УДК 517.968

© *Т. К. Юлдашев*

# ОБ ОДНОМ СМЕШАННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрены вопросы разрешимости и построения решения нелокальной смешанной задачи для однородного смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Использован спектральный метод, основанный на разделении переменных. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи. Также изучены вопросы существования решений в случае, когда нарушается единственность решения.

*Ключевые слова*: смешанная задача, дифференциальное уравнение смешанного типа, уравнение четвертого порядка, интегральные условия, однозначная разрешимость.

## § 1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений.

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1–6]). Изучению нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка посвящены, в частности, работы автора [7, 8].

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [9, 10].

Задачи, где меняется тип дифференциального уравнения в рассматриваемой области, имеют важные приложения (см. [11–13]). Дифференциальные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов, в частности, в [11, 14–20].

В настоящей работе изучается нелокальная смешанная задача для смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Итак, в прямоугольной области $\Omega = \{(t,x)\,|\, -\alpha < t < \beta,\ 0 < x < 1\}$ рассматривается смешанное уравнение вида

$$\Im U \equiv U_{tt} - U_{ttxx} + (\operatorname{sgn} t) U_{xx} = 0, \tag{1.1}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — заданные положительные действительные числа.

**Задача**. Найти в области $\Omega$ функцию $U(t,x)$, удовлетворяющую условиям

$$U(t,x) \in C\big(\overline{\Omega}\big) \cap C^1\big(\Omega \cup \{x=0\} \cup \{x=1\}\big) \cap C^2(\Omega_+ \cup \Omega_-), \tag{1.2}$$

$$\Im U(t,x) \equiv 0, \quad (t,x) \in (\Omega_+ \cup \Omega_-), \tag{1.3}$$

$$U(t,0) = U(t,1), \quad U_x(t,0) = U_x(t,1), \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{1.4}$$

$$\int_0^\beta U(t,x)\,dt = \varphi(x), \quad \int_{-\alpha}^0 U(t,x)\,dt = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.5}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\Omega_- = \{(t,x)\,|\,-\alpha < t < 0, 0 < x < 1\}$, $\Omega_+ = \{(t,x)\,|\,0 < t < \beta,\ 0 < x < 1\}$.

## § 2. Поиск частных решений

Нетривиальные частные решения уравнения (1.1) в области $\Omega$ будем искать в виде $U(t,x) = T(t)\cdot X(x)$. Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$T''(t)\cdot X(x) - T''(t)\cdot X''(x) = -(\operatorname{sgn} t)T(t)\cdot X''(x).$$

Здесь почленно разделим на $-(\operatorname{sgn} t)T(t)\cdot X(x)$:

$$\frac{T''(t)}{-(\operatorname{sgn} t)T(t)} - \frac{T''(t)}{-(\operatorname{sgn} t)T(t)}\cdot\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

то есть справедливы соотношения

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2, \qquad \frac{T''(t)}{-(\operatorname{sgn} t)T(t)} - \frac{T''(t)}{-(\operatorname{sgn} t)T(t)}\cdot\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2,$$

где $-\mu^2$ — постоянная разделения, $0<\mu$. Отсюда с учетом граничных условий (1.4) получаем

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0<x<1, \tag{2.1}$$

$$X(0) = X(1), \quad X'(0) = X'(1), \tag{2.2}$$

$$T''(t) - \lambda^2 T(t) = 0, \quad 0<t<\beta, \tag{2.3}$$

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad -\alpha<t<0, \tag{2.4}$$

где $\lambda^2 = \dfrac{\mu^2}{1+\mu^2}$.

Спектральная задача (2.1), (2.2) имеет решение

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \{\cos\mu_n x, \sin\mu_n x\}, \quad \mu_n = 2\pi n, \quad n = 1,2,\dots . \tag{2.5}$$

Тогда общие решения дифференциальных уравнений (2.3) и (2.4) имеют вид

$$T_n(t) = \begin{cases} a_n e^{\lambda_n t} + b_n e^{-\lambda_n t}, & t>0, \\ c_n\cos\lambda_n t + d_n\sin\lambda_n t, & t<0, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ — произвольные постоянные, $\lambda_n = \sqrt{\dfrac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}}$.

