( \theta + \frac{\pi\lambda}{1 + \mu} \ln e_m \right), & e_\theta(z, \theta) > 0, \quad \theta_m^-(z) \leq \theta \leq \theta_m^+(z), \\ \frac{1}{\mu + e_m(z)} \left( \pi - \theta - \frac{\pi\lambda}{1 + \mu} \ln e_m \right), & e_\theta(z, \theta) < 0, \quad \theta_m^+(z) \leq \theta \leq \theta_m^-(z) + 2\pi, \end{cases} \quad (7)$$

где  $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$ ,  $e_m(z) = \varepsilon_m(z)/\varepsilon_0$ ,  $\mu = \beta_2/\beta_1 \geq 0$ ,  $\lambda = \alpha/\beta_1$ ,  $z = y\varepsilon_0$ ,  $y = \beta_1\omega x/2C_0$ , а фазы  $\theta_m^\pm(z)$  — это координаты «вершины» и «впадины» пилообразной волны, то есть координаты ее «изломов» (рис. 2).

Из выражения (7) следует, что амплитуда  $e_m(z)$  волны и значения фаз  $\theta_m^\pm(z)$ , в которых положительный ( $e_\theta > 0$ ) фронт волны «сшивается» с отрицательным ( $e_\theta < 0$ ) фронтом и выполняется равенство  $e(z, \theta_m^\pm(z)) = \pm e_m(z)$ , определяются уравнениями

$$a \ln e_m(z) - \frac{1}{e_m(z)} + 1 + \frac{1 + \mu}{\pi} z = 0, \quad (8)$$

$$\theta_m^+ = \frac{\pi}{1 + \mu} (1 - e_m - \lambda \ln e_m), \quad \theta_m^- = \frac{\pi}{1 + \mu} (1 + e_m + 2\mu - \lambda \ln e_m), \quad (9)$$

где  $a = \gamma_0\varepsilon_0$ .

При  $\beta_{1,2} \geq 0$  неоднозначностей в профиле волны (7) не образуется, при этом из-за гистерезисных потерь ее амплитуда  $e_m(z)$  уменьшается. Решение уравнения (8) имеет вид  $e_m(z) = [1 + (1 + \mu)z/\pi]^{-1}$  (при  $a \ll 1$ ,  $a |\ln e_m(z)| \ll 1$ ),  $e_m(z) = \exp[-(1 + \mu)z/a\pi]$  (при  $a \gg 1$ ,  $a e_m(z) |\ln e_m(z)| \gg 1$ ) и  $e_m(z) = \pi/(1 + \mu)z$  (при  $a \gg 1$ ,  $a e_m(z) |\ln e_m(z)| \ll 1$ ). На рисунке 3 приведены зависимости амплитуды  $e_m(z)$  и фазы  $\theta_m^\pm(z)$  от  $z$  при  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1.5$  и различных значениях параметра  $a = \gamma_0\varepsilon_0$ . Видно, что с ростом  $z$  амплитуда  $e_m(z)$  уменьшается,

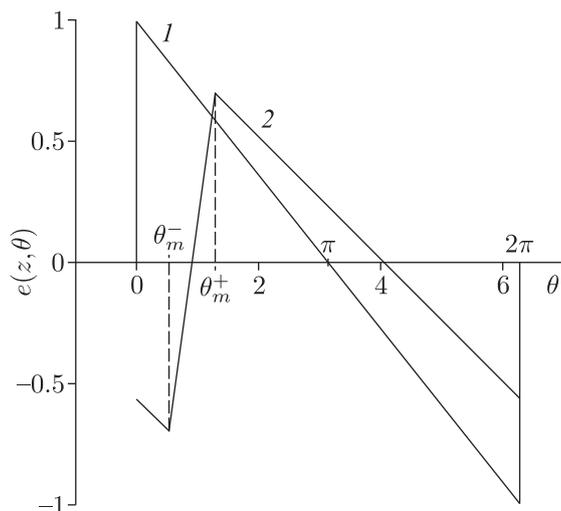


Рис. 2. Форма одного периода несимметричной пилообразной волны  $e(z, \theta)$  при  $\mu = 1.5$ ,  $a = 1$ ,  $\lambda = 2$  и различных  $z$ : (1)  $z = 0$ , (2)  $z = 1$ .

