На правах рукописи

Зайцев Василий Александрович

К ТЕОРИИ СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ижевск — 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Удмуртский государственный университет».

Официальные оппоненты:	Сергеев Игорь Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, профессор кафедры дифференциальных уравнений.
	Серков Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, заведующий сектором отдела динамических систем.
	Сумин Владимир Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики, профессор кафедры математической физики и оптимального управления.
Ведущая организация:	Государственное научное учреждение «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Защита состоится 20 апреля 2016 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул.Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИММ УрО РАН: http://wwwrus.imm.uran.ru/C16/Diss/ .

Автореферат разослан "___" ____________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Костоусова Елена Кирилловна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Задача стабилизации управляемой системы является одной из важнейших задач математической теории управления. Классические результаты об управлении асимптотическими характеристиками относятся к линейным стационарным системам управления. Вопросы стабилизации и управления асимптотическим поведением становятся существенно сложнее, если управляемая система является нестационарной, или нелинейной, или управление строится по неполным данным.

Одной из первых задач классической теории автоматического регулирования была задача о стабилизации линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

посредством линейной обратной связи $u = Ux$, где U — постоянная $m \times n$-матрица. Более общей задачей является задача о размещении спектра собственных значений (задача о модальном управлении, задача управления спектром), в которой требуется для заданного многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbb{K}$, построить постоянную матрицу $U \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ так, чтобы характеристический многочлен $\chi(A + BU; \lambda)$ матрицы $A + BU$ замкнутой системы

$$\dot{x} = (A + BU)x, \quad x \in \mathbb{K}^n, \tag{2}$$

совпадал с $p(\lambda)$ (здесь $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Если для всякого $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{K}^n$ такая матрица U существует, то говорят, что спектр системы (2) глобально управляем. Имеет место следующий классический результат.

Утверждение 0.1. *Следующие условия эквивалентны.*
1. *Система* (1) *вполне управляема.*
2. $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$.
3. *Спектр системы* (2) *глобально управляем.*

Эквивалентность 2 $\Leftrightarrow$ 3 для случая $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ доказал В. М. Попов[1], для случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ доказал В. М. Уонэм[2]; утверждение 1 $\Leftrightarrow$ 2 — это известный критерий управляемости Калмана[3].

Распространение задачи размещения собственных значений и, в частности, задачи стабилизации на более широкий класс систем может происходить в

[1]**Popov V.M.** Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions // Revue Roumaine des Sciences Techniques. Ser. Electrotechn. et Energ. 1964. Vol. 9, №4. P. 629–690.

[2]**Wonham W.M.** On pole assignment in multi-input controllable linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1967. Vol. AC-12, №6. P. 660–665.

[3]**Kalman R.E.** Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5, №1. P. 102–119.

различных направлениях. В одном из направлений требуется распространить указанные выше результаты на нестационарные системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

В этом направлении одной из первых работ была статья П. Бруновского[4], в которой были получены результаты о глобальной управляемости мультипликаторов периодических систем.

Для произвольных нестационарных непериодических систем в качестве обобщения понятия спектра собственных значений естественно рассматривать полный спектр показателей Ляпунова[5]. Одно из возможных обобщений условия полной управляемости на нестационарные системы, которое можно использовать в задачах об управлении асимптотическим поведением линейной системы, было введено Р. Калманом[3]. Система (3) называется равномерно вполне управляемой (по Калману), если найдутся $\vartheta > 0$ и $\alpha_i = \alpha_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства (в смысле квадратичных форм)

$$0 < \alpha_1 I \leqslant W(\tau, \tau + \vartheta) \leqslant \alpha_2 I,$$
$$0 < \alpha_3 I \leqslant X(\tau + \vartheta, \tau) W(\tau, \tau + \vartheta) X^T(\tau + \vartheta, \tau) \leqslant \alpha_4 I;$$

здесь $W(t_0, t_1) := \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} X(t_0, s) B(s) B^T(s) X^T(t_0, s)\, ds$ — матрица управляемости (матрица Калмана), $X(t, s)$ — матрица Коши свободной системы

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{4}$$

Калман доказал[3], что если система (3) равномерно вполне управляема, то существует матрица $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такая, что система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

равномерно асимптотически устойчива. Н. Н. Красовский[6] для решения задачи (оптимальной) стабилизации системы (3) применял другую матрицу управляемости $Q(t) = [P_0(t), P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t)]$, где $P_0(t) = B(t)$, $P_k(t) = -A(t)P_{k-1}(t) + \dot{P}_{k-1}(t)$, $k \in \mathbb{N}$.

Е. Л. Тонков[7] использовал подход Калмана в задачах стабилизации почти периодических и рекуррентных систем и установил критерий равномерной

[4] **Brunovsky P.** Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems // Journal of Differential Equations. 1969. Vol. 6, №3. P. 296–313.

[5] **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

[6] **Красовский Н.Н.** О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 4. С. 641–663.

[7] **Тонков Е.Л.** Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, №10. С. 1804–1813

полной управляемости по Калману. Е. Л. Тонковым была поставлена задача о глобальном управлении показателями Ляпунова на основе свойства равномерной полной управляемости по Калману. Показатели Ляпунова линейной системы (5) называются глобально управляемыми, если для всякого набора чисел $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$ существует измеримое ограниченное управление $\widehat{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что $\lambda_j(A+B\widehat{U}) = \alpha_j$, $j = \overline{1,n}$, где $\lambda_1(A+B\widehat{U}) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+B\widehat{U})$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (5) при $U = \widehat{U}$. Эта задача, а также другие задачи о глобальном управлении асимптотическими инвариантами были решены в работах С. Н. Поповой[8,9,10], а также Е. К. Макарова, С. Н. Поповой[11]. В частности, был доказан следующий результат[10]: *пусть $A(\cdot)$ кусочно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, и система* (3) *равномерно вполне управляема в смысле Калмана; тогда полный спектр показателей Ляпунова системы* (5) *глобально управляем.* В связи с этим результатом возникает вопрос о справедливости этого утверждения для системы (3) с коэффициентами из более широкого класса. Оказывается, что в этом случае критерий Тонкова равномерной полной управляемости по Калману (который используется при доказательстве данного результата С. Н. Поповой) может быть не выполнен. Возникает вопрос о том, при каких условиях на коэффициенты определение равномерной полной управляемости по Калману и критерий Тонкова совпадают. Эти вопросы исследуются в диссертации в § § 1, 2, 5.

Другой вопрос, который возникает в связи результатом С. Н. Поповой: найти какие-либо классы нестационарных систем, обладающих свойством равномерной полной управляемости. Этот вопрос исследуется в § 3; доказано, что к такому классу относятся системы в форме Хессенберга.

Наряду с задачами управления отдельными асимптотическими инвариантами в работах Е. Л. Тонкова, С. Н. Поповой, Е. К. Макарова рассматривались задачи (локального и глобального) управления всей совокупностью инвариантов преобразования Ляпунова.

Линейное преобразование $z = L(t)x$ линейной системы (4) называется[5] преобразованием Ляпунова, если матричная функция $L(t)$, $t \in \mathbb{R}$, абсолютно непрерывная, обратимая, и $\sup\{\|L\|_{C(\mathbb{R})}, \|L^{-1}\|_{C(\mathbb{R})}, \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\dot{L}\|_{L_1([t,t+1])}\} < \infty$. Две линейные системы, связанные некоторым преобразованием Ляпунова, называются асимптотически эквивалентными (по Богданову). Характеристики

[8] **Попова С.Н.** Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, №12. С. 1627–1636.

[9] **Попова С.Н.** Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, №1. С. 41–46.

[10] **Попова С. Н.** О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №8. С. 1048–1054.

[11] **Макаров Е.К., Попова С.Н.** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, №1. С. 97–106.

системы (4), которые не изменяются при преобразовании Ляпунова системы (4), называются ляпуновскими (асимптотическими) инвариантами. Примерами ляпуновских инвариантов являются свойства устойчивости, асимптотической (экспоненциальной) устойчивости, правильности системы, показатели Ляпунова, центральные показатели, особые показатели и т. д.

Говорят, что система (5) с измеримыми, интегрально ограниченными коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$: (a) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости[11] $\big[(b)$ называется глобально скаляризуемой[9]$\big]$, если для любой системы

$$\dot{z} = F(t)z, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

с измеримой, интегрально ограниченной матрицей $F(\cdot)$ $\big[$вида $F(t) = p(t)I$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big]$ найдется измеримое и ограниченное управление $\widehat{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что система (5) с $U = \widehat{U}$ асимптотически эквивалентна системе (6).

В § 4, 5 получены новые результаты о глобальном управлении показателями Ляпунова, глобальной скаляризуемости, глобальной ляпуновской приводимости системы (5) и о ляпуновской приводимости системы (5) к канонической форме Фробениуса, т. е. к системе (6), эквивалентной скалярному дифференциальному уравнению n-го порядка.

Другое направление в распространении задачи управления спектром собственных значений или показателей Ляпунова (в частности, задачи стабилизации) на более широкий класс систем относится к методу построения обратной связи. Предположим, что задана линейная управляемая система с наблюдателем:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C^*(t)x, \quad t \in \mathbb{R} \tag{7}$$

($*$ — операция комплексного сопряжения). Один из классических методов стабилизации заключается в построении динамической обратной связи по выходу (см., например[12]): вводится асимптотический идентификатор

$$\dot{\widehat{x}} = A(t)\widehat{x} + V(t)\left(y - C^*(t)\widehat{x}\right) + B(t)u. \tag{8}$$

Управление в системе (7), (8) строится в виде

$$u = U(t)\widehat{x}. \tag{9}$$

Замкнутая этим управлением система (7), (8) получается $(2n)$-мерной. В § 6 получены некоторые новые результаты в этом направлении.

Другой способ формирования управления в системе (7) состоит в построении линейной статической обратной связи по выходу, т. е. в виде $u = Uy$.