Поскольку решения $U_n(t,x) = T_n(t)\cdot X_n(x)$ должны удовлетворять условию (1.2), то постоянные $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ подберем так, чтобы выполнялись условия

$$T_n(0+0) = T_n(0-0), \quad T'_n(0+0) = T'_n(0-0). \tag{2.7}$$

Из (2.6) с учетом условий (2.7) получаем, что $c_n = a_n + b_n$ и $d_n = a_n - b_n$. Тогда функции (2.6) принимают вид

$$T_n(t) = \begin{cases} c_n\operatorname{ch}\lambda_n t + d_n\operatorname{sh}\lambda_n t, & t>0, \\ c_n\cos\lambda_n t + d_n\sin\lambda_n t, & t<0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Теперь предположим, что задача (1.2)–(1.5) в области $\Omega$ имеет единственное решение $U(t,x)$. Тогда с учетом функций (2.5) это решение, согласно методу Фурье разделения переменных, представляется в виде

$$U(t,x) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\vartheta_n(t)\cos\mu_n x + u_n(t)\sin\mu_n x\right],$$

где

$$u_n(t) = 2\int_0^1 U(t,x)\sin\mu_n x\,dx, \ n = 1,2,\dots , \tag{2.9}$$

$$\vartheta_n(t) = 2\int_0^1 U(t,x)\cos\mu_n x\,dx, \ n = 0,1,2,\dots . \tag{2.10}$$

## § 3. Определение коэффициентов Фурье (2.9) и (2.10)

Покажем, что функции (2.9) и (2.10) удовлетворяют уравнениям (2.3), (2.4) в соответствующих интервалах и условию (2.7). Дифференцируя по $t$ равенства (2.9) и (2.10) два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$u_n''(t) = 2\int_0^1 U_{tt}\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{ttxx} - U_{xx})\sin\mu_n x\,dx, \quad t>0, \tag{3.1}$$

$$u_n''(t) = 2\int_0^1 U_{tt}\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{ttxx} + U_{xx})\sin\mu_n x\,dx, \quad t<0, \tag{3.2}$$

$$\vartheta_n''(t) = 2\int_0^1 U_{tt}\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{ttxx} - U_{xx})\cos\mu_n x\,dx, \quad t>0, \tag{3.3}$$

$$\vartheta_n''(t) = 2\int_0^1 U_{tt}\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 (U_{ttxx} + U_{xx})\cos\mu_n x\,dx, \quad t<0. \tag{3.4}$$

Интегрируя два раза по частям в интегралах (3.1)–(3.4), с учетом условий (1.4) получаем следующие уравнения

$$u_n''(t) - \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t>0, \tag{3.5}$$

$$u_n''(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = 0, \quad t<0, \tag{3.6}$$

$$\vartheta_n''(t) - \lambda_n^2 \vartheta_n(t) = 0, \quad t>0, \tag{3.7}$$

$$\vartheta_n''(t) + \lambda_n^2 \vartheta_n(t) = 0, \quad t<0, \tag{3.8}$$

где $\lambda_n^2 = \dfrac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}$.

Дифференциальные уравнения (3.5) и (3.6), (3.7) и (3.8) при $\lambda = \lambda_n$ совпадают соответственно с уравнениями (2.3) и (2.4). Далее с учетом условий (1.2) из (2.9) и (2.10) получаем

$$u_n(0+0) = 2\int_0^1 U(0+0,x)\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 U(0-0,x)\sin\mu_n x\,dx = u_n(0-0), \tag{3.9}$$

$$\vartheta_n(0+0) = 2\int_0^1 U(0+0,x)\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 U(0-0,x)\cos\mu_n x\,dx = \vartheta_n(0-0). \tag{3.10}$$

Дифференцируя функции (2.9) и (2.10) один раз по $t$, в силу условий (1.2) имеем

$$u_n'(0+0) = 2\int_0^1 U_t(0+0,x)\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 U_t(0-0,x)\sin\mu_n x\,dx = u_n'(0-0), \tag{3.11}$$

$$\vartheta_n'(0+0) = 2\int_0^1 U_t(0+0,x)\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 U_t(0-0,x)\cos\mu_n x\,dx = \vartheta_n'(0-0). \tag{3.12}$$

