



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.01, 531.36

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

Об устойчивости двухзвенной траектории параболоидного бильярда Биркгофа

А. П. Маркеев

Изучается движение по инерции материальной точки в плоской области, ограниченной двумя соосными параболойдами. Внутри области точка движется прямолинейно, соударения с граничными кривыми предполагаются абсолютно упругими. Существует двухзвенная периодическая траектория, для которой точка попеременно соударяется с граничными параболойдами в их вершинах, а в промежутках между соударениями точка движется по общей оси параболойдов. Исследуется нелинейная задача об устойчивости этой двухзвенной траектории точки.

Ключевые слова: отображение, канонические преобразования, система Гамильтона, устойчивость

1. Введение

Рассмотрим систему, представляющую собой материальную точку, движущуюся по инерции в плоскости Oxy в области, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (рис. 1). При движении точка время от времени соударяется с граничными кривыми. Удар предполагается абсолютно упругим. В промежутках между соударениями точка движется по отрезкам прямых, концы которых лежат на граничных кривых.

Получено 10 февраля 2016 года
После доработки 22 февраля 2016 года

Работа выполнена в Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14.01.00380).

Маркеев Анатолий Павлович
markeev@ipmnet.ru

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, д. 101, стр. 1



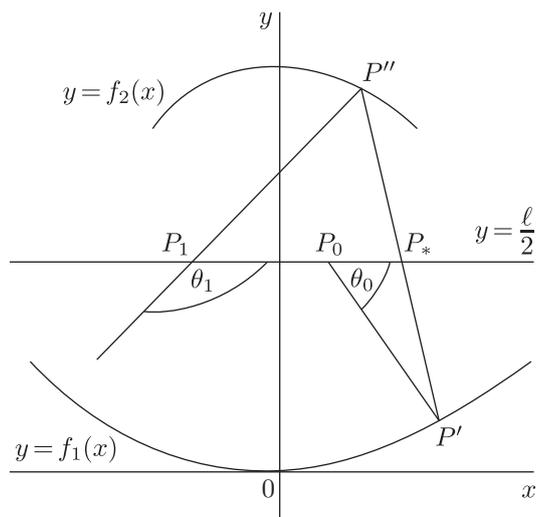


Рис. 1. К построению отображения.

Рассматриваемая материальная система является частным случаем систем, которые впервые изучались в работах [1, 2] и которые называют бильярдами Биркгофа. Бильярды Биркгофа являются объектом изучения в общей теории динамических систем [1–5]. Они также важны при решении прикладных задач в оптике [6], в динамике виброударных систем [3, 7] и др.

Пусть граничные кривые являются соосными параболой, задаваемыми уравнениями

$$f_1(x) = a_1x^2, \quad f_2(x) = \ell - a_2x^2, \quad (1.1)$$

где $\ell > 0$, а величины a_1 и a_2 имеют произвольные знаки. Тогда существует периодическое движение материальной точки, при котором она все время остается на оси Oy и попеременно соударяется с граничными параболой в их вершинах. Этому периодическому движению отвечает двухзвенная траектория рассматриваемого бильярда, задаваемая соотношениями

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq \ell. \quad (1.2)$$

С теоретической и прикладной точек зрения представляет интерес задача об устойчивости периодических движений бильярда Биркгофа и, в частности, его двухзвенных траекторий. Линейная задача об устойчивости двухзвенных траекторий бильярда Биркгофа (в плоском и пространственном случаях) с различных точек зрения рассмотрена в работах [3, 6, 8–12].

В работе [13] изучалась нелинейная задача об устойчивости в случае, когда одна из границ бильярда является прямолинейной. В статье [14] получены условия устойчивости двухзвенной траектории в случае, когда границей бильярда служит симметричный овал, и в случае, когда границами бильярда в окрестности концов его двухзвенной траектории являются окружности.

Отметим еще недавние исследования [15, 16], в которых рассмотрена задача о нахождении бильярдов, для которых сохраняющее площадь отображение в окрестности их двухзвенных траекторий эллиптического типа можно привести к повороту на заданный угол.

В данной статье решается нелинейная задача об устойчивости двухзвенной траектории (1.2) бильярда Биркгофа с граничными кривыми (1.1). Получены условия устойчивости и неустойчивости для почти всех значений безразмерных параметров задачи σ , δ ,

определяемых равенствами

$$\sigma = a_1 \ell, \quad \delta = a_2 \ell. \quad (1.3)$$

При решении задачи используются разработанные ранее [17] методы и алгоритмы исследования устойчивости неподвижных точек отображений, сохраняющих площадь.

2. Построение отображения

Пусть масса материальной точки равна единице. Тогда координаты x , y точки и проекции \dot{x} , \dot{y} вектора ее скорости на оси координат будут канонически сопряженными переменными. Единицу измерения времени выберем так, чтобы постоянная во все время движения величина скорости точки равнялась единице. Для исследования устойчивости двухзвенной траектории (1.2) зафиксируем уровень энергии $H = 1/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1/2$ и рассмотрим возмущенные траектории на поверхности сечения Пуанкаре $y = \ell/2$ [18].

Пусть в начальный момент времени материальная точка находится в точке $P_0(x_0, \ell/2)$, а направление ее движения составляет угол θ_0 с осью Ox (рис. 1). Тогда

$$\cos \theta_0 = \dot{x}_0, \quad \sin \theta_0 = \sqrt{1 - \dot{x}_0^2} \quad (2.1)$$

и до первого соударения точки с кривой $y = f_1(x)$ точка движется по прямой P_0P' , задаваемой уравнением

$$y = -\operatorname{tg} \theta_0 (x - x_0) + \frac{\ell}{2}. \quad (2.2)$$

Соударение с граничной кривой $y = f_1(x)$ происходит в точке $P'(x', f_1(x'))$, абсцисса которой, в соответствии с (2.2), является корнем уравнения

$$x' = x_0 + \operatorname{ctg} \theta_0 \left(\frac{\ell}{2} - f_1(x') \right). \quad (2.3)$$

После абсолютно упругого соударения с кривой $y = f_1(x)$ материальная точка движется по прямой $P'P''$, задаваемой уравнением

$$y = \operatorname{tg}(2\alpha_1 + \theta_0)(x - x') + f_1(x'), \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{df_1(x')}{dx'}. \quad (2.4)$$

