



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.542

MSC 2010: 30C20

О некоторых свойствах отображения $\exp(iz)$

И. В. Матюшкин

Изучены свойства отображения e^{iz} . Доказано, что отображение имеет одно устойчивое и бесконечное число неустойчивых положений равновесия, существует бесконечное число отталкивающих 2-периодических циклов. Средствами MATLAB эвристически показано отсутствие блуждающих точек. Дано определение точек спиральности. Как и для других гиперболических изображений, визуализируются букеты Кантора для множеств Жюлиа и Манделброта.

Ключевые слова: голоморфная динамика, фрактал, букет Кантора, гиперболическое отображение

После открытия в конце XIX века Анри Пуанкаре проблематики качественного анализа динамических систем и серии работ начала XX века Пьера Фату и Гастона Жюлиа по голоморфным функциям [1] на комплексной плоскости была установлена их связь с топологически фрактальными множествами. Бенуа Манделброт в знаменитой работе [2] 1977 года с помощью компьютера визуализировал множество, теперь названное в его честь, то есть множество таких точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых итерационная последовательность $z \rightarrow f(z) = z^2 + \lambda$, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является ограниченной при стартовой точке $z = 0$. Затем в конце 1990-х активно исследовались [3–8] другие целые и мероморфные функции: поворота на рациональный угол $z \rightarrow e^{i\pi p/q}z$, полиномиальные, дробно-линейные (весьма интересные результаты, в частности, получены для структуры множества Жюлиа для $z \rightarrow z^2 + \frac{\lambda}{z^2}$ и для $z \rightarrow z^n + \frac{\lambda}{z^n}$, $n \geq 2$) и гиперболические вида λe^z , $\lambda \frac{e^z - 1}{z}$, $\lambda \sin(z)$, $\lambda \cos(z)$, $\lambda \frac{\operatorname{sh} z}{z}$. Известно, что

Получено 24 марта 2015 года

После доработки 16 января 2016 года

Матюшкин Игорь Валерьевич

imatyushkin@mikron.ru

АО «НИИ молекулярной электроники»

124460, Россия, г. Зеленоград, Западный 1-й проезд, д. 12, стр. 1



множества Жюлиа J для рациональных целых и трансцендентных (в частности, гиперболических) целых функций обладают принципиально различной структурой [9, 10]. Для гиперболических функций множество Жюлиа, которое в силу доказанной теоремы [16] совпадает с границей точек убегания ($I = \{z: f^{(n)}(z) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$ — escaping set, $J = \partial I$), имеет морфологию нескольких так называемых букетов Кантора (Cantor's bouquet). Во многом это связано с тем, что для гиперболических функций отображение не является сжимающим и зачастую имеет свойства взрывного роста [8]. Сейчас исследования по данной тематике выросли до уровня отдельных конференций [11], диссертаций [9, 12] и фундаментальных теорем (теорема и класс Еременко–Любича, 1987) [13, 14].

К этому классу принадлежит и отображение e^{iz} , изучение свойств которого составляет предмет данной статьи. Как нетрудно видеть из замены $z \leftrightarrow iz \equiv e^{i\pi/2}z$, с точностью до поворота на 90° наше отображение является частным случаем $z_{n+1} = f_\lambda(z_n) = \lambda e^z$, $\lambda \equiv i$. При изучении свойств этого отображения мы использовали пакет MATLAB. Новизна работы состоит в том, что прежние конкретные результаты по λe^z обычно получались для $\lambda \in \mathbb{R}$ [15], вследствие чего рассматривались множества Жюлиа, но не множество Мандельброта; если же считали $\lambda \in \mathbb{C}$, то формулировались слишком общие утверждения. Заключительная часть статьи посвящена множеству Мандельброта для семейства отображений $z_{n+1} = f_\lambda(z_n) = \lambda e^{iz}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Множества Жюлиа и Мандельброта характеризуют одно и то же отображение с близких точек зрения (в одном случае параметром выступает стартовая точка, в другом — ее сдвиг от нуля, приводящий к появлению параметра в функции перехода), что подтверждается общностью их топологических элементов.

Напомним несколько определений. Целой функцией называется голоморфная функция, определенная на всей комплексной плоскости, то есть $\left\{ f \in Ent \mid f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{C} \right\}$. Согласно теореме Пикара, любая целая функция, не равная константе, принимает все значения ($Val[f] = \mathbb{C}$), кроме, быть может, одного. Функция e^{iz} удовлетворяет теореме Пикара, и $Val[e^{iz}] = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Порядком целой функции называют число $\rho \equiv \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln \|f(z)\|_{\infty, |z| < r})}{\ln r}$.

На бесконечности функция e^{iz} имеет порядок 1. Обозначим множество точек сингулярности отображения как $Sing(f^{-1})$. Классом Шпайзера называют множество целых функций с конечным числом сингулярностей $\{f \in S \subset Ent: |Sing(f^{-1})| < \infty\}$. Этому классу, например, принадлежит двухпараметрическое семейство $\{ae^z + be^{-z}\}_{(a,b) \in \mathbb{C}^2}$, а значит, и наша функция.