[12] **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)UC^*(t)\big)x. \tag{10}$$

Такая система является частным случаем более общей — билинейной (однородной) системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + u_1A_1(t) + u_2A_2(t) + \ldots + u_rA_r(t)\big)x. \tag{11}$$

Задачи стабилизации и управления спектром для систем (10) и (11) становятся существенно сложнее, чем для системы (5), уже в том случае, когда коэффициенты систем постоянны:

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{K}^n, \tag{12}$$

$$\dot{x} = (A + u_1A_1 + u_2A_2 + \ldots + u_rA_r)x, \quad x \in \mathbb{K}^n. \tag{13}$$

Отождествим систему (12) с матрицей $\Sigma = (A, B, C) \in M_{n,n+m+k}(\mathbb{K})$, систему (13) — с матрицей $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r) \in M_{n,n(1+r)}(\mathbb{K})$. Введем спектральное отображение σ для системы Σ (для системы Ω), которое ставит в соответствие матрице $U \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ (соответственно, вектору $u = (u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{K}^r$) вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{K}^n$, составленный из коэффициентов характеристического многочлена матрицы $A + BUC^*$ (соответственно, матрицы $A + u_1A_1 + \ldots + u_rA_r$). Тогда, по определению, спектр системы Σ (системы Ω) глобально управляем, если отображение σ сюръективно.

Задаче управления спектром для систем (12) (или (13)) посвящено большое количество работ. Обзор известных результатов можно найти в работе[13].

Первые результаты о «почти произвольном» размещении $\max\{m, k\}$ (где $m = \operatorname{rank} B$, $k = \operatorname{rank} C$) собственных значений системы (A, B, C) с циклической матрицей A были получены в начале 1970-х в работах A. Jameson; E. J. Davison, R. A. Chatterjee; B. Sridhar, D. P. Lindorff в предположении, что открытая система (7) с постоянными коэффициентами вполне управляема и вполне наблюдаема (эти условия необходимы для сюръективности отображения σ). В более поздних работах E. J. Davison, S. H. Wang[14] и H. Kimura[15] доказали для случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ результаты, из которых вытекает, что если

$$m + k \geqslant n + 1, \tag{14}$$

то образ отображения σ является всюду плотным для типичного множества матриц $(A, B, C) \in M_{n,n+m+k}(\mathbb{R})$ (здесь подмножество $S \subset \mathbb{K}^l$ называется **типичным множеством**, если его дополнение $\mathbb{K}^l \setminus S$ содержится в нуль-множестве некоторого нетривиального многочлена от $x_1, \ldots, x_l$).

---

[13] **Леонов Г.А., Шумафов М.М.** Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005. 421 с.

[14] **Davison E.J., Wang S.H.** On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1975. Vol. AC-20, №4. P. 516–518.

[15] **Kimura H.** Pole assignment by gain output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1975. Vol. AC-20, №4. P. 509–516.

Для получения дальнейших результатов[16,17] использовались различные методы алгебраической геометрии. В 1981 году Брокетт и Байрнс показали[18], что если $mk \geqslant n$, то отображение σ сюръективно для типичного множества систем $(A, B, C) \in M_{n,n+m+k}(\mathbb{C})$. Этот результат является наиболее сильным для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. В 1992 году X. Wang[19] доказал, что если $mk > n$, то отображение σ сюръективно для типичного множества систем $(A, B, C) \in M_{n,n+m+k}(\mathbb{R})$. Этот результат является наилучшим для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Задача управления спектром для билинейной системы (13) связана с аддитивной обратной задачей на собственные значения (см. обзор[20]). Отметим здесь работы[21] и[22]. W. Helton, J. Rosenthal, X. Wang[23] доказали, что если $\mathcal{L}$ — аффинное многообразие в $M_n(\mathbb{C})$, то отображение

$$\varphi_A : \mathcal{L} \to \mathbb{K}^n, \qquad \varphi_A(L) = \det(\lambda I - A - L), \quad L \in \mathcal{L},$$

является почти сюръективным для типичного множества матриц A тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{L} \geqslant n$ и $\mathcal{L} \not\subset sl_n := \{L \in M_n(\mathbb{C}) : \operatorname{Sp} L = 0\}$. Таким образом, задача размещения собственных значений систем (12) и (13) в типическом случае исследована достаточно подробно. Тем не менее, как подчеркнуто в работе[24], достаточные условия[18] и[19], полученные для системы (12), носят теоретический, не конструктивный характер. В общем случае, даже когда известно существование компенсатора U, обеспечивающего размещение собственных значений, не существует каких-либо приемлемых алгоритмов для нахождения решения U. Это происходит в силу внутренней нелинейности данной задачи для системы (12) с неполной обратной связью (и тем более для системы (13)), в отличие от системы (2) с полной обратной связью (когда $C = I$), для которой такие алгоритмы существуют. В связи с этим возникают вопросы: возможно ли выделить из класса всех систем (12) (или (13)) некоторый подкласс, для которого можно получить достаточные (и возможно, необходимые) условия, вроде условий 1, 2 в утверждении 0.1, обеспечивающие глобальную управляемость спектра, и для которого возможно привести

[16]**Hermann R., Martin C.** Applications of algebraic geometry to systems theory: part 1 // IEEE Transactions on Automatic Control. 1977. Vol. AC-22, №1. P. 19–25.

[17]**Willems J., Hesselink W.** Generic properties of the pole placement problem // Proceedings of 7th IFAC World Congress. 1978. P. 1725–1729.

[18]**Brockett R.W., Byrnes C.I.** Multivariable Nyquist criteria, root loci and pole placement: a geometric viewpoint // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. Vol. AC-26, №1. P. 271–284.

[19]**Wang X.** Pole placement by static output feedback // Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control. 1992. Vol. 2, №2. P. 205–218.

[20]**Chu M. T.** Inverse eigenvalue problems // SIAM Review. 1998. Vol. 40, №1. P. 1–39.

[21]**Friedland S.** Inverse eigenvalue problems // Linear Algebra and its Applications. 1977. Vol. 17, №1. P. 15–51.

[22]**Byrnes C.I., Wang X.** The additive inverse eigenvalue problem for Lie perturbations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 1993. Vol. 14, №1. P. 113–117.

[23]**Helton W., Rosenthal J., Wang X.** Matrix extensions and eigenvalue completions, the generic case // Transactions of the American Mathematical Society. 1997. Vol. 349, №8. P. 3401–3408.

[24]**Rosenthal J., Willems J.C.** Open problems in area of pole placement // Open problems in Mathematical Systems and Control Theory. London: Springer, 1999. Chapter 37. P. 181–191.

конструктивные алгоритмы для нахождения требуемой матрицы U (соответственно, вектора $u=(u_1,\ldots,u_r)$). Исследованию этих вопросов посвящена II глава. В качестве условия 1 в утверждении 0.1 выступает свойство согласованности, введенное в[25] для системы (10) и в[26] для системы (11). Система (10) [см.[25]] (система (11) [см.[26]]) называется согласованной на отрезке $[t_0,t_1]$, если для всякой матрицы $G\in M_n(\mathbb{K})$ найдется кусочно непрерывное управление $\widehat{U}:[t_0,t_1]\to M_{m,k}(\mathbb{K})$ (соответственно $\widehat{u}=(\widehat{u}_1,\ldots,\widehat{u}_r):[t_0,t_1]\to\mathbb{K}^r$) такое, что решение матричного уравнения

$$\dot{Z}=A(t)Z+B(t)\widehat{U}(t)C^*(t)X(t,t_0)$$

$$(\text{соответственно } \dot{Z}=A(t)Z+(\widehat{u}_1(t)A_1(t)+\ldots+\widehat{u}_r(t)A_r(t))X(t,t_0))$$

с начальным условием $Z(t_0)=0$ удовлетворяет условию $Z(t_1)=G$. Свойство согласованности является обобщением понятия полной управляемости системы (3) на системы с наблюдателем (7): в случае когда $C(t)\equiv I$, эти свойства эквивалентны[25].

Отметим, что изложенные выше результаты и поставленные вопросы о глобальном управлении спектром в равной степени относятся к управляемым системам с дискретным временем

$$x(t+1)=(A+BUC^*)x(t),\quad t\in\mathbb{Z},\quad x\in\mathbb{K}^n, \tag{15}$$

$$x(t+1)=(A+u_1A_1+u_2A_2+\ldots+u_rA_r)x(t),\quad x\in\mathbb{K}^n. \tag{16}$$

Исследованию этих вопросов для систем с дискретным временем посвящена IV глава.

Другой подход к задаче стабилизации билинейной системы был основан на применении теоремы Барбашина–Красовского о локальной и глобальной асимптотической устойчивости. Одной из пионерских работ в этом направлении явилась работа Джарджевича, Куинна[27]. В ней были получены достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения билинейной системы

$$\dot{x}=Ax+uBx,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R},$$

посредством обратной связи $u=u(x)$. В дальнейшем теорема Джарджевича–Куинна обобщалась в различных направлениях; впоследствии было показано, что это утверждение можно обобщить на нелинейные аффинные системы

$$\dot{x}=f(x)+u_1g_1(x)+\cdots+u_rg_r(x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad f(0)=0. \tag{17}$$

[25] **Попова С.Н., Тонков Е.Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, №10. С. 1687–1696.

[26] **Зайцев В.А., Тонков Е.Л.** Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. №2 (441). С. 45–56.

[27] **Jurdjevic V., Quinn J.P.** Controllability and stability // Journal of Differential Equations. 1978. Vol. 28, №3. P. 381–389.

