



---

**ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 531.3

MSC 2010: 37J60, 37N05

**О проблеме Адамара – Гамеля  
и динамике колесных экипажей\***

**А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев**

В данной работе развиваются результаты Адамара и Гамеля о возможности подстановки неголономных связей в лагранжиан системы без изменения вида уравнений движения. Формулируются условия корректности такой подстановки для частного случая неголономных систем в наиболее простом и универсальном виде. Данные условия приводятся в терминах как обобщенных скоростей, так и квазискоростей. Также в работе обсуждается вывод и редукция уравнений движения произвольного колесного экипажа. В частности, доказана эквивалентность (с точностью до дополнительных квадратур) задач о произвольном колесном экипаже и аналогичном экипаже, у которого колеса заменены на коньки. В качестве примеров разобраны задачи об одноколеснике и о колесном экипаже с двумя вращающимися колесными парами.

Ключевые слова: неголономная связь, колесный экипаж, редукция, уравнения движения, лагранжевы формализм

---

\*Перевод статьи “On the Hadamard – Hamel Problem and the Dynamics of Wheeled Vehicles”, опубликованной в журнале *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 752–766.

Получено 12 октября 2015 года

После доработки 09 ноября 2015 года

---

Работа А. В. Борисова и И. С. Мамаева выполнена в рамках базовой части государственного задания вузам. Работа А. А. Килина поддержана грантами РФФИ № 15-38-20879 мол\_а\_вед и № 15-08-09261-а.

---

Борисов Алексей Владимирович

[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич

[maev@rcd.ru](mailto:maev@rcd.ru)

Московский физико-технический институт (государственный университет)

141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Килин Александр Александрович

[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

## Введение

1° Вопрос о возможности записи уравнений движения неголономных систем в лагранжевом виде восходит к Герцу, который писал о неприменимости принципа Гамильтона для неголономных систем (дальнейшее обсуждение вопроса имеется у Гамеля [4], а также, например, в [29]). Невозможность лагранжева (гамильтонова) описания в общем случае приводит к некорректности подстановки неголономных связей в лагранжиан при составлении уравнений движения. В частности, известная ошибка Э. Линделёфа<sup>1</sup>, который использовал уравнения Лагранжа для решения задачи о качении тела вращения на плоскости, привела С. А. Чаплыгина [26] к существенному продвижению в неголономной механике и введению специального сорта неголономных систем — систем Чаплыгина [25]. Рассмотрение данных систем позволило более глубоко разобраться в вопросе о возможности подстановки неголономных связей в лагранжиан и записи уравнений движений неголономных систем в лагранжевом виде (точнее, о некорректности такой операции в общем случае). Кроме того, для таких систем Чаплыгиным была развита теория приводящего множителя (составляющая на сегодняшний день основу теории гамильтонизации неголономных систем [30]).

До работы Чаплыгина вопрос о корректности подстановки связей в лагранжиан был рассмотрен А. Фиркандтом [10], который привел явный пример, показывающий некорректность такой подстановки в общем случае. Отметим, что в общем случае подстановка приводит к неправильным уравнениям движения, которые зависят от способа исключения связей [9]. Остановимся более подробно на двух наиболее полных и интересных, ставших уже классическими, работах в этом направлении [3, 4]. Их развитие и составляет содержание данной статьи.

Первая из упомянутых статей — единственная посвященная неголономной механике работа Ж. Адамара [3] (1895 г.), который был в то время учеником П. Аппеля. Данная работа известна еще и тем, что в ней введена модель чистого качения (спустя сто с лишним лет Койлер [14] назвал такой тип качения *rubber-rolling*, «резиновое качение»). Статья Адамара была переопубликована как приложение к небольшой книге Аппеля [11], где была проанализирована известная задача о движении круглого диска по горизонтальной плоскости.

В работе [3] Адамар подробно исследует вопрос о корректности подстановки неголономных связей в лагранжиан. Основные результаты, полученные Адамаром, можно сформулировать следующим образом. Пусть система описывается конфигурационными переменными  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ , и на нее наложены  $m$  неголономных связей  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ , где  $\mathbf{g}$  — произвольные функции, линейные по скоростям  $\dot{\mathbf{z}}$ . Данная система связей является вполне неголономной<sup>2</sup> (см., например, [5, 8]). Тогда из этих связей можно составить  $m - n(n-1)/2$  «подставляемых» (“substitutable”) комбинаций; полученные комбинации подставляют в лагранжиан еще до записи уравнений движения. Адамар не просто говорит о существовании таких комбинаций, а приводит конструктивный алгоритм их составления. В этой же работе он утверждает, что все  $m$  связей можно подставлять в лагранжиан тогда и только тогда, когда эти связи являются интегрируемыми.

Отметим, что результат Адамара связан только со спецификой связей и не зависит от лагранжиана системы, что является достаточным условием возможности подстановки связей (точнее, их комбинаций) в лагранжиан.

<sup>1</sup>Аналогичные ошибки совершили К. Нейман и Г. Схоутен.

<sup>2</sup>Не вполне неголономную систему связей всегда можно привести к вполне неголономной. Для этого из системы необходимо выделить голономную часть связей (по теореме Фробениуса) и ограничить на них оставшиеся неголономные связи.

Вторая работа, тесно связанная с нашими исследованиями, является самой обширной и главной работой Г. Гамеля по неголономной механике [4] (1904 г.), где были получены его известные уравнения движения. Кстати, она составила содержание его диссертационной работы и частично вошла в его известный учебник по теоретической механике [13]. Часть этой работы также посвящена возможности использования «запрещенной формы»<sup>3</sup> кинетической энергии для записи уравнений неголономных систем в лагранжевой форме. В частности, Гамель отмечает достаточность полученных Адамаром условий возможности подстановки связей и обобщает результат Адамара на случай записи уравнений движения в квазискоростях. При этом в качестве части квазискоростей он использует накладываемые на систему связи (либо их линейные комбинации).

Такой подход упрощает общий анализ и позволяет учесть зависимость от лагранжиана системы. Однако при рассмотрении конкретных систем теряется возможность конструктивного построения «подставляемых» (“substitutable”) комбинаций связей. Можно лишь определить, какие из выбранных в качестве квазискоростей связей можно подставлять в лагранжиан. Выполняемые при этом вычисления достаточно трудоемки и фактически сводятся к записи уравнений движения в выбранных (и фиксированных) квазискоростях.

2° В данной работе мы развиваем результаты работ [3, 4] о возможности подстановки неголономных связей в лагранжиан системы без изменения вида уравнений движения. В отличие от упомянутых работ, мы сразу разделяем связи на две группы, одну из которых проверяем на возможность подстановки в лагранжиан. При этом мы считаем, что первая группа связей не зависит от координат  $\mathbf{y}$  и имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}). \quad (0.1)$$

Вторая группа связей имеет произвольную форму и не зависит от координат  $\mathbf{y}$  и скоростей  $\dot{\mathbf{y}}$ . Лагранжиан системы мы также полагаем независимым от координат  $\mathbf{y}$ . Связи (0.1), подстановка которых в лагранжиан является корректной, мы называем *квазиголономными*.

Отметим, что в случае отсутствия второй группы связей рассматриваемая система становится системой Чаплыгина [25]. Таким образом, квазиголономность связей (0.1) эквивалентна возможности записи уравнений Чаплыгина в лагранжевой форме при наличии дополнительных неголономных связей. Вопрос о квазиголомонности связей тесно связан с проблемами редукции и гамильтонизации неголономных систем и наиболее полно исследован для систем Чаплыгина [6, 38–40].