Эта прямая пересекает прямую $y = \ell/2$ в точке $P_*(x_*, \ell/2)$. Для величины x_* , определяемой соотношениями (2.1), (2.3) и (2.4), имеем выражение

$$x_* = x' + \frac{\sqrt{1 - \dot{x}_0^2} (\cos 2\alpha_1 \dot{x}_0 - \sin 2\alpha_1 \sqrt{1 - \dot{x}_0^2})}{\dot{x}_0 (\sin 2\alpha_1 \dot{x}_0 + \cos 2\alpha_1 \sqrt{1 - \dot{x}_0^2})} (x' - x_0), \quad (2.5)$$

а соответствующий импульс материальной точки вычисляется по формуле

$$\dot{x}_* = \cos 2\alpha_1 \dot{x}_0 - \sin 2\alpha_1 \sqrt{1 - \dot{x}_0^2}. \quad (2.6)$$

Абсцисса точки $P''(x'', f_2(x''))$, в которой происходит соударение материальной точки с граничной кривой $y = f_2(x)$, является корнем уравнения

$$x'' = x' + \operatorname{ctg}(2\alpha_1 + \theta_0) (f_2(x'') - f_1(x')). \quad (2.7)$$

Угол θ_1 , задающий направление движения материальной точки после ее абсолютно упругого соударения с кривой $y = f_2(x)$, вычисляется по формуле

$$\theta_1 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \theta_0, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{df_2(x'')}{dx''}, \quad (2.8)$$

а движение происходит по прямой, имеющей уравнение

$$y = -\operatorname{tg} \theta_1 (x - x'') + f_2(x''). \quad (2.9)$$

Абсцисса точки $P_1(x_1, \ell/2)$ пересечения прямой (2.9) с прямой $y = \ell/2$ является корнем уравнения

$$x_1 = x'' - \operatorname{ctg} \theta_1 \left(\frac{\ell}{2} - f_2(x'') \right). \quad (2.10)$$

Равенства (2.1), (2.3), (2.4) и (2.7)–(2.10) определяют функции $x_1 = x_1(x_0, \dot{x}_0)$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(x_0, \dot{x}_0)$, задающие зависимость значений канонически сопряженных переменных x_1 , $\dot{x}_1 = \cos \theta_1$ в момент второго пересечения траектории возмущенного движения материальной точки с прямой $y = \ell/2$ от их значений x_0 , \dot{x}_0 , отвечающих начальному моменту. Определяемое функциями $x_1 = x_1(x_0, \dot{x}_0)$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(x_0, \dot{x}_0)$ отображение $x_0, \dot{x}_0 \rightarrow x_1, \dot{x}_1$ плоскости (x, \dot{x}) в себя сохраняет площадь. Чтобы убедиться в этом, очевидно, достаточно показать, что имеет место равенство

$$\frac{\partial(x_*, \dot{x}_*)}{\partial(x_0, \dot{x}_0)} = 1, \quad (2.11)$$

являющееся условием сохранения площади при отображении $x_0, \dot{x}_0 \rightarrow x_*, \dot{x}_*$, задаваемом формулами (2.5), (2.6) и отвечающем первому пересечению возмущенной траектории с прямой $y = \ell/2$.

Из соотношений (2.1), (2.3), (2.4) можно получить следующие выражения для частных производных величин x' и α_1 по x_0, \dot{x}_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x_0} &= \frac{\sqrt{1 - \dot{x}_0^2}}{\sqrt{1 - \dot{x}_0^2} + \dot{x}_0 \operatorname{tg} \alpha_1}, & \frac{\partial x'}{\partial \dot{x}_0} &= \frac{x' - x_0}{\dot{x}_0 (1 - \dot{x}_0^2)} \frac{\partial x'}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_0} &= \cos^2 \alpha_1 \frac{d^2 f_1(x')}{dx'^2} \frac{\partial x'}{\partial x_0}, & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{x}_0} &= \cos^2 \alpha_1 \frac{d^2 f_1(x')}{dx'^2} \frac{\partial x'}{\partial \dot{x}_0}. \end{aligned}$$

Опираясь на эти выражения, непосредственным вычислением убеждаемся в справедливости равенства (2.11).

Функции $x_1 = x_1(x_0, \dot{x}_0)$, $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(x_0, \dot{x}_0)$ можно представить в виде рядов, сходящихся при достаточно малых значениях $|x_0|$, $|\dot{x}_0|$. При помощи компьютерных систем аналитических вычислений эти ряды были получены до членов седьмой степени включительно относительно x_0, \dot{x}_0 . Оказалось, что ряды не содержат члены четных степеней.

Введем безразмерные переменные u, v , положив $x_0 = \ell u$, $\dot{x}_0 = v$ и, соответственно, $x_1 = \ell u_1$, $\dot{x}_1 = v_1$. В новых переменных имеем отображение $u, v \rightarrow u_1, v_1$, причем коэффициенты рядов функций $u_1(u, v)$, $v_1(u, v)$ являются функциями двух безразмерных параметров (1.3). Выпишем отображение $u, v \rightarrow u_1, v_1$, приведя явные выражения для коэффициентов членов рядов только до третьей степени включительно:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \partial S_4 / \partial v + O_5 \\ v + \partial S_4 / \partial u + O_5 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 1 - 2\delta + 8\delta\sigma - 6\sigma, & b &= 2 - 3\delta + 4\delta\sigma - 3\sigma, \\ c &= -4(\delta - 4\delta\sigma + \sigma), & d &= 1 - 6\delta + 8\delta\sigma - 2\sigma, \end{aligned} \quad (2.13)$$