Условия (3.9), (3.10) и (3.11), (3.12) совпадают с условиями (2.7). Тогда для задач (3.5)–(3.12) аналогично формуле (2.8) имеем

$$u_n(t) = \begin{cases} c_n \operatorname{ch}\lambda_n t + d_n \operatorname{sh}\lambda_n t, & t>0, \\ c_n \cos\lambda_n t + d_n \sin\lambda_n t, & t<0, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\vartheta_n(t) = \begin{cases} \tilde{c}_n \operatorname{ch}\lambda_n t + \tilde{d}_n \operatorname{sh}\lambda_n t, & t>0, \\ \tilde{c}_n \cos\lambda_n t + \tilde{d}_n \sin\lambda_n t, & t<0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Для нахождения постоянных $c_n, d_n$ и $\tilde{c}_n, \tilde{d}_n$ воспользуемся интегральными условиями (1.5) и формулами (2.9) и (2.10)

$$\int_0^\beta u_n(t)\,dt = 2\int_0^1 \int_0^\beta U(t,x)\,dt\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin\mu_n x\,dx = \varphi_n, \tag{3.15}$$

$$\int_0^\beta \vartheta_n(t)\,dt = 2\int_0^1\int_0^\beta U(t,x)\,dt\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 \varphi(x)\cos\mu_n x\,dx = \tilde\varphi_n, \tag{3.16}$$

$$\int_{-\alpha}^0 u_n(t)\,dt = 2\int_0^1\int_{-\alpha}^0 U(t,x)\,dt\sin\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 \psi(x)\sin\mu_n x\,dx = \psi_n, \tag{3.17}$$

$$\int_{-\alpha}^0 \vartheta_n(t)\,dt = 2\int_0^1\int_{-\alpha}^0 U(t,x)\,dt\cos\mu_n x\,dx = 2\int_0^1 \psi(x)\cos\mu_n x\,dx = \tilde\psi_n. \tag{3.18}$$

При $t>0$ из (3.13) и (3.15) получаем

$$\varphi_n = \int_0^\beta u_n(t)\,dt = \int_0^\beta (c_n\operatorname{ch}\lambda_n t + d_n\operatorname{sh}\lambda_n t)\,dt =$$

$$= \left(\frac{c_n}{\lambda_n}\operatorname{sh}\lambda_n t + \frac{d_n}{\lambda_n}\operatorname{ch}\lambda_n t\right)\Bigg|_0^\beta = \frac{c_n}{\lambda_n}\operatorname{sh}\lambda_n\beta + \frac{d_n}{\lambda_n}(\operatorname{ch}\lambda_n\beta - 1). \tag{3.19}$$

При $t<0$ из (3.13) и (3.17) получаем

$$\psi_n = \int_{-\alpha}^0 u_n(t)\,dt = \int_{-\alpha}^0 (c_n\cos\lambda_n t + d_n\sin\lambda_n t)\,dt =$$

$$= \left(\frac{c_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n t - \frac{d_n}{\lambda_n}\cos\lambda_n t\right)\Bigg|_{-\alpha}^0 = \frac{c_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n\alpha + \frac{d_n}{\lambda_n}(\cos\lambda_n\alpha - 1). \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_n$ и $d_n$:

$$\begin{cases} c_n\operatorname{sh}\lambda_n\beta + d_n(\operatorname{ch}\lambda_n\beta - 1) = \lambda_n\varphi_n, \\ c_n\sin\lambda_n\alpha + d_n(\cos\lambda_n\alpha - 1) = \lambda_n\psi_n. \end{cases} \tag{3.21}$$

Система однозначно разрешима, если ее определитель не обращается в нуль при любых $0<\alpha$ и $0<\beta$:

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = \operatorname{sh}\lambda_n\beta\cdot\cos\lambda_n\alpha - \operatorname{ch}\lambda_n\beta\cdot\sin\lambda_n\alpha + \sin\lambda_n\alpha - \operatorname{sh}\lambda_n\beta \neq 0. \tag{3.22}$$

Аналогично из (3.14), (3.16) и (3.18) получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\tilde c_n$ и $\tilde d_n$:

$$\begin{cases} \tilde c_n\operatorname{sh}\lambda_n\beta + \tilde d_n(\operatorname{ch}\lambda_n\beta - 1) = \lambda_n\tilde\varphi_n, \\ \tilde c_n\sin\lambda_n\alpha + \tilde d_n(\cos\lambda_n\alpha - 1) = \lambda_n\tilde\psi_n. \end{cases} \tag{3.23}$$

И эта система однозначно разрешима, если выполняется условие (3.22). Пусть выполняется условие (3.22). Тогда из (3.21) и (3.23) находим

$$c_n = \frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big(\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha - 1) - \psi_n(\operatorname{ch}\lambda_n\beta - 1)\Big), \qquad d_n = \frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big(-\varphi_n\sin\lambda_n\alpha + \psi_n\operatorname{sh}\lambda_n\beta\Big),$$

$$\tilde c_n = \frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big(\tilde\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha - 1) - \tilde\psi_n(\operatorname{ch}\lambda_n\beta - 1)\Big), \qquad \tilde d_n = \frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big(-\tilde\varphi_n\sin\lambda_n\alpha + \tilde\psi_n\operatorname{sh}\lambda_n\beta\Big).$$

