



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9
MSC 2010: 37G25

**К исследованию бифуркационных
и хаотических явлений
в системе с гомоклинической «восьмеркой»**

О. С. Костромина

Рассматриваются малые периодические по времени возмущения асимметричного уравнения Дюффинга – ван дер Поля с гомоклинической «восьмеркой» седла. С помощью аналитического метода Мельникова и численного моделирования исследуются основные бифуркации, связанные с наличием в рассматриваемом уравнении негрубой гомоклинической кривой. На плоскости основных параметров строится бифуркационная диаграмма для отображения Пуанкаре. Изучаются границы областей притяжения устойчивых неподвижных (периодических) точек для прямого (обратного) отображения Пуанкаре в зависимости от параметров. Устанавливается, что момент перехода фрактальной размерности границ областей притяжения аттракторов через единицу может предшествовать моменту возникновения первого гомоклинического касания инвариантных кривых седловой неподвижной точки.

Ключевые слова: бифуркации, гомоклинические структуры Пуанкаре, области притяжения, фрактальная размерность, чувствительная зависимость от начальных условий

Получено 27 июня 2015 года
После доработки 29 декабря 2015 года

Данная работа поддержана грантом Министерства образования и науки РФ, проект № 1410, а также частично грантами РФФИ № 13-01-00589 и № 14-01-00344. Экспериментальная часть работы (§ 3) выполнена в рамках гранта РФФИ № 14-41-00044.

Костромина Ольга Сергеевна
os.kostromina@yandex.ru
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23



1. Введение

Гомоклиническая «восьмерка» является одним из важнейших объектов в теории динамических систем. При периодическом по времени возмущении системы с гомоклинической «восьмеркой» демонстрируют богатую динамику, которую обеспечивают разнообразные случаи взаимного расположения сепаратрис при их расщеплении. Изучению гомоклинических бифуркаций и хаоса в таких системах, управляемых различными периодическими силами, посвящено большое число работ (см., например, [1–4] и приведенные там ссылки). Отдельно отметим недавно опубликованную работу [5], где подробнейшим образом изучаются бифуркации в окрестности «восьмерки» с ненулевой седловой величиной для двухпараметрических семейств отображений.

В настоящей работе рассмотрим асимметричное уравнение Дюффинга – ван дер Поля

$$\ddot{x} - x + x^3 = \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)\dot{x} + p_3 \sin p_4 t], \quad (1.1)$$

где $p_1, p_2, p_3 > 0, p_4 > 0$ – параметры, ε – малый положительный параметр.

Перепишем уравнение (1.1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)y + p_3 \sin p_4 t]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

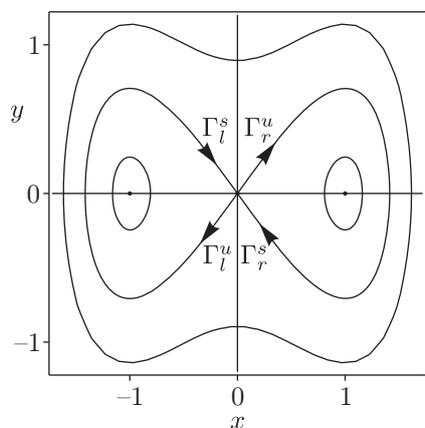


Рис. 1. Фазовый портрет невозмущенного ($\varepsilon = 0$) уравнения (1.1).

Невозмущенное ($\varepsilon = 0$) уравнение имеет три состояния равновесия: $O(0, 0)$ типа «седло» с нулевой седловой величиной и $O_{\pm}(\pm 1, 0)$ типа «центр». Две гомоклинические орбиты $\Gamma_r = \Gamma_r^s \cup \Gamma_r^u$ и $\Gamma_l = \Gamma_l^s \cup \Gamma_l^u$ примыкают к седловой точке $O(0, 0)$, формируя гомоклиническую «восьмерку» (см. рис. 1). Область, ограниченную петлей Γ_r (Γ_l), обозначим G_1^+ (G_1^-), а область вне «восьмерки» – G_2 .

В возмущенной автономной ($\varepsilon \neq 0, p_3 = 0$) системе в общем случае сепаратрисы седловой точки $O(0, 0)$ расщепляются и наматываются на аттракторы (здесь фокусы $O_{\pm}(\pm 1, 0)$ и предельные циклы) системы при $t \rightarrow \pm\infty$. Однако существуют бифуркационные значения параметров p_1, p_2 , при которых выходящая из седловой точки сепаратриса возвращается в эту же точку по одному из устойчивых сепаратрисных направлений, образуя петлю. Бифуркационные множества, соответствующие разным типам сепаратрисных петель, имеют одну общую точку, в которой сохраняются две гомоклинические петли к седлу в виде «восьмерки» (подробнее об этом см. ниже).

Отметим симметрию разбиения плоскости параметров (p_1, p_2) на области с разной топологией фазовых портретов относительно оси p_1 : система (1.2) при $p_3 = 0$ инвариантна относительно преобразования $(p_2, x, y) \rightarrow (-p_2, -x, -y)$. Параметр p_2 определяет асимметрию возмущения. Полное представление о поведении траекторий возмущенного автономного уравнения в зависимости от параметров можно получить из работ [6, 7]. Заметим,

что полная бифуркационная диаграмма двухпараметрической деформации векторного поля с гомоклинической «восьмеркой» седла в общем случае впервые была построена Д. В. Тураевым в 1984 году [8] (см. также [9]).

При воздействии периодических по времени возмущений ($p_3 \neq 0$) анализ поведения решений системы удобно свести к исследованию отображения Пуанкаре на глобальной секущей через период возмущения $2\pi/p_4$. Глобальное поведение решений системы (1.2) в ячейках, отделенных от невозмущенных сепаратрис, установлено в работах [7, 10]. Что же касается окрестности «восьмерки», то ключевую роль в исследовании поведения решений здесь играет анализ взаимного расположения сепаратрис седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре.

Тот факт, что устойчивая и неустойчивая сепаратрисы седловой точки могут пересекаться, представляя собой две различные кривые с бесконечным числом точек пересечения, обнаружил А. Пуанкаре еще в 1889 году при работе над задачей небесной механики о движении трех тел [11]. Кривая, лежащая в пересечении инвариантных многообразий седловой периодической орбиты, получила название гомоклинической кривой Пуанкаре (грубой, если это пересечение трансверсальное, и негрубой в противном случае). Задача об описании структуры окрестности грубой гомоклинической кривой седлового периодического движения, известная как задача Пуанкаре–Биркгофа, была полностью решена Л. П. Шильниковым [12]. Он показал, что множество траекторий, целиком лежащих в малой окрестности грубой гомоклинической кривой, является нетривиальным гиперболическим множеством, траектории которого полностью описываются на языке символической динамики.

Изучению характера поведения траекторий, целиком лежащих в малой окрестности негрубой гомоклинической кривой, посвящены работы Н. К. Гаврилова и Л. П. Шильникова [13]. Ими было выделено два качественно различных случая возникновения гомоклинических структур. В одном случае границы существования негрубой гомоклинической кривой являются границами Морса–Смейла, переход через которые носит взрывной характер: тривиальная динамика системы вплоть до возникновения негрубой гомоклинической кривой становится сложнее сразу при возникновении трансверсальной гомоклиники. По сути, в этих работах впервые было дано описание явления гомоклинического омега-взрыва. Другой случай характеризуется появлением счетного множества седловых периодических движений еще до момента первого касания инвариантных многообразий седловой периодической орбиты.¹

Отличительным признаком хаотического поведения системы является чувствительная зависимость от начальных данных: небольшие отклонения начальных условий приводят к значительным отклонениям конечных состояний. В работе [15] была установлена связь между мерой объема неопределенных начальных условий в фазовом пространстве, зависящей от радиуса неопределенности, и фрактальной размерностью границ областей притяжения устойчивых режимов. Наличие границ, обладающих фрактальными свойствами, свидетельствует о непредсказуемости поведения решений системы с начальными условиями вблизи таких границ.

Настоящая работа посвящена изучению основных гомоклинических структур отображения Пуанкаре для уравнения (1.1), а также анализу фрактальных свойств границ областей притяжения сосуществующих аттракторов.

¹В работе [14] была доказана реализация этого случая для уравнения Дюффинга с гомоклиническим контуром.

2. О гомоклинических бифуркациях

2.1. Гомоклинические петли сепаратрис седла

При $\varepsilon = 0$ система (1.2) является гамильтоновой с гамильтонианом $H(x, y) = y^2/2 - x^2/2 + x^4/4$. Совокупность фазовых кривых, определяемых интегралом энергии $H(x, y) = h$ при изменении h на интервале $(-0.25, \infty)$, дает фазовый портрет невозмущенного уравнения (см. рис. 1). Сепаратрисная «восьмерка», лежащая на нулевом уровне интеграла энергии, разделяет фазовую плоскость на области с разным поведением фазовых кривых.

Поведение сепаратрис под действием автономного возмущения может быть установлено при помощи аналитического метода Мельникова [16]. Величину расщепления невозмущенных сепаратрис под действием возмущения можно представить в виде $\Delta = \varepsilon\Delta_1 + O(\varepsilon^2)$, где

$$\Delta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [p_1 + p_2 x_0(t) - x_0^2(t)] y_0^2(t) dt. \quad (2.1)$$

Здесь решение $x_0(t), y_0(t)$ невозмущенного уравнения на сепаратрисе имеет вид [17]

$$x_0(t) = \pm\sqrt{2}(1/\operatorname{ch} t), \quad y_0(t) = \mp\sqrt{2}(\operatorname{sh} t/\operatorname{ch}^2 t).$$

Отсюда получаем

$$\Delta_1^{\pm} = 2 \left[\frac{2}{3} p_1 \pm \frac{\pi}{8} \sqrt{2} p_2 - \frac{8}{15} \right]. \quad (2.2)$$

Из уравнений $\Delta_1^{\pm} = 0$ определяем с точностью до членов порядка ε бифуркационное множество, отвечающее петле сепаратрисы в возмущенном автономном уравнении:

$$\frac{2}{3} p_1 \pm \frac{\pi}{8} \sqrt{2} p_2 - \frac{8}{15} = 0. \quad (2.3)$$

При $\Delta^+ = 0$ имеем правую петлю сепаратрисы, а при $\Delta^- = 0$ — левую. При $p_1 = 0.8, p_2 = 0$ на фазовой плоскости имеем две гомоклинические петли сепаратрисы, образующие «восьмерку».