Рассмотрение связей более общего вида (зависящих от  $\mathbf{y}$ ) приводит к существенному усложнению условий квазиголомонности [3]. Кроме того, в этом случае уравнения для переменных  $\mathbf{z}$  не отделяются от полной системы; формально они имеют лагранжев вид, однако зависят от координат  $\mathbf{y}$ , динамика которых определяется уравнениями связей. Таким образом, в переменных  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  система не является лагранжевой.

Налагаемые нами ограничения на связи и лагранжиан позволяют сформулировать условия квазиголомонности в наиболее простом и универсальном виде. В частности, они учитывают вид лагранжиана и могут быть записаны в терминах как обобщенных скоростей, так и квазискоростей. При этом данные условия не требуют трудоемких вычислений и сводятся к проверке линейной зависимости нескольких векторов.

<sup>3</sup>Под «запрещенной формой» Гамель, следуя К. Нейману, понимает ограничение кинетической энергии на неголономные связи.

3° Полученные условия квазиголономности связей позволяют установить эквивалентность различных задач, начиная с простых, рассматриваемых в курсах механики отдельно [12, 13], и заканчивая сложными неголономными системами многих тел. Отдельно следует отметить удобство предлагаемого подхода в приложении к динамике колесных экипажей, так как именно в этих задачах часть связей может быть отделена и представлена в форме Чаплыгина (0.1). Данный подход, в частности, позволяет просто и прозрачно составлять уравнения движения колесных систем, верифицировать их, проводить качественный и топологический анализ.

В качестве классических работ по динамике колесных экипажей укажем на работы Б. Штюклера [15, 16] и У. Боттемы [18], в которых исследовались различные модели автомобиля с закрепленной задней осью, а также известную книгу И. Рокара [17], посвященную исследованию динамики простейшего двухзвенного колесного экипажа (получившего позже название *roller-racer*, см., например, [12]).

Современные работы по динамике колесных экипажей инициированы в основном роботехническими разработками [19, 20, 22, 23, 27]. Как правило, авторы ограничиваются выводом в общей форме уравнений движения, и, вследствие сложности таких уравнений, рассматривают лишь поведение системы в некоторых частных случаях, не проводя при этом полного исследования динамики системы. Среди наиболее содержательных недавних работ отметим выполненную на современном уровне работу по динамике трейлера (неголономного многозвеника) [21].

Отметим, что кинематика колесных экипажей исследована существенно более подробно. Это связано с решением практических задач управления, возникающих при автономном движении автомобилей и роботизированных колесных экипажей. Обсуждение кинематики колесных экипажей можно найти в [24, 36], а также в обширной литературе по теории управления.

4° В данной статье мы обсуждаем вывод и редукцию уравнений движения произвольного колесного экипажа. В частности, используя свойство квазиголономности связей, мы доказываем эквивалентность (с точностью до дополнительных квадратур) задач о произвольном колесном экипаже и аналогичном экипаже, у которого колеса заменены на коньки. Таким образом, мы обосновываем замену колес на коньки<sup>4</sup> не только с точки зрения кинематики (налагаемых связей), но и с точки зрения динамики системы. Использование данной аналогии позволяет представить уравнения движения колесных экипажей в обозримом виде, удобном для верификации и дальнейших исследований.

Отметим, что непосредственные вычисления в данной статье мы проводим на примере тележки с двумя вращающимися колесными парами, однако все доказываемые в работе теоремы и утверждения носят общий характер и справедливы для произвольных колесных экипажей.

5° Как уже указывалось, динамика колесных экипажей остается пока слабоизученной, несмотря на то, что эта область исследований имеет большое практическое значение (связанное с исследованием динамики и управления мобильными роботами). Для продвижения в данной области, несомненно, необходимо воспользоваться общей концепцией иерархии динамики неголономных систем, введенной в [31]. С этой точки зрения наличие различных тензорных инвариантов (законов сохранения) существенно влияет на динамику системы. В частности, неголономные системы могут демонстрировать поведение, типичное как

<sup>4</sup>Такая замена широко используется, например, в задачах управления. При этом обычно предполагают ее корректность в пределе безмассовых колес.

для гамильтоновых, так и для диссипативных систем, и демонстрируемое поведение может быть регулярным или хаотическим [41–43].

Как уже говорилось выше, многие задачи в динамике колесных экипажей эквивалентны друг другу, однако их эквивалентность далеко не всегда очевидна из-за сложности уравнений и выбора разных локальных координат. Таким образом, необходима классификация задач динамики колесных экипажей не только с точки зрения тензорных инвариантов, но и с точки зрения приводимости к некоторым «базовым» системам. Некоторые такие системы, имеющие регулярную динамику и допускающие исследования методами качественного анализа, разобраны в [32, 33]. Несомненно, используя подход, изложенный в данной работе, можно указать и другие «базовые» задачи в динамике колесных экипажей.

Особо отметим работу [27], в которой к одной из базовых и регулярных задач — указанной выше задаче о двухзвенном колесном экипаже — применены методы геометрической механики. С нашей точки зрения, ни в динамике колесных экипажей, ни в неголономной механике в целом этот подход не является плодотворным. Увлекаясь воображаемой геометрической (псевдо)наглядностью и лингвистическими конструкциями, авторы такого подхода не только часто отдаляются от конкретных динамических проблем, но и игнорируют реальную геометрию и топологию, связанную с исследуемой динамической проблемой (вершина геометрического подхода, где вообще теряется всякий динамический смысл, достигнута в обзоре [44]).<sup>5</sup> Вместе с тем, как показано во многих наших работах [30, 34], конкретные неголономные проблемы имеют множество содержательных аспектов, вполне допускающих исследование с помощью современных методов качественного и топологического анализа, а также пуассоновой геометрии и пр.<sup>6</sup> Много новых результатов при анализе неинтегрируемых систем (в частности, неголономных) сейчас может быть получено с применением современных эффективных компьютерных вычислений. Мы планируем рассмотреть ряд модельных задач динамики колесных экипажей, проявляющих регулярные и хаотические свойства, в будущих публикациях.

## 1. Квазиголономные связи

Рассмотрим систему, описываемую обобщенными координатами  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ . Пусть на данную систему наложены две группы связей

$$\dot{y}_i = g_i(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.1)$$

$$f_\nu(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, k \quad (k < n), \quad (1.2)$$

а лагранжиан системы имеет вид

$$L = L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{y}}).$$

Все связи (1.1) и (1.2) мы будем считать независимыми.

<sup>5</sup>Здесь наше отношение к геометризации близко к критическим замечаниям В. И. Арнольда о бурбакизации математики. К несчастью, этот процесс продолжился и коснулся наиболее интересных разделов механики, имеющих прикладной характер.

<sup>6</sup>Физическая интуиция и основные динамические принципы играют здесь ключевую роль: в общем случае, всякое содержательное математическое уравнение для задач механики в принципе должно быть наблюдаемо в эксперименте (начиная с законов Кеплера и ньютонова закона гравитации).

Связи (1.1) мы будем называть *квазиголономными*, если после ограничения на них уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{z}} = \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}, \quad (1.3)$$

где звездочка обозначает ограничение на связи (1.1), а  $\lambda_{\nu}$  — неопределенные множители Лагранжа, соответствующие связям (1.2).