Развитием этих результатов, в частности, занимались M. Slemrod[28], J. P. Gauthier[29], G. Bornard[30], N. Kalouptsidis, J. Tsinias[31], K. K. Lee, A. Arapostathis[32], C. I. Byrnes, A. Isidori[33], R. Outbib, G. Sallet[34] и др. В настоящее время существует несколько различных формулировок достаточных условий глобальной асимптотической стабилизации, эти условия называются (слабыми) условиями Джарджевича–Куинна, а соответствующее стабилизирующее управление называется «демпфирующее управление» (damping control). Приведем одну из формулировок[35]. Обозначим $L_f\varphi(x) = \nabla\varphi(x)f(x)$ производную функции $\varphi(x)$ вдоль $f(x)$; $\mathrm{ad}_f g(x) := [f,g](x) = \dfrac{\partial g(x)}{\partial x}f(x) - \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}g(x)$ — коммутатор векторных полей $f(x)$, $g(x)$; $\mathrm{ad}^i_f g := [f, \mathrm{ad}^{i-1}_f g]$, $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ad}^0_f g := g$.

Утверждение 0.2. *Пусть существует гладкая функция* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая следующим условиям.*
У1. $V(x) > 0$, $x \neq 0$, $V(0) = 0$. У2. $V(x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$.
У3. $(L_f V)(x) \leqslant 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$.
Предположим, что $\{x \in \mathbb{R}^n : (L_f V)(x) = (L_{\mathrm{ad}^j_f g_k} V)(x) = 0, k = \overline{1,r}, j = \overline{0,\nu}\}$ *сводится к* $\{0\}$ *для некоторого* ν. *Тогда управление* $u_k(x) = -(L_{g_k}V)(x)$, $k = \overline{1,r}$, *глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы* (17).

C. I. Byrnes, A. Isidori, J. C. Willems[36] получили соответствующие результаты на основе теории пассивных систем. С помощью этого подхода W. Lin[37,38] обобщил результаты о стабилизации аффинных систем (17) с устойчивым дрейфом на нелинейные автономные систем

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{18}$$

[28]**Slemrod M.** Stabilization of bilinear control systems with applications to nonconservative problems in elasticity // SIAM Journal on Control and Optimization. 1978. Vol. 16, №1. P. 131–141.

[29]**Gauthier J.P.** Structure des systemes non lineaires. Paris: Editions du CNRS, 1984. 307 p.

[30]**Gauthier J.P., Bornard G.** Stabilisation des systemes nonlineaires // Outils et Methodes Mathematiques pour L'automatique. Paris: CNRS, 1981. P. 307–324.

[31]**Kalouptsidis N., Tsinias J.** Stability improvement of nonlinear systems by feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1984. Vol. 29, №4. P. 364–367.

[32]**Lee K.K., Arapostathis A.** Remarks on smooth feedback stabilization of nonlinear systems // Systems & Control Letters. 1988. Vol. 10, №1. P. 41–44.

[33]**Byrnes C.I., Isidori A.** New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Systems & Control Letters. 1989. Vol. 12, №5. P. 437–442.

[34]**Outbib R., Sallet G.** Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited // Systems & Control Letters. 1992. Vol. 18, №2. P. 93–98.

[35]**Fabourg L., Pomet J.-B.** Control Lyapunov functions for homogeneous Jurdjevic–Quinn systems // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2000. Vol. 5. P. 293–311.

[36]**Byrnes C.I., Isidori A., Willems J.C.** Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. Vol. 36, №11. P. 1228–1240.

[37]**Lin W.** Feedback stabilization of general nonlinear control systems: A passive system approach // Systems & Control Letters. 1995. Vol. 25, №1. P. 41–52.

[38]**Lin W.** Global asymptotic stabilization of general nonlinear systems with stable free dynamics via passivity and bounded feedback // Automatica. 1996. Vol. 32, №6. P. 915–924.

используя также технику ограниченной обратной связи.

Мотивацией для распространения упомянутых выше результатов о глобальной асимптотической стабилизации аффинных (17) и нелинейных (18) автономных систем на нестационарные системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{19}$$

послужил тот факт, что теорема (Барбашина–Красовского) о глобальной асимптотической устойчивости, в которой используется функция Ляпунова с нестрого отрицательной производной, справедлива не только для стационарных систем, но и для нестационарных систем с периодическими коэффициентами. Основная сложность при построении данной теории для нестационарных периодических систем заключается в распространении слабых условий Джарджевича–Куинна на такие системы. Решению этой проблемы посвящена III глава диссертации.

Для решения задач стабилизации аффинных (в частности, билинейных) и общих нелинейных систем с дискретным временем

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{20}$$

также используется теория пассивных систем и методика демпфирующего управления, см. работы J. Tsinias[39], B. K. Ghosh[40], C. I. Byrnes[41,42], W. Lin[43,44], L. Grüne, F. Wirth[45], A. Bacciotti, A. Biglio[46] и др. В главе IV также рассматриваются эти вопросы. Получены новые достаточные условия стабилизации общих нелинейных систем (20), в частности, аффинных, билинейных, линейных.

Отметим также, что задачами стабилизации различных систем при различных предположениях в разное время занимались Э. Г. Альбрехт, И. В. Гайшун, Ю. Ф. Долгий, С. В. Емельянов, С. К. Коровин, Н. Н. Красовский, А. П. Крищенко, Ю. С. Ледяев, Г. А. Леонов, В. М. Марченко, А. В. Метель-

[39]**Tsinias J.** Stabilizability of discrete-time nonlinear systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 1989. Vol. 6, №2. P. 135–150.

[40]**Byrnes C.I., Lin W., Ghosh B.K.** Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback // Systems and Control Letters. 1993. Vol. 21, №3. P. 255–263.

[41]**Byrnes C.I., Lin W.** Losslessness, feedback equivalence, and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39. № 1. P. 83–97.

[42]**Lin W., Byrnes C.I.** KYP lemma, state feedback and dynamic output feedback in discrete-time bilinear systems // Systems and Control Letters. 1994. Vol. 23, №2. P. 127–136.

[43]**Lin W.** Input saturation and global stabilization of nonlinear systems via state and output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995. Vol. 40, №4. P. 776–782.

[44]**Lin W.** Further results on global stabilization of discrete nonlinear systems // Systems & Control Letters. 1996. Vol. 29, №1. P. 51–59.

[45]**Grüne L., Wirth F.** Feedback stabilization of discrete-time homogeneous semi-linear systems // Systems & Control Letters. 1999. Vol. 37, №1. P. 19–30.

[46]**Bacciotti A., Biglio A.** Some remarks about stability of nonlinear discrete-time control systems // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2001. Vol 8, №4. P. 425–438.

ский, Ю. С. Осипов, И. Н. Сергеев, Е. Я. Смирнов, А. М. Тарасьев, А. А. Усова, А. А. Щеглова, B. D. O. Anderson, A. Ilchmann, F. R. Wirth, A. Bacciotti, C. I. Byrnes, F. H. Clarke, J. M. Coron, M. Malisoff, F. Mazenc, E. D. Sontag, A. Fradkov, A. Isidori, M. Krstic, W. Lin, H. Nijmeijer, E. Panteley, L. Praly, R. Sepulchre, A. Teel и многие другие авторы.

Цели и задачи. Целью диссертации является развитие теории и разработка новых методов стабилизации и управления асимптотическим поведением решений линейных, билинейных, аффинных, нелинейных систем управления с постоянными и переменными коэффициентами с непрерывным и дискретным временем. В диссертации исследуются следующие задачи.

1. Исследуются задачи управления ляпуновскими инвариантами: (a) линейной нестационарной управляемой системы (3), замкнутой линейной обратной связью $u = U(t)x$; (b) линейной нестационарной управляемой системы (7), (8), замкнутой линейной обратной связью (9).

2. Исследуется свойство согласованности и задача управления спектром собственных значений линейной стационарной управляемой системы с неполной обратной связью (12) и билинейной стационарной управляемой системы (13).

3. Исследуется задача равномерной глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения нелинейной системы с периодическими коэффициентами (19), в частности:

(a) аффинной системы с периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = f_0(t,x) + g_0(t,x)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r; \tag{21}$$

(b) билинейной системы с периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + \big(B(t,x) + G(t)\big)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \tag{22}$$

$B(t,x) = [B_1(t)x, \ldots, B_r(t)x]$, $B_j(t) \in M_n(\mathbb{R})$, $j = \overline{1,k}$, $G(t) = [G_1(t), \ldots, G_r(t)]$;

(c) билинейной однородной системы с периодическими коэффициентами (11);

(d) линейной системы с периодическими коэффициентами (3).

4. Исследуется свойство согласованности и задача управления спектром собственных значений линейной стационарной управляемой системы с неполной обратной связью с дискретным временем (15) и билинейной стационарной управляемой системы с дискретным временем (16)

5. Исследуется задача глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения нелинейной стационарной системы с дискретным временем (20), в частности, аффинной и билинейной системы.

Методология и методы исследования. На основе методики демпфирующего управления и с помощью техники ограниченной обратной связи по состоянию в диссертации были разработаны новые методы равномерной глобальной асимптотической стабилизации нелинейной периодической системы (19), которые используют условия типа слабых условий Джарджевича–Куинна. В работе использовались методы асимптотической теории линейных систем, методы качественной теории дифференциальных уравнений, математической теории управления, теории устойчивости, функционального анализа, теории матриц, теории динамических систем, теории нелинейных систем управления.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми.

Основные результаты диссертации. Положения, выносимые на защиту.

1. Введено определение свойства равномерной полной управляемости, которое распространяет определение Е. Л. Тонкова на системы с коэффициентами из более широкого класса, и установлена его взаимосвязь с определением Калмана. Для линейной управляемой системы в форме Хессенберга доказана равномерная полная управляемость в смысле введенного определения и в смысле определения Калмана; для соответствующей замкнутой системы получены новые достаточные условия глобальной управляемости ляпуновских инвариантов.

2. Доказано, что свойство равномерной полной управляемости и равномерной полной наблюдаемости по Калману линейной нестационарной управляемой системы с наблюдателем, без дополнительных условий на ограниченность коэффициентов, обеспечивает глобальную управляемость верхнего центрального и верхнего особого показателей системы, замкнутой динамической обратной связью по выходу и, как следствие, равномерную стабилизацию замкнутой системы.