Подставляя эти коэффициенты в формулы (3.21) и (3.23), получим

$$u_n(t) = \frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big\{\varphi_n\Big[\operatorname{ch}\lambda_n t\cdot(\cos\lambda_n\alpha - 1) - \operatorname{sh}\lambda_n t\cdot\sin\lambda_n\alpha\Big] +$$

$$+\psi_n\Big[\operatorname{ch}\lambda_n t\cdot(1 - \operatorname{ch}\lambda_n\beta) - \operatorname{sh}\lambda_n t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n\beta\Big]\Big\}, \quad t>0, \tag{3.24}$$

$$u_n(t) = \frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big\{\varphi_n\Big[\cos\lambda_n t\cdot(\cos\lambda_n\alpha - 1) - \sin\lambda_n t\cdot\sin\lambda_n\alpha\Big] +$$

$$+\psi_n\Big[\cos\lambda_n t\cdot(1-\operatorname{ch}\lambda_n\beta)-\sin\lambda_n t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n\beta\Big]\Big\},\quad t<0, \tag{3.25}$$

$$\vartheta_n(t)=\frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big\{\tilde\varphi_n\Big[\operatorname{ch}\lambda_n t\cdot(\cos\lambda_n\alpha-1)-\operatorname{sh}\lambda_n t\cdot\sin\lambda_n\alpha\Big]+$$

$$+\tilde\psi_n\Big[\operatorname{ch}\lambda_n t\cdot(1-\operatorname{ch}\lambda_n\beta)-\operatorname{sh}\lambda_n t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n\beta\Big]\Big\},\quad t>0, \tag{3.26}$$

$$\vartheta_n(t)=\frac{\lambda_n}{\Delta_n(\alpha,\beta)}\Big\{\tilde\varphi_n\Big[\cos\lambda_n t\cdot(\cos\lambda_n\alpha-1)-\sin\lambda_n t\cdot\sin\lambda_n\alpha\Big]+$$

$$+\tilde\psi_n\Big[\cos\lambda_n t\cdot(1-\operatorname{ch}\lambda_n\beta)-\sin\lambda_n t\cdot\operatorname{sh}\lambda_n\beta\Big]\Big\},\quad t<0. \tag{3.27}$$

Теперь предположим, что $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, Тогда $\varphi_n=\tilde\varphi_n=0$, $\psi_n=\tilde\psi_n=0$ и из формул (2.9), (2.10) и (3.24)–(3.27) следует, что

$$\int_0^1 U(t,x)\sin\mu_n x\,dx=0,\quad n=1,2,\dots,$$

$$\int_0^1 U(t,x)\cos\mu_n x\,dx=0,\quad n=0,1,2,\dots.$$

Отсюда в силу полноты системы собственных функций $\{1,\cos\mu_n x,\sin\mu_n x\}$ в $L_2[0,1]$ заключаем, что $U(t,x)\equiv 0$ для всех $x\in[0,1]$ и $t\in[-\alpha,\beta]$.

## § 4. Существование решения

Сначала рассмотрим случай, когда нарушается условие (3.22). Пусть $\Delta_n(\alpha,\beta)=0$ при некоторых $\alpha$ и $n=m$, тогда однородная задача (1.2)–(1.5) при $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$ имеет нетривиальное решение

$$U_m(t,x)=\begin{cases}\tilde d_m\Big(\operatorname{sh}\lambda_m t\cdot\operatorname{ch}\lambda_m\beta-\operatorname{sh}\lambda_m\beta\cdot(\operatorname{ch}\lambda_n t-1)\Big)\cdot X_m(x), & t>0,\\ \tilde d_m\Big(\sin\lambda_m t\cdot\operatorname{ch}\lambda_m\beta-\operatorname{sh}\lambda_m\beta\cdot(\cos\lambda_m t-1)\Big)\cdot X_m(x), & t<0,\end{cases} \tag{4.1}$$

где $\tilde d_m$ — произвольные постоянные, не равные нулю, $X_m(x)\in\{1,\cos\mu_n x,\sin\mu_n x\}$.