Бифуркационное множество возмущенной автономной системы, соответствующее «большой» петле (выходящая и входящая сепаратрисы седловой точки совпадают, охватывая оба состояния равновесия типа «фокус»), может быть найдено численно [6].

2.2. Гомоклинические структуры Пуанкаре

Под действием неавтономного возмущения сепаратрисы седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре могут пересекаться. В этом случае говорят о существовании гомоклинической структуры Пуанкаре.

Обозначим через W_r^s, W_l^s (W_r^u, W_l^u) устойчивые (неустойчивые) инвариантные кривые (сепаратрисы) неподвижной точки $O(0, 0)$ отображения Пуанкаре. Выделим два типа гомоклинических структур, возникающих в уравнении (1.1):

- 1) $W_r^s \cap W_r^u \neq \emptyset$ и/или $W_l^s \cap W_l^u \neq \emptyset$,
- 2) $W_l^s \cap W_r^u \neq \emptyset$ и/или $W_r^s \cap W_l^u \neq \emptyset$.

Существование гомоклинических структур первого типа связано с наличием у автономного уравнения малых петель (правой и/или левой) сепаратрис седла, структур второго типа — с наличием «большой» петли сепаратрисы седла.



Вопрос о существовании гомоклинической структуры первого типа решается с помощью формулы Мельникова $\Delta(t_0) = \varepsilon \Delta_1(t_0) + O(\varepsilon^2)$, где функция $\Delta(t_0)$ определяет расстояние между устойчивыми и неустойчивыми сепаратрисами седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре.

Для применения формулы Мельникова необходимо преобразовать исходное уравнение так, чтобы возмущение обращалось в нуль в состоянии равновесия типа «седло» невозмущенного уравнения при любых значениях t . Для этого сделаем в уравнении (1.1) замену $x = \xi + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$, где

$$x_1(t) = -\frac{p_3}{1+p_4^2} \sin(p_4 t), \tag{2.4}$$

переобозначим ξ на x , в результате чего придем к уравнению

$$\ddot{x} - x + x^3 = \varepsilon \left[(p_1 + p_2 x - x^2) \dot{x} + \frac{3p_3}{1+p_4^2} x^2 \sin(p_4 t) \right]. \tag{2.5}$$

В седловой точке $(0, 0)$ правая часть уравнения (2.5) обращается в нуль при любых t . Применяя к этому уравнению формулу Мельникова, находим

$$\Delta_1^\pm(t_0) = 2 \left(\frac{2}{3} p_1 \pm \frac{\pi}{8} \sqrt{2} p_2 - \frac{8}{15} \right) \mp \frac{\sqrt{2} \pi p_3 p_4}{\text{ch}(\pi p_4 / 2)} \cos(p_4 t_0). \tag{2.6}$$

Знак функции Мельникова $\Delta_1^+(t_0)$ ($\Delta_1^-(t_0)$) определяет относительное расположение устойчивой W_r^s (W_l^s) и неустойчивой W_r^u (W_l^u) сепаратрис седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре. В случае положительной (отрицательной) определенности этой функции устойчивая ветвь расщепляется «внутри» («наружу»), неустойчивая — «наружу» («внутри»).

Если $\Delta_1^\pm(t_0)$ — знакопеременная функция, то имеет место трансверсальное пересечение устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой неподвижной точки. Из условий $\Delta_1^\pm(t_0) = (d\Delta_1^\pm/dt_0)(t_0) = 0$ находим вырожденные нули функции Мельникова

$$p_2 = \pm \frac{8}{\pi \sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3} p_1 + \frac{8}{15} \pm \frac{\pi p_3 p_4}{\sqrt{2} \text{ch}(\pi p_4 / 2)} \right), \tag{2.7}$$

порождающие касание (с точностью до членов порядка ε) соответствующих сепаратрис неподвижной точки $O(0, 0)$. Первый альтернативный знак « \pm » в (2.7) определяет касание сепаратрис W_r^s и W_r^u или W_l^s и W_l^u , второй — характеризует расположение устойчивой и неустойчивой сепаратрис друг относительно друга.

Вопрос о взаимном расположении сепаратрис при воздействии неавтономного возмущения на «большую» петлю сепаратрисы может быть решен численно. Мы не можем здесь применить формулу Мельникова, поскольку не знаем уравнение «большой» петли.

2.3. Бифуркационная диаграмма. Численный анализ

Построим бифуркационную диаграмму, описывающую основные случаи взаимного расположения сепаратрис седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре для уравнения (2.5). Заметим, что в работе [7] были получены три бифуркационные диаграммы на плоскости (p_2, p_3) при фиксированных значениях остальных параметров, дающие такое описание.

Зафиксируем $\varepsilon = 0.12$, $p_3 = 1.7$ и $p_4 = 4$. На рисунке 2 показаны полученные с помощью программы WInSet [18] основные гомоклинические структуры с касанием сепаратрис



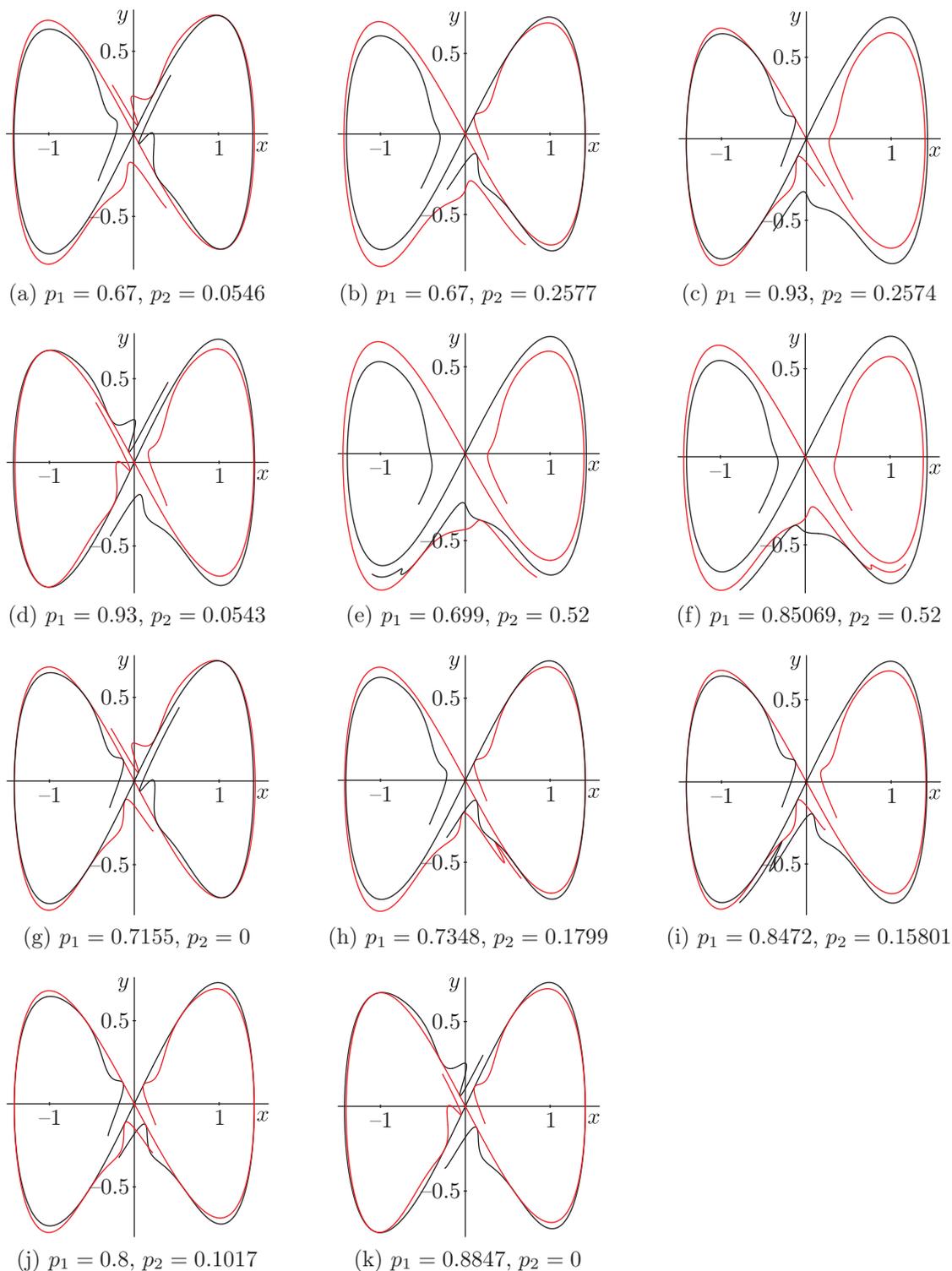


Рис. 2. Гомоклинические структуры с касанием устойчивой и неустойчивой сепаратрис неподвижной точки $O(0,0)$ для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_3 = 1.7$, $p_4 = 4$ и различных значениях параметров p_1, p_2 . Устойчивые сепаратрисы показаны красным цветом, неустойчивые — черным.^a

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1601003/>

седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре, порожденного уравнением (2.5) при фиксированных ε , p_3 , p_4 и различных значениях параметров p_1 , p_2 .

Разбиение плоскости параметров (p_1, p_2) на области с разными гомоклиническими структурами построено с помощью программ WInSet и Maple 13 и представлено на рисунке 3. Бифуркационная диаграмма получается симметричной относительно оси p_1 . По-видимому, это связано с существующей симметрией в автономном уравнении. Бифуркационные кривые в верхней полуплоскости $p_2 > 0$ (они отмечены сплошными жирными линиями) соответствуют существованию гомоклинических структур с касанием, показанных на рисунке 2. На симметричных им бифуркационных кривых в нижней полуплоскости $p_2 < 0$ (они отмечены жирными пунктирными линиями) имеют место гомоклинические структуры с касанием, которые можно получить в результате поворота на угол π соответствующей структуры из области $p_2 > 0$. В силу симметрии дальнейшее описание динамики изучаемой системы будет в основном сосредоточено на случае $p_2 > 0$.