Обобщая определение заполняющего множества Жюлиа для рациональных отображений, можно записать $J[f]$ в терминах орбит и их неустойчивостей, если ввести абстрактную функцию «судьбы» fin :

$$\begin{aligned} orb_f(z) &\equiv \langle z_0, z_1, \dots, z_n, \dots \rangle : (z_0 = z) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} z_{n+1} = f(z_n)), \\ fin: \{orb_f(z)\} &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \\ J[f] &= \{z \in J \mid (\forall \varepsilon > 0) (\exists z_1, z_2 \in U_\varepsilon(z)) (fin(orb_f(z_1)) \neq fin(orb_f(z_2)))\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Формальное определение множества Жюлиа отсылает к нормальному семейству в смысле Монтеля [1]. Качественное определение множества, отраженное в (1), дано в книге Милнора [1]: «точка принадлежит множеству Жюлиа тогда и только тогда, когда динамика в окрестности этой точки демонстрирует чувствительную зависимость от изменений начальных данных, то есть близкие начальные данные порождают совсем другой характер поведения траектории после большого (а иногда и не очень большого) числа итераций».



В частности, траектории могут уходить в бесконечность и порождать множество точек убегания $J_{esc}[f] \subset J[f]$, $J_{esc}[f] \equiv \{z \mid |f^n(z)|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \infty\} = \{z \mid fin(orb_f(z)) = \infty\}$ или представлять собой отталкивающие p -периодические циклы (тогда удобно для последующей раскраски изображения на компьютере положить $fin(\cdot) = \sum_{k < p} N_k + s$, $1 \leq s \leq N_p$, где N_k —

общее число циклов периода k , или более грубо: $fin(\cdot) = p$). Согласно [5], для экспоненциальных отображений справедливо эквивалентное определение J как замыкания множества точек, орбиты которых уходят в бесконечность. Данное определение удобно для компьютерного исследования, им и будем пользоваться.

Притягивающие периодические циклы и аттракторы характерны для точек множества Фату. Другим примером удобства введения функции «судьбы» могут служить блуждающие точки, то есть точки, в которые орбита не возвращается — $Wand = \{z \mid \exists \varepsilon > 0 \exists U_\varepsilon(z) \exists n_0 \forall n > n_0 f^n(U_\varepsilon) \cap U_\varepsilon = \emptyset\}$. Переформулируем данное определение, быть может с небольшой потерей строгости: $Wand = \{z \mid fin(orb_f(z)) = 0\}$, $fin: (\exists \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n (z_m \in orb_f(z) \Rightarrow |z_m - z| > \varepsilon)) \mapsto 0$. Д. Салливан в 1985 году доказал [17] теорему о том, что рациональные отображения не могут иметь блуждающего домена; для трансцендентных отображений известны контрпримеры.

Итерированные отображения из класса Шпайзера изучались довольно подробно; было показано, что множество Фату (комплементарное, как известно, множеству Жюлиа) не имеет домена Бейкера. Салливаном [17] были доказаны два результата для $f_\lambda = \lambda e^z$: 1) если существует аттрактор, то орбита точки 0 стремится к нему, 2) если орбита нуля уходит в бесконечность, то множеством Жюлиа является вся комплексная плоскость. При $\lambda > 1/e$ орбита нуля уходит в бесконечность. При $\text{Im } \lambda = 0$, $0 < \text{Re } \lambda < 1/e$ доказано, что множество Жюлиа состоит из букетов Кантора. По одному из определений, букет Кантора гомеоморфен декартову произведению пыли (множества) Кантора на луч $[0; \infty)$. Другое определение восходит к работам Аарта и Оверштегена [18] и конструкции, которая в англоязычной литературе называется «straight brush».

Нетрудно видеть, что отображение e^{iz} не имеет критических точек ($df/dz \neq 0$, однако нуль может быть принят за таковую), что оно хорошо «перемешивает» вещественную и мнимую части, что в силу многолистности обратного отображения его множества Жюлиа и Фату периодичны и достаточно рассмотреть вертикальную полосу $-\pi \leq \text{Re } z \leq \pi$. Для большей наглядности запишем итерации в вещественной форме, приняв $z = Ae^{i\varphi} = x + iy$:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = (A_n \cos \varphi_n) \bmod (2\pi), \\ A_{n+1} = \exp(-A_n \sin \varphi_n), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = e^{-y_n} \cos x_n, \\ y_{n+1} = e^{-y_n} \sin x_n. \end{cases} \quad (2)$$

Из анализа (2) легко понять, что, как бы далеко ни убежала точка по амплитуде A_n , для нее существует шанс вернуться к конечным значениям A_{n+1} , если угол φ_n достаточно мал.

Утверждение 1. *Отображение $g(z) = \exp(iz)$ имеет по крайней мере одну устойчивую неподвижную точку, а именно: $z^* = 0.576412723031435 + 0.374699020737117i$ ($|z^*| \approx 0.687$).*

Доказательство. Это легко проверяется численно, а притягивающий характер следует из $|g'(z^*)| = |\exp(iz^*)| = |z^*| < 0.7 < 1$. ■

Утверждение 2. *Отображение $g(z) = \exp(iz)$ имеет бесконечно много неустойчивых неподвижных точек.*



Доказательство носит конструктивный характер. При анализе (2) возникает идея подобрать по бесконечно большой амплитуде A бесконечно малый угол φ , чтобы выполнялись оба соотношения (2). При переходе к бесконечно малым естественно заменить экспоненту и косинус первыми членами их разложения по Тейлору. Будем искать решение в виде (3):

$$\begin{cases} A(r) = r + \varepsilon(r), \\ \varphi(r) = -\frac{\ln r + \delta(r)}{r}, \end{cases} \quad r \equiv 2\pi N, \quad N \rightarrow +\infty, \quad \varepsilon(r) = o(\ln r), \quad \delta(r) = o(\ln r). \quad (3)$$