Условие $\Delta_n(\alpha,\beta)=0$ эквивалентно равенству

$$\operatorname{sh}\lambda_n\beta\cdot\cos\lambda_n\alpha+(1-\operatorname{ch}\lambda_n\beta)\cdot\sin\lambda_n\alpha=\operatorname{sh}\lambda_n\beta,$$

где $\lambda_n=\sqrt{\dfrac{\mu_n^2}{1+\mu_n^2}}$, $\mu_n=2\pi n$. Здесь $0<\lambda_n<1$, $\lambda_n\to 1$ при $n\to\infty$.

Последнее уравнение записываем в следующем виде

$$\cos(\lambda_n\alpha-\theta_n)=\frac{\operatorname{sh}\lambda_n\beta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\lambda_n\beta+(1-\operatorname{ch}\lambda_n\beta)^2}},$$

где $\theta_n=\arccos\dfrac{\operatorname{sh}\lambda_n\beta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2\lambda_n\beta+(1-\operatorname{ch}\lambda_n\beta)^2}}$. Данное уравнение имеет две серии решений:

1) $\alpha_k=\dfrac{2\pi k}{\lambda_n}$, $k\in N$; 2) $\alpha_k=\dfrac{2\theta_n}{\lambda_n}+\dfrac{2\pi k}{\lambda_n}$, $k\in N$, где $N$ — множество натуральных чисел.

Первая серия решений $\alpha_k=\dfrac{2\pi k}{\lambda_n}$ удовлетворяет уравнению $\Delta_n(\alpha_k,\beta)=0$. Нетрудно проверить, что и вторая серия решений $\alpha_k=\dfrac{2\theta_n}{\lambda_n}+\dfrac{2\pi k}{\lambda_n}$ удовлетворяет уравнению $\Delta_n(\alpha_k,\beta)=0$. Другие значения $\alpha$, для которых условие (3.22) выполняется, называются регулярными.

Покажем, что существует постоянная $C_0>0$ такая, что при достаточно больших $n$ справедлива оценка

$$\inf_n\big|\Delta_n(\alpha,\beta)\big|\geqslant C_0. \tag{4.2}$$

Так как $\lambda_n \to 1$ при $n \to \infty$, то имеем

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \theta_n = \lim_{n\to\infty} \arccos \frac{\operatorname{sh} \lambda_n \beta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \lambda_n \beta + (1 - \operatorname{ch} \lambda_n \beta)^2}} =$$

$$= \arccos \frac{\operatorname{sh} \beta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \beta + (1 - \operatorname{ch} \beta)^2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - 1} \operatorname{th} \beta}.$$

Предположим, что существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что при достаточно больших $n$ справедлива оценка (4.2). Тогда с учетом того, что $0 < \lambda_n < 1$, $\lambda_n \to 1$ при $n \to \infty$, из (3.22) имеем

$$\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \beta + (1 - \operatorname{ch} \beta)^2}}{\operatorname{sh} \beta} \cdot \big| \cos(\alpha - \theta) \big| \geqslant 1 + \frac{C_0}{\operatorname{sh} \beta}.$$

Это неравенство имеет место, если выполнено следующее условие

$$\sqrt{1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \beta)^2}{\operatorname{sh}^2 \beta}} \cdot \big| \cos(\alpha - \theta) \big| > 1.$$

Так как $\nu = \sqrt{1 + \frac{(1 - \operatorname{ch} \beta)^2}{\operatorname{sh}^2 \beta}} > 1$, то неравенство

$$\big| \cos(\alpha - \theta) \big| > \nu^{-1} \tag{4.3}$$

имеет решение. Поскольку $0 < \nu^{-1} < 1$, то при любых значениях $0 < \alpha$, удовлетворяющих неравенству (4.3), выполняется оценка (4.2).

Для регулярных значений $0 < \alpha$ имеют место формулы (3.24)–(3.27). Поэтому при выполнении условий (3.22) и (4.2) с учетом частных решений (2.5), (3.24)–(3.27) решение задачи (1.2)–(1.5) в области $\Omega$ можно представить в виде ряда

$$U(t,x) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \vartheta_n(t) \cos \mu_n x + u_n(t) \sin \mu_n x \right]. \tag{4.4}$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сумма $U(t,x)$ ряда (4.4) удовлетворяет условиям (1.2).