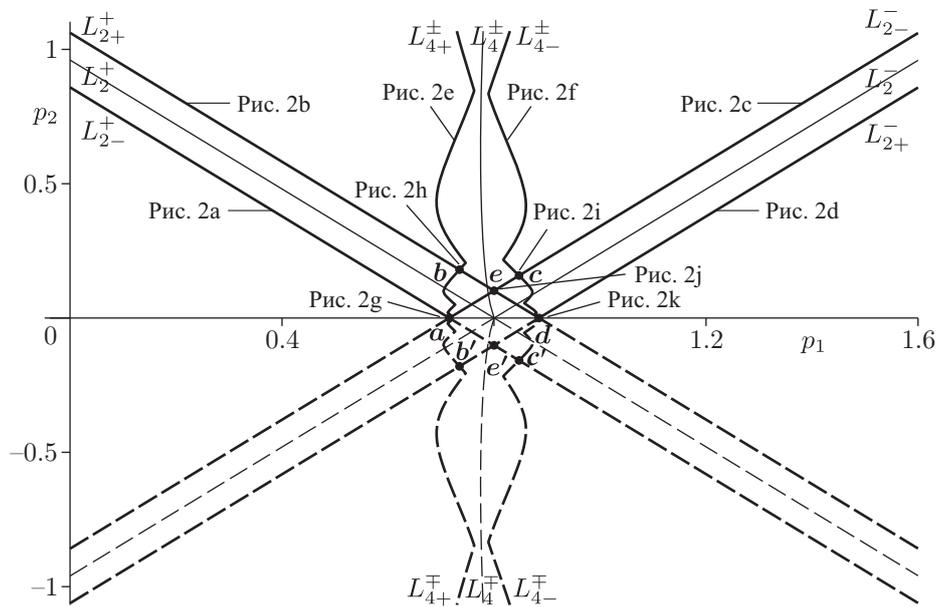


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для отображения Пуанкаре, индуцированного уравнением (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_3 = 1.7$ и $p_4 = 4$.

Линии L_2^+ и L_2^- задают множество значений параметров, для которых автономное уравнение имеет правую и левую сепаратрисные петли седла $O(0, 0)$ соответственно. Заметим, что гомоклиническая «восьмерка» имеет место при $p_1 \approx 0.800198294$, $p_2 = 0$, тогда как аналитически прогнозируемые значения — $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0$. Линия L_4^\pm (L_4^\mp) соответствует наличию в автономном уравнении нижней (верхней) «большой» петли сепаратрисы седла $O(0, 0)$: сепаратрисы Γ_r^u (Γ_l^u) и Γ_l^s (Γ_r^s) совпадают. В данном случае эти линии носят вспомогательный характер и не являются бифуркационными.

На бифуркационной кривой L_{2-}^+ (L_{2+}^+) имеем гомоклинические структуры с квадратичным касанием сепаратрис W_r^u и W_r^s «изнутри» («извне») (см. рис. 2а, 2б). На бифуркационной кривой L_{2-}^- (L_{2+}^-) имеют место гомоклинические структуры с квадратичным касанием сепаратрис W_l^u и W_l^s «изнутри» («извне») (см. рис. 2с, 2д).

Бифуркационные кривые L_{4+}^\pm (L_{4+}^\mp) и L_{4-}^\pm (L_{4-}^\mp) соответствуют квадратичным касаниям неустойчивой W_r^u (W_l^u) и устойчивой W_l^s (W_r^s) сепаратрис при расщеплении нижней



(верхней) «большой» петли. На кривых L_{4+}^{\pm} и L_{4+}^{\mp} имеем касание «извне» (см. рис. 2e), на кривых L_{4-}^{\pm} и L_{4-}^{\mp} — «изнутри» (см. рис. 2f).

Двойные квадратичные гомоклинические касания имеют место в точках \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} (см. рис. 2g, h, i, j, k), а также в точках \mathbf{b}' , \mathbf{c}' , \mathbf{e}' на бифуркационной диаграмме.

Полученные бифуркационные кривые выделяют на плоскости параметров (p_1, p_2) четыре гомоклинические зоны: в областях, ограниченных линиями L_{2-}^+ и L_{2+}^+ , L_{2-}^- и L_{2+}^- , L_{4+}^{\pm} и L_{4-}^{\pm} , L_{4+}^{\mp} и L_{4-}^{\mp} , имеет место трансверсальное пересечение сепаратрис W_r^s и W_r^u , W_l^s и W_l^u , W_l^s и W_r^u , W_r^s и W_l^u соответственно. Все эти гомоклинические зоны пересекаются в области, ограниченной отрезками бифуркационных кривых, соединяющих точки \mathbf{a} , \mathbf{e} , \mathbf{d} , \mathbf{e}' . В этой области каждая ветвь устойчивой сепаратрисы пересекается трансверсально с обеими ветвями неустойчивой сепаратрисы. Для значений параметров из области, полученной в результате пересечения двух гомоклинических зон и ограниченной отрезками бифуркационных кривых, соединяющих точки \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{e} (\mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e}), имеют место две гомоклиники: $W_r^s \cap W_r^u \neq \emptyset$ ($W_l^s \cap W_l^u \neq \emptyset$) и $W_l^s \cap W_r^u \neq \emptyset$. В симметричных им (относительно оси p_1) областях имеем $W_l^s \cap W_l^u \neq \emptyset$ ($W_r^s \cap W_r^u \neq \emptyset$) и $W_r^s \cap W_l^u \neq \emptyset$.

Отметим, что в работе [5] выделено два типа границ гомоклинических зон. Границы Морса–Смейла соответствуют существованию гомоклинического касания «изнутри» (L_{2-}^+ , L_{2-}^- , L_{4-}^{\pm} и L_{4-}^{\mp} в нашем случае). Такие границы отделяют области с простой динамикой от областей со сложным поведением траекторий. Другой тип границ соответствует существованию гомоклинического касания «извне» (L_{2+}^+ , L_{2+}^- , L_{4+}^{\pm} и L_{4+}^{\mp} в нашем случае). В этом случае переход от простой динамики к сложной происходит еще до момента возникновения негрубой гомоклинической кривой.

2.4. Детализация гомоклинических зон с негладкими границами

Наибольший интерес при исследовании гомоклинических бифуркаций вызывают гомоклинические зоны, границы L_{4+}^{\pm} (L_{4+}^{\mp}) и L_{4-}^{\pm} (L_{4-}^{\mp}) которых представляют собой негладкие кривые. Подробное описание такой структуры границ приведено в работе [5]. Следуя ей, покажем, как устроена бифуркационная диаграмма для отображения Пуанкаре, порожденного уравнением (2.5), внутри указанных гомоклинических зон. Для этого выделим фрагмент интересующей нас области на плоскости параметров (p_1, p_2) : $p_1 \in [0.686, 0.9]$, $p_2 \in [-0.4, 0.4]$. С помощью программы WInSet, изменяя параметры p_1 и p_2 определенным образом, найдем гомоклинические структуры с касанием сепаратрис W_l^s и W_r^u , а также W_r^s и W_l^u . В результате получаем расслоение рассматриваемой области на кривые с различными типами гомоклинического касания (см. рис. 4, а также его увеличенный фрагмент на рисунке 5; эти кривые отмечены разным цветом).

Как показано на рисунке 4, каждая из граничных кривых изучаемых гомоклинических зон на самом деле образована двумя бифуркационными кривыми с различными квадратичными гомоклиническими касаниями. Точки трансверсального пересечения этих кривых — точки, в которых нарушается гладкость кривых L_{4+}^{\pm} , L_{4-}^{\pm} , L_{4+}^{\mp} и L_{4-}^{\mp} , — соответствуют двойным квадратичным гомоклиническим касаниям. После пересечения эти кривые продолжают внутри гомоклинической зоны и заканчиваются в некоторых точках кубического гомоклинического касания. Как установлено в [5], кривые L_{4+}^{\pm} (L_{4+}^{\mp}) и L_{4-}^{\pm} (L_{4-}^{\mp}) имеют бесконечное число ступенек (интервалов гладкости), точками накопления которых служат расположенные на оси p_1 точки \mathbf{a} и \mathbf{d} соответственно, отвечающие двойным квадратичным гомоклиническим касаниям.

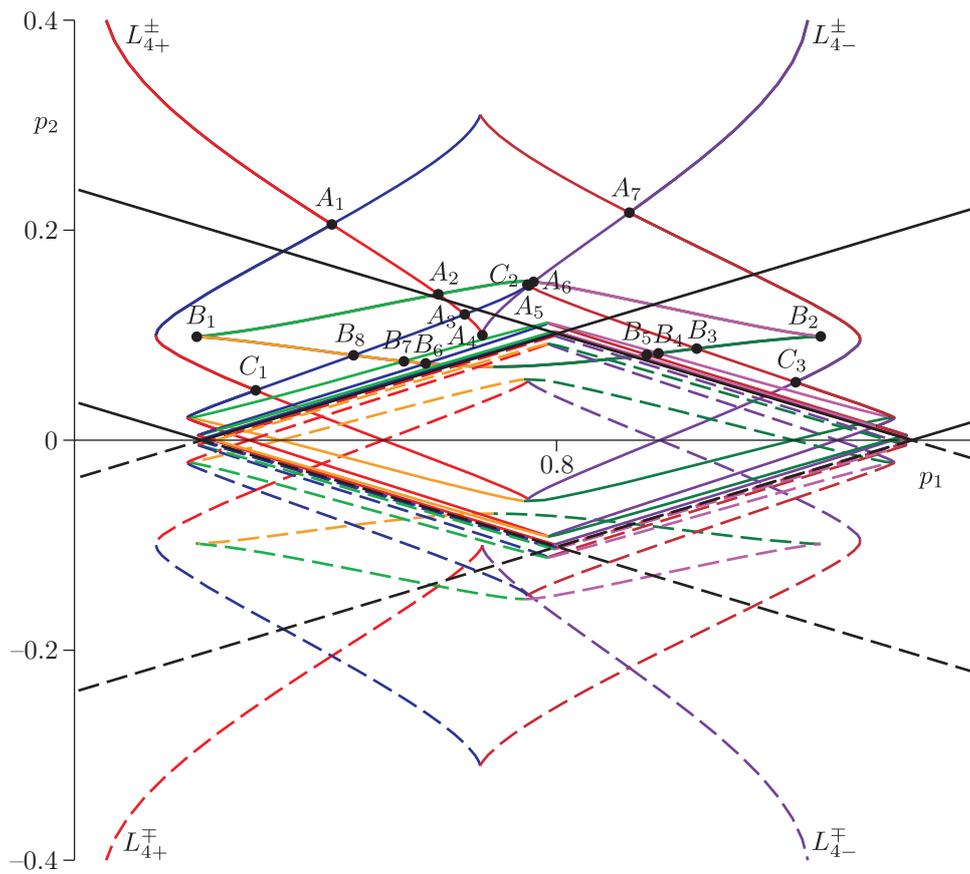


Рис. 4. Структура бифуркационной диаграммы внутри гомоклинических зон, ограниченных кривыми L_{4+}^{\pm} (L_{4+}^{\mp}) и L_{4-}^{\pm} (L_{4-}^{\mp}). Бифуркационные кривые, соответствующие касанию сепаратрис W_l^s и W_r^u (W_r^s и W_l^u), обозначены сплошными (пунктирными) линиями. Разным цветом показаны бифуркационные кривые с различными типами гомоклинического касания.