Другими словами, квазиголономные связи можно исключать, подставляя скорости  $\dot{\mathbf{y}}$  в лагранжиан системы. При этом уравнения движения для переменных  $\mathbf{z}$  сохраняют вид уравнений Даламбера–Лагранжа второго рода, только со связями (1.2).

Отметим, что в случае отсутствия второй группы связей (1.2), связи (1.1) являются квазиголономными с произвольным лагранжианом тогда и только тогда, когда они являются интегрируемыми (голономными) [3]. Поэтому наличие второй группы связей является ключевым условием для квазиголомонности неинтегрируемых связей.

Определим далее условия квазиголомонности связей (1.1).

**Теорема 1.** *Связи (1.1) являются квазиголономными тогда и только тогда, когда ограничение вектора*

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right)^* \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) - \frac{\partial g_i}{\partial \mathbf{z}} \right) \quad (1.4)$$

на связи (1.2) лежит в линейной оболочке векторов  $\frac{\partial f_{\nu}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ .

*Доказательство.* Для удобства вычислений введем производную Лагранжа по координатам  $\mathbf{z}$  от произвольной функции  $u(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$  в виде

$$[u]_{\mathbf{z}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{z}}. \quad (1.5)$$

Тогда уравнения исходной системы можно представить в виде

$$[L]_{\mathbf{z}} = \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = -\mu_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.6)$$

где  $\lambda_{\nu}$ ,  $\mu_i$  — неопределенные множители Лагранжа, определяемые из совместного решения уравнений (1.6) и производных по времени от связей (1.1) и (1.2). Рассматривая  $L^* = L(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{g}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}))$  как сложную функцию, нетрудно показать, что справедливо соотношение

$$[L^*]_{\mathbf{z}} = \left( [L]_{\mathbf{z}} + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right)^* \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\mathbf{z}}} \right) + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right)^* [g_i]_{\mathbf{z}}. \quad (1.7)$$

Подставив уравнения (1.6) в (1.7), получим уравнения движения для переменных  $\mathbf{z}$  в виде

$$[L^*]_{\mathbf{z}} = \mathbf{N} + \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \dot{\mathbf{z}}}. \quad (1.8)$$

Представим теперь вектор  $\mathbf{N}$  в виде суммы

$$\mathbf{N} = \sum_{\nu=1}^k \varkappa_{\nu} \frac{\partial f_{\nu}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} + \tilde{\mathbf{N}}, \quad (1.9)$$



где  $\varkappa_\nu$  – коэффициенты разложения ограничения  $N$  на связи (1.2) по векторам  $\frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{z}}$ , а  $\tilde{N}$  – некоторый (произвольный) вектор, удовлетворяющий условию

$$\tilde{N}|_{f=0} = 0.$$

Подставив (1.9) в уравнение (1.8), получим

$$[L^*]_z = \sum_{\nu=1}^k \tilde{\lambda}_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{z}} + \tilde{N}, \tag{1.10}$$

где  $\tilde{\lambda}_\nu = \lambda_\nu + \varkappa_\nu$  – новые неопределенные множители. Очевидно, что уравнения, получающиеся из (1.10) и (1.3) после исключения неопределенных множителей и ограничения на связи (1.2), совпадают. Таким образом, мы показали достаточность условия теоремы. Необходимость данного условия очевидна и следует из сравнения (1.3) и (1.8). ■

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Нетрудно проверить, что для голономных связей вектор  $N$  равен нулю и условия теоремы 1 заведомо выполняются. Таким образом, для проверки критерия квазиголономности не требуется условия, при котором система связей (1.1) определяется как вполне неголономная. Это удобно в случаях, когда приведение связей к вполне неголономному виду реализуется с помощью сложной замены переменных.

Во многих примерах вместо обобщенных скоростей  $\dot{z}$  удобно воспользоваться квазискоростями  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , связанными с  $\dot{z}$  линейными соотношениями

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}(z)w_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.11}$$

При этом уравнения движения и связи переписываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_j} \right) - a_j(\tilde{L}) &= \sum_{s,l=1}^n c_{sj}^l w_s \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_l} + \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu \frac{\partial \tilde{f}_\nu}{\partial w_j} + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial w_j}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}_i} \right) &= -\mu_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1.12}$$

и

$$\dot{y}_i = \tilde{g}_i(z, w) = g_i(z, \dot{z}(w)), \quad i = 1, \dots, m, \tag{1.13}$$

$$\tilde{f}_\nu(z, w) = f_\nu(z, \dot{z}(w)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, k, \tag{1.14}$$

где  $\tilde{L}(z, w, \dot{y})$  – функция Лагранжа, выраженная в квазискоростях с помощью соотношений (1.11),  $a_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$  – базис векторных полей, отвечающих преобразованию (1.11), и  $c_{sj}^l$  – коэффициенты разложения их коммутаторов

$$[a_s, a_j] = \sum_{l=1}^n c_{sj}^l a_l, \quad s, j = 1, \dots, n.$$

В данном случае квазиголономными, как и выше, мы будем называть связи (1.13), подстановка которых в лагранжиан не меняет вида уравнений движения (1.12) для квазискоростей  $w$ . Условие квазиголономности связей нетрудно обобщить на системы вида (1.12).



**Теорема 2.** Связи (1.13) являются квазиголономными тогда и только тогда, когда ограничение вектора  $\mathbf{N}$  с компонентами

$$N_j = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}_i} \right)^* \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial w_j} \right) - \mathbf{a}_j(\tilde{g}_i) - \sum_{s,l=1}^n c_{sj}^l w_s \frac{\partial \tilde{g}_i}{\partial w_l}$$

на связи (1.14) лежит в линейной оболочке векторов  $\frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{w}}$ ,  $\nu = 1, \dots, k$ .

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично. При этом необходимо  $\dot{\mathbf{z}}$  заменить на  $\mathbf{w}$ , а производную Лагранжа (1.5) — на обобщающий ее оператор  $[\cdot]_{\mathbf{w}}$ , компоненты которого действуют на произвольную функцию  $u(\mathbf{z}, \mathbf{w})$  следующим образом:

$$([u]_{\mathbf{w}})_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial w_j} \right) - \mathbf{a}_j(u) - \sum_{s,l=1}^n c_{sj}^l w_s \frac{\partial u}{\partial w_l}. \quad (1.15)$$

## 2. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о качении тележки по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Будем полагать, что тележка состоит из жесткого каркаса, к которому крепятся две подвижные рамы с жестко закрепленными на них колесными парами (см. рис. 1а). Такие рамы мы будем называть звеньями (см. рис. 1б), а под колесной парой будем понимать пару одинаковых соосных колес, которые могут вращаться независимо друг от друга. В рассматриваемой конструкции звенья могут вращаться вокруг вертикальных осей, проходящих через их точки крепления к каркасу (см. рис. 1а), причем эти точки могут не совпадать с геометрическим центром колесных пар. Кроме того, будем считать, что при качении тележки отсутствует проскальзывание колес относительно плоскости.