а S_4 — форма четвертой степени относительно u, v :

$$S_4(u, v) = \sum_{r+s=4} s_{rs} u^r v^s, \quad (2.14)$$

где коэффициенты задаются равенствами

$$\begin{aligned} s_{40} &= 8(\sigma + \delta - 4\sigma\delta)[2(4\sigma - 1)^3\delta^3 - (10\sigma - 1)(4\sigma - 1)^2\delta^2 + \\ &\quad + \sigma(10\sigma - 1)(4\sigma - 1)\delta - \sigma^2(6\sigma - 1)], \\ s_{31} &= 4(\sigma + \delta - 4\sigma\delta)[8(4\sigma - 3)(4\sigma - 1)^2\delta^3 - 8(4\sigma - 1)(20\sigma^2 - 17\sigma + 2)\delta^2 + \\ &\quad + (160\sigma^3 - 136\sigma^2 + 24\sigma - 1)\delta - \sigma(24\sigma^2 - 16\sigma + 1)], \\ s_{22} &= -24(4\sigma - 1)^2(4\sigma - 3)^2\delta^4 + 12(4\sigma - 1)(4\sigma - 3)(48\sigma^2 - 40\sigma + 5)\delta^3 - \\ &\quad - 24(160\sigma^4 - 256\sigma^3 + 130\sigma^2 - 22\sigma + 1)\delta^2 + \\ &\quad + (768\sigma^4 - 1056\sigma^3 + 432\sigma^2 - 48\sigma + 1)\delta - \sigma(72\sigma^3 - 84\sigma^2 + 24\sigma - 1), \\ s_{13} &= -8(4\sigma - 1)(4\sigma - 3)^3\delta^4 + 8(24\sigma^2 - 20\sigma + 3)(4\sigma - 3)^2\delta^3 - \\ &\quad - (4\sigma - 3)(320\sigma^3 - 432\sigma^2 + 168\sigma - 15)\delta^2 + \\ &\quad + 2(2\sigma - 1)(64\sigma^3 - 88\sigma^2 + 33\sigma - 2)\delta - \sigma(24\sigma^3 - 40\sigma^2 + 21\sigma - 4), \\ s_{04} &= -(4\sigma - 3)^4\delta^4 + \frac{1}{2}(12\sigma - 7)(4\sigma - 3)^3\delta^3 - (2\sigma - 1)(5\sigma - 3)(4\sigma - 3)^2\delta^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4}(8\sigma - 5)(4\sigma - 3)(2\sigma - 1)^2\delta - \frac{1}{4}(\sigma - 1)(2\sigma - 1)(6\sigma^2 - 4\sigma + 1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.12) и далее через O_m обозначается совокупность членов, степень которых не ниже m .

Задача об устойчивости двухзвенной траектории (1.2) материальной точки эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (2.12).

3. О линеаризованном отображении

Характеристическое уравнение линеаризованного отображения (2.12) имеет вид

$$\varrho^2 - 2A\varrho + 1 = 0, \quad A = 1 - 4(\sigma - 2\sigma\delta + \delta). \quad (3.1)$$

Если $|A| > 1$, то неподвижная точка $u = v = 0$ нелинейного отображения (2.12) неустойчива, так как в этом случае у уравнения (3.1) есть корень, модуль которого больше единицы [19]. На рисунке 2 в плоскости (σ, δ) области неустойчивости выделены штриховкой. В незаштрихованных на рисунке 2 областях выполняется неравенство $|A| \leq 1$, являющееся необходимым условием устойчивости неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (2.12). Здесь оба корня уравнения (3.1) имеют модули, равные единице. Если при этом существует такое натуральное число k , что $\varrho^k = 1$, то говорят, что имеет место резонанс k -го порядка.

Условие $|A| < 1$ выполняется в двух областях, задаваемых неравенствами

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \delta < \frac{\sigma}{2\sigma - 1} \quad (3.2)$$

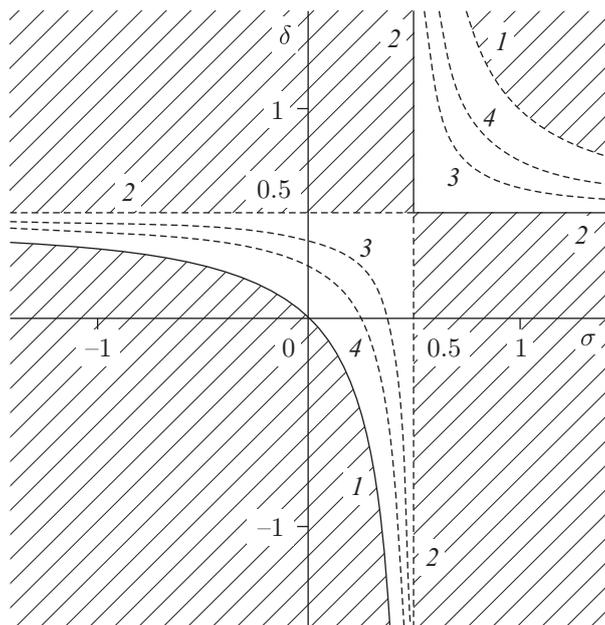


Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости; области неустойчивости заштрихованы.

и

$$\sigma < \frac{1}{2}, \quad \frac{\sigma}{2\sigma - 1} < \delta < \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

В областях (3.2) и (3.3) корни уравнения (3.1) комплексно-сопряженные

$$\varrho = \exp(\pm i\alpha), \quad \cos \alpha = A, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - A^2} \quad (3.4)$$

и неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (2.12) устойчива в первом приближении.

На ветвях гиперболы

$$\delta = \frac{\sigma}{2\sigma - 1}, \quad (3.5)$$

являющейся криволинейной границей областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении, величина A равна 1 и корни уравнения (3.1) кратные: $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$ (резонанс первого порядка; ветви кривой (3.5) на рисунке 2 обозначены цифрой 1). На прямолинейных границах областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении $\sigma = 1/2$ и $\delta = 1/2$ имеем $A = -1$, и здесь $\varrho_1 = \varrho_2 = -1$ (резонанс второго порядка; на рисунке 2 прямолинейные границы обозначены цифрой 2).

Несложный анализ показывает, что на криволинейной границе (3.5) и во всех точках прямолинейных границ, кроме точки их пересечения, в которой $\sigma = \delta = 1/2$, матрица линеаризованного отображения (2.12) не приводится к диагональной форме. А при $\sigma = \delta = 1/2$ имеем $a = d = -1$, $c = b = 0$, то есть матрица линеаризованного отображения (2.12) является диагональной. Поэтому [19] на криволинейной границе и во всех точках прямолинейных границ, кроме одной их точки $\sigma = \delta = 1/2$, неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (2.12) неустойчива в первом приближении. В точке же $\sigma = \delta = 1/2$ в первом приближении имеет место устойчивость.

Для строгого решения задачи об устойчивости при значениях параметров σ , δ , лежащих в областях устойчивости в первом приближении или на их границах, необходим нелинейный анализ отображения (2.12).