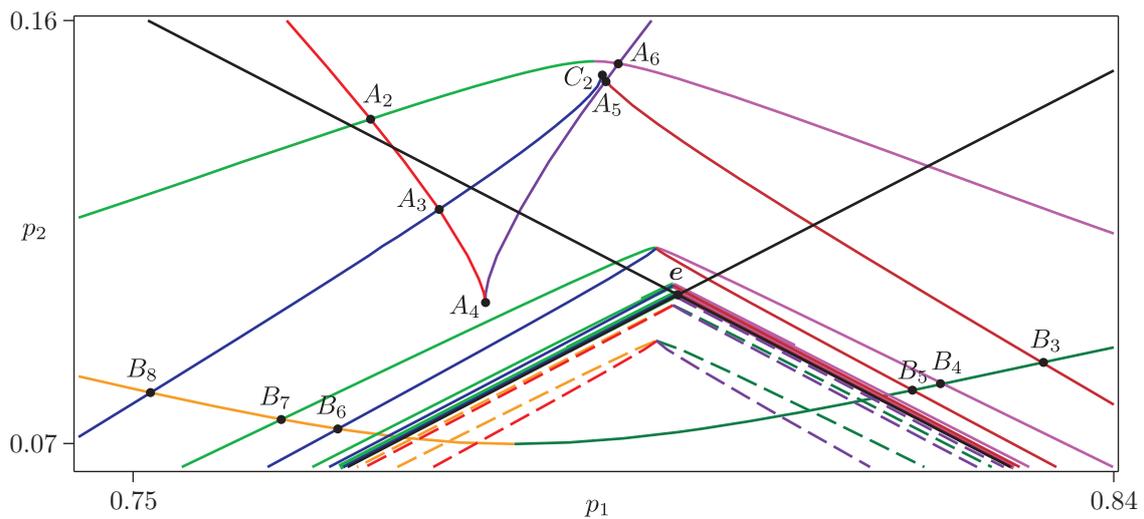


Рис. 5. Увеличенный фрагмент рисунка 4.

Внутри гомоклинических зон на каждой линии имеем одинарные квадратичные гомоклинические касания соответствующих сепаратрис, в точках пересечения этих линий — двойные квадратичные гомоклинические касания, а в точках, связанных с изменением одного типа касания на другой, возможны кубические гомоклинические касания. На рисунках 4 и 5 отмечены некоторые такие точки: точки A_4 , B_1 , B_2 и C_2 кубических гомоклинических касаний, остальные — точки двойных квадратичных гомоклинических касаний. Взаимное расположение сепаратрис W_l^s и W_r^u , характерное для каждой из этих точек (с указанием их координат), показано на рисунках 6, 7 и 8.

Более того, по каждому из этих рисунков можно проследить эволюцию одного двойного квадратичного гомоклинического касания в другое, одного типа гомоклинического касания в другой: параметры p_1 и p_2 меняем вдоль выделенной линии ($A_1A_4A_7$ для рисунка 6, $C_1C_2C_3$ для рисунка 7, $B_1A_2B_2B_3B_8B_1$ для рисунка 8). Таким образом, на любом участке этих линий между каждыми двумя точками легко представить взаимное расположение соответствующих сепаратрис. Отметим, что на участке B_5B_6 линии $B_1A_2B_2B_3B_8B_1$ в действительности существует бесконечное число точек двойных квадратичных гомоклинических касаний, однако каких-либо новых типов гомоклинического касания они не дают. Линии, пересекающие $B_1A_2B_2B_3B_8B_1$ в этих точках, располагаются настолько близко друг к другу, что становятся практически неразличимыми на рисунке 4, поэтому приводится его увеличенный фрагмент (см. рис. 5).

В гомоклинической зоне, ограниченной кривыми L_{4+}^\pm и L_{4-}^\pm , точки кубических гомоклинических касаний таких типов, как в точках B_1 , C_2 , A_4 и B_2 , накапливаются в точках a , e , e' и d двойных квадратичных касаний соответственно [5].

3. О фрактальных свойствах границ областей притяжения

Важное практическое значение при исследовании любой системы имеет вопрос о том, чувствительна ли система к небольшим отклонениям начальных условий. Необходимо знать, можно ли предсказать поведение решений системы на больших интервалах времени.

Если в системе существует как минимум два устойчивых режима, то встает вопрос об определении множества всех начальных условий, для которых траектории приводят к тому или иному режиму с течением времени. Иначе говоря, возникает вопрос об областях притяжения этих аттракторов. Для выяснения вопроса о предсказуемости или непредсказуемости поведения решений системы нужно изучать характер границы областей притяжения, которая отделяет область притяжения одного аттрактора от области притяжения другого аттрактора.

При вариации управляющих параметров системы граница областей притяжения может представлять собой гладкую кривую, а может деформироваться и стать нерегулярной и даже фрактальной. В автономном уравнении она представляет собой гладкую кривую. К примеру, когда на фазовой плоскости существуют два устойчивых фокуса, граница их областей притяжения совпадает с устойчивым многообразием седловой точки. В неавтономном уравнении сепаратрисы могут вести себя сложным образом, что приводит к деформации границы.

О фрактальных свойствах границы областей притяжения говорят в том случае, если ее фрактальная размерность становится больше топологической. Наличие фрактальных границ областей притяжения весьма существенно влияет на динамику системы: поведение решений чувствительно к выбору начальных условий вблизи такой границы.

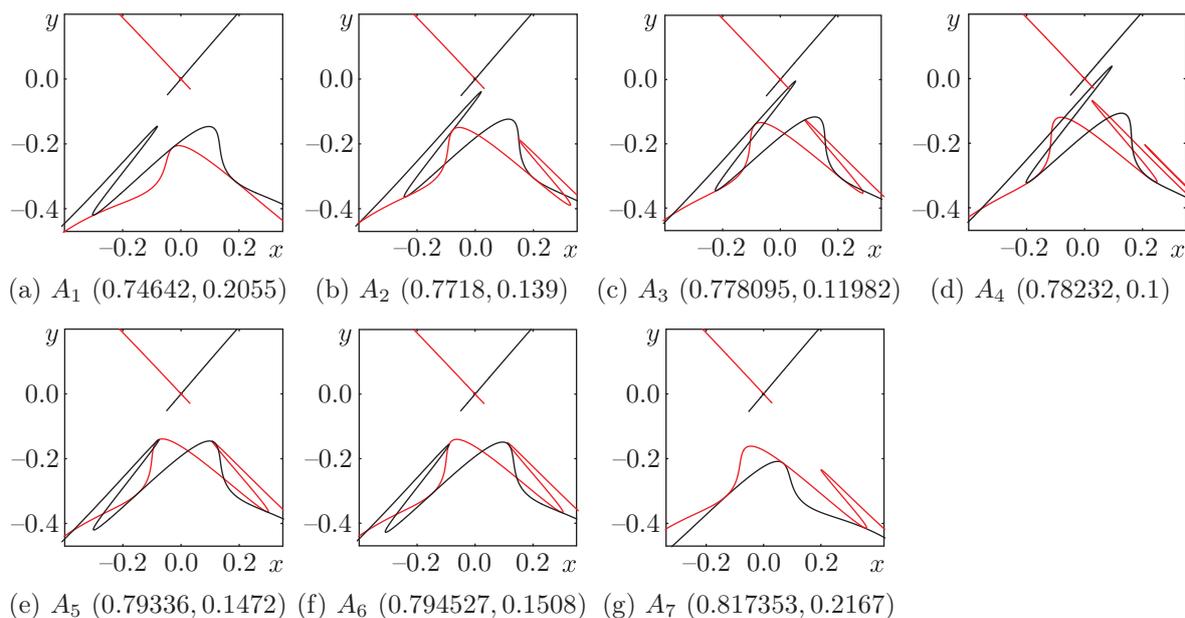


Рис. 6. Гомоклинические структуры с двойным квадратичным и кубическим касаниями сепаратрис W_l^s и W_r^u на линии $A_1A_4A_7$.

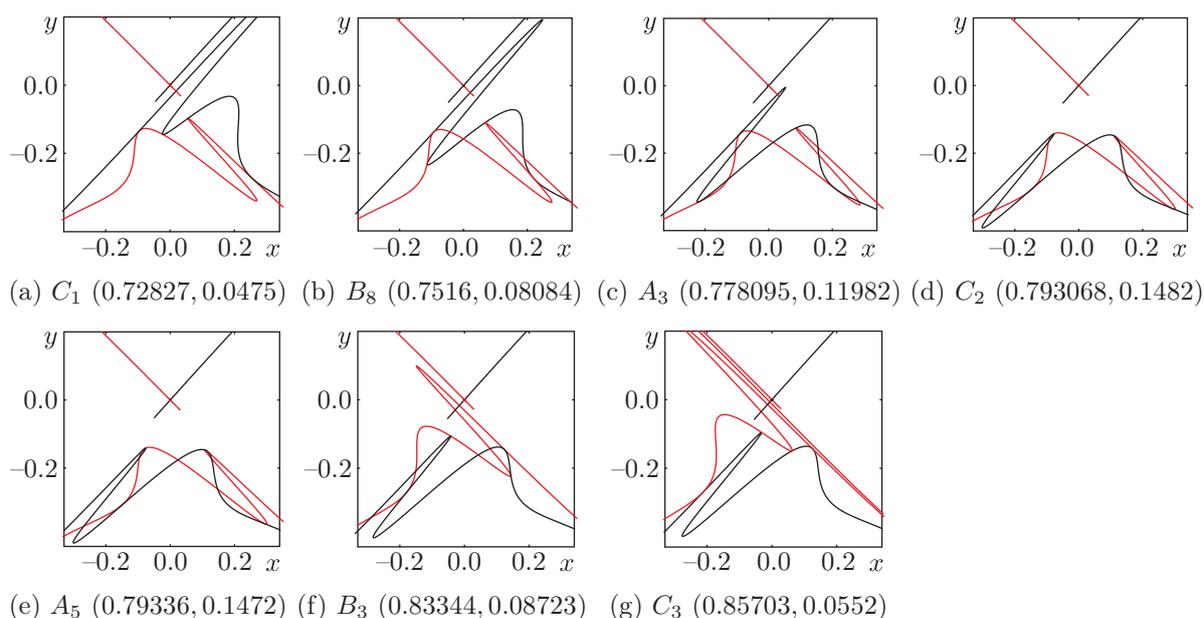


Рис. 7. Гомоклинические структуры с двойным квадратичным и кубическим касаниями сепаратрис W_l^s и W_r^u на линии $C_1C_2C_3$.