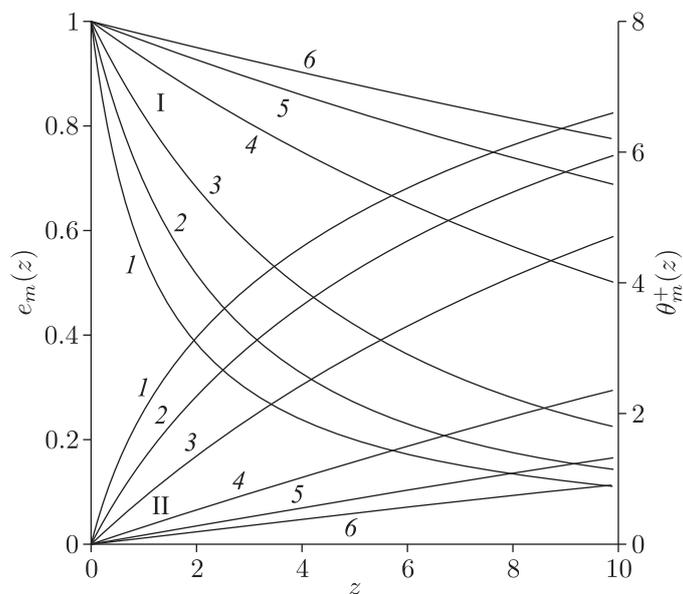


Рис. 3. Зависимость амплитуды  $e_m(z)$  (I) и фазы  $\theta_m^+(z)$  (II) от  $z$  при  $\mu = 1.5$ ,  $\lambda = 2$  и различных значениях  $a$ : (1)  $a = 0$ , (2)  $a = 1$ , (3)  $a = 3$ , (4)  $a = 10$ , (5)  $a = 20$ , (6)  $a = 30$ .

а фаза  $\theta_m^+(z)$  растет. При увеличении параметра  $a = \gamma_0 \varepsilon_0$  гистерезисные потери стремятся к насыщению, а скорости изменения амплитуды  $e_m(z)$  и фазы  $\theta_m^+(z)$  уменьшаются. На рисунке 4 приведены зависимости амплитуды  $\varepsilon_m(z)$  и фазы  $\theta_m^+(z)$  от начальной амплитуды  $\varepsilon_0$  при  $\lambda = 2$ ,  $y = 10^6$  и при различных значениях параметра  $\gamma_0$ . При  $\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$  в начале имеем  $\varepsilon_m = \varepsilon_0$ , а затем зависимость  $\varepsilon_m$  от  $\varepsilon_0$  становится нелинейной (линии 1, 2), что связано с ростом гистерезисных потерь. При  $\gamma_0 \varepsilon_0 > 1$ , когда гистерезисные потери насыщаются, зависимость  $\varepsilon_m$  от  $\varepsilon_0$  стремится к линейной:  $\varepsilon_m(z) \propto \varepsilon_0$  (линии 3, 4). Зависимости  $\theta_m$  от  $\varepsilon_0$  ведут себя аналогично: при малых значениях  $\gamma_0 \varepsilon_0$  имеет место сильная зависимость  $\theta_m$  от  $\varepsilon_0$ , а при больших — слабая.