3. Для линейной стационарной управляемой системы с неполной обратной связью и для билинейной стационарной управляемой системы исследовано свойство согласованности; в случае когда коэффициенты систем имеют специальный вид, получены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости спектра собственных значений и доказано, что свойство согласованности является достаточным, а в определенных случаях и необходимым условием глобальной управляемости спектра.

4. Получены достаточные условия равномерной экспоненциальной стабилизации квазилинейных управляемых систем с неполной обратной связью, в случае когда система линейного приближения является стационарной.

5. На основе методики демпфирующего управления, с помощью оператора, который обобщает понятие коммутатора векторных полей на нестационарные векторные поля, развита теория и разработаны методы равномерной глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения для нелинейных систем

управления с периодическими коэффициентами, в частности, для аффинных, билинейных и линейных систем.

6. Доказано, что для билинейной однородной системы с аналитическими периодическими или постоянными коэффициентами с устойчивой по Ляпунову свободной динамикой свойство согласованности является достаточным условием равномерной глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения.

7. Введено понятие и исследовано свойство согласованности для линейных управляемых систем с неполной обратной связью и для билинейных управляемых систем с дискретным временем. Результаты о взаимосвязи свойства согласованности с задачей управления спектром собственных значений для линейных стационарных систем с неполной обратной связью и для билинейных стационарных систем переносятся на системы с дискретным временем.

8. Получены новые достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения для нелинейных автономных системы с дискретным временем, в частности, для аффинных и билинейных систем.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Проблема построения стабилизирующего управления (стационарного или нестационарного) в линейных системах с неполной обратной связью (12) и (15), а тем более в билинейных системах (13) и (16), относится к трудным проблемам математической теории управления и до сих пор не является решенной полностью. Полученные в работе результаты об управлении спектром таких систем вносят существенный вклад в решение данной проблемы; найденные достаточные условия носят конструктивный характер и могут быть использованы для разработки численных методов стабилизации таких систем.

Различные методы теории нелинейных систем управления[47] и геометрической теории управления[48], хорошо развитые для автономных систем, бывает затруднительно, а порой и вовсе невозможно применить, если система является нестационарной. Поэтому полученные в работе результаты о стабилизации нестационарных периодических билинейных, аффинных и общих нелинейных систем имеют значительную теоретическую ценность. Их практическая ценность обусловлена тем, что найденные достаточные условия типа управляемости являются эффективными (т. е. они выражены в терминах коэффициентов системы), и подтверждается большим количеством иллюстрирующих примеров. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования задач стабилизации нелинейных нестационарных

[47] **Халил Х.К.** Нелинейные системы. М.–Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2009. 832 с.

[48] **Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.** Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.

систем с непрерывным и дискретным временем.

Степень достоверности и апробация результатов. Результаты диссертации приведены в виде строгих математических утверждений, а также примеров, иллюстрирующих применение этих утверждений. Все результаты диссертации строго доказаны. Достоверность выводов и непротиворечивость полученных результатов подтверждается обоснованным применением строгих математических методов исследований, публикацией работ в открытой печати в ведущих рецензируемых изданиях и апробацией результатов диссертации. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: Международная конференция «Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Беларусь, Минск, 2005, 2010 гг.); Всероссийская конференция «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2006, 2008, 2012, 2015 гг.); молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения» (Казань, 2006 г.); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И. Г. Петровского (Москва, 2007, 2011 гг.); Международный конгресс «Нелинейный динамический анализ», посвященный 150-летию А. М. Ляпунова (Санкт-Петербург, 2007 г.); Международная конференция «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2007 г.); Международная конференции «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию Л. С. Понтрягина (Москва, 2008 г.); Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2008 г.); Международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвященная памяти Е. А. Барбашина (Беларусь, Минск, 2008, 2013 гг.); Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию В. А. Садовничего (Москва, 2009 г.); IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (Finland, Jyväskylä, 2009); Всероссийская конференция «Динамические системы, управление и наномеханика» (Ижевск, 2009 г.); Всероссийская конференция «Регулярная и хаотическая динамика» (Ижевск, 2010 г.); Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, 2010, 2012 гг.); семинар по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском государственном университете (руководители семинара — профессор И. В. Асташова, профессор А. В. Боровских, профессор Н. Х. Розов, профессор И. Н. Сергеев; 2011, 2015 гг.); Международная конференция «XI Белорусская математическая конференция» (Беларусь, Минск, 2012); 5th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems (France, Caen, 2013); Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, 2014 г.); Международная конференция «Динамика систем и процессы управления» посвященная 90-летию со дня рожд. Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 2014 г.); семинар отдела динамических систем Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (руководители — член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков, профессор А. М. Тарасьев; 2015 г.); семинар по математической теории оптимального управления в Нижегородском государственном университете (руководители — профессор В. И. Сумин, профессор М. И. Сумин, 2015 г.); Ижевский городской семинар по дифференциальным уравнениям и теории управления (руководители семинара — профессор Е. Л. Тонков, профессор Н. Н. Петров; 2001–2015 гг.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1–36]. Работы [1–25] опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях: российских из Перечня ВАК [1, 2, 4–15, 17–25] и зарубежных [3, 16], входящих в Scopus. Все основные результаты диссертации получены автором лично. Теорема 24.1 из совместной работы [18] принадлежит диссертанту и соавтору Н.В. Максимовой в равной мере.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, включающих в себя 26 параграфов, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 293 страницы, библиографический список включает 231 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава посвящена задачам управления ляпуновскими инвариантами нестационарных линейных систем.

В § 1 рассматривается линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{23}$$

с измеримыми, локально суммируемыми коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$. Проводится сравнение двух определений равномерной полной управляемости системы (23): определения Калмана и определения Е. Л. Тонкова. Система (23) с интегрально ограниченными на $\mathbb{R}$ коэффициентами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ называется: ϑ-равномерно вполне управляемой (в смысле Е. Л. Тонкова), если существует $l > 0$ такое, что для каждых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое управление $\widehat{u} : \Delta \to \mathbb{R}^m$, $\Delta = [t_0, t_0 + \vartheta]$, удовлетворяющее оценке $\|\widehat{u}\|_{C(\Delta)} \leqslant l|x_0|$, такое, что решение системы (23) с $u = \widehat{u}(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ удовлетворяет равенству $x(t_0 + \vartheta) = 0$; равномерно вполне управляемой, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (23) ϑ-равномерно вполне управляема.

Вводится новое определение.

Определение 1.5. Будем говорить, что система (23): обладает свойством $H(\vartheta)$ (где $\vartheta > 0$), если существуют $\beta_i = \beta_i(\vartheta) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства $\beta_1|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau, s)B(s)|\, ds \leqslant \beta_2|h|$, $\beta_3|h| \leqslant \int_\tau^{\tau+\vartheta} |h^T X(\tau+\vartheta, s)B(s)|\, ds \leqslant \beta_4|h|$; обладает свойством H, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (23) обладает свойством $H(\vartheta)$.

Доказано, что определение 1.5 распространяет определение Е. Л. Тонкова на более широкий класс систем.

Теорема 1.4. *Пусть коэффициенты системы* (23) *интегрально ограничены. Тогда система* (23) *ϑ-равномерно вполне управляема (в смысле определения Е. Л. Тонкова) в том и только в том случае, если она обладает свойством $H(\vartheta)$.*

Свойство $H(\vartheta)$ названо свойством ϑ-равномерной полной управляемости в смысле определения 1.5. Установлена взаимосвязь между определением 1.5 и определением Калмана.

Теорема 1.5. *Пусть матрица $B(\cdot)$ интегрально ограничена на $\mathbb{R}$ с квадратом нормы. Если система* (23) *обладает свойством $H(\vartheta)$, то она ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения Калмана.*

Теорема 1.6. *Пусть матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Если система* (23) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения Калмана, то она обладает свойством $H(\vartheta)$.*

Доказана инвариантность свойства $H(\vartheta)$ для системы (23) относительно преобразования $(A, B) \to (A + BQ, B)$.

Теорема 1.10. *Пусть матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и система* (23) *ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения* 1.5. *Тогда для любой измеримой по Лебегу, интегрально ограниченной функции $Q : \mathbb{R} \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ система*

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)Q(t))x + B(t)u$$

ϑ-равномерно вполне управляема в смысле определения 1.5.

В § 2 приводятся доказательства всех утверждений, сформулированных в § 1, а также вспомогательных лемм. Приводятся примеры 2.1, 2.2, которые показывают различие между определением Калмана и определением 1.5.

В § 3 рассматривается система (23) следующего вида: $m = 1$,

$$A(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & b_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(t) & \dots & \dots & \dots & b_{n-1}(t) \\ a_{n1}(t) & \dots & \dots & \dots & a_{nn}(t) \end{Vmatrix}, \qquad B(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n(t) \end{Vmatrix}. \qquad (24)$$

Система (23) с коэффициентами вида (24) называется системой в (нижней) форме Хессенберга. Для системы в форме Хессенберга получены достаточные условия вполне управляемости (теорема 3.2) и достаточные условия ϑ-равномерной вполне управляемости для любого $\vartheta > 0$ (теорема 3.3).

Определение 3.2. Будем говорить, что функция $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ удовлетворяет условию Y_1, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 < h < \delta$, то для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено $\displaystyle\int_\tau^{\tau+1} |b(t+h) - b(t)|\,dt < \varepsilon$.

Условие Y_1 для функции $b(\cdot)$ можно назвать «равномерной непрерывностью на $\mathbb{R}$ по норме в L_1» функции $b(\cdot)$.

Теорема 3.3. *Предположим, что для системы* (23), (24) *выполнены следующие условия:*

(A) *коэффициенты* $A(\cdot)$ *и* $B(\cdot)$ *интегрально ограничены;*

(B) *коэффициенты* $b_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n-1}$, *удовлетворяют условию* Y_1*;*

(C) $|b_i(t)| \geqslant \varkappa > 0$, $t \in \mathbb{R}$, *для всех* $i = \overline{1, n}$.