Хорошо известно, что пересечение инвариантных многообразий седлового периодического движения в сечении Пуанкаре порождает в окрестности каждой гомоклинической точки отображение типа подковы, что приводит к хаотическому поведению решений и, как следствие, к чувствительной зависимости от начальных данных. Поэтому естественно ожидать фрактальные свойства границ областей притяжения сразу в момент возникновения грубой гомоклинической кривой. Однако, как было отмечено ранее, нетривиальная дина-

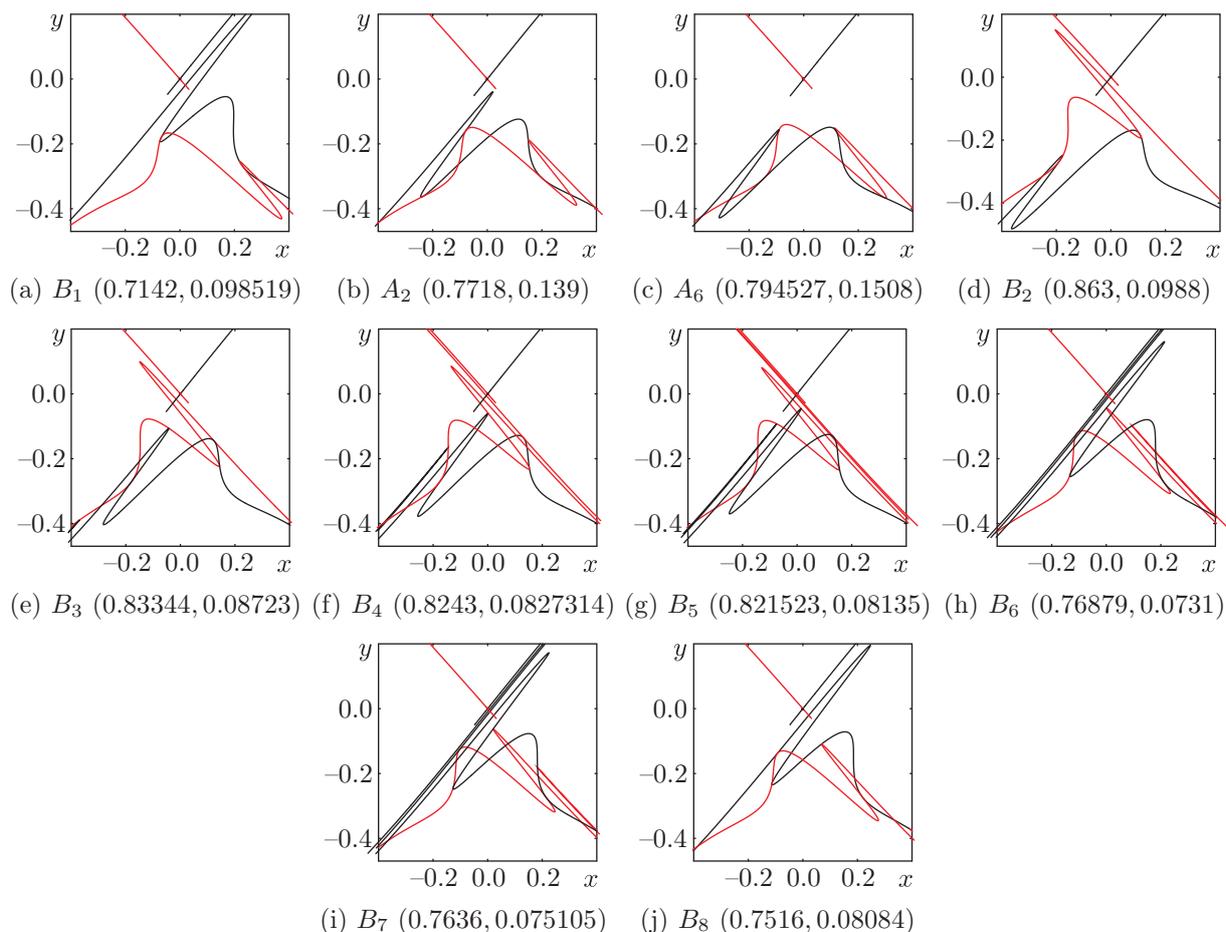


Рис. 8. Гомоклинические структуры с двойным квадратичным и кубическим касаниями сепаратрис W_l^s и W_r^u на линии $B_1A_2B_2B_3B_8B_1$.

мика может появиться еще до момента возникновения первого гомоклинического касания. В этом случае фрактализация границы произойдет еще до момента возникновения негрубой гомоклинической кривой.²

Изучим характер границ областей притяжения устойчивых неподвижных и периодических точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5). Для исследования этого вопроса применим изложенный в работе [15] метод нахождения показателя неопределенности α начальных условий и фрактальной размерности d границы областей притяжения.

Начальные условия, заданные с некоторой погрешностью $\tilde{\varepsilon}$, считаются неопределенными, если в окрестности радиуса $\tilde{\varepsilon}$ существуют начальные условия, для которых траектории системы стремятся к другому аттрактору. Показатель α определяет степенную зависимость между погрешностью $\tilde{\varepsilon}$ и мерой объема $\mu(\tilde{\varepsilon})$ неопределенных начальных условий фазового пространства. Фрактальная размерность d границы областей притяжения связана с показателем неопределенности начальных условий α соотношением

$$d = D - \alpha,$$

где D — размерность фазового пространства.

²Такой вывод был получен ранее в работе [19] при изучении влияния малых периодических сил на уравнение типа Дуффинга с линейным диссипативным членом.

3.1. Анализ областей притяжения неподвижных точек

Изучим характер границы областей притяжения двух устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при изменении амплитуды вынуждающей силы, отвечающей за регулирование ширины гомоклинических зон.

Для начала рассмотрим симметричный случай ($p_2 = 0$). На рисунке 9 показано взаимное расположение устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.630696$, $p_2 = 0$, $p_4 = 4$ и различных значениях параметра p_3 . Красным цветом показана устойчивая сепаратриса, синим — неустойчивая. Точками обозначены устойчивые неподвижные точки отображения Пуанкаре. На рисунках 9a, b, c показано поведение сепаратрис до момента касания, на рисунке 9d — в момент двойного касания. На рисунке 9e представлено трансверсальное пересечение сепаратрис: каждая ветвь устойчивой сепаратрисы пересекается с обеими ветвями неустойчивой сепаратрисы.

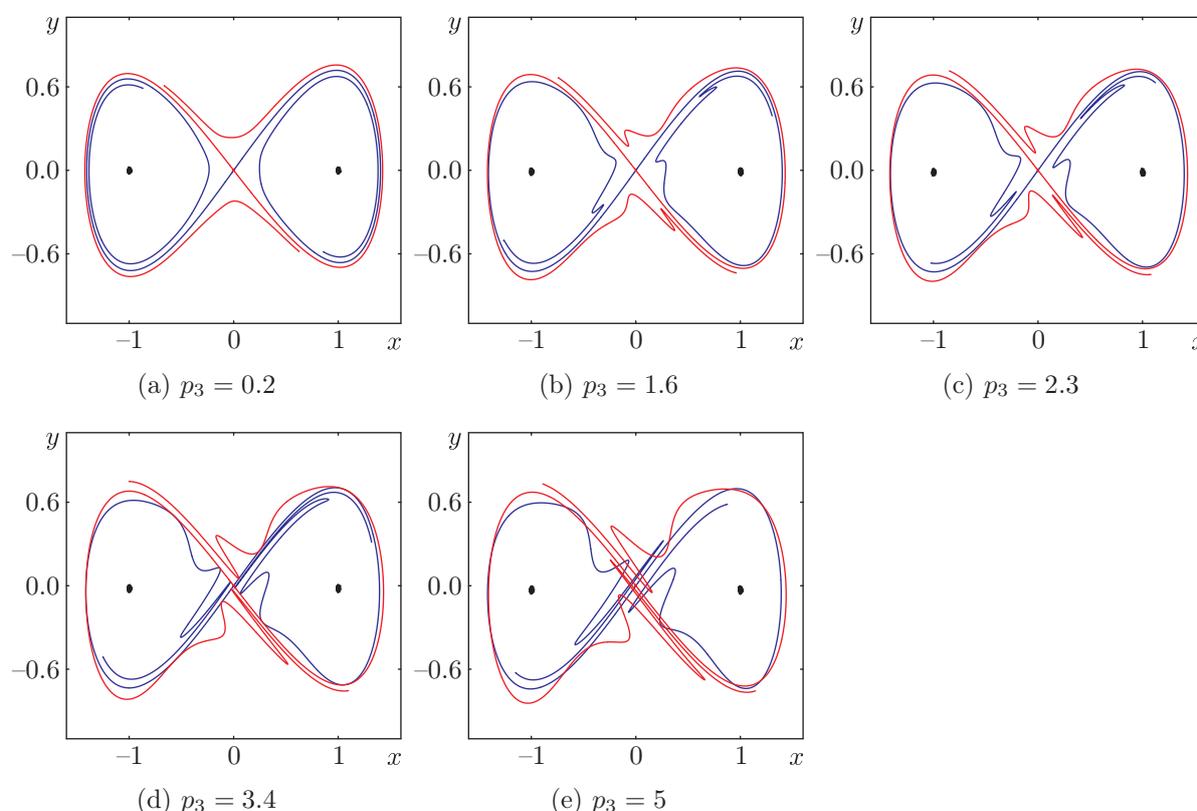


Рис. 9. Поведение сепаратрис неподвижной точки $(0, 0)$ отображения Пуанкаре, порожденного уравнением (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.630696$, $p_2 = 0$, $p_4 = 4$ и различных значениях параметра p_3 .