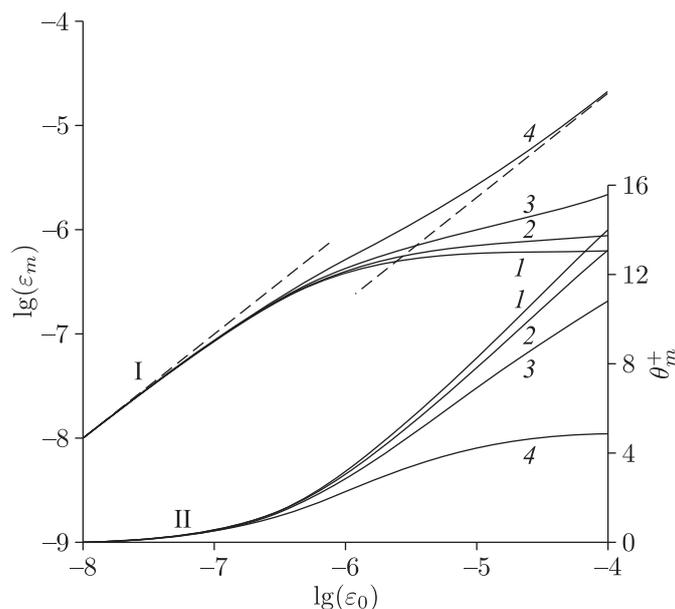


Рис. 4. Зависимости амплитуды  $\varepsilon_m(z)$  (I) и фазы  $\theta_m^+(z)$  (II) от  $\varepsilon_0$  при  $\mu = 1.5$ ,  $\lambda = 2$ ,  $y = 2 \cdot 10^6$  и различных значениях параметра  $\gamma_0$ : (1)  $\gamma_0 = 0$ , (2)  $\gamma_0 = 10^5$ , (3)  $\gamma_0 = 3 \cdot 10^5$ , (4)  $\gamma_0 = 10^6$ . Пунктирные линии соответствуют зависимостям  $\varepsilon_m(z) \propto \varepsilon_0$ .

Поскольку форма пилообразной волны (7) при распространении непрерывно изменяется, то изменяется и ее спектральный состав. Разложим периодическую волну (7) в ряд Фурье:

$$e(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z) \sin \left( n \left[ \theta + \frac{\pi \lambda}{1 + \mu} \ln e_m(z) \right] \right), \quad (10)$$

$$\text{где } e_n(z) = \frac{2(1 + \mu)^2 e_m(z) \sin \left( \frac{n\pi[1 - e_m(z)]}{(1 + \mu)} \right)}{\pi^2 n^2 [\mu + e_m(z)][1 - e_m(z)]}.$$

Из выражения (10) следует, что скорость распространения гармоник пилообразной волны зависит от амплитуды  $\varepsilon_m(z)$ , однако все гармоники распространяются с одной и той же фазовой скоростью  $C(z) = \frac{C_0}{1 + \alpha \varepsilon_m(z)/2[1 + \gamma_0 \varepsilon_m(z)]}$ , и, следовательно, среда с неупругим гистерезисом (4) не обладает нелинейной дисперсией (в отличие от среды с гистерезисом упругим [18]). С этим свойством связано основное отличие сред, описываемых упругим и неупругим гистерезисами. Нелинейная дисперсия фазовой скорости приводит к расфазировке и уменьшению эффективности взаимодействия гармонических составляющих периодической волны и, соответственно, к различным искажениям первоначально одной и той же волны в средах с различными гистерезисами.

На рисунках 5 и 6 приведены зависимости амплитуд первых пяти гармоник от расстояния  $z$  (при  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ ) и от  $\varepsilon_0$  (при  $y = 3 \cdot 10^6$ ) при  $\mu = 1.5$ . Из рисунка 5 видно, что с ростом  $z$  амплитуды гармоник из-за гистерезисных потерь уменьшаются, при этом амплитуды  $e_{3,4,5}(z)$  гармоник вначале уменьшаются до нуля, а далее немного растут и вместе с амплитудами  $e_{1,2}(z)$  медленно и монотонно затухают. Соответственно ведут себя и зависимости амплитуд высших гармоник  $\varepsilon_n(z) = \varepsilon_0 e_n(z)$  от  $\varepsilon_0$  при  $y = \text{const}$ . Из рисунка 6

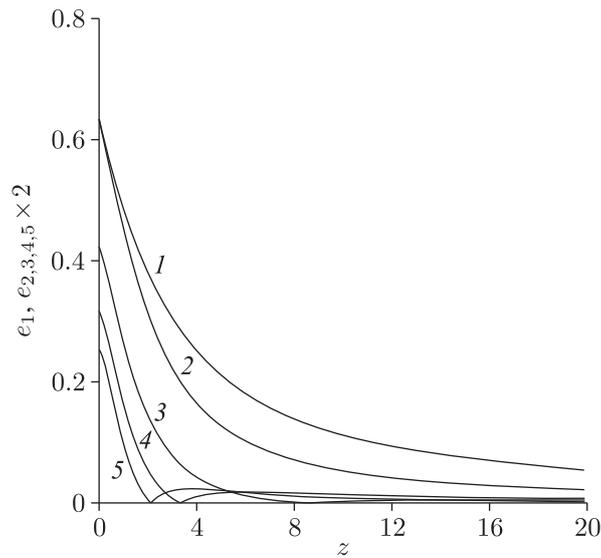


Рис. 5. Зависимости амплитуд  $e_n(z)$  первых пяти гармоник от  $z$  при  $\mu = 1.5$ ,  $\lambda = 2$ ,  $a = 1$ .