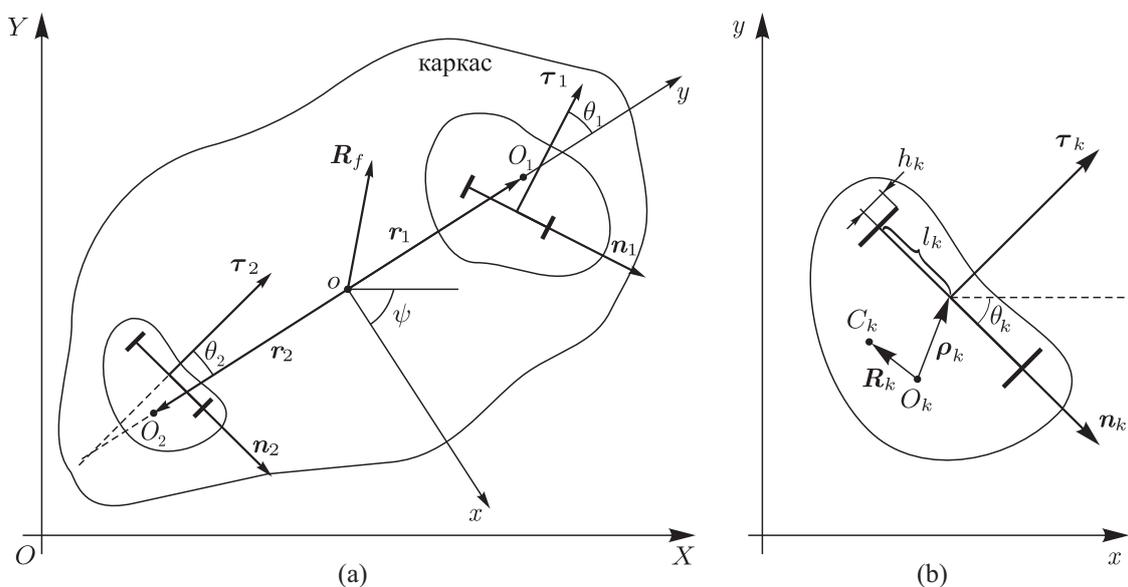


Рис. 1. Схематическое изображение общей конструкции тележки (а) и одного из звеньев с колесной парой (б).

Определим две системы координат: неподвижную в пространстве (инерциальную) систему  $OXY$  и подвижную систему координат  $oxy$ , жестко связанную с каркасом (см. рис. 1а). Положение тележки будем задавать координатами  $(x, y)$  начала отсчета подвижной системы  $oxy$ , ориентацию тележки — углом поворота  $\psi$  подвижных осей относительно неподвижных, углы поворота звеньев относительно каркаса обозначим через  $\theta_1, \theta_2$ , а углы поворота каждого из колес относительно собственных осей — через  $\phi_{k1}, \phi_{k2}, k = 1, 2$ . Таким образом, вектор обобщенных координат имеет вид  $\mathbf{q} = (x, y, \psi, \theta_1, \theta_2, \phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{22})$ , а конфигурационное пространство рассматриваемой системы представляет собой произведение группы движений плоскости и шестимерного тора  $E(2) \times \mathbb{T}^6$ .

Для описания динамики рассматриваемой системы введем следующие обозначения для геометрических и динамических характеристик каркаса:  $\mathbf{r}_k$  — радиус-вектор точки закрепления  $k$ -го звена,  $\mathbf{R}_f$  — радиус-вектор центра масс каркаса,  $m_f$  и  $I_f$  — масса и момент инерции каркаса относительно вертикальной оси, проходящей через точку  $O$ . Далее, для геометрических и динамических характеристик каждого из звеньев:  $O_k$  — точка крепления звена к каркасу,  $\boldsymbol{\rho}_k$  — радиус-вектор из точки закрепления в центр масс колесной пары,  $h_k$  — радиус колес,  $l_k$  — половина расстояния между колесами,  $\mathbf{n}_k$  и  $\boldsymbol{\tau}_k$  — лежащие в горизонтальной плоскости нормальный и касательный к плоскости колес единичные векторы соответственно,  $i_k$  — осевой момент инерции каждого колеса,  $m_k$  и  $j_k$  — полная масса звена и его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку закрепления  $O_k$ ,  $\mathbf{R}_k$  — радиус-вектор из точки закрепления в центр масс звена.

Отметим, что векторы  $\mathbf{n}_k, \boldsymbol{\tau}_k, \boldsymbol{\rho}_k$  и  $\mathbf{R}_k$  зависят от текущего угла поворота звена  $\theta_k$ . В проекциях на подвижную систему координат они имеют вид

$$\mathbf{n}_k = (\cos \theta_k, \sin \theta_k), \quad \boldsymbol{\tau}_k = (-\sin \theta_k, \cos \theta_k),$$

$$\boldsymbol{\rho}_k = Q_k \boldsymbol{\rho}_k^0, \quad \mathbf{R}_k = Q_k \mathbf{R}_k^0, \quad Q_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{R}_k^0$  и  $\boldsymbol{\rho}_k^0$  — постоянные радиус-векторы центра масс звена и центра масс колесной пары, записанные в проекциях на оси системы координат  $O_k \mathbf{n}_k \boldsymbol{\tau}_k$ , жестко связанной с данным звеном.

Для сокращения записи формул определим вектор вертикали  $\mathbf{e}_z$  (перпендикулярный плоскости  $OXY$ ) и операцию векторного произведения двумерных векторов друг на друга и на вектор вертикали следующим образом:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{a}.$$

При этом векторы  $\mathbf{n}_k$  и  $\boldsymbol{\tau}_k$  связаны соотношениями  $\mathbf{n}_k \times \boldsymbol{\tau}_k = \mathbf{e}_z$ .

Здесь и далее (если не оговаривается иначе) все векторы мы будем рассматривать в проекциях на подвижную систему координат  $oxy$ .

Полная кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$T = T_f + \sum_{k=1}^2 T_k,$$

$$T_f = \frac{1}{2} m_f v^2 + m_f \omega (\mathbf{R}_f \times \mathbf{v}, \mathbf{e}_z) + \frac{1}{2} I_f \omega^2, \tag{2.1}$$

$$T_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2 + m_k \omega_k (\mathbf{R}_k \times \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_z) + \frac{1}{2} j_k \omega_k^2 + \frac{1}{2} i_k (\dot{\phi}_{k1}^2 + \dot{\phi}_{k2}^2), \quad k = 1, 2,$$



где  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  и  $\omega = \dot{\psi}$  — скорость и угловая скорость каркаса (подвижной системы координат), а скорости  $\mathbf{v}_k$  точек закрепления и угловые скорости  $\omega_k$  каждого звена выражаются через них следующим образом:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v} + \omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_k, \quad \omega_k = \dot{\psi} + \dot{\theta}_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.2)$$

Условия непроскальзывания колес относительно плоскости представляются в виде восьми уравнений связей