Для каждого из этих случаев на рисунке 10 представлена структура границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек и указана фрактальная размерность d этих границ. Рисунок 11 иллюстрирует график зависимости фрактальной размерности границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при фиксированных ε , p_1 , p_2 , p_4 от параметра p_3 . Видим, что при достаточно малой амплитуде внешней силы граница областей притяжения гладкая (см. рис. 10a), однако при увеличении значений параметра p_3 происходит деформация границы, а когда p_3

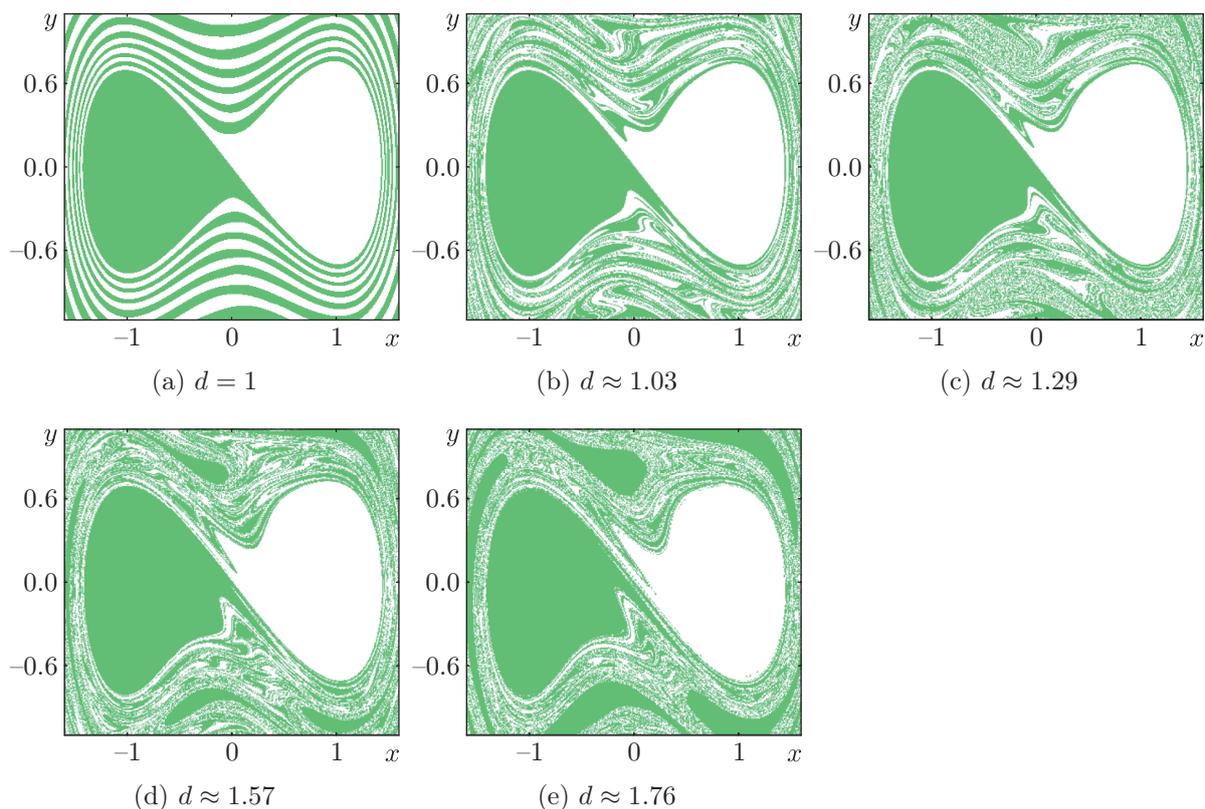


Рис. 10. Структура границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.630696$, $p_2 = 0$, $p_4 = 4$ и различных значениях параметра p_3 : (a) $p_3 = 0.2$, (b) $p_3 = 1.6$, (c) $p_3 = 2.3$, (d) $p_3 = 3.4$, (e) $p_3 = 5$.

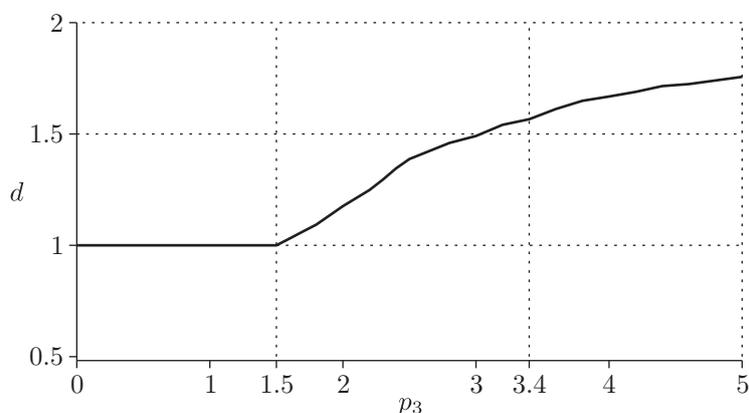


Рис. 11. График зависимости фрактальной размерности границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.630696$, $p_2 = 0$, $p_4 = 4$ от параметра p_3 ; $p_3 = p_3^{**} \approx 3.4$ — момент возникновения первого гомоклинического касания.

превосходит некоторое критическое значение ($p_3 = p_3^* \approx 1.5$), фрактальная размерность d границы областей притяжения становится больше топологической. Отметим, что первое гомоклиническое касание устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой неподвижной точки осуществляется при $p_3 = p_3^{**} \approx 3.4$.

Проанализируем полученный результат. Из графика на рисунке 11 видно, что переход фрактальной размерности через единицу происходит задолго до момента первого касания сепаратрис. Заметим, что, согласно теории [13], динамика системы с данным типом гомоклинического касания (касания «изнутри») будет тривиальной вплоть до момента возникновения негрубой гомоклинической кривой. Однако здесь нет никакого противоречия, поскольку, согласно [5], эффект возникновения сложной динамики (например, рождение бесконечного множества подков Смейла) до момента такого касания связан с наличием двойной гомоклиники.

Рассмотрим асимметричный случай ($p_2 \neq 0$) и аналогично предыдущему изучим структуру границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5). На рисунке 12 показано взаимное расположение устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.547404$, $p_2 = 0.1$, $p_4 = 4$ и различных значениях параметра p_3 . На рисунках 12а, б показано поведение сепаратрис до момента касания, на рисунке 12с — в момент касания устойчивой W_r^s и неустойчивой W_r^u сепаратрис. На рисунке 12d представлено трансверсальное пересечение сепаратрис W_r^s и W_r^u , при этом имеет место касание сепаратрис W_r^u и W_l^s .

Для каждого из этих случаев на рисунке 13 представлена структура границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек и указана фрактальная размерность d этих границ. Рисунок 14 иллюстрирует график зависимости фрактальной размерности границ

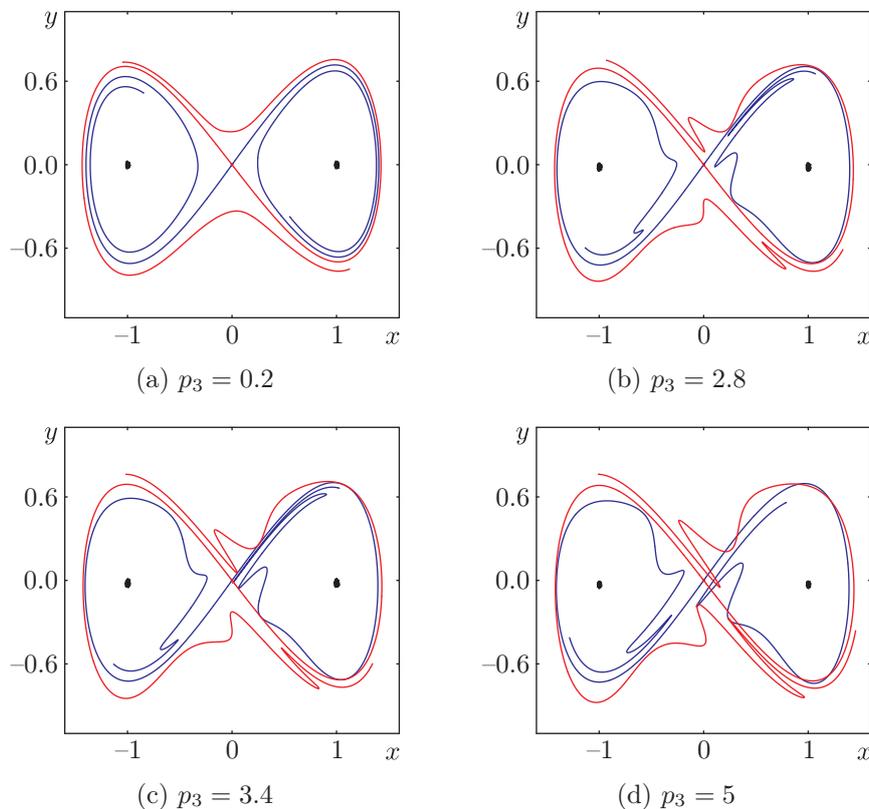


Рис. 12. Поведение сепаратрис неподвижной точки $(0,0)$ отображения Пуанкаре, порожденного уравнением (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.547404$, $p_2 = 0.1$, $p_4 = 4$ и различных значениях параметра p_3 .

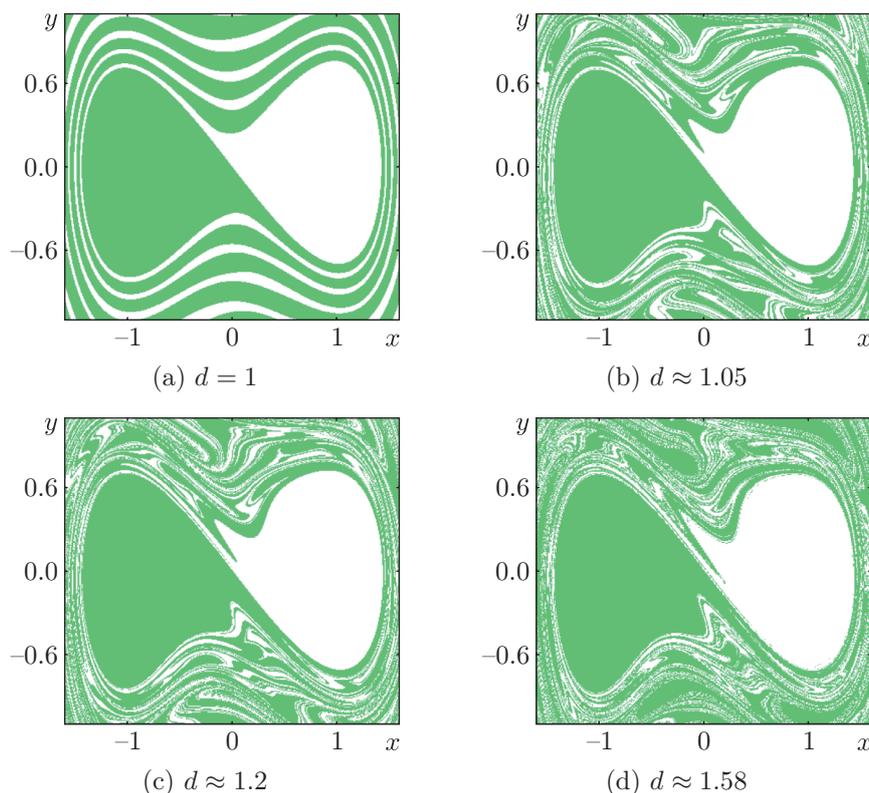


Рис. 13. Структура границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.547404$, $p_2 = 0.1$, $p_4 = 4$ и различных значениях параметра p_3 : (a) $p_3 = 0.2$, (b) $p_3 = 2.8$, (c) $p_3 = 3.4$, (d) $p_3 = 5$.