При достаточно больших $n$ справедливы оценки

$$\big|u_n(t)\big| \leqslant C_1 \Big( |\varphi_n| + |\psi_n| \Big), \quad \big|\vartheta_n(t)\big| \leqslant C_1 \Big( |\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n| \Big), \tag{4.5}$$

$$\big|u'_n(t)\big| \leqslant C_2 \Big( |\varphi_n| + |\psi_n| \Big), \quad \big|\vartheta'_n(t)\big| \leqslant C_2 \Big( |\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n| \Big), \tag{4.6}$$

$$\big|u''_n(t)\big| \leqslant C_3 \Big( |\varphi_n| + |\psi_n| \Big), \quad \big|\vartheta''_n(t)\big| \leqslant C_3 \Big( |\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n| \Big), \tag{4.7}$$

где $0 < C_i = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,3}$.

Действительно, так как $0 < \lambda_n < 1$, $\lambda_n \to 1$ при $n \to \infty$, то на основании формул (3.24)–(3.27) с учетом оценки (4.2) найдем

$$\big|u_n(t)\big| = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0} \Big[ 2|\varphi_n| \cdot e^{\beta} + |\psi_n| \cdot (\operatorname{ch} 2\beta + \operatorname{ch} \beta) \Big], & t > 0, \\ \dfrac{1}{C_0} \Big[ 3|\varphi_n| + |\psi_n| \cdot \big(1 + e^{\beta}\big) \Big], & t < 0, \end{cases}$$

$$\big|\vartheta_n(t)\big| = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0} \Big[ 2|\tilde{\varphi}_n| \cdot e^{\beta} + |\tilde{\psi}_n| \cdot (\operatorname{ch} 2\beta + \operatorname{ch} \beta) \Big], & t > 0, \\ \dfrac{1}{C_0} \Big[ 3|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n| \cdot \big(1 + e^{\beta}\big) \Big], & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.5), где $C_1 = \dfrac{1}{C_0} \max\left\{3; 2\cdot e^{\beta}; \operatorname{ch} 2\beta + \operatorname{ch}\beta; 1 + e^{\beta}\right\}$.

Дифференцируя выражения(3.24)–(3.27), получаем

$$\left|u'_n(t)\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\Big[2\left|\varphi_n\right|\cdot e^{\beta} + \left|\psi_n\right|\cdot\left(1+e^{\beta}\right)\cdot\operatorname{ch}\beta\Big], & t>0,\\ \dfrac{1}{C_0}\Big[3\left|\varphi_n\right| + \left|\psi_n\right|\cdot\left(1+e^{\beta}\right)\Big], & t<0, \end{cases}$$

$$\left|\vartheta'_n(t)\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\Big[2\left|\tilde\varphi_n\right|\cdot e^{\beta} + \left|\tilde\psi_n\right|\cdot\left(1+e^{\beta}\right)\cdot\operatorname{ch}\beta\Big], & t>0,\\ \dfrac{1}{C_0}\Big[3\left|\tilde\varphi_n\right| + \left|\tilde\psi_n\right|\cdot\left(1+e^{\beta}\right)\Big], & t<0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.6), где $C_2 = \dfrac{1}{C_0} \max\left\{3; 2\cdot e^{\beta}; \left(1+e^{\beta}\right)\cdot\operatorname{ch}\beta\right\}$.

Дифференцируя выражения (3.24)–(3.27) два раза, получаем

$$\left|u''_n(t)\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\Big[2\left|\varphi_n\right|\cdot e^{\beta} + \left|\psi_n\right|\cdot\left(\operatorname{ch}2\beta+\operatorname{ch}\beta\right)\Big], & t>0,\\ \dfrac{1}{C_0}\Big[3\left|\varphi_n\right| + \left|\psi_n\right|\cdot\left(1+e^{\beta}\right)\Big], & t<0, \end{cases}$$

$$\left|\vartheta''_n(t)\right| = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\Big[2\left|\tilde\varphi_n\right|\cdot e^{\beta} + \left|\tilde\psi_n\right|\cdot\left(\operatorname{ch}2\beta+\operatorname{ch}\beta\right)\Big], & t>0,\\ \dfrac{1}{C_0}\Big[3\left|\tilde\varphi_n\right| + \left|\tilde\psi_n\right|\cdot\left(1+e^{\beta}\right)\Big], & t<0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.7), где $C_3 = \dfrac{1}{C_0} \max\left\{3; 2\cdot e^{\beta}; \operatorname{ch} 2\beta + \operatorname{ch}\beta; 1 + e^{\beta}\right\}$.