Мы вполне достигнем цели, если для каждого параметра N , достаточно большого, выпишем явно решения приближенной системы (4):

$$\begin{cases} \varphi(N) = A(N) (1 - \frac{1}{2}\varphi(N)^2) - 2\pi N, \\ \ln A(N) = -A(N)\varphi(N). \end{cases} \quad (4)$$

Покажем промежуточный результат подстановки:

$$\ln(r + \varepsilon) = \frac{\ln r + \delta}{r} (r + \varepsilon), \quad -\frac{\ln r + \delta}{r} = (r + \varepsilon) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(\ln r + \delta)^2}{r^2} \right) - r.$$

В результате получим семейство асимптотических решений:

$$\varepsilon(N) = \frac{\ln^2(2\pi N)}{4\pi N}, \quad \delta(N) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(2\pi N)}{2\pi N} \right)^2. \quad (5)$$

Неустойчивость неподвижных точек следует из $|z| = A(N) \gg 1$. ■

Утверждение 3. *Отображение $g(z) = \exp(iz)$ имеет бесконечное число 2-периодических циклов, каждый из которых является отталкивающим.*

Доказательство. Система для нахождения циклов периода 2 имеет вид

$$\begin{cases} x = e^{-\exp(-y) \cdot \sin x} \cos(e^{-y} \cos x), \\ y = e^{-\exp(-y) \cdot \sin x} \sin(e^{-y} \cos x). \end{cases} \quad (6)$$

Эта система решалась численно (рис. 1), причем рисунок 1b иллюстрирует бесконечность числа решений и показывает, что 2-периодические циклы следует искать только для $x \rightarrow -0$, $y \rightarrow -\infty$. Как и при доказательстве предыдущего утверждения, сделаем частное предположение о координатах точки орбиты цикла, а именно:

$$\begin{cases} e^{-y} \equiv -\frac{\pi}{2} + 2\pi N + \delta(N), \\ x \equiv -\frac{\ln |y|}{e^{-y}} (1 + \varepsilon(N)), \end{cases} \quad \varepsilon = o(1), \quad \delta = o(1). \quad (7)$$

Систему (7) можно трактовать как замену переменных. Подбрав такие функции $(\varepsilon(N), \delta(N))$ (по крайней мере ограниченные функции или даже стремящиеся к нулю), чтобы при $N \rightarrow \infty$ выполнялось (7), то докажем утверждение. Заметим, что частный вид (7) связан с идеей, что в (6) большое значение экспоненты будет «гаситься» тригонометрическими функциями. Пренебрегая членами третьего порядка, будем иметь $-e^{-y} \sin x =$

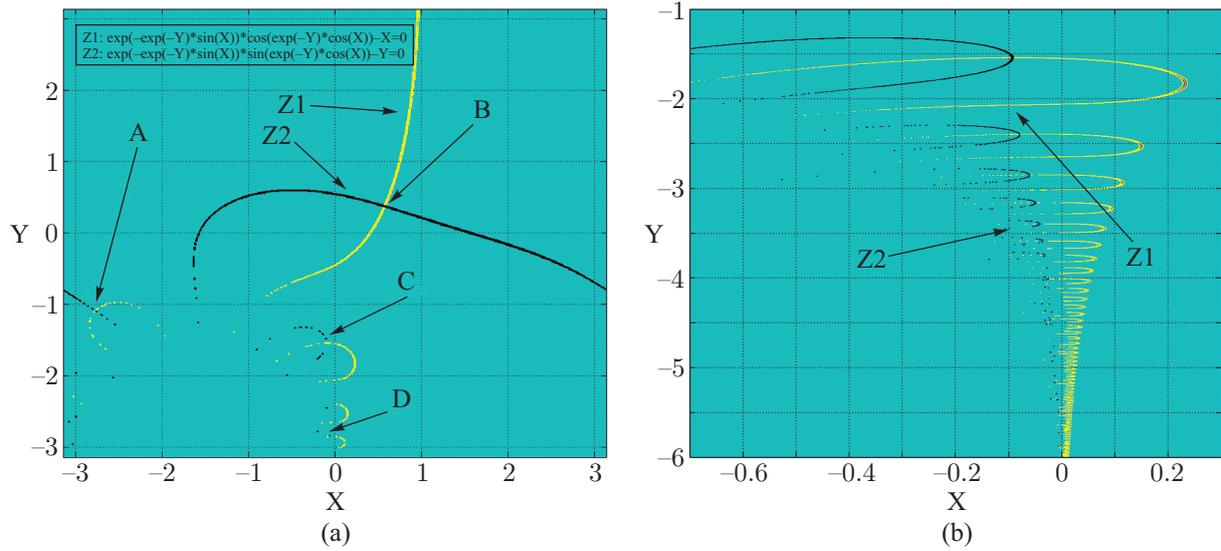


Рис. 1. Графическое решение системы (6) для нахождения 2-периодических циклов. Z1 — уравнение для действительной части, Z2 — для мнимой. A, B, C, D — некоторые точки пересечения кривых Z1 и Z2. (a) Общий вид; (b) в асимптотике $x \rightarrow 0, y \rightarrow -\infty$.