Тогда система (23), (24) ϑ*-равномерно вполне управляема для любого* $\vartheta > 0$ *в смысле определения* 1.5.

Показана существенность условия Y_1 в теореме 3.3 (пример 3.1).

Теорема 3.4. *Предположим, что для системы* (23), (24) *выполнены условия* (A)–(C) *теоремы* 3.3 *и функция* $b_n^2(\cdot)$ *интегрально ограничена. Тогда система* (23), (24) ϑ*-равномерно вполне управляема по Калману для любого* $\vartheta > 0$.

Получены следствия о полной управляемости и равномерной полной управляемости (в смысле определений 1.5 и Калмана) квазидифференциального уравнения (теоремы 3.6, 3.7). Полученные результаты являются обобщением известных результатов о равномерной полной управляемости системы (23) в форме Фробениуса.

В § 4 получены достаточные условия ляпуновской приводимости линейной управляемой системы (23) в форме Хессенберга (24) к канонической форме Фробениуса (теорема 4.4). Эти условия отличаются от условий, которые были получены ранее И. В. Гайшуном[49] для произвольной системы (23) (не обязательно в форме Хессенберга) с $m = 1$. Отсюда, на основании результатов И. Н. Сергеева[50], для системы (23) в форме Хессенберга в § 5 получены достаточные условия глобальной ляпуновской приводимости соответствующей замкнутой системы (5).

[49] **Гайшун И.В.** Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 408 с.

[50] **Сергеев И.Н.** Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2009. №3. С. 25–33.

Т е о р е м а 5.4. *Пусть система* (23) *имеет форму Хессенберга* (24) *и выполнены следующие условия:*
(*a*) *матрицы* $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ *измеримые и ограниченные на* $\mathbb{R}$*;*
(*b*) $|b_i(t)| \geqslant \varkappa > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$*;* (*c*) $b_i, a_{ij} \in \mathcal{B}^{(n-i)}(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, i}$.

Тогда система (5) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Запись $f \in \mathcal{B}^{(k)}(\mathbb{R})$ означает, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена на $\mathbb{R}$, имеет абсолютно непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ производные до порядка $(k-1)$ и измеримую ограниченную (п. в. на $\mathbb{R}$) производную порядка k.

В § 5 получены следствия из результатов § § 3, 4 и результатов[8,9,10] С. Н. Поповой о глобальном управлении ляпуновскими инвариантами линейной системы (23) с коэффициентами в форме Хессенберга (24).

Т е о р е м а 5.5. *Пусть система* (23) *имеет форму Хессенберга* (24) *и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:*
(*a*) *функция* $\displaystyle\int_0^t |A(s)|\, ds$ *равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$*;*
(*b*) $b_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n-1}$, *удовлетворяют условию* Y_1*;*
(*c*) $b_n(\cdot)$ *кусочно равномерно непрерывна и ограничена на* $\mathbb{R}$*;*
(*d*) $|b_i(t)| \geqslant \varkappa > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Тогда:
(1) *система* (5) *глобально скаляризуема;*
(2) *показатели Ляпунова системы* (5) *глобально управляемы.*

Т е о р е м а 5.6. *Пусть система* (23) *имеет форму Хессенберга* (24) *и ее коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:*
(*a*) $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ — ω*-периодические функции* ($\omega > 0$)*;*
(*b*) $A(\cdot)$ — *измеримая, локально суммируемая;*
(*c*) $b_n(\cdot)$ *кусочно непрерывна и ограничена на* $\mathbb{R}$*;*
(*d*) *существует промежуток* $\Delta := (t_0, t_1)$ *такой, что* $b_i(t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, *для п. в.* $t \in \Delta$.

Тогда система (5) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

В § 6 рассматривается линейная нестационарная управляемая система с наблюдателем (7) с динамической обратной связью по выходу (8), (9), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(x, u, y) \in \mathbb{R}^{n+m+k}$. Доказана теорема 6.1 о применимости λ-преобразования к равномерно вполне управляемой (по Калману) системе (23) при достаточно слабых условиях на коэффициенты системы (замечание 6.1). Это означает, что при некотором $\sigma > 0$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется допустимое управление $U(\cdot)$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (5) равенство $X_U((k+1)\sigma, k\sigma) = e^{\lambda\sigma} X((k+1)\sigma, k\sigma)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Управление $U(\cdot)$

называется допустимым (в § 6), если $|U| \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|U\|_{L_2([t,t+1])} < \infty$. С помощью теоремы 6.1 и двойственного утверждения (следствие 6.4) установлена асимптотическая эквивалентность замкнутой системы (7), (8), (9) системе специального вида.

Следствие 6.6. *Пусть система* (7) *равномерно вполне управляема и равномерно вполне наблюдаема. Тогда для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ найдутся допустимые управления $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ такие, что замкнутая система* (7), (8), (9) *с этими управлениями асимптотически эквивалентна системе*

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + \lambda I & S(t) \\ 0 & A(t) + \mu I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix}.$$

с некоторой кусочно непрерывной ограниченной матрицей $S(t)$.

В условиях следствия 6.6 замкнутая система обладает свойством глобальной управляемости верхнего центрального и верхнего особого показателей (следствие 6.8). Для периодических систем показана периодичность построенных управлений и преобразования Ляпунова (теорема 6.2, следствие 6.7).

Во второй главе исследовано свойство согласованности и доказаны основные результаты диссертации об управлении спектром собственных значений для линейных стационарных управляемых систем с неполной обратной связью и для билинейных стационарных управляемых систем.

В § 7 дано определение свойства согласованности, введенное в работе[25], для управляемой системы с наблюдателем (7), где $(x, u, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^k$, а $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Управление в системе (7) строится в виде $u = Uy$, $U \in M_{m,k}(\mathbb{K})$; замкнутая система имеет вид (10). Также дано определение[26] согласованности для билинейной системы (11). Приводятся (для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) известные, полученные ранее для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ необходимые условия и достаточные условия согласованности систем (10) и (11).

В § 8 рассматриваются стационарные системы (12) и (13), отождествляемые с матрицами $\Sigma = (A, B, C)$ и $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$. Подробно исследовано свойство согласованности стационарных систем Σ и Ω. Приводятся известные необходимые условия и достаточные условия согласованности систем Σ и Ω (предложения 8.1–8.4, следствия 8.1–8.5). Установлено необходимое условие согласованности системы Σ (системы Ω) с циклической матрицей A (т. е. имеющей для каждого собственного значения геометрическую кратность равную 1). Построим по системе $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$ $n \times r$-матрицу

$$Q := \begin{Vmatrix} \mathrm{Sp}\,(A_1) & \mathrm{Sp}\,(A_2) & \ldots & \mathrm{Sp}\,(A_r) \\ \mathrm{Sp}\,(A_1 A) & \mathrm{Sp}\,(A_2 A) & \ldots & \mathrm{Sp}\,(A_r A) \\ \hdotsfor{4} \\ \mathrm{Sp}\,(A_1 A^{n-1}) & \mathrm{Sp}\,(A_2 A^{n-1}) & \ldots & \mathrm{Sp}\,(A_r A^{n-1}) \end{Vmatrix}.$$

Т е о р е м а 8.1. *Пусть матрица A циклическая.*
1. *Если система $\Sigma = (A, B, C)$ согласованна, то матрицы $C^*B, \ldots, C^*A^{n-1}B$ линейно независимы.*
2. *Если система $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$ согласованна, то* $\operatorname{rank} Q = n$.

Показано, что обратное утверждение в общем случае (при $n > 2$ для системы Σ, при $n > 1$ для системы Ω) неверно (примеры 8.2, 8.3). Установлено, в каком случае обратное утверждение верно (теоремы 8.2–8.5, 8.10, 8.11). Установлены другие новые необходимые условия согласованности системы Σ (теоремы 8.8, 8.9, вытекающие из теорем 8.6, 8.7).

В § 9 получены основные результаты диссертации об управлении спектром собственных значений систем (12) и (13). Предположим, что коэффициенты систем $\Sigma = (A, B, C)$ и $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$ имеют следующий вид: A имеет форму Хессенберга; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю; первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_l равны нулю; то есть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{25}$$

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad p \in \{1, \ldots, n\}; \tag{26}$$

$$A_l = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^l_{p1} & \ldots & a^l_{pp} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^l_{n1} & \ldots & a^l_{np} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad p \in \{1, \ldots, n\}, \quad l = \overline{1, r}. \tag{27}$$

Т е о р е м а 9.2. *Пусть коэффициенты системы $\Sigma = (A, B, C)$ имеют вид* (25), (26). *Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений.*

1. *Система Σ согласованна.*
2. *Матрицы C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ линейно независимы.*
3. *Спектр системы* (12) *глобально управляем.*

Теорема 9.3. *Пусть коэффициенты системы* $\Omega = (A, A_1, \dots, A_r)$ *имеют вид* (25), (27). *Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений.*

1. *Система* Ω *согласованна.*
2. *Ранг матрицы* $Q = \left\{\mathrm{Sp}\,(A_j A^{i-1})\right\}_{i,j=1}^{n,r}$ *равен* n.
3. *Спектр системы* (13) *глобально управляем.*

Теоремы 9.2 и 9.3 являются аналогами утверждения 0.1 для систем Σ и Ω. Свойство полной управляемости системы (1) заменяется на свойство согласованности системы Σ (системы Ω); ранговое условие 2 в утверждении 0.1 заменяется на соответствующие ранговые условия 2 для систем Σ и Ω. Из теорем 9.2 и 9.3 получены следствия о стационарной стабилизации систем (12) и (13) (теоремы 9.4 и 9.5).

Вопрос о том, в каком случае справедлива импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теоремах 9.2 и 9.3, исследован в § 11.