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k + \omega_k \mathbf{e}_z \times (\boldsymbol{\rho}_k + l_k \mathbf{n}_k) + h_k \dot{\phi}_{k1} \boldsymbol{\tau}_k &= 0, \\ \mathbf{v}_k + \omega_k \mathbf{e}_z \times (\boldsymbol{\rho}_k - l_k \mathbf{n}_k) + h_k \dot{\phi}_{k2} \boldsymbol{\tau}_k &= 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Умножая скалярно эти уравнения на  $\mathbf{n}_k$ , можно показать, что из восьми связей только шесть являются независимыми и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} f_k &= (\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k) + \omega_k (\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_k, \mathbf{n}_k) = 0, \\ g_{k1} &= (\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\tau}_k) + \omega_k (\mathbf{e}_z \times (\boldsymbol{\rho}_k + l_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\tau}_k) + h_k \dot{\phi}_{k1} = 0, \\ g_{k2} &= (\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\tau}_k) + \omega_k (\mathbf{e}_z \times (\boldsymbol{\rho}_k - l_k \mathbf{n}_k), \boldsymbol{\tau}_k) + h_k \dot{\phi}_{k2} = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пользуясь уравнениями движения неголономных систем в квазискоростях (см., например, [5]), для данного случая получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) \cdot + \dot{\psi} \mathbf{e}_z \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} &= \sum_{k=1}^2 \left( \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} + \mu_{k1} \frac{\partial g_{k1}}{\partial \mathbf{v}} + \mu_{k2} \frac{\partial g_{k2}}{\partial \mathbf{v}} \right), \\ \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) \cdot + \left( \mathbf{e}_z, \mathbf{v} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) &= \sum_{k=1}^2 \left( \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{\psi}} + \mu_{k1} \frac{\partial g_{k1}}{\partial \dot{\psi}} + \mu_{k2} \frac{\partial g_{k2}}{\partial \dot{\psi}} \right), \\ \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} \right) \cdot &= \sum_{k=1}^2 \left( \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{\theta}_j} + \mu_{k1} \frac{\partial g_{k1}}{\partial \dot{\theta}_j} + \mu_{k2} \frac{\partial g_{k2}}{\partial \dot{\theta}_j} \right), \\ \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{j1}} \right) \cdot &= \mu_{j1} \frac{\partial g_{j1}}{\partial \dot{\phi}_{j1}}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{j2}} \right) \cdot = \mu_{j2} \frac{\partial g_{j2}}{\partial \dot{\phi}_{j2}}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\lambda_k$ ,  $\mu_{k1}$  и  $\mu_{k2}$  — неопределенные множители, которые находятся из совместного решения уравнений (2.5) и производных по времени от связей (2.4). Уравнения (2.5) совместно с кинематическими соотношениями

$$\dot{x} = v_1 \cos \psi - v_2 \sin \psi, \quad \dot{y} = v_1 \sin \psi + v_2 \cos \psi \quad (2.6)$$

образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение тележки.

### 3. Эквивалентность коньков и колес

Покажем, что уравнения движения тележки (2.5) после ограничения на связи  $g_{k1}$ ,  $g_{k2}$  совпадают с уравнениями движения саней аналогичной конструкции, в которых колесные пары заменены на коньки, расположенные в центрах масс пар перпендикулярно их осям.



Эволюция переменных  $\mathbf{v}$ ,  $\psi$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  описывается уравнениями Лагранжа второго рода в квазикоординатах

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{v}}\right)' + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{v}} \dot{\psi} &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}}, \\ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\psi}}\right)' + \left(\mathbf{e}_z, \mathbf{v} \times \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{v}}\right) &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \dot{\psi}}, \\ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\theta}_k}\right)' - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta_k} &= 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

со связями

$$f_k = (\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k) + \omega_k (\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_k, \mathbf{n}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (3.2)$$

и кинетической энергией

$$\tilde{T} = T_f + \sum_{k=1}^2 T_k^s, \quad T_k^s = \frac{1}{2} m_k^s \mathbf{v}_k^2 + m_k^s (\mathbf{R}_k^s \times \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_z) \omega_k + \frac{1}{2} j_k^s \omega_k^2, \quad (3.3)$$

где  $T_f$  — кинетическая энергия платформы (2.1),  $T_k^s$  — кинетическая энергия  $k$ -го звена с коньком,  $m_k^s$  — его масса,  $j_k^s$  — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку крепления к каркасу, а  $\mathbf{R}_k^s$  — радиус-вектор из точки крепления в его центр масс.

Для доказательства указанной эквивалентности уравнений сначала покажем, что связи  $g_{k1}$ ,  $g_{k2}$ ,  $k = 1, 2$ , являются квазиголономными. Для удобства вычислений сделаем замену переменных

$$\varphi_k = \frac{\phi_{k1} + \phi_{k2}}{2}, \quad \psi_k = \frac{\phi_{k1} - \phi_{k2}}{2}. \quad (3.4)$$

В новых переменных уравнения связей (2.4) (точнее, их линейную комбинацию) можно представить в виде

$$f_k(\mathbf{q}) = (\mathbf{v}_k, \mathbf{n}_k) + \omega_k (\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_k, \mathbf{n}_k) = 0, \quad (3.5)$$

$$\dot{\varphi}_k = g_k^\varphi(\mathbf{q}) = -\frac{1}{h_k} (\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\tau}_k) + \omega_k (\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\tau}_k), \quad (3.6)$$

$$\dot{\psi}_k = g_k^\psi(\mathbf{q}) = -\frac{l_k}{h_k} (\dot{\psi} + \dot{\theta}_k), \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{q} = (x, y, \psi, \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$  — вектор обобщенных координат. При этом кинетическая энергия звена (2.1) принимает вид

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 + m_k \omega_k (\mathbf{R}_k \times \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_z) + \frac{1}{2} j_k \omega_k^2 + i_k \dot{\psi}_k^2 + i_k \dot{\varphi}_k^2. \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, связи  $\dot{\psi}_k = s_k(\mathbf{q})$  являются голономными и после интегрирования могут быть представлены в виде

$$h_k \psi_k + l_k (\psi + \theta_k) = \text{const}. \quad (3.9)$$

Данные связи могут быть исключены прямой подстановкой выражений для  $\psi_k$ , полученных из (3.9), в кинетическую энергию (3.8). После их исключения оставшиеся уравнения движения многозвеного колесного экипажа произвольной конструкции совпадают с уравнениями движения такого же

колесного экипажа, у которого колесная пара заменена на одно колесо, расположенное в центре масс колесной пары. При этом связь между динамическими характеристиками исходного звена и звена с одним колесом определяется соотношениями

$$i_k^w = 2i_k, \quad j_k^w = j_k + 2\frac{l_k^2}{h_k^2}i_k, \quad m_k^w = m_k, \quad \mathbf{R}_k^w = \mathbf{R}_k. \quad (3.10)$$

Разделим конфигурационные переменные  $\mathbf{q}$  на две группы  $\mathbf{y} = (\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ ,  $\mathbf{z} = (x, y, \psi, \theta_1, \theta_2)$  и определим вектор квазискоростей  $\mathbf{w} = (v_1, v_2, \dot{\psi}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ . С помощью непосредственных вычислений нетрудно показать, что

$$[g_k^\psi]_{\mathbf{w}} = 0, \quad [g_k^\varphi]_{\mathbf{w}} \Big|_{f_k=0} = \frac{1}{h_k} (\dot{\psi} + \dot{\theta}_k) \frac{\partial f_k}{\partial \dot{\mathbf{w}}}, \quad (3.11)$$

где оператор  $[\cdot]_{\mathbf{w}}$  определен соотношением (1.15). Из (3.11) по теореме 2 следует, что связи (3.6) и (3.7) являются квазиголономными.