Так как по предположению задачи $\varphi(x) \in C^3[0;1]$, $\psi(x) \in C^3[0;1]$, и на сегменте $[0;1]$ функции $\varphi$ и $\psi$ имеют кусочно-непрерывные производные четвертого порядка, и $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1) = \psi'''(0) = \psi'''(1)$, то справедливы оценки

$$\varphi_n = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{p_n}{n^4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \leqslant 4\int_0^1 \left[\varphi^{IV}(x)\right]^2 dx,$$

$$\tilde\varphi_n = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{q_n}{n^4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 \leqslant 4\int_0^1 \left[\varphi^{IV}(x)\right]^2 dx,$$

$$\psi_n = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{\overline{p}_n}{n^4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p}_n^2 \leqslant 4\int_0^1 \left[\psi^{IV}(x)\right]^2 dx,$$

$$\tilde\psi_n = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{\overline{q}_n}{n^4} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}_n^2 \leqslant 4\int_0^1 \left[\psi^{IV}(x)\right]^2 dx.$$

С помощью этих оценок нетрудно убедиться, что ряд (4.4) и ряды из производных первого порядка членов этого ряда равномерно сходятся в области $\overline{\Omega}$.

Пусть $\Delta_n(\alpha,\beta) = 0$ при некоторых $0 < \alpha$ и $n = k_1, \ldots, k_s$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s$, $s$ — фиксированное натуральное число. Тогда для разрешимости уравнений (3.21) и (3.23) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\varphi_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\cdot\sin\mu_n x\,dx = 0, \quad n = k_1, \ldots, k_s, \tag{4.8}$$

$$\tilde\varphi_n = 2\int_0^1 \varphi(x)\cdot\cos\mu_n x\,dx = 0, \quad n = k_1, \ldots, k_s, \tag{4.9}$$

$$\psi_n = 2\int_0^1 \psi(x) \cdot \sin \mu_n x \, dx = 0, \quad n = k_1, \dots, k_s, \tag{4.10}$$

$$\tilde{\psi}_n = 2\int_0^1 \psi(x) \cdot \cos \mu_n x \, dx = 0, \quad n = k_1, \dots, k_s. \tag{4.11}$$

В этом случае решение задачи (1.2)–(1.5) определяется в виде суммы ряда

$$U(t,x) = \frac{\vartheta_0(t)}{2} + \left[\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty}\right] \vartheta_n(t) \cos \mu_n x +$$

$$+ \left[\sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty}\right] u_n(t) \sin \mu_n x + \sum_m C_m U_m(t,x), \tag{4.12}$$

где в последней сумме $m$ принимает значения $k_1, \dots, k_s$, $C_m$ — произвольные постоянные, функции $U_m(t,x)$ определяются из формулы (4.1).

Таким образом доказана

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3[0;1]$, $\psi(x) \in C^3[0;1]$ *и на сегменте* $[0;1]$ *имеют кусочно-непрерывные производные четвертого порядка и* $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = \psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1) = \psi''(0) = \psi''(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1) = \psi'''(0) = \psi'''(1)$. *Тогда задача* (1.2)–(1.5) *в области* $\Omega$ *однозначно разрешима, если выполняются условия* (3.22) *и* (4.2). *Это решение определяется рядом* (4.4). *Пусть* $\Delta_n(\alpha,\beta) = 0$ *при некоторых* $0 < \alpha$ *и* $n = k_1, \dots, k_s$ *и выполнено условие* (4.2). *Тогда задача* (1.2)–(1.5) *разрешима в области* $\Omega$, *если выполняются условия ортогональности* (4.8)–(4.11). *При этом решения определяются рядом* (4.12).

**Список литературы**


1. Баев А.Д., Шабров С.А., Мон Меач. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 1. С. 50–55.
2. Турбин М.В. Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель–Балкли // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 246–257.
3. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematical Physics. 1964. Vol. 43. P. 309–313.
4. Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 3. С. 37–42.
5. Шабров С.А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 2. С. 168–179.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
7. Юлдашев Т.К. Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 2. С. 180–189.
8. Юлдашев Т.К. Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 19. № 4. С. 736–749.
9. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
10. Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени // Известия вузов. Математика. 2012. № 10. С. 32–44.
11. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. № 3. С. 3–19.
12. Франкль Ф.И. Избранные труды в газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.
13. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. 1964. Т. 7. № 1. С. 89–92.
14. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

15. Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1565–1567.
16. Репин О. А. Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе–Лыкова // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1412–1417.
17. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 301 с.
18. Сабитова Ю.К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Математические заметки. 2015. Т. 98. № 3. С. 393–406.
19. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997. 165 с.
20. Юлдашев Т.К. О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма // Журнал Средневолжского математического общества. 2013. Т. 15. № 3. С. 158–163.