$= (1 + \varepsilon) \ln |y|, |y| = O(\ln N)$. Второе уравнение (6) примет вид

$$-|y| \approx |y| \exp(\varepsilon \ln |y|) \sin \left(\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi N + \delta \right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + \varepsilon) \ln |y|}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi N + \delta} \right)^2 \right) \right). \quad (8)$$

Логарифмируя (8) и учитывая формулы приведения, получим

$$\varepsilon(N) = \frac{1}{2 \ln |y|} \left(\delta - \frac{(1 + \varepsilon)^2 \ln^2 |y|}{\pi(4N - 1)} \right)^2 \equiv \frac{\tau^2}{2 \ln |y|} \geq 0. \quad (9)$$

Первое уравнение (6), ограничиваясь членами первого или второго порядка, приобретет вид

$$-\frac{(1 + \varepsilon) \ln |y|}{\exp(-y) \cdot \exp(\varepsilon \ln |y|)} = |y| \cdot \sin \left(\delta - \frac{(1 + \varepsilon)^2 \ln^2 |y|}{\pi(4N - 1)} \right). \quad (10)$$

Считая по умолчанию, что $\varepsilon \ln |y| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \varepsilon = o\left(\frac{1}{\ln \ln N}\right)$, получим асимптотические выражения для $\tau, \varepsilon, \delta$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\pi(2N - 1/2) \ln(\pi(2N - 1/2))} \sim \frac{1}{N \ln N}, & \delta &= \frac{1}{2} \frac{\ln^2(\pi(2N - 1/2))}{\pi(2N - 1/2)} \sim \frac{\ln^2 N}{N} \gg \tau, \\ \varepsilon &= \frac{1}{\pi^2(2N - 1/2)^2 \ln^2(\pi(2N - 1/2)) \ln(\ln(\pi(2N - 1/2)))} \sim \frac{1}{N^2 \ln N \ln \ln N}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку $|g'(z)| = |e^{-y}| \gg 1$, то отсюда следует и вторая часть утверждения. ■

Перечислим несколько первых 2-периодических циклов (рис. 1):

$$\begin{aligned} (A) & - 2.7664 - 1.0896i, & (B) & 0.5764 + 0.3746i, \\ (C) & - 0.0932 - 1.5416i, & (D) & - 0.0606 - 2.8501i. \end{aligned}$$

Отталкивающий характер циклов демонстрирует рисунок 2b, где для точки в окрестности C на протяжении четырех циклов происходит резкое накопление отклонения и затем довольно быстрое, не более чем за 10 итераций, движение к единственной притягивающей точке. Примечательно, что здесь путь к аттрактору, как и для многих других точек (но не всех), лежит через окрестность нуля, то есть формальная неподвижная точка z^* лишь «маскирует» действительный аттрактор $z = 0$ (см. цитированный выше результат Салливана).

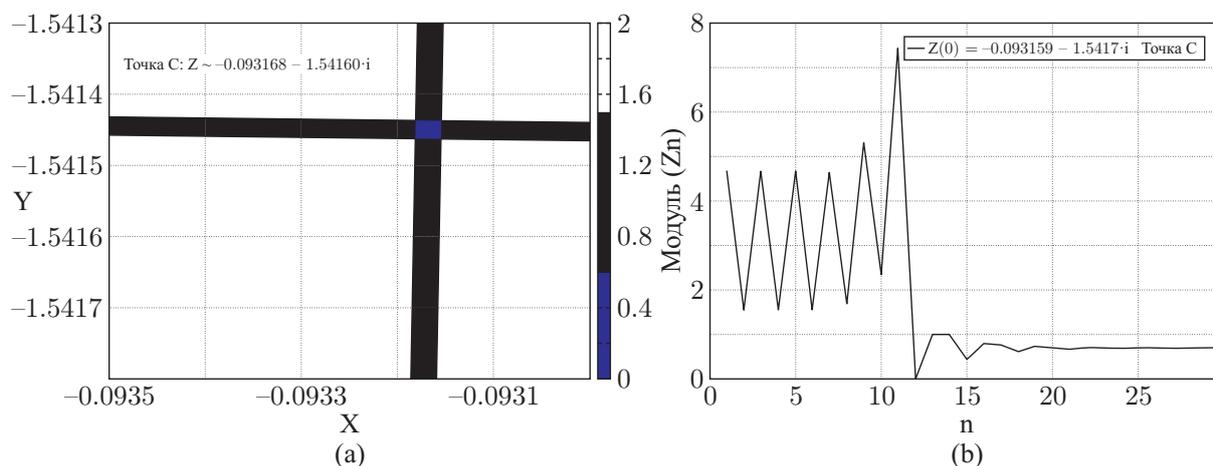


Рис. 2. (а) Области в окрестности точки C . Показаны функция $Z1(x, y) + Z2(x, y)$ в следующей цветовой гамме: 0 (синий цвет^а) — если ее модуль меньше $\varepsilon = 10^{-3}$, 1 (черный цвет) — если только одна из функций $Z1$ и $Z2$ больше ε по модулю, 2 (белый цвет) — если каждая из функций $Z1$ и $Z2$ больше ε . Шаг по координатам равен 10^{-5} . (б) Поведение орбиты точки вблизи точки C , показывающее отталкивающий характер цикла.

Что касается p -периодических циклов ($p > 2$), то для целых функций известна теорема, гарантирующая их существование и отталкивающий характер [16]. Экспериментальное их нахождение для $\exp(iz)$ крайне затруднительно!