После ограничения на квазиголономные связи мы получим систему уравнений (3.1) со связями (3.2) и кинетической энергией  $\tilde{T} = T_f + \sum_{k=1}^2 T_k^*$ , где  $T_k^*$  — ограничение энергии (3.8) на связи (3.6), (3.7). Покажем далее, что эти уравнения совпадают с такими же уравнениями с кинетической энергией (3.3), то есть что  $T_k^*$  совпадает с  $T_k^s$  с точностью до слагаемых, не влияющих на уравнения движения. Для этого воспользуемся следующим предложением.

**Предложение 1.** Пусть  $L(\mathbf{q}, \mathbf{w})$  — лагранжиан некоторой системы с обобщенными координатами  $\mathbf{q}$  и квазискоростями  $\mathbf{w}$ , а  $f_k(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , — неголономные связи, наложенные на систему. Тогда уравнения движения с лагранжианом

$$\tilde{L} = L + \sum_{k,m=1}^n a_{km}(\mathbf{q}) f_k f_m,$$

где  $a_{km}(\mathbf{q})$  — произвольные (гладкие) функции координат  $\mathbf{q}$ , совпадают с уравнениями движения исходной системы.

Доказательство предложения нетрудно провести с помощью явных вычислений.

Заметим, что  $T_k^*$  можно представить в виде

$$T_k^* = \frac{1}{2} \left( m_k + \frac{2i_k}{h_k^2} \right) \mathbf{v}_k^2 + \omega_k \left( \left( m_k \mathbf{R}_k + \frac{2i_k}{h_k^2} \boldsymbol{\rho}_k \right) \times \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_z \right) + \frac{1}{2} \left( j_k + \frac{2i_k}{h_k^2} (\boldsymbol{\rho}_k^2 + l_k^2) \right) \omega_k^2 - \frac{i_k}{h_k^2} f_k^2. \quad (3.12)$$

Сравнивая (3.3) с (3.12) и используя приведенное выше предложение, приходим к следующему выводу.

После ограничения на квазиголономные связи уравнения движения колесного экипажа произвольной конструкции совпадают с уравнениями движения саней аналогичной конструкции, у которых колесные пары заменены на коньки, расположенные в центрах масс этих пар, перпендикулярно их осям. При этом связь между массо-геометрическими характеристиками звеньев с колесными парами и коньками задается соотношениями

$$m_k^s = m_k + \frac{2i_k}{h_k^2}, \quad m_k^s \mathbf{R}_k^s = m_k \mathbf{R}_k + \frac{2i_k}{h_k^2} \boldsymbol{\rho}_k, \quad j_k^s = j_k + \frac{2i_k}{h_k^2} (\boldsymbol{\rho}_k^2 + l_k^2). \quad (3.13)$$

Как показано выше, колесная пара эквивалентна и одиночному колесу (см. замечание 2), и коньку. Следовательно, одиночное вертикально закрепленное колесо эквивалентно коньку, а значит, уравнения движения тележки (с колесами) и саней (с коньками) совпадают с точностью до квадратур, описывающих вращение колес. Из сравнения (3.10) и (3.13) следует, что отличие параметров конька от параметров колеса заключается только в увеличении массы. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

*После исключения квазиголономных связей уравнения движения тележки произвольной конструкции с вертикально закрепленными колесами совпадают с уравнениями движения саней аналогичной конструкции, в которых колеса заменены на коньки. При этом центральные моменты инерции коньков и колес относительно вертикали совпадают, а масса конька  $m_s$  связана с массо-геометрическими характеристиками колеса соотношением*

$$m_s = m_w + \frac{i}{h^2}.$$

## 4. Примеры

### 4.1. Задача об одноколеснике

В качестве простого примера рассмотрим задачу об одноколеснике — системе, состоящей из каркаса с жестко закрепленным на нем одним колесом. Выберем подвижную систему координат так, чтобы ее оси были параллельны векторам  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$ , а начало координат находилось в точке контакта колеса с плоскостью (см. рис. 2). Кинетическая энергия и неголономные связи такой системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\omega(\mathbf{R} \times \mathbf{v}, \mathbf{e}_z) + \frac{1}{2}j\omega^2 + \frac{1}{2}i\dot{\varphi}^2, \quad (4.1)$$

$$f = (\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0, \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{h}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}). \quad (4.2)$$

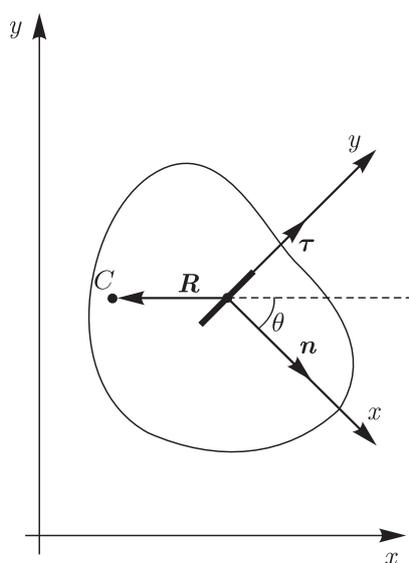


Рис. 2. Схематическое изображение конструкции одноколесника.

После исключения угловой скорости вращения колеса  $\dot{\varphi}$  (ограничения на квазиголономную связь) и добавления к кинетической энергии слагаемого  $\frac{i}{2h^2} f^2$  кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{2} \left( m + \frac{i}{h^2} \right) (v_n^2 + v_\tau^2) + m (R_n v_\tau - R_\tau v_n) \omega + \frac{1}{2} j \omega^2, \quad (4.3)$$

где  $v_n$ ,  $v_\tau$ ,  $R_n$  и  $R_\tau$  — проекции векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{R}$  на оси подвижной системы координат, а  $\omega$  — угловая скорость одноколесника. Оставшаяся после исключения угловой скорости вращения колеса  $\dot{\varphi}$  связь в выбранных обозначениях имеет вид

$$v_n = 0. \quad (4.4)$$

Как мы видим, система с кинетической энергией (4.3) и связью (4.4) описывает движение саней Чаплыгина (у которых масса конька увеличена по сравнению с массой колеса на величину  $\frac{i}{h^2}$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Запишем уравнения связей (4.2) в виде

$$\dot{x} = h\dot{\varphi} \sin \psi \quad \dot{y} = -h\dot{\varphi} \cos \psi.$$

Если теперь, следуя Ж. Адамару, вычислить комбинацию связей, которую можно подставлять в лагранжиан, то мы получим вторую связь (4.2), которая, как мы показали, является квазиголономной.

## 4.2. Тележка с двумя симметричными звеньями

Рассмотрим задачу о движении тележки с двумя симметричными звеньями. Под симметричным звеном будем понимать звено, центр масс которого совпадает с центром масс колесной пары и точкой крепления звена к каркасу. В выбранных обозначениях это значит, что во всех формулах необходимо положить  $\rho_k = 0$ ,  $\mathbf{R}_k = 0$ . Кроме того, выбором системы координат  $oxy$  (см. рис. 3) параметры, описывающие геометрию тележки, приведем к виду

$$\mathbf{r}_1 = (0, b_1), \quad \mathbf{r}_2 = (0, -b_2), \quad \mathbf{R}_c = (\eta, 0),$$

где  $\mathbf{R}_c$  — радиус-вектор центра масс всей тележки (включая колеса). Также будем полагать, что все колеса одинаковы, то есть  $i_1 = i_2 = i$ ,  $j_1 = j_2 = j$ ,  $h_1 = h_2 = h$ .