4. О способе нелинейного исследования устойчивости

Согласно алгоритму из статьи [17], предварительно следует сделать в отображении (2.12) линейную каноническую замену переменных (с валентностью μ , равной $(n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12})^{-1}$)

$$u = n_{11}x + n_{12}y, \quad v = n_{21}x + n_{22}y, \quad (4.1)$$

выбрав ее так, чтобы в новых переменных матрица линеаризованного отображения имела вещественную нормальную форму \mathbf{G} .

В новых переменных x, y исходное отображение (2.12) будет композицией двух отображений, сохраняющих площадь. Одно отображение $x_*, y_* \rightarrow x_1, y_1$ определяется равенством

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

а другое отображение $x, y \rightarrow x_*, y_*$ близко к тождественному и задается неявно при помощи производящей функции $F(x_*, y)$:

$$x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad y_* = \frac{\partial F}{\partial x_*}, \quad (4.3)$$

$$F = x_*y + \sum_{m=2}^{\infty} F_{2m}(x_*, y), \quad (4.4)$$

где F_{2m} — форма степени $2m$ относительно x_*, y ,

$$F_{2m} = \sum_{r+s=2m} f_{rs} x_*^r y^s.$$

Коэффициенты f_{rs} выражаются через коэффициенты разложения (2.12) по алгоритму статьи [20]. В частности, форма $F_4(x, y)$ может быть выражена через форму S_4 из (2.14) по следующей формуле [21]:

$$F_4 = \mu S_4(n_{11}x + n_{12}y, n_{21}x + n_{22}y). \quad (4.5)$$

Условия устойчивости и неустойчивости неподвижной точки отображения выражаются [17] через коэффициенты f_{rs} разложения (4.4).

5. Нелинейный анализ на границах областей неустойчивости и устойчивости в первом приближении

В этом разделе излагаются результаты исследования нелинейной задачи об устойчивости неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (2.12) для значений параметров σ, δ , лежащих на границах областей неустойчивости и областей (3.2) и (3.3) устойчивости в первом приближении.

Частный случай $\sigma = \delta = 0$. В этом случае дополнительное нелинейное исследование не требуется, так как при $\sigma = \delta = 0$ граничные параболы (1.1) вырождаются в параллельные прямые $y = 0$ и $y = \ell$ и из простых физических соображений следует, что двухзвенная траектория (1.2) неустойчива.

Случай криволинейной границы (3.5). На кривой (3.5) величины (2.13) будут функциями одного параметра σ :

$$a = -\frac{4\sigma^2 - 6\sigma + 1}{2\sigma - 1}, \quad b = -\frac{2(\sigma - 1)^2}{2\sigma - 1}, \quad c = \frac{8\sigma^2}{2\sigma - 1}, \quad d = \frac{4\sigma^2 - 2\sigma - 1}{2\sigma - 1}; \quad (5.1)$$

вещественной нормальной формой матрицы линеаризованного отображения (2.12) является жорданова клетка \mathbf{G} с элементами $g_{11} = g_{22} = g_{12} = 1$, $g_{21} = 0$.

1. Пусть $\sigma \neq 1$. Тогда, согласно (3.5), и $\delta \neq 1$. Каноническую замену переменных (4.1), приводящую отображение (2.12) к форме (4.2)–(4.4), можно взять в виде

$$u = x, \quad v = -\frac{2\sigma}{\sigma - 1}x - \frac{2\sigma - 1}{2(\sigma - 1)^2}y. \quad (5.2)$$

Из равенств (2.14), (3.5), (4.1), (4.5) и (5.2) находим форму F_4 , входящую в разложение (4.4). Для ее коэффициента f_{40} , в частности, получаем выражение

$$f_{40} = -\frac{8\sigma^4}{(2\sigma - 1)(\sigma - 1)^2}. \quad (5.3)$$

Величина (5.3) отрицательна, если $\sigma > 1/2$, и положительна, если $\sigma < 1/2$. Поэтому [17] на ветви гиперболы (3.5), являющейся криволинейной границей области (3.2) (на рисунке 2 изображена штриховой линией), неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (2.12) устойчива, а на ветви, являющейся границей области (3.3) (на рисунке 2 изображена сплошной линией), имеет место неустойчивость.

2. Пусть теперь $\sigma = \delta = 1$. В этом случае граничные параболы бильярда имеют уравнения $y = x^2/\ell$ и $y = \ell - x^2/\ell$. Фокусы парабол находятся на одинаковых расстояниях $\ell/4$ от их вершин $(0, 0)$ и $(0, \ell)$, а радиусы кривизны парабол в вершинах одинаковы и равны $\ell/2$.

Величины (2.13) имеют следующие значения: $a = 1$, $b = 0$, $c = 8$, $d = 1$. Матрица \mathbf{G} будет такой же, как и в предыдущем случае, когда $\sigma \neq 1$. В качестве замены переменных (4.1) можно взять замену $u = y$, $v = 8x$. Вычисления показывают, что $f_{40} = -128 < 0$. И, следовательно, в точке $\sigma = \delta = 1$ (как и во всех других точках криволинейной границы области (3.2)) имеет место устойчивость.

Случаи прямолинейных границ $\sigma = 1/2$, $\delta \neq 1/2$ и $\delta = 1/2$, $\sigma \neq 1/2$. На вертикальной границе $\sigma = 1/2$, $\delta \neq 1/2$ величины (2.13) будут функциями параметра δ ,

$$a = 2(\delta - 1), \quad b = -\frac{1}{2}(2\delta - 1), \quad c = 2(2\delta - 1), \quad d = -2\delta,$$

а на горизонтальной границе $\delta = 1/2$, $\sigma \neq 1/2$ — функциями параметра σ ,

$$a = -2\sigma, \quad b = -\frac{1}{2}(2\sigma - 1), \quad c = 2(2\sigma - 1), \quad d = 2(\sigma - 1).$$

Для обеих этих границ вещественной нормальной формой матрицы линеаризованного отображения (2.12) будет жорданова клетка \mathbf{G} с элементами $g_{11} = g_{22} = -g_{12} = -1$, $g_{21} = 0$.