При построении множества Жюлиа на рисунке 3 для лучшей визуализации мы учли скорость сходимости к $z^* \vee \infty$. Удобно изучать букеты Кантора, заканчивающиеся на прямой $\operatorname{Re} z = -\frac{\pi}{2}$. На рисунке 3b представлена нижняя часть множества Жюлиа с более сложной структурой. Особенности интерполяции данных в MATLAB могут привести к фантомам визуализации, например, криволинейным ромбам (рис. 3b, c), которых на самом деле нет.

На рисунке 4 при построении множеств Жюлиа и Фату использовалась иная расцветка функции «судьбы», при этом наблюдается четкая топологическая граница точек, орбиты которых проходят через нуль

$$F_{\text{null}} = \{z_0 = z \mid (\exists n \in \mathbb{N}, \exists z_n \in \operatorname{orb}_g(z)) (|z_n| < \varepsilon)\}, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \quad (12)$$

или не проходят через него. В первом случае сходимости достигается за 4 хода, а во втором — более чем за 20 ходов. Функция «судьбы» (рис. 3, 4) исчислялась как $\operatorname{fin}(z) = N \Leftrightarrow \min N: |z_N - z_{N-1}| \leq \varepsilon, z_N, z_{N-1} \in \operatorname{orb}_g(z)$, и не использовала отсылку к аттрактору в виде $|z_N - z^*| < \varepsilon$. Компьютерное исследование также не показало точек, чьи орбиты хаотичны, то есть ∞ -периодичны.

^аДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1601001/>

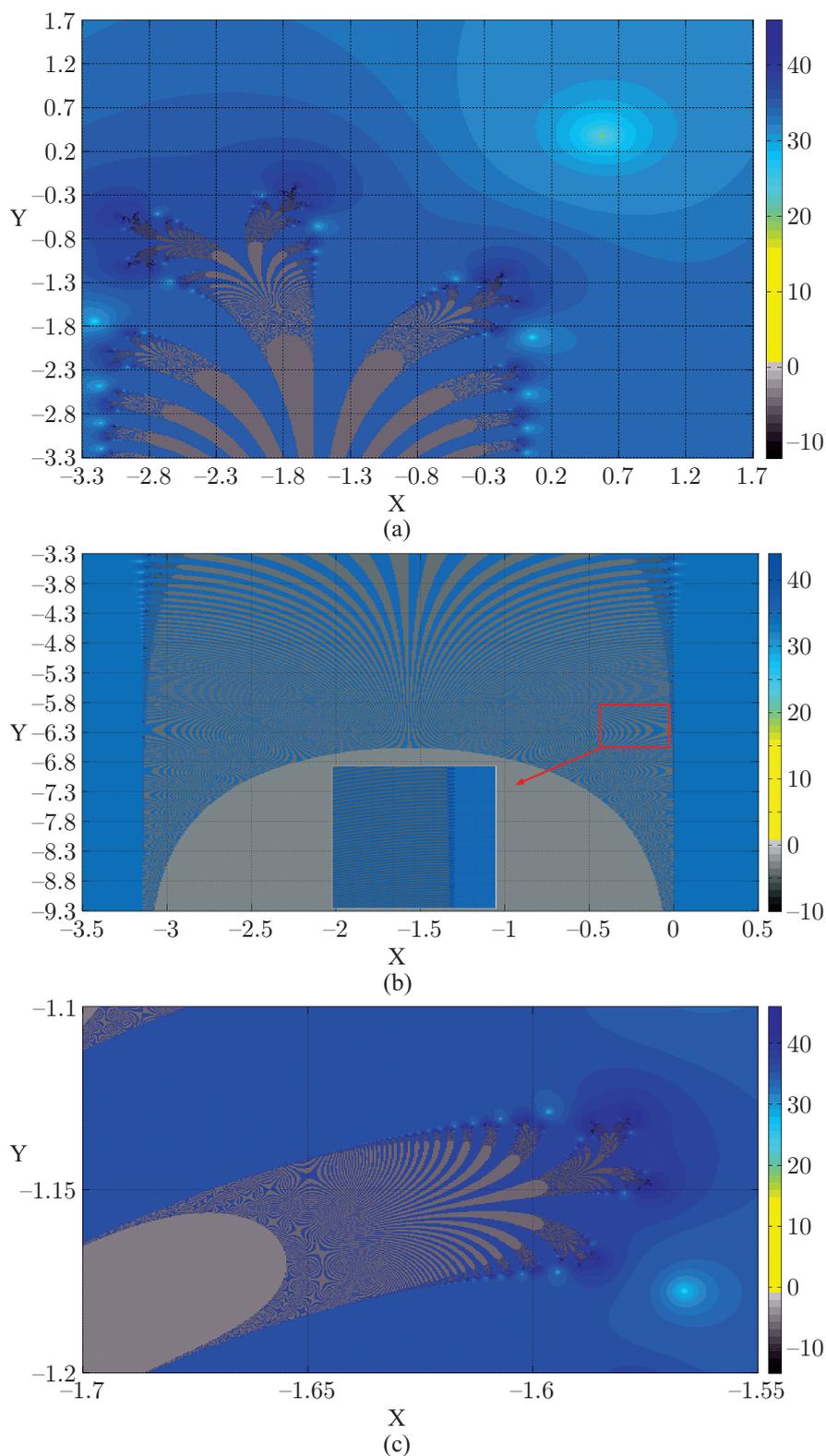


Рис. 3. Множество Жюлиа для $g(z) = \exp(iz)$, полученное в MATLAB при глубине расчета 250 шагов и уровне отсечки $\text{Inf} = 10^{309}$. (a) Общий вид, верхняя часть; (b) общий вид, нижняя часть — в красном прямоугольнике фантомный участок, вынесенный в масштабе; (c) фрагмент. Цветовая легенда означает число итераций до достижения аттрактора (с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ по модулю z) или до достижения бесконечности (первое значение Inf).