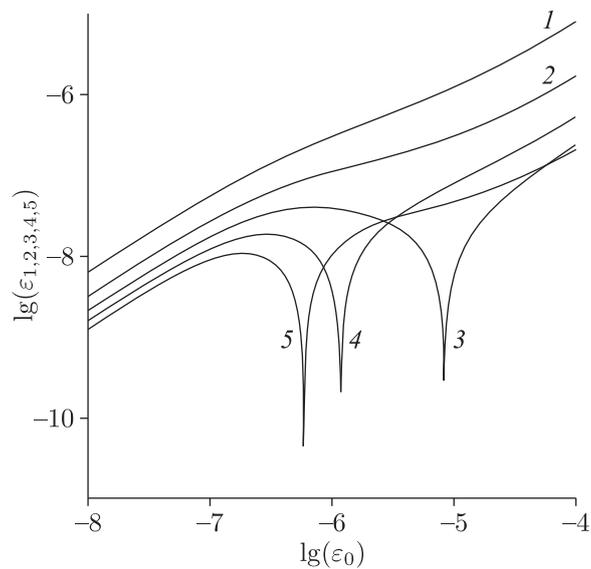


Рис. 6. Зависимости амплитуд  $\epsilon_n(z)$  первых пяти гармоник от  $\epsilon_0$  при  $\gamma_0 = 10^6$ ,  $y = 3 \cdot 10^6$ ,  $\mu = 1.5$ ,  $\lambda = 2$ .

видно, что при увеличении  $\epsilon_0$  амплитуды  $\epsilon_n(z)$  растут, причем в начале и в конце  $\epsilon_n(z) \propto \epsilon_0$ ; при этом амплитуды  $\epsilon_{3,4,5}(z)$  испытывают биения, при которых они уменьшаются до нуля. Биения амплитуд высших гармоник (здесь, при заданных параметрах  $\mu$ ,  $\lambda$  и  $y$ , — третьей, четвертой и пятой) связаны с резонансными взаимодействиями бесконечно большого числа кратных гармоник, составляющих непрерывно изменяющуюся периодическую пилообразную волну (7): форма волны изменяется, поэтому соотношения между амплитудами ее гармоник также изменяются. Координаты  $z_0$  (и амплитуды  $\epsilon_0^*$ ) нулевых амплитуд  $\epsilon_n(z_0) = 0$  высших гармоник волны (10) определяются из уравнения  $\sin\left(\frac{n\pi[1 - e_m(z)]}{(1 + \mu)}\right) = 0$ .

Таким образом, на основе анализа точного решения задачи о распространении и эволюции несимметричной периодической пилообразной волны в среде с неупругим гистерезисом с насыщением нелинейных потерь определены основные закономерности для характеристик такой волны. Экспериментальное выявление подобных закономерностей для конкретной гистерезисной среды и их сравнение с теоретическими (для сред с различными гистерезисами, упругим и неупругим) будет способствовать правильному выбору гистерезисного уравнения состояния этой среды.