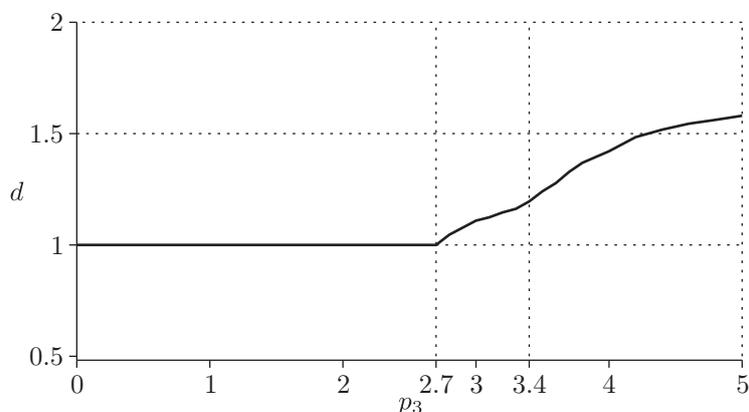


Рис. 14. График зависимости фрактальной размерности границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.547404$, $p_2 = 0.1$, $p_4 = 4$ от параметра p_3 ; $p_3 = p_3^* \approx 3.4$ — момент возникновения негрубой гомоклинической кривой.

областей притяжения устойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при данных ε , p_1 , p_2 , p_4 от параметра p_3 . Как и в предыдущем случае, получаем, что переход фрактальной размерности через единицу ($p_3 = p_3^* \approx 2.7$) происходит раньше момента касания ($p_3 = p_3^{**} \approx 3.4$) устойчивой и неустойчивой сепаратрис седловой неподвижной точки (см. рис. 14).

Аналогичный результат получаем при исследовании динамики системы с гомоклиническим касанием сепаратрис W_l^u и W_l^s , а также W_r^u и W_l^s «изнутри».

Сравнивая графики зависимостей фрактальной размерности границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек от амплитуды внешней силы в приведенных случаях, приходим к выводу, что с увеличением асимметрии в уравнении (2.5) интервал (p_3^*, p_3^{**}) уменьшается, фрактальная размерность d в момент касания также становится меньше.

3.2. Анализ областей притяжения периодических точек

Рассмотрим случай существования у отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) устойчивых периодических точек и изучим границы их областей притяжения. Поскольку в окрестности «восьмерки» в нашем случае могут наблюдаться лишь неустойчивые периодические режимы³, необходимо рассмотреть обратное отображение Пуанкаре.

Зафиксируем $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.94566$, $p_2 = 0.017$. В этом случае автономное ($p_3 = 0$) уравнение имеет два устойчивых фокуса, по одному неустойчивому предельному циклу в областях G_1^\pm и устойчивый цикл в области G_2 . Далее, положим $p_4 = 2.5$, а p_3 будем изменять от нуля до единицы. Для обратного отображения Пуанкаре в этом случае будем иметь аттракторы в G_1^\pm , граница областей притяжения которых совпадает с устойчивым многообразием седловой точки.

На рисунке 15 представлено поведение сепаратрис (устойчивые сепаратрисы показаны красным цветом, неустойчивые — синим) обратного отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при фиксированных ε , p_1 , p_2 , p_4 и различных значениях параметра p_3 . На рисунках 15а, б показано поведение сепаратрис до момента касания, на рисунке 15с — в момент касания сепаратрис W_l^s и W_l^u . На рисунке 15d представлено трансверсальное пересечение сепаратрис: каждая ветвь устойчивой сепаратрисы пересекается с обеими ветвями неустойчивой сепаратрисы. Помимо сепаратрис седловой неподвижной точки показаны сепаратрисы седловых периодических периода два точек, а также замкнутые инвариантные кривые (черным цветом), которым отвечают предельные циклы автономного уравнения. На рисунке 15а черным цветом также показаны траектории системы вблизи замкнутой инвариантной кривой. Точками отмечены неустойчивые неподвижные точки, а также устойчивые периодические периода два точки. Отметим, что на рисунке 15 показана область плоскости (x, y) , не содержащая точек неустойчивой замкнутой инвариантной кривой в области G_2 .

Дадим информацию об аттракторах, границы областей притяжения которых будем изучать. В области G_1^- имеем устойчивые периодические периода два точки: при данной частоте возмущения происходит синхронизация колебаний⁴. В области G_1^+ в зависимости от значений параметра p_3 притягивающим множеством является либо устойчивая замкнутая инвариантная кривая (см. рис. 15а), либо часть траекторий наматывается на устойчивые периодические периода два точки, а часть — на устойчивую замкнутую инвариантную кривую (см. рис. 15б, с, d).

На рисунке 16 представлены различные структуры границ областей притяжения аттракторов обратного отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при фиксированных ε , p_1 , p_2 , p_4 и различных значениях параметра p_3 . Визуально эти границы не отличаются от границ областей притяжения устойчивых неподвижных точек, о которых шла речь в § 3.1.

³Седловая величина $\sigma_c = \varepsilon p_1$ при $\varepsilon > 0$, $p_1 > 0$ положительна.

⁴Резонансный уровень (резонанс 2 : 1) совпадает с уровнем, в окрестности которого существует предельный цикл автономного уравнения. Такой резонансный уровень называется непроходимым [17].

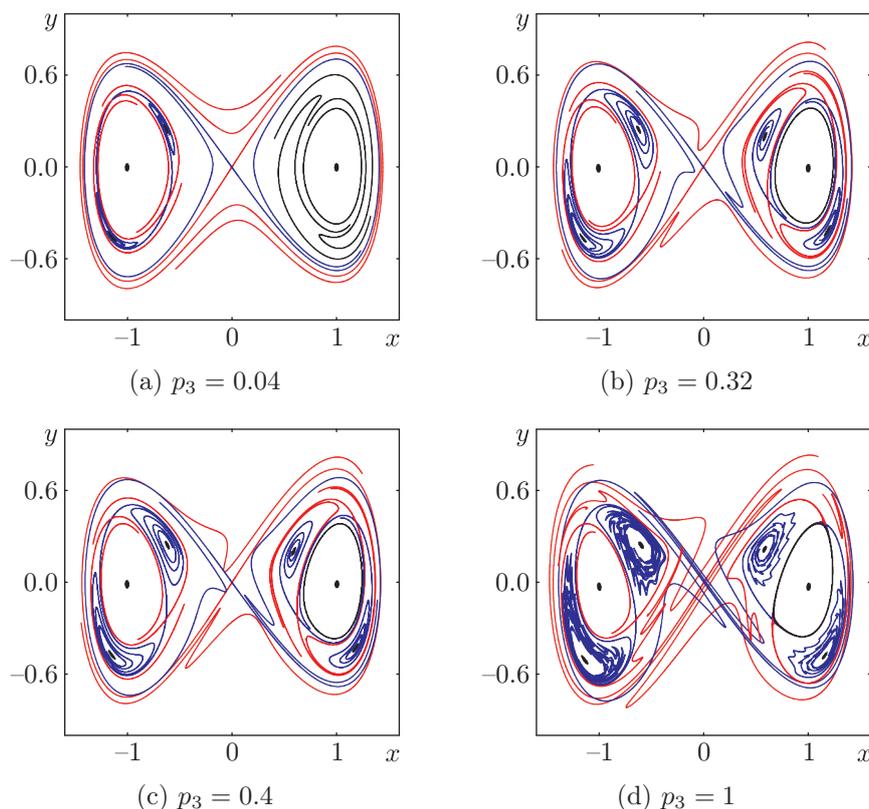


Рис. 15. Поведение сепаратрис неподвижной точки $(0, 0)$ обратного отображения Пуанкаре, порожденного уравнением (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.94566$, $p_2 = 0.017$, $p_4 = 2.5$ и различных значениях параметра p_3 .

На рисунке 17 показано, как устроены области притяжения/отталкивания периодических периода два точек в областях G_1^\pm . На рисунке 17а показана структура границы, разделяющей области притяжения устойчивой неподвижной точки в области G_1^- и устойчивой замкнутой инвариантной кривой в области G_2 для прямого отображения Пуанкаре. Эта граница совпадает с устойчивыми сепаратрисами (на рисунке они выделены красным цветом) седловых периодических периода два точек. На рисунке 17b белым цветом показана область притяжения устойчивой замкнутой инвариантной кривой в области G_1^+ , а зеленым цветом — области притяжения других аттракторов (устойчивых периодических периода два точек, расположенных в областях G_1^\pm) обратного отображения Пуанкаре. Фрактальная размерность d границы областей притяжения, изображенной на рисунке 17b, приблизительно равна 1.6.

Рисунок 18 иллюстрирует график зависимости фрактальной размерности границ областей притяжения аттракторов обратного отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при фиксированных ε , p_1 , p_2 , p_4 от параметра p_3 . Видим, что касание сепаратрис седловой неподвижной точки обратного отображения Пуанкаре происходит при $p_3^{**} \approx 0.4$, тогда как переход фрактальной размерности через единицу осуществляется при $p_3^* \approx 0.31$.

Полученный результат согласуется с теорией [13]: при данном типе гомоклинического касания (касания «изнутри») для обратного отображения Пуанкаре (седловая величина в этом случае отрицательна) переход от простой динамики к сложной осуществляется до момента возникновения негрубой гомоклинической кривой.