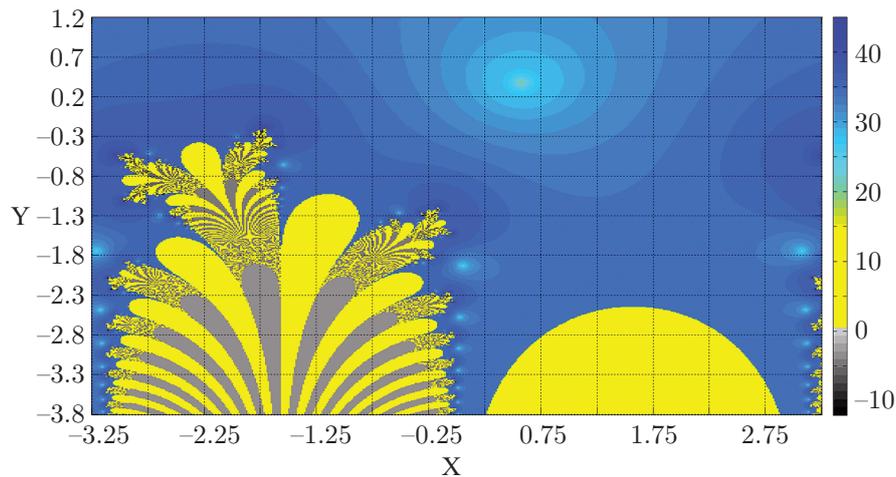


Рис. 4. Множества Жюлиа и Фату с выделением компонента F_{null} . При повышении уровня отсечки ε с 10^{-5} до 10^{-2} область этого компонента расширяется незначительно, сохраняя морфологию.

Таблица 1. Цветовая карта для рисунка 4

Значение функции «судьбы» fin	Описание	Цвет
$-12 \dots 0$	Количество ходов до достижения $z = \text{Inf}$ (берется со знаком минус)	Градиент серого (от черного)
$0 \dots 15$	Количество ходов до достижения функцией нуля (с точностью ε), если он достигается (множество F_{null}). В большинстве случаев это 3–6 ходов. Для нахождения количества ходов до сходимости к этому числу следует прибавить 27	Желтый
$15 \dots 45$	Количество ходов до достижения z^*	Градиент синего (более светлые тона отвечают более быстрой сходимости)

Утверждение 4. *Отображение $g(z) = \exp(iz)$ не имеет блуждающих точек.*

Компьютерный эксперимент показывает, что все точки уходят либо в бесконечность, либо в единственный аттрактор, в частности, проходя в окрестности нуля. Разумеется, это никоим образом не подменяет общепринятого доказательства.

Заметим, что все орбиты, проходящие через нуль, перед этим испытывали всплеск модуля z . Автор не исключает того, что некоторые точки во внутренней области множества Жюлиа (например, при $-2 \leq x \leq -1$, $-9 \leq y \leq -8$), отмеченной черным цветом на рисунке 3b, в действительности сходятся к нулю. Например, если в компьютере (MATLAB) z_{20} выражается большим числом Inf , то дальнейший расчет вести бессмысленно (если, однако, не прибегать к символьным вычислениям), и fin присваивается значение ∞ ; при этом, как уже указывалось, отображение хорошо «перемешивает» реальную и мнимую части, и поэтому не исключается тот вариант, когда при продолжении расчета было бы $\exists N > 20$: $|z_N| \sim \frac{1}{\infty} (e^{-\infty})$. Также обращает на себя внимание внешнее подобие внутренних частей

множества Жюлиа тем «языкам» (рис. 4), которые образуют точки с орбитой, проходящей через нуль. С другой стороны, эти «языки» $F_{\text{null}}(\varepsilon)$ носят относительный характер, завися, хотя и слабо, от уровня отсечки ε (по умолчанию 10^{-5}).

Путь $0 \Rightarrow z^*$ занимает 27 итераций, примерно за 10 итераций орбита попадает в окрестность аттрактора. Однако затем сходимость замедляется, что частично связано со значением мультипликатора ~ 0.68 ; при дистанции от аттрактора 2ε сходимость достигается за $3 \div 6$ итераций, а при дистанции 40ε — за $6 \div 12$ итераций.

Введенная нами функция «судьбы» позволила лучше рассмотреть (рис. 3а) множество Фату (и далее — множество Мандельброта), в котором по критерию минимизации итераций до достижения аттрактора выделяется ряд небольших областей (назовем их «светлячки»), имеющих закономерности в расположении (рис. 5). Их следует различать от концевых точек (end-points) для волосков букета Кантора, поскольку они лежат на некотором отдалении. Однако очевидно, что: а) они выделяются как начало последовательности, уходящей вглубь (рис. 3d) каждого цветка, или, выражаясь более точно, каждого компонента связности множества Фату, б) они вместе образуют сходящуюся последовательность, ведущую вглубь к внутренности множества Жюлиа (рис. 3а и рис. 5). Некоторые гипотезы о виде кривой-интерполянта можно сделать из рисунка 5, где перечислены координаты семи «светлячков». Осложняет интерполяцию дискретность значений функции.