На границе $\sigma = 1/2$, $\delta \neq 1/2$ замену переменных (4.1) можно взять в виде

$$u = x, \quad v = 2x - \frac{2}{2\delta - 1}y,$$

и для коэффициента f_{40} формы F_4 из разложения (4.4) имеем выражение

$$f_{40} = 2 - 4\delta. \quad (5.4)$$

На границе $\delta = 1/2$, $\sigma \neq 1/2$

$$u = x, \quad v = -2x - \frac{2}{2\sigma - 1} y$$

и

$$f_{40} = 2 - 4\sigma. \quad (5.5)$$

Согласно [17], неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (2.12) устойчива, если $f_{40} > 0$, и неустойчива, если $f_{40} < 0$. Поэтому из выражений (5.4) и (5.5) следует, что на участке вертикальной границы, лежащем выше (ниже) точки $\sigma = 1/2$, $\delta = 1/2$, и участке горизонтальной границы, лежащем правее (левее) этой точки, имеет место неустойчивость (устойчивость). На рисунке 2 участки устойчивости и неустойчивости изображены, соответственно, штриховыми и сплошными линиями.

Исследование устойчивости в случае $\sigma = 1/2$, $\delta = 1/2$. В этом случае границы бильярда являются софокусными парабололами $y = x^2/(2\ell)$ и $y = \ell - x^2/(2\ell)$, общий фокус которых находится в точке $(0, \ell/2)$. Такой бильярд является интегрируемым, так как существует интеграл

$$\dot{x} \left[\dot{x} \left(y - \frac{\ell}{2} \right) - x\dot{y} \right] = \text{const}, \quad (5.6)$$

независимый от интеграла энергии $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \text{const}$. Интеграл (5.6) (в несколько иных переменных) получен впервые в работе [22], а затем в статье [23].

При $\sigma = \delta = 1/2$ отображение (2.12) имеет вид

$$u_1 = -u + 2u^2v - 2u^3v^2 - 4u^2v^3 + O_7, \quad v_1 = -v - 2uv^2 - 2u^2v^3 + 2uv^4 + O_7. \quad (5.7)$$

Из (5.6) следует, что для этого отображения (отвечающего постоянному значению $y = \ell/2$) существует интеграл

$$G(u, v) = uv\sqrt{1 - v^2} = \text{const}, \quad (5.8)$$

то есть $G(u_1, v_1) \equiv G(u, v)$.

Покажем, что неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (5.7) неустойчива. Для этого удобно рассмотреть не само отображение (5.7), а его вторую степень. Это отображение близко к тождественному и задается равенствами

$$u_2 = u - 4u^2v + 8u^3v^2 + 8u^2v^3 + O_7, \quad v_2 = v + 4uv^2 + 8u^2v^3 - 4uv^4 + O_7. \quad (5.9)$$

Как и отображение (5.7), отображение (5.9), очевидно, имеет интеграл (5.8). И, следовательно [24], существует не зависящая от времени функция Гамильтона $H(q, p)$, такая, что траектории $q(t)$, $p(t)$ канонической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (5.10)$$

порождают отображение (5.9): если $q(0) = u$, $p(0) = v$, то равенства (5.9) задают значения $q(t)$, $p(t)$ при $t = 1$, то есть $q(1) = u_2$, $p(1) = v_2$.

Система (5.10) имеет первый интеграл $H = \text{const}$, который, конечно, будет интегралом и для отображения (5.9). Поэтому H является функцией от $G(q, p)$, где функция G определена равенством (5.8). Из (5.9) и (5.10) можно получить, что

$$H = f(h) = h + g(h), \quad (5.11)$$

где

$$h = -2G^2(q, p) = -2q^2p^2(1 - p^2), \quad (5.12)$$

а $g(h)$ — совокупность членов выше седьмой степени относительно q, p .

Задача об устойчивости неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (5.9) эквивалентна задаче об устойчивости положения равновесия $q = p = 0$ системы (5.10) с функцией Гамильтона (5.11). Для доказательства неустойчивости воспользуемся теоремой Четаева [19]. В качестве функции V возьмем функцию $V = qp$, а за область $V > 0$ примем область $q > 0, p > 0$. Из (5.10)–(5.12) получаем следующее выражение для производной функции V :

$$\dot{V} = 4q^2p^4 \frac{df}{dh}. \quad (5.13)$$

Но, согласно (5.11), в достаточно малой окрестности точки $q = 0, p = 0$ величина df/dh положительна. Следовательно, в малой окрестности положения равновесия в области $V > 0$ имеем $\dot{V} > 0$, и по теореме Четаева это положение равновесия неустойчиво.

6. Нелинейный анализ внутри областей устойчивости в первом приближении

Сделаем в отображении (2.12) линейную замену переменных (4.1)

$$u = x, \quad v = -\frac{a - \cos \alpha}{b} x + \frac{\sin \alpha}{b} y,$$

где $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ определены равенствами (3.4). Для элементов матрицы \mathbf{G} отображения (4.2) будем иметь следующие выражения: $g_{11} = g_{22} = \cos \alpha$, $g_{12} = -g_{21} = \sin \alpha$. В первом приближении отображение в новых переменных представляет собой поворот на угол α .

Внутри областей устойчивости в первом приближении возможны резонансы, порядок которых больше двух. В нелинейной задаче об устойчивости наиболее важны резонансы третьего и четвертого порядков, так как они, как правило, проявляются уже при учете первых нелинейных членов в представлении отображения в виде рядов.

В изучаемой задаче об устойчивости двухзвенных траекторий (1.2) резонанс третьего порядка реализуется на кривой

$$\delta = \frac{8\sigma - 3}{8(2\sigma - 1)}, \quad (6.1)$$

а резонанс четвертого порядка — на кривой

$$\delta = \frac{4\sigma - 1}{4(2\sigma - 1)}. \quad (6.2)$$

На рисунке 2 ветви кривых резонансов третьего и четвертого порядков обозначены цифрами 3 и 4 соответственно.



В отображении (2.12), отвечающем изучаемой задаче, нет членов второй степени относительно u, v . Поэтому [17] резонанс третьего порядка не влияет на результаты исследования устойчивости при учете в рядах (2.12) членов до третьей степени включительно. Здесь важно наличие резонанса четвертого порядка.