Теорема 11.1. *Пусть коэффициенты системы* $\Sigma = (A, B, C)$ *имеют вид* (25), (26). *Тогда импликация* $2 \Longrightarrow 1$ *в теореме* 9.2 *имеет место, если выполнено хотя бы одно из условий:* (a) $\operatorname{rank} C = n$; (b) $\operatorname{rank} B = n$; (c) $\operatorname{rank} C = 1$; (d) $\operatorname{rank} B = 1$; (e) *все собственные значения матрицы* A *равны;* (f) $\operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C \geqslant n + 1$; (g) $n < 6$.

При условиях (a), (b), (c) или (d) свойство согласованности совпадает со свойством полной управляемости, поэтому результат следует из критерия Калмана[3]; условие (e) — это специальный случай, он вытекает из теоремы 8.11; условие (f) совпадает с (14). Результат при условии (g) оказался неожиданным.

Теорема 11.4. *Пусть коэффициенты системы* $\Omega = (A, A_1, \dots, A_r)$ *имеют вид* (25), (27). *Тогда импликация* $2 \Longrightarrow 1$ *в теореме* 9.3 *имеет место, если выполнено хотя бы одно из условий:* (a) *все собственные значения матрицы* A *равны;* (b) $n < 3$.

Доказано, что в общем случае импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 9.2 неверна при $n \geqslant 6$ (пример 11.1), в теореме 9.3 неверна при $n \geqslant 3$ (пример 11.2).

В § 10 получен еще один из основных результатов об управлении спектром билинейной системы (13). Предположим, что в системе (13) $r = n$ и элементы выше $(l-1)$-й поддиагонали матрицы A_l, $l = \overline{1, n}$, равны нулю, т. е.

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1}^1 & \dots & \dots & a_{nn}^1 \end{Vmatrix},\ A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2 & \dots & a_{n,n-1}^2 & 0 \end{Vmatrix}, \dots, A_n = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1}^n & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{28}$$

а матрица A имеет вид (25).

Теорема 10.3. *Пусть коэффициенты системы* $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$ *имеют вид* (25), (28), $r = n$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Система* Ω *согласованна.*

2. $\operatorname{rank} Q = n$.

3. *Спектр системы* (13) *глобально управляем.*

Теорема 10.3 так же, как теорема 9.3, является аналогом утверждения 0.1 для билинейной системы (13), только в теореме 10.3 дополнительно имеет место импликация $2 \Longrightarrow 1$. Выводится следствие о стационарной стабилизации системы (13) (теорема 10.4).

В § 12 с помощью результатов о стабилизации, установленных в § 9, получены достаточные условия равномерной экспоненциальной стабилизации квазилинейных управляемых систем с неполной обратной связью, в случае когда система линейного приближения является стационарной (теоремы 12.1–12.5). Рассмотрим, в частности, нелинейную систему управления, которая описывается автономным дифференциальным уравнением n-го порядка с m входами и k выходами:

$$\begin{aligned} \theta^{(n)} &= F(\theta, \theta', \ldots, \theta^{(n-1)}, v, \ldots, v^{(n-p)}), \qquad \theta \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}^m, \quad F(0) = 0, \\ z &= H(\theta, \theta', \ldots, \theta^{(p-1)}), \quad z \in \mathbb{R}^k, \qquad p \in \{1, \ldots, n\}, \quad H(0) = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Теорема 12.5. *Пусть коэффициенты системы* (29) *удовлетворяют следующим условиям:* $F \in C^1(O_{\varkappa_1}(0))$, $H \in C^{(n-p+1)}\big(O_{\varkappa_2}(0)\big)$, $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$. *Предположим, что матрицы* C^*B, C^*JB, $\ldots$, $C^*J^{n-1}B$ *линейно независимы, где* J — *первый единичный косой ряд,*

$$B = \left\{ \frac{\partial F(0)}{\partial v_j^{(n-l)}} \right\}_{l,j=1}^{n,m}, \quad C^* = \left\{ \frac{\partial H_r(0)}{\partial \theta^{(s-1)}} \right\}_{r,s=1}^{k,n}.$$

Тогда для любого заданного $\alpha > 0$ *тривиальное решение системы* (29) *является равномерно экспоненциально стабилизируемым с показателем* α *посредством линейной стационарной обратной связи по выходу* $v = Vz$.

В III главе доказаны основные результаты диссертации о равномерной глобальной асимптотической (РГА) и равномерной локальной асимптотической (РЛА) стабилизации нулевого решения нелинейной периодической системы (19).

В § 13 результаты[37], полученные для автономной системы (18), переносятся на периодическую систему (19). Рассматривается нелинейная ω-периодическая система (19), где $f \in C^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 2$. Построим систему (21) аффинного приближения системы (19).

Определение 13.1. Будем говорить, что выполнена гипотеза $(H2)$, если существует функция $V \in C^{(\varkappa,\lambda)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\varkappa \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 2$, удовлетворяющая для всех $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$ условиям: (a) $V(t+\omega,x)\equiv V(t,x)$; (b) $V(t,0)\equiv 0$, $V(t,x)\geqslant\gamma(|x|)$, $\gamma\in\mathcal{K}_\infty$; (c) $(L_{f_0}V)(t,x)\leqslant 0$.

Обозначим через $M_0(V)$ наибольшее положительно инвариантное множество свободной системы

$$\dot{x} = f_0(t,x) \tag{30}$$

относительно множества

$$E_0(V) = \{(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : (L_{f_0}V)(t,x)=0,\ \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}g_0(t,x)=0\}.$$

Теорема 13.3. *Пусть для системы* (21) *выполнена гипотеза* $(H2)$, *и имеет место равенство*

$$M_0(V)=\{0\}. \tag{31}$$

Тогда управление

$$u(t,x) = -\left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}g_0(t,x)\right]^T \tag{32}$$

РГА стабилизирует нулевое решение системы (21).

Для РГА стабилизации исходной нелинейной системы (19) дополнительно к условиям теоремы 13.3 требуется разрешимость некоторого нелинейного уравнения (теорема 13.2). В дальнейшем в § 19 это дополнительное требование снято (теоремы 19.1, 19.2) с помощью методики ограниченной обратной связи по состоянию[38]. Таким образом, для РГА стабилизации нелинейной системы (19) достаточно лишь выполнения условий, достаточных для РГА стабилизации ее аффинного приближения (21).

§ 14 посвящен получению достаточных условий для равенства (31). Для этого для нестационарных векторных полей $p,q:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ рассматривается оператор $D_pq(t,x)=\dfrac{\partial q(t,x)}{\partial x}p(t,x)-\dfrac{\partial p(t,x)}{\partial x}q(t,x)+\dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t}$. Если p,q не зависят от t, то D_pq совпадает с обычным коммутатором ad_pq. Вводятся наибольшие положительно инвариантные множества $M_i(V)$ системы (30) относительно множеств $E_i(V)\subset E_0(V)$, $i=\overline{1,4}$, построенных специальным образом с помощью дифференцирования вдоль векторного поля f_0 функций в равенствах, определяющих множество $E_0(V)$, с применением итераций оператора D_{f_0} к столбцам g_k^0 матрицы g_0. Доказано, что (при условии (c) гипотезы $(H2)$) множества $M_i(V)$, $i=\overline{1,4}$, совпадают с $M_0(V)$ (теоремы 14.1–14.4), следовательно, равенство (31) равносильно любому из равенств $M_i(V)=\{0\}$, $i=\overline{1,4}$ (теорема 14.5). Основная теорема, которая позволяет перенести методику демпфирующего управления с автономных систем на неавтономные, — это теорема 14.2. Ранговые достаточные условия для (31) содержатся в теореме 14.6. В частном случае, когда система (21) автономная, эти условия совпадают с известными условиями для автономных систем (замечание 14.2).

В § 15 достаточные условия для равенства (31), полученные в § 14, применяются к результатам параграфа 13. В теоремах 15.1, 15.2 достаточные условия РЛА, РГА стабилизации получены для нелинейной системы (19), в теореме 15.3 — для аффинной системы (21), в теоремах 15.4, 15.5 — для нелинейной системы (19) квадратичной по u. В частности, сформулируем теорему 15.3 с условием (h) теоремы 14.5, а также с условиями (j) & (k) теоремы 14.6. Пусть $\sigma = \min\{\alpha, \beta\}$. Построим множество $E_3(V) = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n :$
$(L_{f_0}V)(t,x) = 0,\ \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}\,(D^i_{f_0} g^0_k)(t,x) = 0,\ k = \overline{1,r},\ i = \overline{0,\sigma}\}$.

Теорема 15.3$_1$. *Пусть для системы* (21) *выполнена гипотеза* $(H2)$ *и* $M_3(V) = \{0\}$. *Тогда управление* (32) *РГА стабилизирует нулевое решение системы* (21).

Теорема 15.3$_1$ включает в себя утверждение 0.2.

Для каждого $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ построим следующее подпространство в $\mathbb{R}^n$:

$$\Gamma(t,x) = \operatorname{span}\{(D^i_{f_0} g^0_k)(t,x),\ k = \overline{1,r},\ i = \overline{0,\sigma}\}.$$

Теорема 15.3$_2$. *Пусть для системы* (21) *выполнена гипотеза* $(H2)$ *и следующие условия:*
$(j)\ \forall t \in \mathbb{R}\quad \forall x \neq 0\quad \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x} \neq 0;\qquad (k)\ \exists t_0 \in \mathbb{R}\quad \forall x \neq 0\quad \dim \Gamma(t_0, x) = n.$

Тогда управление (32) *РГА стабилизирует нулевое решение системы* (21).

Доказано, что теоремы, полученные в § 15, включают в себя соответствующие результаты[37] для автономных систем (18) (замечания 15.1, 15.3).