Для определения множества Мандельброта сделаем формальную замену $z \leftrightarrow z + z_0$, но только для правой части итерационного правила $z \rightarrow g(z)$, и тогда получим семейство $z_{n+1} = g_\lambda(z_n) = \lambda \exp(iz_n)$, $\lambda \neq 0$. Для построения множества Мандельброта M использовалось его стандартное определение, аналогичное определению множества Жюлиа через точ-

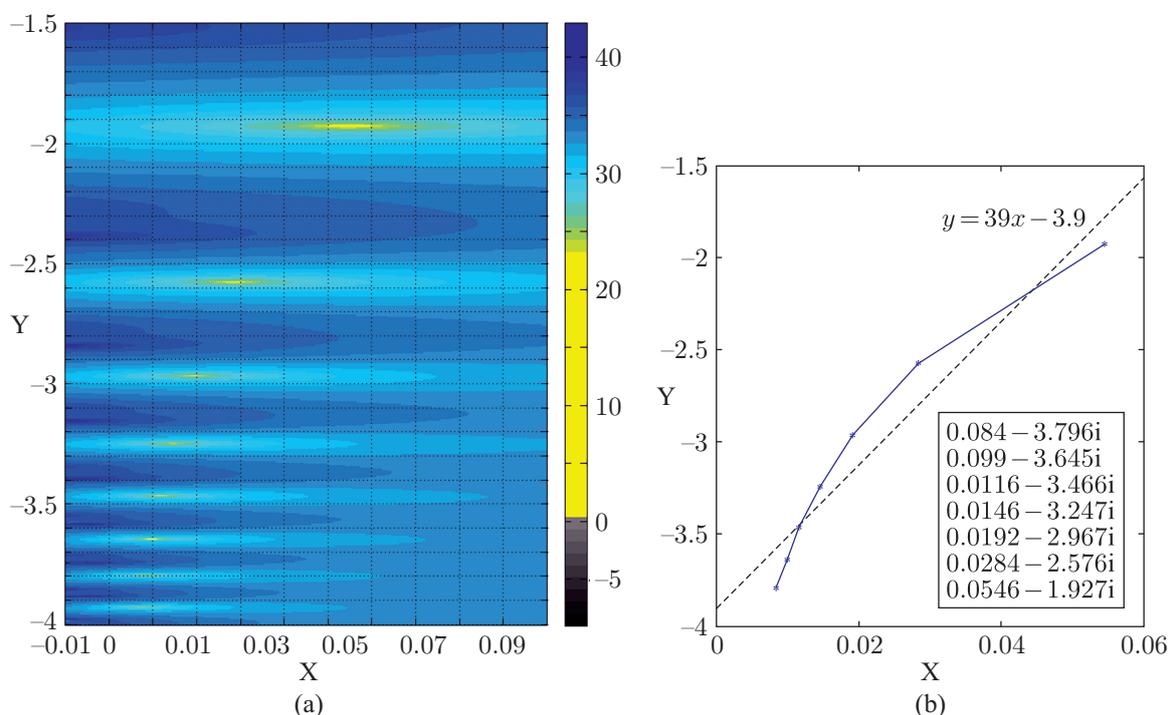


Рис. 5. Семь «светлячков» для правой части «пальма» рисунка 4 около $X = 0$. (а) Укрупненный фрагмент, показывающий наличие погрешности в определении координат, прежде всего абсцисс (связано также с дискретностью значений функции fin), (б) линейная интерполяция методом наименьших квадратов.

ки убегания: $M = \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : f_\lambda(0)^{(n)} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty\}$. На рисунке 5 показан его фрагмент, сходный по строению с множеством Жюлиа, — визуализируются те же букеты Кантора. Однако обращает на себя внимание потенциальная связность его компонент (см. рис. 5b), например, на участке $1.5 < x < 1.8$, $-0.6 < y < -0.3$; этот вопрос требует дополнительного изучения. Кроме того, множество Жюлиа, несмотря на периодичность, за счет сдвига аттрактора z^* лишено симметрии относительно вертикали, а множество Мандельброта показывает симметрию относительно перемены знака $\operatorname{Re} \lambda$. Заметим также наличие циклов большой длины, переходящих в случайный режим. При этом циклы также можно классифицировать по прохождению нуля: как и в случае множества Фату для $g(z) = \exp(iz)$ и его подмножества $F_{\text{null}}(\varepsilon)$, типичной картиной является следование за большим значением малого и ряда малых значений вплоть до быстрого возрастания функции. В отличие от множества Жюлиа, множество Мандельброта демонстрирует большее богатство (рис. 6, 7). Рассмотрим пример: при $\lambda = 5.5 + 2.65i$ имеем медленно достигаемый периодический режим с периодом 34 (после 500 итераций), при $\lambda = 5.5 + 2.7i$ — переход в бесконечность на 37 итерации ($z_{36} = (-3.96 + 7.55i) \cdot 10^4$), $\lambda = 5.5 + 2.75i$ — вновь переход в периодический режим, а при $\lambda = 5.5 + 2.73i$ — случайный режим (рис. 7), причем амплитуда не превышает 11 и не опускается ниже 173ε .