6.1. Анализ устойчивости при отсутствии резонанса четвертого порядка

Пусть параметры σ, δ лежат в области (3.2) или (3.3) и не принадлежат кривой (6.2) резонанса четвертого порядка. Тогда при помощи близкой к тождественной канонической замены переменных $x, y \rightarrow q, p$ отображение (4.2) можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_* \\ p_* \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где

$$q_* = q + 2\pi c_2 (q^2 + p^2)p + O_5, \quad p_* = p - 2\pi c_2 (q^2 + p^2)q + O_5, \quad (6.4)$$

а c_2 является функцией параметров σ, δ , которая выражается через коэффициенты формы F_4 по формулам (4.20) и (4.21) статьи [17]. Вычисления показывают, что величина c_2 обращается в нуль на кривой, задаваемой уравнением

$$8(2\sigma - 1)^2 \delta^3 + 8(2\delta - 1)^2 \sigma^3 - (4\sigma - 1)^2 \delta^2 - (4\delta - 1)^2 \sigma^2 + 2\sigma\delta(8\sigma\delta - 1) = 0. \quad (6.5)$$

Можно проверить, что в области (3.2) равенство (6.5) невозможно. В области же (3.3) оно выполняется на кривой γ , изображенной на рисунке 3 сплошной линией. Кривая γ проходит через начало координат, пересекает прямую $\delta = \sigma$ в точке $B(1/4, 1/4)$ и является симметричной относительно этой прямой.

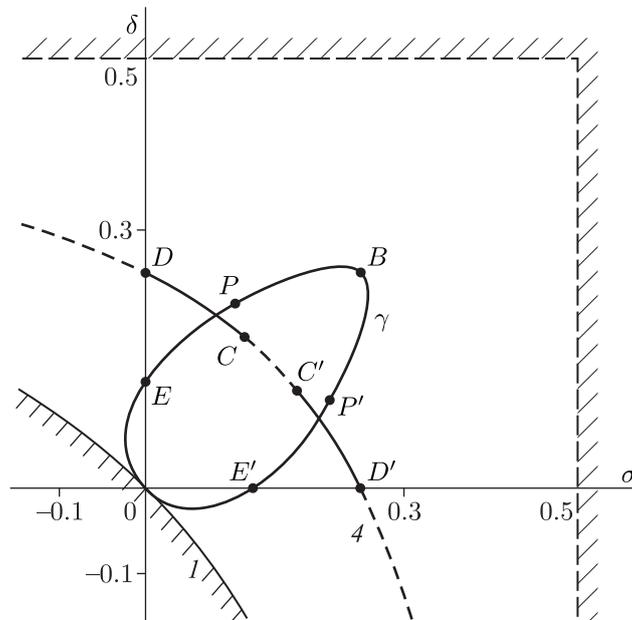


Рис. 3. Фрагмент области (3.3) устойчивости в первом приближении; $B(1/4, 1/4)$, $D(0, 1/4)$, $D'(1/4, 0)$, $C(0.11408, 0.17610)$, $C'(0.17610, 0.11408)$, $E(0, 1/8)$, $E'(1/8, 0)$.

Если параметры σ , δ принадлежат областям (3.2) и (3.3) устойчивости в первом приближении и не попадают на кривую резонанса четвертого порядка (6.2) и на кривую γ , то, согласно [24–26], неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (2.12) устойчива.

6.2. Об устойчивости в случае резонанса четвертого порядка

Пусть параметры σ , δ лежат на кривой (6.2) резонанса четвертого порядка. Устойчивость неподвижной точки отображения определяется по знаку функции $\chi_1(\sigma) = \gamma_2^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2$, где γ_2 , α_2 , β_2 вычисляются по формулам (4.46)–(4.48) статьи [17]. Учтя, что в разложении (4.4) отсутствует форма F_3 , получим

$$\chi_1 = \frac{\sigma(4\sigma - 1)(16\sigma^3 - 16\sigma^2 + 8\sigma - 1)(32\sigma^3 - 32\sigma^2 + 12\sigma - 1)}{\pi^2(2\sigma - 1)^2(8\sigma^2 - 12\sigma + 5)^2}. \quad (6.6)$$

1. На лежащей в области (3.2) ветви кривой (6.2) (изображенной на рисунке 2 штриховой линией) функция χ_1 положительна. И, следовательно, здесь неподвижная точка отображения устойчива [17].

Ветвь кривой (6.2), проходящая в области (3.3) (см. рис. 3), разбивается точками $D(0, 1/4)$, $D'(1/4, 0)$, $C(0.11408, 0.17610)$, $C'(0.17610, 0.11408)$ на пять участков. На участках $\sigma < 0$, $0.11408 < \sigma < 0.17610$ и $1/4 < \sigma < 1/2$ функция (6.6) положительна, и здесь неподвижная точка отображения устойчива, а на участках $0 < \sigma < 0.11408$ и $0.17610 < \sigma < 1/4$ — отрицательна, и здесь имеет место неустойчивость [17]. Участки устойчивости и неустойчивости изображены на рисунке 3 штриховыми и сплошными линиями соответственно.

В конечных точках D , D' и C , C' функция (6.6) обращается в нуль и здесь для строгого решения вопроса об устойчивости требуется в отображении учесть члены выше третьей степени относительно u , v .

2. Рассмотрим отображение (2.12), учитывая члены до пятой степени включительно. Устойчивость неподвижной точки отображения может быть определена [17] по знаку функции $\chi_2(\sigma) = \gamma_2\gamma_3 - \alpha_2\alpha_3 - \beta_2\beta_3$, где α_i , β_i , γ_i ($i = 2, 3$) выражаются через коэффициенты форм F_4 и F_6 разложения (4.4) по формулам (4.51) из [10].

Вычисления показывают, что в точках C и C' величина $\chi_2 = 0.00001$. Так как она положительна, то неподвижная точка отображения устойчива [17]. В точках же D и D' величина χ_2 , как показывают вычисления, обращается в нуль и, следовательно [17], эти точки требуют дополнительного исследования. Так как бильярды, отвечающие точкам D и D' , физически не отличаются, то это дополнительное исследование проведем ниже только для точки D' .