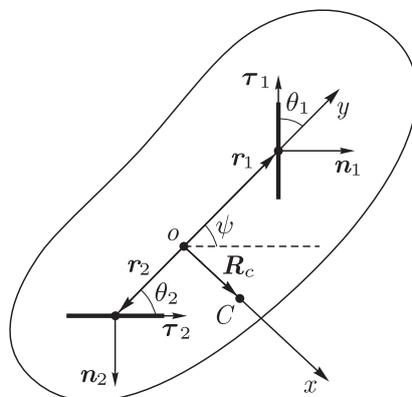


Рис. 3. Конструкция саней с двумя вращающимися коньками.

Как было показано выше, тележка описанной конструкции эквивалентна саням с двумя вращающимися коньками. Конструкция таких саней приведена на рисунке 2.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m(v_1^2 + v_2^2) + m\eta v_2 \dot{\psi} + \frac{1}{2} I \dot{\psi}^2 + j \dot{\psi}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} j(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2), \quad (4.5)$$

где  $m$  и  $I$  — полные (включая коньки) масса и момент инерции саней относительно вертикальной оси, проходящей через точку  $o$ .

Выразим векторы  $\mathbf{n}_k$  и  $\boldsymbol{\tau}_k$  через углы поворота колес

$$\boldsymbol{\tau}_k = (-\sin \theta_k, \cos \theta_k), \quad \mathbf{n}_k = (\cos \theta_k, \sin \theta_k),$$

тогда уравнения связей  $f_k$  примут вид

$$\begin{aligned} f_1 &= (v_1 - \dot{\psi} b_1) \cos \theta_1 + v_2 \sin \theta_1 = 0, \\ f_2 &= (v_1 + \dot{\psi} b_2) \cos \theta_2 + v_2 \sin \theta_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Уравнения движения (3.1) в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} + \ddot{\psi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_c + \dot{\psi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - \dot{\psi}^2 \mathbf{R}_c &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{n}_k, \\ \rho_c^2 \ddot{\psi} &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k (\boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{R}_c - \mathbf{r}_k), \\ \ddot{\theta}_k + \ddot{\psi} &= 0, \quad k = 1, 2, \quad \rho_c^2 = \frac{I - m \mathbf{R}_c^2 - 2j}{m}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $\lambda_k$  находятся из совместного решения уравнений (4.7) и производных связей (4.6)  $\dot{f}_k = 0$ .

Уравнения (4.7) определяют фазовый поток в семимерном пространстве  $\mathcal{M}^7 = \{(v_1, v_2, \dot{\psi}, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)\}$ , причем связи (4.6) являются его интегралами движения. Искомые уравнения движения являются ограничением потока (4.7) на пятимерное инвариантное многообразие в  $\mathcal{M}^7$ , задаваемое соотношениями (4.6).

Уравнения (4.7) допускают два поля симметрии  $\frac{\partial}{\partial \theta_k}$ ,  $k = 1, 2$ , являющиеся обобщением нётеровских полей симметрии [6]. Вследствие этого рассматриваемая система помимо интеграла энергии (4.5) допускает еще два первых интеграла движения

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k} = \dot{\theta}_k + \dot{\psi} = C_k, \quad k = 1, 2. \quad (4.8)$$

Физический смысл данных интегралов заключается в том, что *вертикальные составляющие абсолютных угловых скоростей вращения коньков (колесных пар) остаются постоянными все время движения.*

Таким образом, пятимерное инвариантное многообразие (4.6) расслаивается на двумерные подмногообразия, задаваемые интегралами (4.5), (4.8).

Проведем частичную редукцию уравнений (4.7), зафиксировав уровень интегралов (4.8). Это удобнее сделать до явного исключения неопределенных множителей  $\lambda_k$ . В результате

перейдем к рассмотрению потока в пятимерном фазовом пространстве  $\mathcal{M}^5 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^2 = \{(v_1, v_2, \dot{\psi}, \theta_1, \theta_2)\}$ , задаваемого уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} + \ddot{\psi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_c + \dot{\psi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - \dot{\psi}^2 \mathbf{R}_c &= \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{r}_k, \\ \rho_c^2 \ddot{\psi} &= \sum_{k=1}^2 (\lambda_k \boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{R}_c - \mathbf{r}_k), \quad \dot{\theta}_k = C_k - \dot{\psi}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $\lambda_k$  вычисляются так же, как и выше.

После ограничения уравнений (4.9) на связи (4.6) получим поток на трехмерном инвариантном многообразии в  $\mathcal{M}^5$ . Данное многообразие расслаивается на двумерные инвариантные подмногообразия (изоэнергетические уровни), задаваемые значением интеграла энергии, который с точностью до постоянных слагаемых можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2} m \left( \mathbf{v} + \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_c \dot{\psi} \right)^2 + \frac{1}{2} m \rho_c^2 \dot{\psi}^2. \quad (4.10)$$

Ввиду линейности интегралов (4.8) топология изоэнергетического уровня, задаваемого соотношениями (4.6), (4.10), в  $\mathcal{M}^5$  совпадает с топологией исходных двумерных интегральных подмногообразий в  $\mathcal{M}^7$ .

## Заключение

В заключение рассмотрим подробнее важную особенность рассматриваемых в работе неголономных систем, которая состоит в том, что в некоторых точках конфигурационного пространства уравнения связей становятся линейно зависимы. Так, например, для системы, указанной в разделе 4.2, при условиях

$$\cos \theta_1 = 0, \quad \cos \theta_2 = 0 \quad (4.11)$$

две связи (4.6) сводятся к одному уравнению<sup>7</sup>

$$v_2 = 0.$$

При этом неопределенные множители  $\lambda_1, \lambda_2$ , отвечающие реакциям связей, при условиях (4.11) обращаются в бесконечность, а следовательно, векторное поле, определяющее динамику системы, не определено в точках фазового пространства, задаваемых уравнениями (4.11).

Таким образом, с геометрической точки зрения в фазовом пространстве системы (4.7)

$$\mathcal{M}_0^5 = \{(v_1, v_2, \dot{\psi}, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \mid f_1 = 0, f_2 = 0\}$$

уравнения (4.11) задают четырехмерное (несвязанное) подмногообразие  $\mathcal{M}_s^4 \subset \mathcal{M}_0^5$ , на котором поток не определен. При этом двумерные инвариантные интегральные подмногообразия системы, задаваемые интегралом энергии и линейными интегралами (4.8), делятся подмногообразием  $\mathcal{M}_s^4$  на несколько частей. В связи с этим сформулируем некоторые открытые проблемы, касающиеся описания динамики данной системы.

<sup>7</sup>В указанных точках наблюдается вырождение и системы исходных связей (2.4).

1. Дать топологическое описание двумерных интегральных подмногообразий и изучить поведение траекторий на них. Отметим, что в этом случае важно правильным образом подобрать подходящие локальные координаты, поскольку в противном случае могут возникнуть особенности проекции типа зонтика Уитни [2].

2. Проанализировать поведение траекторий вблизи точек вырождения связей и описать возникающие при этом динамические эффекты. Предварительные численные исследования показывают, что в окрестности данных точек тележка резко меняет направление вращения.

Отметим еще одну особенность, которая может встретиться у системы неголономных связей, — непостоянство вектора роста распределения связей [7, 8, 28], обозначаемое обычно как одно из препятствий к управлению. Неизвестно, имеет ли неголономная система какие-либо особенности динамического поведения вблизи точек смены вектора роста.