Поступила в редакцию 03.05.2016

Юлдашев Турсун Камалдинович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, 660014, Россия, г. Красноярск, пр. им. газеты Красноярский рабочий, 31.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

***T. K. Yuldashev***
**On a mixed type fourth-order differential equation**

*Keywords:* boundary value problem, mixed type differential equation, fourth-order equation, integral conditions, unique solvability.

MSC: 35A02, 35M10, 35S05

We consider questions of solvability and constructing the solution to a nonlocal mixed boundary value problem for a homogeneous mixed type fourth-order differential equation. We use the spectral method based on separation of variables. A criterion for unique solvability of the problem is obtained. We also study questions of existence of solutions in the case where uniqueness of the solution does not hold.

REFERENCES

1. Baev A.D., Shabrov S.A., Mon Meach. Uniqueness of the solution of the mathematical model of forced string oscillation with singularities, *Vestn. Voronezh. Gos. Univ., Ser. Fiz. Mat.*, 2014, no. 1, pp. 50–55 (in Russian).
2. Turbin M.V. Investigation of initial boundary value problem for the Herschel–Bulkley mathematical fluid model, *Vestn. Voronezh. Gos. Univ., Ser. Fiz. Mat.*, 2013, no. 2, pp. 246–257 (in Russian).
3. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude, *Journal of Mathematical Physics*, 1964, vol. 43, pp. 309–313.
4. Akhtyamov A.M., Ayupova A.R. On the resolution of the problem on detection of defects in the form of a small cavity in a rod, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2010, vol. 12, no. 3, pp. 37–42 (in Russian).
5. Shabrov S.A. Estimates of the influence function for a fourth-order mathematical model, *Vestn. Voronezh. Gos. Univ., Ser. Fiz. Mat.*, 2013, no. 1, pp. 168–179 (in Russian).
6. Whitham G.B. *Linear and nonlinear waves*, New York–London–Sydney–Toronto: A Wiley-Interscience Publication, 1974. Translated under the title *Lineinye i nelineinye volny*, Moscow: Mir, 1977, 622 p.
7. Yuldashev T.K. An inverse problem for linear Fredholm partial integro-differential equation of fourth order, *Vestn. Voronezh. Gos. Univ., Ser. Fiz. Mat.*, 2015, no. 2, pp. 180–189 (in Russian).
8. Yuldashev T.K. An inverse problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation of fourth order with degenerate kernel, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2015, vol. 19, no. 4, pp. 736–749. DOI: 10.14498/vsgtu1434 (in Russian).
9. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (in Russian).
10. Pul'kina L.S. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 10, pp. 26–37.
11. Gel'fand I.M. Some questions of analysis and differential equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1959, vol. 14, no. 3, pp. 3–19 (in Russian).
12. Frankl' F.I. *Izbrannye trudy v gazovoi dinamike* (Selected works in gas dynamics), Moscow: Nauka, 1973, 711 p.

13. Uflyand Ya.S. On a question of the distribution of fluctuations in the composite electrical lines, *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, 1964, vol. 7, no. 1, pp. 89–92 (in Russian).
14. Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov M. *Kraevye zadachi dlya uravnenii parabolo-giperbolicheskogo tipa* (Boundary value problems for parabolic-hyperbolic type equations), Tashkent: Fan, 1986, 576 p.
15. Moiseev E.I. Solvability of a nonlocal boundary value problem, *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1643–1646.
16. Repin O.A. An analog of the Nakhushev problem for the Bitsadze–Lykov equation, *Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 10, pp. 1503–1508.
17. Sabitov K.B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* (On the theory of mixed type equations), Moscow: Fizmatlit, 2014, 301 p.
18. Sabitova Yu.K. Boundary-value problem with nonlocal integral condition for mixed-type equations with degeneracy on the transition line, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 454–465.
19. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. *Kraevye zadachi dlya uravnenii smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* (Boundary value problems for the mixed type equations with spectral parameter), Tashkent: Fan, 1997, 165 p.
20. Yuldashev T.K. On the solvability of mixed value problem for linear parabolic-hyperbolic Fredholm integro-differential equation, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2013, vol. 15, no. 3, pp. 158–163 (in Russian).

Received 03.05.2016

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Higher Mathematics Department, Reshetnev Siberian State Aerospace University, pr. im. Gazety Krasnoyarskii Rabochii, 31, Krasnoyarsk, 660014, Russia.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com