3. Пусть $\sigma = 1/4$, а $\delta = 0$. Тогда одна из граничных кривых бильярда является параболой $y = x^2/(4\ell)$, а вторая — горизонтальной прямой $y = \ell$, проходящей через фокус этой параболы. Как показано в статье [23], этот бильярд является интегрируемым, так как он допускает интеграл, который (в наших обозначениях) записывается в виде

$$\dot{x}^2[\dot{x}(y - \ell) - xy]^2 = \text{const}. \quad (6.7)$$

Действуя аналогично разделу 5, покажем неустойчивость неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (2.12). Для этого рассмотрим четвертую степень отображения (2.12) при $\sigma = 1/4$, $\delta = 0$. Это отображение, u , $v \rightarrow u_4$, v_4 , близко к тождественному и задается

равенствами

$$\begin{aligned} u_4 &= u - 2u^2v - 3uv^2 - v^3 + 2u^3v^2 + 6u^2v^3 + 3uv^4 + O_7, \\ v_4 &= v + 2uv^2 + v^3 + 2u^2v^3 + O_7. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из (6.7) следует, что это (полученное при $y = \ell/2$) отображение имеет интеграл

$$G(u, v) = v^2(v + 2u\sqrt{1 - v^2})^2 = \text{const}, \quad (6.9)$$

и, следовательно, можно считать [24], что оно порождается (за время $t = 1$) системой дифференциальных уравнений вида (5.10). Используя равенства (6.8), можно получить, что функция Гамильтона H задается равенством (5.11), в котором $h = -G(q, p)/4$, а $g(h) = o(h)$ в малой окрестности положения равновесия $q = p = 0$ системы (5.10). Неустойчивость положения равновесия, как и в разделе 5, можно доказать при помощи теоремы Четаева. Функцию V здесь возьмем в виде

$$V = q^3p^2(p + 2q\sqrt{1 - p^2})^2, \quad (6.10)$$

а за область $V > 0$ примем область $q < 0, p < 0$. Для производной \dot{V} имеем выражение

$$\dot{V} = 3 \frac{q^2p^3(p + 2q\sqrt{1 - p^2})[q(2p^2 - 1) - p\sqrt{1 - p^2}]}{\sqrt{1 - p^2}} \frac{df}{dh}. \quad (6.11)$$

В области $V > 0$ при достаточно малых $|q|, |p|$ функция (6.11) положительна, что, на основании теоремы Четаева, доказывает неустойчивость положения равновесия системы (5.10), а следовательно, и неустойчивость неподвижной точки $u = v = 0$ отображения (6.8).

6.3. Исследование устойчивости для значений параметров σ, δ , принадлежащих кривой γ

На кривой γ есть две точки (0.0817, 0.2012) и (0.2012, 0.0817), в которых она пересекается с кривой (6.2) резонанса четвертого порядка. Эти точки лежат внутри участков DC и $C'D'$ резонансной кривой (см. рис. 3) и, согласно проведенному выше исследованию, в них имеет место неустойчивость.

Рассмотрим все другие точки кривой γ , отличные от точек ее пересечения с кривой (6.2). В этих точках величина c_2 равна нулю и, следовательно, в четвертом приближении относительно q, p отображение (6.3) представляет собой поворот на не зависящий от q, p угол, равный α .

1. Сначала рассмотрим резонансы третьего, пятого и шестого порядков. В точке $B(1/4, 1/4)$ (см. рис. 3) кривой γ реализуется резонанс третьего порядка (6.1). Отвечающие этой точке границы бильярда являются параболой $y = x^2/(4\ell)$ и $y = \ell - x^2/(4\ell)$. Вершина одной из этих парабол лежит в фокусе другой параболы.

Пусть $\chi_3 = |c_3| - \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$, где c_3, d_3, e_3 выражаются через коэффициенты форм F_4 и F_6 разложения (4.4) по формулам (4.41) статьи [17]. Согласно [17], неподвижная точка отображения будет устойчивой, если $\chi_3 > 0$, и неустойчивой, если $\chi_3 < 0$. Вычисления показывают, что в точке B

$$c_3 = \frac{7\sqrt{3}}{324\pi}, \quad d_3 = 0, \quad e_3 = \frac{7\sqrt{3}}{324\pi}.$$

Поэтому $\chi_3 = 0$ и вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения в случае $\sigma = \delta = 1/4$ остается открытым.

Две (не показанные на рис. 3) точки $(0.0250, 0.1555)$ и $(0.1555, 0.0250)$ на кривой γ являются точками резонанса пятого порядка. Но в разложении (4.4) нет форм нечетной степени, а вопрос об устойчивости траектории (1.2) решается формами до восьмой степени включительно. Поэтому резонансы пятого порядка не влияют на результаты исследования.

Резонансу шестого порядка на кривой γ отвечают точки $E(0, 1/8)$ и $E'(1/8, 0)$. Для этих точек одной из границ бильярда является парабола, а другой — горизонтальная прямая, находящаяся от вершины параболы на расстоянии ℓ , равном половине фокусного расстояния параболы. Для исследования устойчивости неподвижной точки отображения при значениях параметров, отвечающих точкам E и E' , вычислим величину $\chi_4 = |c_3| - \sqrt{d_3^2 + e_3^2}$, где c_3, d_3, e_3 определяются по формулам (4.54) статьи [17]. Получим

$$c_3 = \frac{7\sqrt{3}}{12\,168\pi}, \quad d_3 = \mp \frac{735}{742\,586\pi}, \quad e_3 = -\frac{1771\sqrt{3}}{26\,733\,096\pi},$$

где верхний и нижний знаки относятся к точкам E и E' соответственно. Для обеих точек величина χ_4 равна нулю, и вопрос об устойчивости остается [17] открытым.

2. В точках кривой γ , отличных от точки B резонанса третьего порядка, точек $(0.0817, 0.2012)$ и $(0.2012, 0.0817)$ резонанса четвертого порядка и точек E и E' резонанса шестого порядка (рис. 3), отображение (4.2) можно, при помощи близкого к тождественному канонического преобразования $x, y \rightarrow q, p$, привести к форме (6.3), в которой

$$q_* = q + \frac{3\pi}{2} c_3 (q^2 + p^2)^2 p + O_7, \quad p_* = p - \frac{3\pi}{2} c_3 (q^2 + p^2)^2 q + O_7. \quad (6.12)$$

Величина c_3 выражается через коэффициенты форм F_4 и F_6 по формулам (4.24) статьи [17]. При выполнении неравенства $c_3 \neq 0$ неподвижная точка отображения (2.12) устойчива [24–26]. Вычисления показали, что на кривой γ величина c_3 обращается в нуль только в двух (расположенных на рисунке 3 симметрично относительно прямой $\delta = \sigma$) точках $P(0.1019, 0.2135)$ и $P'(0.2135, 0.1019)$. В этих точках строгое решение вопроса об устойчивости требует учета в отображении (2.12) нелинейных членов до седьмой степени включительно относительно u, v .