Отметим также, что в неголономных системах, как и в системах с трением, возможны парадоксы, указанные впервые Пенлеве [45]. Они практически не изучены — только один из таких парадоксов подробно исследован в [37] для системы, сочетающей неголономный двухколесник и действие сухого трения.

## Список литературы

- [1] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. *См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.
- [2] Закалюкин И. В., Динамика балки с двумя коньками и системы неявных дифференциальных уравнений // Труды МАИ, 2011, № 42, 25 с.
- [3] Hadamard J. Sur les mouvements de roulement // Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4e série, 1895, vol. 5, pp. 397–417.
- [4] Hamel G. Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik // Z. Math. u. Phys., 1904, vol. 50, pp. 1–57.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [6] Borisov A. V., Mamaev I. S. Symmetries and reduction in nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 5, pp. 553–604.
- [7] Jean F. The car with  $N$  trailers: Characterization of the singular configurations // ESAIM Control Optim. Calc. Var., 1996, vol. 1, pp. 241–266.
- [8] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. Москва: Физматлит, 2005. 392 с.
- [9] Козлов В. В. К вопросу о реализации связей в динамике // ПММ, 1992, т. 56, № 4, с. 692–698.
- [10] Vierkandt A. Über gleitende und rollende Bewegung // Monatsh. Math. Phys., 1892, vol. 3, no. 1, pp. 31–38, 97–116.
- [11] Appell P. Les mouvements de roulement en dynamique. Évreux: Hérissey, 1899. 72 pp.
- [12] Bloch A. Nonholonomic mechanics and control. New York: Springer, 2003. 501 pp.
- [13] Hamel G. Theoretische Mechanik: Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. 2nd ed. Berlin: Springer, 1978. 796 pp.
- [14] Ehlers K. M., Koiller J. Rubber rolling: Geometry and dynamics of 2 – 3 – 5 distributions // Proc. IUTAM Symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, Russia, 25–30 August 2006), pp. 469–480.
- [15] Stückler B. Über die Differentialgleichungen für die Bewegung eines idealisierten Kraftwagens // Arch. Appl. Mech., 1952, vol. 20, no. 5, pp. 337–356.

- [16] Stückler B. Über die Berechnung der an rollenden Fahrzeugen wirkenden Haftreibungen // Arch. Appl. Mech., 1955, vol. 23, no. 4, pp. 279–287.
- [17] Рокар И. Неустойчивость в механике: Автомобили, самолеты, всякие мосты. Москва: ИЛ, 1959. 288 с.
- [18] Bottema O. Die Bewegung eines einfachen Wagenmodells // Z. Angew. Math. Mech., 1964, vol. 44, no. 12, pp. 585–593. *См. также:* Боттема У. Движение простой модели автомобиля // Нелинейная динамика, 2015, т. 11, № 3, с. 621–632.
- [19] Staicu S. Dynamics equations of a mobile robot provided with caster wheel // Nonlinear Dynam., 2009, vol. 58, no. 1, pp. 237–248.
- [20] Giergiel J., Żylski W. Description of motion of a mobile robot by Maggie’s equations // J. Theor. Appl. Mech., 2005, vol. 43, no. 3, pp. 511–521.
- [21] Bravo-Doddoli A., García-Naranjo L. C. The dynamics of an articulated  $n$ -trailer vehicle // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 5, pp. 497–517.
- [22] Мартыненко Ю. Г. К теории обобщенного эффекта Магнуса для неголономных механических систем // ПММ, 2004, т. 68, № 6, с. 948–957.
- [23] Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундамент. и прикл. матем., 2005, т. 11, № 8, с. 29–80.
- [24] Campion G., Bastin G., d’Andréa-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Trans. Robot. Autom., 1996, vol. 12, no. 1, pp. 47–62. *См. также:* Кампион Г., Бастен Ж., д’Андреа-Новель Б. Структурные свойства и классификация кинематических и динамических моделей колесных мобильных роботов // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 4, с. 733–769.
- [25] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314. *См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 15–25.
- [26] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Исследования по динамике неголономных систем / С. А. Чаплыгин. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1949. С. 9–27. *См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 57–75.
- [27] Krishnaprasad P. S., Tsakiris D. P. Oscillations, SE(2)-snakes and motion control: A study of the roller racer // Дун. Syst., 2001, vol. 16, no. 4, pp. 347–397.
- [28] Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Динамические системы — 7 / В. И. Арнольд, С. П. Новиков (ред.). (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 16.) Москва: ВИНТИ, 1987. С. 5–85.
- [29] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
- [30] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Geometrisation of Chaplygin’s reducing multiplier theorem // Nonlinearity, 2015, vol. 28, no. 7, pp. 2307–2318.
- [31] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [32] Borisov A. V., Mamaev I. S. Symmetries and reduction in nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 5, pp. 553–604.
- [33] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., Bizyaev I. A. Qualitative analysis of the dynamics of a wheeled vehicle // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 6, pp. 739–751.
- [34] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859.
- [35] Bizyaev I. A., Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Topology and bifurcations in nonholonomic mechanics // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2015, vol. 25, no. 10, 1530028, 21 pp.

- [36] Altafini C. Some properties of the general  $n$ -trailer // *Internat. J. Control*, 2001, vol. 74, no. 4, pp. 409–424.
- [37] Wagner A., Heffel E., Arrieta A. F., Spelsberg-Korspeter G., Hagedorn P. Analysis of an oscillatory Painlevé–Klein apparatus with a nonholonomic constraint // *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, 2013, vol. 21, nos. 1–2, pp. 149–157.
- [38] Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголономных систем // *Сиб. матем. журн.*, 2007, т. 48, № 1, с. 33–45.
- [39] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.
- [40] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116.
- [41] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 465–483.
- [42] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // *Докл. РАН*, 2006, т. 408, № 2, с. 192–195.
- [43] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Generalized Chaplygin’s transformation and explicit integration of a system with a spherical support // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 170–190.
- [44] de León M. A historical review on nonholonomic mechanics // *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, 2012, vol. 106, no. 1, pp. 191–224.
- [45] Ivanov A. P. On detachment conditions in the problem on the motion of a rigid body on a rough plane // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 4, pp. 355–368.

## On the Hadamard – Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Alexander A. Kilin<sup>2</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Moscow Institute of Physics and Technology  
Institutskii per. 9, Dolgoprudnyi, 141700 Russia

<sup>2</sup>Udmurt State University  
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>aka@rcd.ru, <sup>3</sup>mamaev@rcd.ru

In this paper, we develop the results obtained by J. Hadamard and G. Hamel concerning the possibility of substituting nonholonomic constraints into the Lagrangian of the system without changing the form of the equations of motion. We formulate the conditions for correctness of such a substitution for a particular case of nonholonomic systems in the simplest and universal form. These conditions are presented in terms of both generalized velocities and quasi-velocities. We also discuss the derivation and reduction of the equations of motion of an arbitrary wheeled vehicle. In particular, we prove the equivalence (up to additional quadratures) of problems of an arbitrary wheeled vehicle and an analogous vehicle whose wheels have been replaced with skates. As examples, we consider the problems of a one-wheeled vehicle and a wheeled vehicle with two rotating wheel pairs.

MSC 2010: 37J60, 37N05

Keywords: nonholonomic constraint, wheeled vehicle, reduction, equations of motion

Received October 12, 2015, accepted November 09, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 145–163 (Russian)