В § 16 полученные в §§ 13, 14, 15 результаты применяются для билинейных управляемых систем с периодическими коэффициентами (22). Гипотеза $(H2)$ в теореме 15.3 для системы (22) эквивалентна устойчивости по Ляпунову свободной системы (4) и равносильна существованию матрицы $Q \in C^{\varkappa}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}))$, $\varkappa = \alpha + 1$, удовлетворяющей условиям

$$Q(t+\omega) = Q(t), \quad Q(t) = Q^T(t) > 0, \quad W_A Q(t) \leqslant 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

(теорема 16.3). Здесь $W_A Q(t) := A^T(t) Q(t) + Q(t) A(t) + \dot{Q}(t)$. Достаточные условия для равенства (31) выражены либо в терминах явно выписываемых тождеств (теорема 16.1), либо явно в терминах коэффициентов системы (теорема 16.2). Достаточные условия РГА стабилизации нулевого решения системы (22) установлены в теоремах 16.1, 16.2, следствиях 16.1, 16.2. Для произвольных матриц $P(t) \in M_n(\mathbb{R})$, $R(t) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ определим операторы $S_A P(t)$

и $K_A R(t)$ равенствами

$$S_A P(t) := P(t)A(t) - A(t)P(t) + \dot{P}(t), \quad K_A R(t) := \dot{R}(t) - A(t)R(t).$$

Построим подпространство

$$\widetilde{\Gamma}(t,x) = \operatorname{span}\{(S_A^i B_k)(t)x + (K_A^i G_k)(t),\ k = \overline{1,r},\ i = \overline{0,\alpha}\}.$$

С л е д с т в и е 16.2. *Пусть система* (4) *устойчива по Ляпунову, и выполнено условие* (F): $\exists\, t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \neq 0 \quad \dim \widetilde{\Gamma}(t_0, x) = n$. *Тогда управление*

$$u(t,x) = -2\big(B(t)x + G(t)\big)^T Q(t)x$$

РГА стабилизирует нулевое решение системы (22)*; здесь* $Q(t)$ *— произвольная матрица, удовлетворяющая условиям* (33).

Существование матрицы $Q(t)$ установлено в теореме 16.3.

В § 17 получены следствия из результатов § 16 для линейной периодической системы, т. е. для системы (22), в которой $B(t,x) \equiv 0$. Достаточные условия экспоненциальной стабилизации линейной системы установлены в теоремах 17.1, 17.2, следствиях 17.1, 17.2 (см. замечание 17.5). Получены следствия для вполне управляемых систем (теорема 17.3, 17.4, следствие 17.3).

В § 18 получены следствия из результатов § 16 для билинейной однородной периодической системы (11). Достаточные условия РГА стабилизации нулевого решения системы (11) установлены в теоремах 18.1, 18.2, следствиях 18.1, 18.2. Получены следствия о стабилизации для согласованных систем с периодическими коэффициентами (теоремы 18.3, 18.4) и для систем с постоянными коэффициентами (13) (теорема 18.5).

Т е о р е м а 18.3. *Пусть коэффициенты системы* (11) *— аналитические ω-периодические функции, система* (11) *согласованна, и система* (4) *устойчива по Ляпунову. Тогда управление* $u_k(t,x) = -2x^T B_k(t)Q(t)x$, $k = \overline{1,r}$, *РГА стабилизирует нулевое решение системы* (11)*; здесь* $Q(t)$ *— произвольная матрица, удовлетворяющая условиям* (33).

Т е о р е м а 18.5. *Пусть система* (13) *(где* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*) согласованна, и система* $\dot{x} = Ax$ *устойчива по Ляпунову. Тогда управление* $u_k(x) = -2x^T B_k Q x$, $k = \overline{1,r}$, *РГА стабилизирует нулевое решение системы* (13)*. Здесь* $Q \in M_n(\mathbb{R})$ *— произвольная постоянная матрица, удовлетворяющая условиям* $Q = Q^T > 0$, $A^T Q + QA \leqslant 0$.

Матрицы $Q(t)$ и Q в теоремах 18.3 и 18.5 найдутся в силу теорем 16.3 и следствия 16.3. Теорема 18.5 дополняет теоремы 9.4, 9.5, 10.4 о стабилизации согласованных систем.

В четвертой главе теория согласованных систем, развитая в главе II, построена для систем с дискретным временем. Основные результаты, полученные в главе II для систем с непрерывным временем, переносятся на системы с дискретным временем. Кроме того, исследуется задача глобальной асимптотической стабилизации нелинейных систем с дискретным временем.

В § 20 введены определения согласованности (определение 20.1) для линейной управляемой системы с неполной обратной связью

$$x(t+1) = \big(A(t) + B(t)U(t)C^*(t)\big)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{K}^n, \tag{34}$$

и для билинейной управляемой системы

$$x(t+1) = \big(A(t) + u_1(t)A_1(t) + \ldots + u_r(t)A_r(t)\big)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{K}^n, \tag{35}$$

с дискретным временем, аналогичные определениям[25,26] для систем с непрерывным временем. Получены критерии согласованности систем (34) и (35) (теоремы 20.1 и 20.3) в общем случае. Доказано, что свойство согласованности системы (34) на $[\tau, \tau + \vartheta)$ влечет полную управляемость и полную наблюдаемость на $[\tau, \tau + \vartheta)$ открытой системы с наблюдателем

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C^*(t)x(t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (x, u, y) \in \mathbb{K}^{n+m+k}$$

(теорема 20.2). Установлено, в каком случае справедливо обратное утверждение (теорема 20.4). Получены критерии согласованности систем (34) и (35) с невырожденной матрицей $A(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta)$ (теорема 20.5). Введено понятие «большой системы», размерности n^2, для систем (34) и (35). Доказано, что свойство согласованности системы (34) и системы (35) равносильно свойству полной управляемости соответствующей большой системы, если $A(t)$ невырожденная (теоремы 20.6, 20.7). Проводится аналогия с соответствующими результатами для систем с непрерывным временем (замечание 20.5).

В § 21 рассматриваются стационарные системы с дискретным временем (15) и (16), которые отождествляются с матрицами $\Sigma = (A, B, C)$ и $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$. Выводятся следствия из результатов § 20 для систем Σ и Ω. Получены критерии ϑ-согласованности систем Σ и Ω (теорема 21.1); в том числе для систем с невырожденной матрицей A (теоремы 21.2, 21.3, 21.4). Доказано, что необходимым условием ϑ-согласованности системы Σ (системы Ω) при $\vartheta > 1$ является условие $\det A \neq 0$ (теорема 21.5). Введено определение согласованности стационарной системы (15) и (16) (определение 21.1) без указания длины ϑ промежутка ϑ-согласованности. Получены критерии согласованности систем (15) и (16) с невырожденной матрицей A (теоремы 21.6, 21.7) и в общем случае (теорема 21.8).

Теорема 21.8. 1. *Система* (16) *согласованна тогда и только тогда, когда* $\langle A_l, l = \overline{1, r}\rangle = M_n(\mathbb{K})$ *или*

$$\big\langle A^{n^2-1}A_l,\ A^{n^2-2}A_lA,\ \ldots,\ A_lA^{n^2-1},\ l = 1, \ldots, r\big\rangle = M_n(\mathbb{K}).$$

2. *Система* (15) *согласованна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rank}\ B = \mathrm{rank}\ C = n$ *или*

$$\left\langle A^{n^2-1}BU_1C^*,\ A^{n^2-2}BU_2C^*A,\ \ldots,\ BU_{n^2}C^*A^{n^2-1},\ U_i \in M_{m,k}(\mathbb{K})\right\rangle = M_n(\mathbb{K}).$$

В § 22 установлены необходимые условия согласованности дискретных систем Σ и Ω с циклической матрицей A (теоремы 22.1, 22.2). Формулировка теоремы 22.2 совпадает с формулировкой теоремы 8.1. Показано, что обратное утверждение в общем случае (при $n > 1$ для системы Ω, при $n > 2$ для системы Σ) неверно, даже при условии $\det A \neq 0$ (примеры 22.1, 22.2). Установлено, в каком случае обратное утверждение верно (теоремы 22.3–22.5).

В § 23 результаты главы II о взаимосвязи свойства согласованности с задачей управления спектром переносятся на системы с дискретным временем (15) и (16).

Теорема 23.1. *Пусть коэффициенты системы* $\Sigma = (A, B, C)$ *имеют вид* (25), (26). *Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений.*

1. *Система* Σ *согласованна.*
2. *Матрицы* C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы.*
3. *Спектр системы* (15) *глобально управляем.*

Теорема 23.2. *Пусть коэффициенты системы* $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$ *имеют вид* (25), (27). *Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений.*

1. *Система* Ω *согласованна.*
2. *Ранг матрицы* $Q = \left\{\mathrm{Sp}\,(A_jA^{i-1})\right\}_{i,j=1}^{n,r}$ *равен* n.
3. *Спектр системы* (16) *глобально управляем.*

Формулировки теорем 23.1 и 23.2 совпадают с формулировками теорем 9.2 и 9.3 соответственно. Ответ на вопрос о справедливости импликаций $2 \Longrightarrow 1$ в теоремах 23.1 и 23.2 дают следующие утверждения, аналогичные теоремам 11.1 и 11.4.

Теорема 23.3. *Пусть коэффициенты системы* $\Sigma = (A, B, C)$ *имеют вид* (25), (26) *и* $\det A \neq 0$. *Тогда импликация* $2 \Longrightarrow 1$ *в теореме* 23.1 *имеет место, если выполнено хотя бы одно из условий:* (a) $\mathrm{rank}\ C = n$; (b) $\mathrm{rank}\ B = n$; (c) $\mathrm{rank}\ C = 1$; (d) $\mathrm{rank}\ B = 1$; (e) *все собственные значения матрицы* A *равны;* (g) $n < 6$.

Теорема 23.4. *Пусть коэффициенты системы* $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$ *имеют вид* (25), (27) *и* $\det A \neq 0$. *Тогда импликация* $2 \Longrightarrow 1$ *в теореме* 23.2 *имеет место, если выполнено хотя бы одно из условий:* (a) *все собственные значения матрицы* A *равны;* (b) $n < 3$.

В общем случае (даже если $\det A \neq 0$) импликация $2 \Longrightarrow 1$ в теореме 23.1 неверна при $n \geqslant 6$ (пример 23.2), в теореме 23.2 неверна при $n \geqslant 3$ (пример 23.1).