## Список литературы

- [1] Давиденков Н. Н. О рассеянии энергии при вибрациях // ЖТФ, 1938, т. 8, № 6, с. 483–499.
- [2] Read Th. A. The internal friction on single metal crystals // Phys. Rev., 1940, vol. 58, no. 4, pp. 371–380.
- [3] Granato A., Lücker K. Theory of mechanical damping due to dislocations // J. Appl. Phys., 1956, vol. 27, no. 5, pp. 583–593.
- [4] Ультразвуковые методы исследования дислокаций: Сб. ст. / Пер. с англ. и нем. под ред. Л. Г. Меркулова. Москва: ИИЛ, 1963. 376 с.
- [5] Физическая акустика: Т. 4: Часть А: Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. Москва: Мир, 1969. 375 с.
- [6] Ниблетт Д., Уилкс Дж. Внутреннее трение в металлах, связанное с дислокациями // УФН, 1963, т. 80, № 1, с. 125–187.
- [7] Назаров В. Е. Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность // ФММ, 1991, т. 71, № 3, с. 172–178.
- [8] Голяндин С. Н., Кустов С. Б., Сапожников К. В., Емельянов Ю. А., Синапи А. Б., Никаноров С. П., Робинсон У. Х. Влияние температуры и деформации на амплитудно-зависимое внутреннее трение высококачественного алюминия // ФТТ, 1998, т. 40, № 10, с. 1839–1844.
- [9] Сапожников К. В., Голяндин С. Н., Кустов С. Б. Амплитудная зависимость внутреннего трения и дефекта модуля Юнга поликристаллического индия // ФТТ, 2010, т. 52, № 1, с. 43–47.
- [10] Сапожников К. В., Голяндин С. Н., Кустов С. Б. Температурная зависимость внутреннего трения поликристаллического индия // ФТТ, 2010, т. 52, № 12, с. 2341–2348.
- [11] Назаров В. Е. Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка // Акуст. журн., 2000, т. 46, № 2, с. 228–233.
- [12] Nazarov V. E., Kolpakov A. B. Experimental investigations of nonlinear acoustic phenomena in polycrystalline zinc // J. Acoust. Soc. Am., 2000, vol. 107, no. 4, pp. 1915–1921.
- [13] Назаров В. Е. Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца // ФММ, 1999, т. 88, № 4, с. 82–90.
- [14] Голяндин С. Н., Сапожников К. В., Кустов С. Б. Акустическое исследование процессов старения мартенситной фазы сплавов на основе меди с эффектом памяти формы // ФТТ, 2005, т. 47, № 4, с. 614–621.
- [15] Asano S. Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis // J. Phys. Soc. Jap., 1970, vol. 29, no. 4, pp. 952–963.
- [16] Лебедев А. Б. Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // ФТТ, 1999, т. 41, № 7, с. 1214–1221.
- [17] Назаров В. Е. Распространение однополярного импульса в среде с гистерезисной нелинейностью // Акуст. журн., 1997, т. 43, № 2, с. 81–85.
- [18] Назаров В. Е., Кияшко С. Б. Амплитудно-зависимое внутреннее трение и генерация гармоник в средах с гистерезисной нелинейностью // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 3, с. 297–307.



- [19] McCall K. R., Guyer R. A. Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials // *J. Geophys. Res.*, 1994, vol. 99, no. B12, pp. 23887–23897.
- [20] Gusev V. On the interaction of counterepropagating acoustic waves in resonant rods composed of materials with hysteretic quadratic nonlinearity // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2005, vol. 117, no. 4, pp. 1850–1857.
- [21] Guyer R. A., Johnson P. A. Nonlinear mesoscopic elasticity: Evidence for a new class materials // *Phys. Today*, 1999, no. 4, pp. 30–35.
- [22] Nazarov V. E., Radostin A. V. *Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids*. Chichester: Wiley, 2015. 264 pp.
- [23] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 7: Теория упругости*. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2003. 264 с.

### Saw-tooth waves in hysteretic media with a saturation of nonlinear losses

Veniamin E. Nazarov<sup>1</sup>, Sergey B. Kiyashko<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Applied Physics RAS

Ulyanova str., 46, Nizhniy Novgorod, 603950, Russia

<sup>1</sup>nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru, <sup>2</sup>sergei-kiyashko@mail.ru

On the basis of experimental data of the study of amplitude-dependent internal friction phenomena in polycrystalline solids the inelastic hysteretic state equation with a saturation of nonlinear losses is proposed. Theoretical analysis of the asymmetric saw-tooth waves propagation in such media is carried out. The regularities (amplitude dependent losses and changes in the propagation velocity) are determined for the characteristics of nonlinear wave and its higher harmonic amplitudes. The graphical analysis of form of the wave and evolution of its spectral components is carried out.

MSC 2010: 39A21, 74J30

Keywords: hysteresis, amplitude-dependent internal friction, saturation of nonlinear losses, saw-tooth acoustic waves

Received March 24, 2015, accepted October 10, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 647–655 (Russian)