Для значений параметров σ, δ , отвечающих точкам P и P' , корни характеристического уравнения (3.1) будут такими:

$$\varrho = -0.0877 \pm i 0.9961.$$

Для натуральных k , не превосходящих число 8, величина $\varrho^k \neq 1$, то есть в точках P и P' невозможны резонансы до восьмого порядка включительно. Поэтому [17] при помощи близкой к тождественной канонической замены переменных $x, y \rightarrow q, p$ отображение (4.2) можно привести к форме (6.3), в которой

$$q_* = q + \pi c_4 (q^2 + p^2)^3 p + O_9, \quad p_* = p - \pi c_4 (q^2 + p^2)^3 q + O_9. \quad (6.13)$$

По алгоритму статьи [10] величина c_4 выражается через коэффициенты форм F_4, F_6 и F_8 из разложения (4.4). Оказалось, что $c_4 = 0.0035$. Так как $c_4 \neq 0$, то неподвижная точка $u = v = 0$ отображения (2.12) устойчива [24–26].



Выводы

Кратко сформулируем результаты проведенного исследования задачи об устойчивости двухзвенной траектории (1.2) бильярда Биркгофа с граничными кривыми (1.1). Результаты представлены на рисунках 2 и 3 в плоскости безразмерных параметров σ , δ , определяемых равенствами (1.3).

- 1) В областях, заштрихованных на рисунке 2, траектория (1.2) неустойчива.
- 2) Внутри области (3.2) и на ее криволинейной границе (3.5) траектория (1.2) устойчива, на прямолинейных же границах (включая точку их пересечения $\sigma = \delta = 1/2$) имеет место неустойчивость.
- 3) На криволинейной границе области (3.3) траектория (1.2) неустойчива, а на прямолинейных границах — устойчива.

Внутри области (3.3) почти всюду имеет место устойчивость. Исключения составляют внутренние точки интервалов DC и $C'D'$ кривой (6.2) и две граничные точки D и D' этих интервалов, где имеет место неустойчивость. Исключительными являются также точки B , E и E' , в которых вопрос об устойчивости требует дополнительного исследования.

Список литературы

- [1] Birkhoff G.D. On the periodic motions of dynamical systems // Acta Math., 1927, vol. 50, no. 1, pp. 359–379.
- [2] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск: УдГУ, 1999. 408 с.
- [3] Козлов В. В., Трещев Д. В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. Москва: МГУ, 1991. 168 с.
- [4] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. Москва: Факториал, 1999. 768 с.
- [5] Табачников С. Геометрия и бильярды. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 180 с.
- [6] Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Москва: Физматлит, 1972. 456 с.
- [7] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. Москва: Международная программа образования, 1997. 336 с.
- [8] Трещев Д. В. К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 1988, № 2, с. 44–50.
- [9] Козлов В. В., Чигур И. И. Об устойчивости периодических траекторий пространственного бильярда // ПММ, 1991, т. 55, № 5, с. 713–717.
- [10] Абдрахманов А. М. Об устойчивости двухзвенных периодических траекторий бильярда Биркгофа на двумерных поверхностях постоянной кривизны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 1991, № 4, с. 88–90.
- [11] Козлов В. В. Двухзвенные бильярдные траектории: экстремальные свойства и устойчивость // ПММ, 2000, т. 64, № 6, с. 942–946.
- [12] Козлов В. В. Задача об устойчивости двухзвенных траекторий многомерного бильярда Биркгофа // Современные проблемы математики: Сб. ст.: К 75-летию Института / В. В. Козлов, Е. Ф. Мищенко (ред.). (Тр. МИАН, т. 273.) Москва: МАИК, 2011. С. 212–230.

- [13] Маркеев А. А. Устойчивость движения в некоторых задачах динамики систем с неударяющими связями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: МГУ, 1995. 87 с.
- [14] Kamphorst S. O., Pinto-de-Carvalho S. The first Birkhoff coefficient and the stability of 2-periodic orbits on billiards // *Experiment. Math.*, 2005, vol. 14, no. 3, pp. 299–306.
- [15] Treschev D. Billiard map and rigid rotation // *Phys. D*, 2013, vol. 255, pp. 31–34.
- [16] Трещев Д. В. Об одной задаче сопряжения в динамике бильярда // *Избранные вопросы математики и механики: Сб. ст.: К 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова / А. Г. Сергеев (ред.)*. (Тр. МИАН, т. 289.) Москва: МАИК, 2015. С. 309–317.
- [17] Маркеев А. П. Об устойчивости неподвижных точек отображений, сохраняющих площадь // *Нелинейная динамика*, 2015, т. 11, № 3, с. 503–545.
- [18] Пуанкаре А. Избранные труды: Т. 2: Новые методы небесной механики. Москва: Наука, 1972. 999 с.
- [19] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.
- [20] Маркеев А. П. Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь // *ПММ*, 2014, т. 78, № 5, с. 611–624.
- [21] Маркеев А. П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *МТТ*, 2004, № 6, с. 3–12.
- [22] Степин А. М. Интегрируемые гамильтоновы системы // *Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний: Сб. науч. тр. / Ю. А. Митропольский (ред.)*. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1981. С. 116–170.
- [23] Ramani A., Kalliterakis A., Grammaticos B., Dorizzi B. Integrable curvilinear billiards // *Phys. Lett. A*, 1986, vol. 115, nos. 1–2, pp. 25–28.
- [24] Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. Москва: Мир, 1973. 167 с.
- [25] Зигель К., Мозер К. Лекции по небесной механике. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
- [26] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.

On the stability of the two-link trajectory of the parabolic Birkhoff billiards

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

We study the inertial motion of a material point in a planar domain bounded by two coaxial parabolas. Inside the domain the point moves along a straight line, the collisions with the boundary curves are assumed to be perfectly elastic. There is a two-link periodic trajectory, for which the point alternately collides with the boundary parabolas at their vertices, and in the intervals between collisions it moves along the common axis of the parabolas. We study the nonlinear problem of stability of the two-link trajectory of the point.

MSC 2010: 70H05, 70H15, 70E50

Keywords: map, canonical transformations, Hamilton system, stability

Received February 10, 2016, accepted February 22, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 75–90 (Russian)