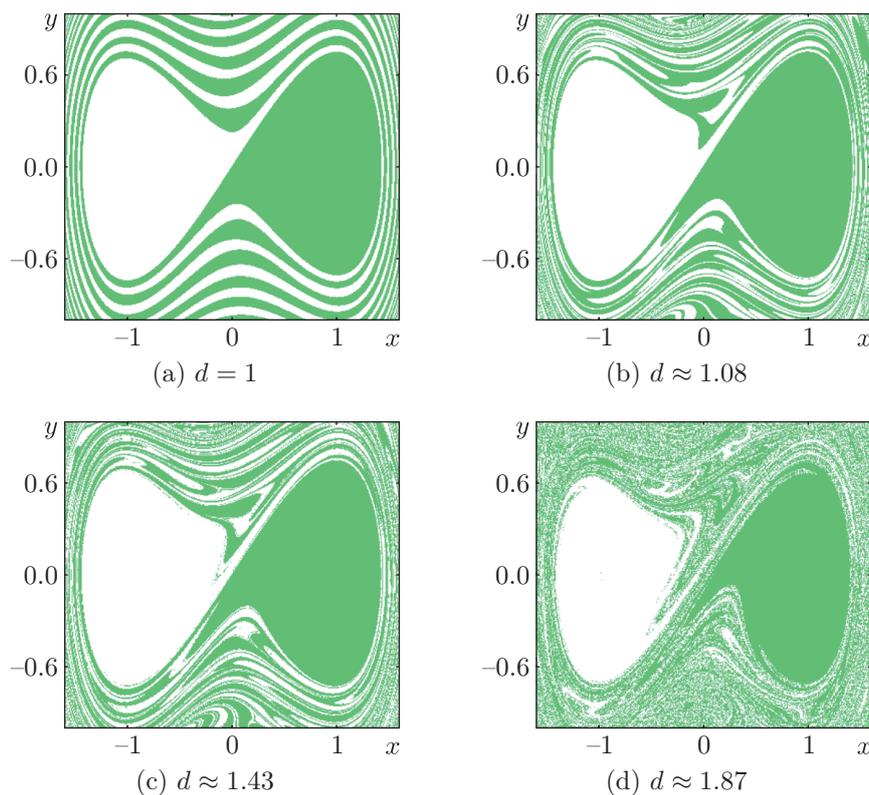


Рис. 16. Структура границ областей притяжения аттракторов обратного отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.94566$, $p_2 = 0.017$, $p_4 = 2.5$ и различных значениях параметра p_3 : (a) $p_3 = 0.04$, (b) $p_3 = 0.32$, (c) $p_3 = 0.4$, (d) $p_3 = 1$.

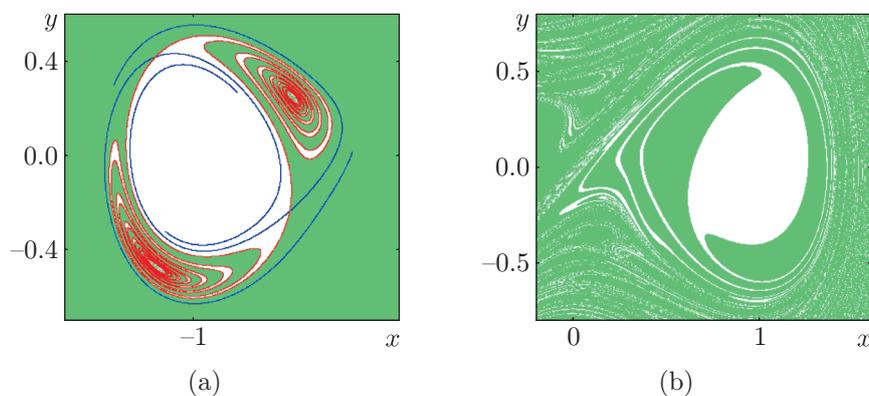


Рис. 17. Структура границ областей притяжения аттракторов прямого (a) и обратного (b) отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.94566$, $p_2 = 0.017$, $p_3 = 0.4$, $p_4 = 2.5$.

Таким образом, в случае существования у прямого (обратного) отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) как минимум двух устойчивых режимов, граница областей притяжения которых совпадает с устойчивым многообразием седловой точки, справедливо следующее

Утверждение. Момент перехода фрактальной размерности границ областей притяжения аттракторов отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) через единицу может предшествовать моменту возникновения негрубой гомоклинической кривой.

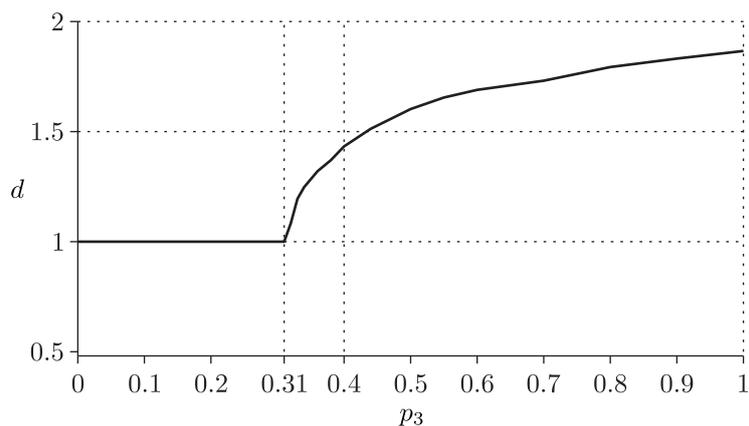


Рис. 18. График зависимости фрактальной размерности границ областей притяжения аттракторов обратного отображения Пуанкаре для уравнения (2.5) при $\varepsilon = 0.12$, $p_1 = 0.94566$, $p_2 = 0.017$, $p_4 = 2.5$ от параметра p_3 ; $p_3^* \approx 0.4$ — момент возникновения первого гомоклинического касания.

4. Заключение

Задача о воздействии малых периодических по времени сил на нелинейное уравнение с гомоклинической «восьмеркой» седла является важнейшей задачей теории бифуркаций. Одной из проблем глобального исследования таких уравнений является проблема существования гомоклинических структур Пуанкаре и связанных с ними нетривиальных гиперболических структур и сложной динамики.

В настоящей работе построено разбиение плоскости параметров (p_1, p_2) на области существования грубой гомоклинической кривой седлового периодического движения. Обнаружена область (гомоклиническая зона) с негладкими границами. Универсальность структуры таких границ в системах с «восьмеркой» отмечалась в работе [5]. Приводится детализация области внутри такой зоны, подтверждающая полученные в работе [5] результаты. С помощью программы WinSet проиллюстрированы основные типы гомоклинических структур с касанием соответствующих сепаратрис седловой неподвижной точки отображения Пуанкаре.

Далее решается вопрос о возможности прогнозирования поведения решений в долгосрочном временном периоде. Для исследования этого вопроса используется предложенный в работе [15] алгоритм вычисления фрактальной размерности границ областей притяжения устойчивых режимов, которая служит мерой чувствительности системы к небольшим вариациям начальных условий вблизи таких границ. Установлено, что границы областей притяжения аттракторов системы могут обладать фрактальными свойствами еще до момента первого касания сепаратрис. Таким образом, моменту возникновения первого гомоклинического касания сепаратрис может предшествовать момент перехода от регулярной динамики с предсказуемым поведением решений к динамике с чувствительной зависимостью от начальных условий.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Морозову А. Д. за постановку задачи и полезные обсуждения. Автор также благодарен Гонченко С. В. за внимание к работе и ценные указания, Драгунову Т. Н. за предоставление реализованного алгоритма вычисления показателя неопределенности начальных условий.

Список литературы

- [1] Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
- [2] Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. Москва: Мир, 1990. 312 с.
- [3] Litvak-Hinenzon A., Rom-Kedar V. Symmetry-breaking perturbations and strange attractors // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, no. 5, pp. 4964–4978.
- [4] Ravichandran V., Chinnathambiam V., Rajasekar S. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force // *Phys. A*, 2007, vol. 376, pp. 223–236.
- [5] Gonchenko S. V., Simó C., Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, no. 3, pp. 621–678.
- [6] Костромина О. С., Морозов А. Д. О предельных циклах в асимметричном уравнении Дюффинга – Ван-дер-Поля // *Вестник ННГУ*, 2012, № 1, с. 115–121.
- [7] Morozov A. D., Kostromina O. S. On periodic perturbations of asymmetric Duffing – Van-der-Pol equation // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2014, vol. 14, no. 5, 1450061, 16 pp.
- [8] Тураев Д. В. Об одном случае бифуркаций контура, образованного двумя гомоклиническими кривыми седла // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. трудов / Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: ГГУ, 1984. С. 162–175.*
- [9] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Ч. 2. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
- [10] Костромина О. С., Морозов А. Д. О периодических по времени возмущениях двумерных гамильтоновых систем с гомоклинической восьмеркой // *Вестник ННГУ*, 2013, № 1, с. 177–183.
- [11] Пуанкаре А. О проблеме трех тел и об уравнениях динамики: Ч. 2 // *Избранные труды: Т. 2: Новые методы небесной механики / под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда, И. Б. Погрёбьского. Москва: Наука, 1972. С. 359–452.*
- [12] Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре – Биркгофа // *Матем. сб.*, 1967, т. 74, № 3, с. 378–397.
- [13] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой: 1 // *Матем. сб.*, 1972, т. 88, № 4, с. 475–492; Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой: 2 // *Матем. сб.*, 1973, т. 90, № 1, с. 139–156.
- [14] Морозов А. Д. О полном качественном исследовании уравнения Дюффинга // *Дифференциальные уравнения*, 1976, т. 12, № 2, с. 241–255.
- [15] McDonald S. W., Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Fractal basin boundaries // *Phys. D*, 1985, vol. 17, no. 2, pp. 125–153.
- [16] Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. матем. общ-ва*, 1963, т. 12, с. 3–52.
- [17] Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва – Ижевск: РХД, 2005. 420 с.
- [18] Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 304 с.
- [19] Драгунов Т. Н. Анализ и визуализация инвариантных множеств некоторых классов динамических систем: Дис. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород: ННГУ, 2002. 103 с.



On the investigation of the bifurcation and chaotic phenomena in the system with a homoclinic “figure-eight”

Olga S. Kostromina

N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
Prospekt Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia
os.kostromina@yandex.ru

Small time-periodic perturbations of an asymmetric Duffing–Van-der-Pol equation with a homoclinic “figure-eight” of a saddle are considered. Using the Melnikov analytical method and numerical simulations, basic bifurcations associated with the presence of a non-rough homoclinic curve in this equation are studied. In the main parameter plane the bifurcation diagram for the Poincaré map is constructed. Depending on the parameters, the boundaries of attraction basins of stable fixed (periodic) points of the direct (inverse) Poincaré map are investigated. It is ascertained that the transition moment of the fractal dimension of attraction basin boundaries of attractors through the unit may be preceded by the moment of occurrence of the first homoclinic tangency of the invariant curves of the saddle fixed point.

MSC 2010: 37G25

Keywords: bifurcations, homoclinic Poincaré structures, attraction basins, fractal dimension, sensitive dependence on initial conditions

Received June 27, 2015, accepted December 29, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 31–52 (Russian)