Теорема 23.5. *Пусть коэффициенты системы* $\Omega = (A, A_1, \ldots, A_r)$ *имеют вид* (25), (28). *Тогда справедливы импликации* $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$ *для следующих утверждений.*

1. *Система* Ω *согласованна.*
2. $\operatorname{rank} Q = n$.
3. *Спектр системы* (16) *глобально управляем.*

В теореме 23.5 (даже если $\det A \neq 0$) импликация $2 \Longrightarrow 1$, вообще говоря, неверна (пример 22.1), в отличие от соответствующей теоремы 10.3 для систем с непрерывным временем (13).

Из теорем 23.1, 23.2, 23.5 получены следствия о стационарной стабилизации систем (15), (16) (теоремы 23.6–23.8).

В § 24 проводится доказательство теоремы 23.3 с условием (g) при $n = 4$ (теорема 24.1) и при $n = 5$ (теорема 24.2).

В § 25 получены новые достаточные условия (теорема 25.4) глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения нелинейной автономной системы с дискретным временем (20), где $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$ и $f(0,0) = 0$. Эти результаты являются развитием результатов, полученных в работах[40,41,42,43,44]. Построим систему аффинного приближения для системы (20):

$$x(t+1) = f_0(x(t)) + g_0(x(t))u(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \qquad (36)$$

Обозначим $A(x) := \dfrac{\partial f_0(x)}{\partial x} \in M_n(\mathbb{R})$; $f_0^0(x) = x$, $f_0^i(x) = f_0(f_0^{i-1}(x))$, $i \geqslant 1$. Построим следующие матрицы: $N_1(x) = g_0(x) \in M_{n,r}(\mathbb{R})$,

$N_{i+1}(x) = [A(f_0^i(x)) \cdot N_i(x), g_0(f_0^i(x))] \in M_{n,(i+1)r}(\mathbb{R}), \quad i \geqslant 1.$

Теорема 25.4. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

(*a*) *Существует функция* $V \in C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $p \geqslant 2$, *положительно определенная* (*т. е.* $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ *при* $x \neq 0$), *радиально неограниченная* (*т. е.* $V(x) \to \infty$ *при* $x \to \infty$) *такая, что* $V(f_0(x)) \leqslant V(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$;

(*b*) *равенство* $\nabla V(x) = 0$ *выполнено только тогда, когда* $x = 0$;

(*c*) *для любого* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *существует* $\nu \geqslant 1$ *такое, что* $\operatorname{rank} N_\nu(x) = n$.

Тогда нулевое решение системы (20) *глобально асимптотически стабилизируемо.*

В § 26 получены следствия из § 25 о стабилизации системы (20) с линейной свободной динамикой (теорема 26.1), в частности, для аффинных систем с линейным дрейфом (теорема 26.2) и для билинейных систем (16) (теоремы 26.3–26.6).

Т е о р е м а 26.6. *Пусть система* (16) *согласованна, а свободная система* $x(t+1) = Ax(t)$ *устойчива по Ляпунову. Тогда нулевое решение системы* (16) *глобально асимптотически стабилизируемо.*

Теорема 26.6 является дискретным аналогом теоремы 18.5. Теорема 26.6 дополняет теоремы 23.6–23.8 о стабилизации дискретных согласованных систем.

В конце § § 9, 10, 15–19, 23, 25, 26 и в середине § 12 приведены примеры, иллюстрирующие результаты, полученные в этих параграфах.

В заключение вынесены краткие формулировки основных результатов, полученных в диссертации, и описаны возможные перспективы дальнейшей разработки темы.

Автор признателен профессору Е. Л. Тонкову, который проявлял внимание к работе и принимал участие в полезных обсуждениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 03 – 01 – 00014, 06 – 01 – 00258, 12 – 01 – 00195, 12 – 01 – 31077).

Заключение

В диссертационной работе получены новые теоретические результаты и разработаны новые методы стабилизации управляемых систем. В перспективе возможно применение результатов, полученных в главах II и III, к соответствующим задачам стабилизации систем с запаздывающим аргументом. Возможно применение теории согласованных систем к решению проблемы Брокетта о стабилизации стационарных систем с неполной обратной связью (как с непрерывным, так и с дискретным временем) посредством нестационарной матрицы обратной связи $U(t)$. На основе теории, разработанной в главе III, с помощью идей, используемых при доказательстве результатов § § 25, 26, в перспективе возможно перенести теорию стабилизации периодических систем с устойчивой свободной динамикой на системы с дискретным временем; а также, возможно, на системы с непрерывным временем с почти периодическими коэффициентами. Результаты о стабилизации и об управлении асимптотическими инвариантами возможно в перспективе распространить на системы дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

Публикации по теме диссертации

А) Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. **Зайцев В.А.** Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, №1. С. 133–135.

2. **Зайцев В.А.** Управляемость квазидифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. №1. С. 90–100.

3. **Zaitsev V.A.** Consistency and pole assignment in linear systems with incomplete feedback // IFAC Papers Online. Proceedings of IFAC International Workshop on Control Applications of Optimisation. Jyväskylä, Finland, 2009. Vol. 7. Part 1. P. 344–345.

4. **Зайцев В.А.** Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, №9. С. 1320–1328.

5. **Зайцев В.А.** Согласованность и управление спектром в линейных системах с наблюдателем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. №3. С. 50–80.

6. **Зайцев В.А.** Согласованность линейных стационарных управляемых систем с наблюдателем специального вида // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. №1. С. 22–47.

7. **Зайцев В.А.** Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, №3. С. 432–442.

8. **Зайцев В.А.** Управление спектром в билинейных системах // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, №7. С. 1061–1064.

9. **Зайцев В.А.** Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, №12. С. 1789–1793.

10. **Зайцев В.А.** Экспоненциальная стабилизация квазилинейных управляемых систем с неполной обратной связью // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. №1. С. 47–57.

11. **Зайцев В.А.** Согласованные системы и управление спектром собственных значений. I // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, №1. С. 117–131.

12. **Зайцев В.А.** Согласованные системы и управление спектром собственных значений. II // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, №6. С. 851–859.

13. **Zaitsev V.A.** Global asymptotic stabilization of bilinear control systems with periodic coefficients // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. №2. С. 17–27.

14. **Зайцев В.А.** Обобщение теоремы Джарджевича–Куинна и стабилизация билинейных управляемых систем с периодическими коэффициентами. I // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, №1. С. 101–110.

15. **Зайцев В.А.** Обобщение теоремы Джарджевича–Куинна и стабилизация билинейных управляемых систем с периодическими коэффициентами. II // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, №3. С. 348–357.

16. **Zaitsev V.A.** Global asymptotic stabilization of affine periodic systems by damping control // IFAC Papers Online. Proceedings of 5th IFAC International Workshop on Periodic Control Systems. Caen, France, 2013. Vol. 5. Part 1. P. 166–170.

17. **Зайцев В.А.** Стабилизация аффинных управляемых систем с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, №12. С. 1664–1672.

18. **Зайцев В.А., Максимова Н.В.** К свойству согласованности четырехмерных дискретных линейных стационарных управляемых систем с неполной обратной связью специального вида // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. №1. С. 19–31.

19. **Зайцев В.А.** Согласованность дискретных линейных стационарных управляемых систем с неполной обратной связью специального вида для $n = 5$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. №3. С. 13–27.

20. **Зайцев В.А.** Согласованность и управление спектром собственных значений дискретных билинейных систем. I // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, №11. С. 1498–1509.

21. **Зайцев В.А.** Согласованность и управление спектром собственных значений дискретных билинейных систем. II // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №4. С. 502–513.

22. **Зайцев В.А.** Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, №2. С. 157–179.

23. **Зайцев В.А.** Равномерная полная управляемость и глобальное управление асимптотическими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, №3. С. 318–337.

24. **Зайцев В.А.** Достаточные условия равномерной глобальной асимптотической стабилизации билинейных неоднородных периодических систем с устойчивой свободной динамикой // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, №5. С. 1161–1163.

25. **Зайцев В.А.** Стабилизация стационарных аффинных управляемых систем с дискретным временем // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №12. С. 1658–1668.

Б) Другие публикации

26. **Зайцев В.А.** Модальное управление линейным квазидифференциальным уравнением // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2004. №1. С. 3–20.

27. **Зайцев В.А.** Стационарная стабилизация линейных управляемых си-

стем дифференциальных уравнений с неполной обратной связью // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2006. №2 (36). С. 57–60.

28. **Зайцев В.А.** Равномерная полная управляемость и ляпуновская приводимость двумерного квазидифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2007. №1. С. 55–66.

29. **Zaitsev V.A.** Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with observer // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2007. Т. 12, №4. С. 451–452.

30. **Зайцев В.А.** Об управлении спектром и стабилизации билинейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. №2. С. 49–51.

31. **Зайцев В.А.** Управление спектром собственных значений билинейных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2009. Т. 14, №4. С. 713–715.

32. **Зайцев В.А.** Стабилизация билинейных нестационарных управляемых систем // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. №1 (39). С. 55–57.

33. **Зайцев В.А.** Управление спектром собственных значений в системах с дискретным временем // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ–2014). Москва. 16–19 июня 2014. ИПУ РАН. С. 861–867.

34. **Зайцев В.А.** Достаточные условия стабилизации дискретных нелинейных стационарных систем // Динамика систем и процессы управления: Труды международной конференции. Екатеринбург. Россия. 15–20 сентября 2014. ИММ УрО РАН, 2015. С. 187–193.

35. **Zaitsev V.A.** Sufficient conditions for global asymptotic stabilization of nonlinear periodic systems with stable free dynamics // Abstracts of International Conference on Mathematical Control Theory and Mechanics. Suzdal, 03–07 July 2015. P. 188–189.

36. **Зайцев В.А.** Об управлении ляпуновскими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга / В статье: О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, №11. С. 1555–1556.