Точки, орбитами уходящие в бесконечность (и потому неподвластные компьютерному исследованию), можно специфицировать, то есть задать *fin*, не только скоростью ухода, но и какой-либо другой характеристикой, и, следовательно, более детально раскрасить J_{esc} . Интересно ввести аналог собственных значений и чисел из линейной алгебры и ввести множество точек «спиральности» J_ψ , а именно:

$$J_\psi = \left\{ z \mid \left(\begin{array}{l} (\exists \psi \in \mathbb{R}) (\exists K \subseteq \mathbb{N}, |K| = \omega) (\forall k_1, k_2 \in K), \\ ((k_1 < k_2) \Rightarrow g^{k_2}(z) = \lambda g^{k_1}(z), \lambda = \lambda_0 e^{i\psi}, |\lambda_0| > 1) \end{array} \right) \right\}. \quad (13)$$

Для $\psi = 0$ это означает, что орбита любой точки $z' \in J_\psi$ будет попадать на прямую $y = \frac{\operatorname{Im} z'}{\operatorname{Re} z'} x$ (аналог точек Пуанкаре) бесконечное число раз. Для $\psi \neq 0$ это означает, что орбита точки спиральности, пусть и с выпадением ряда точек, описывает дискретизованную спираль. Нетрудно видеть, что для отображения $z \rightarrow \lambda z$ множество точек спиральности есть вся комплексная плоскость. Тогда можно сформулировать гипотезу:

Утверждение 5. *Отображение $g(z) = \exp(iz)$ не имеет точек спиральности.*

Хочется верить, что это утверждение доказуемо в принципе.

Заключение

Большая часть полученных нами результатов получена компьютерным методом и относится, по выражению Стивена Вольфрама, к «экспериментальной математике». Если сущностью математики считать формулировку и доказательство теорем, то в отличие от вычислительной математики словосочетание «экспериментальная математика» выглядит оксюмороном. В области нелинейной динамики и фракталов, как показала практика, компьютер помогает увидеть некоторые объекты и более осмысленно задать относящиеся к ним вопросы. С другой стороны, теория «видит» такие объекты, которые компьютер, пожалуй, в принципе «увидеть» не может или же попросту «обманывает» нас. В статье есть примеры и того, и другого, и третьего. Однако ошибочно было бы сводить роль компьютера только к визуализации.

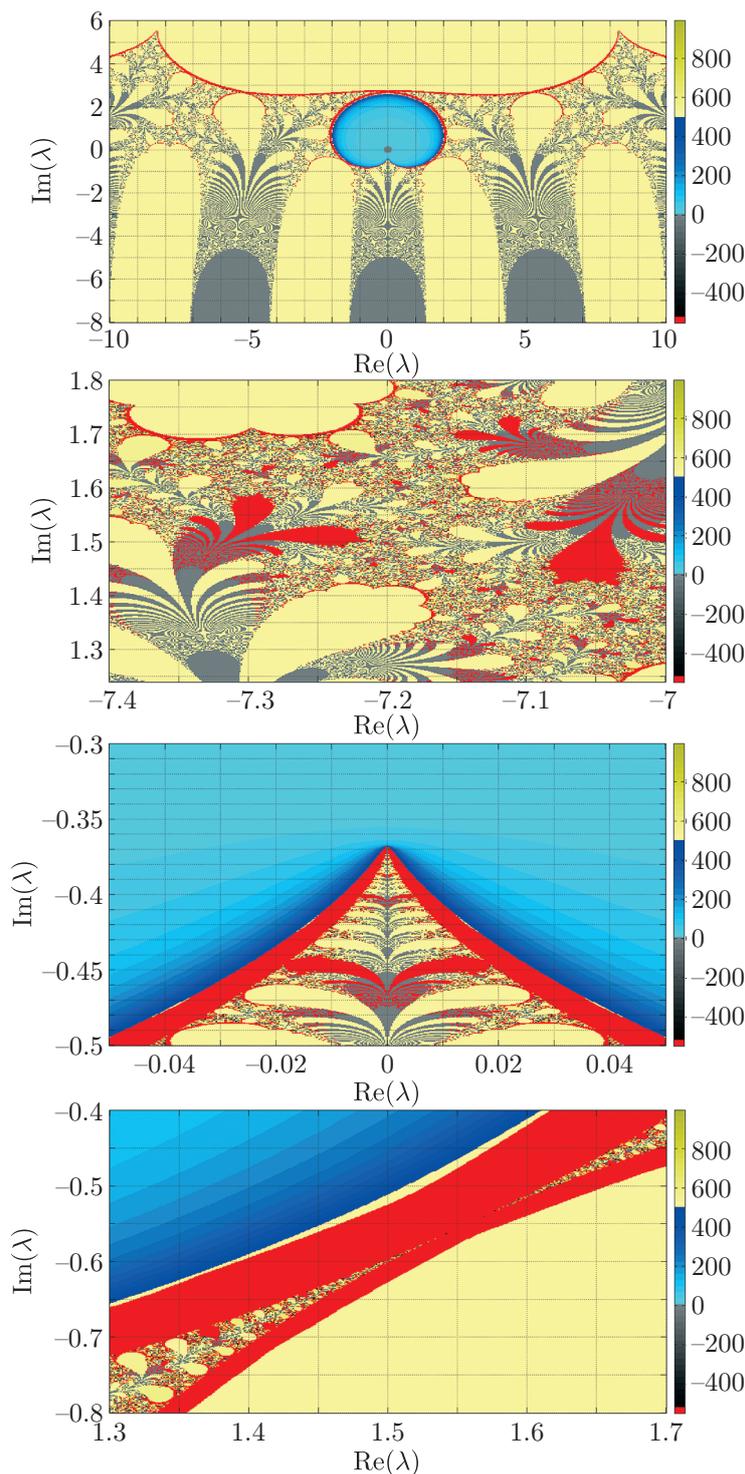


Рис. 6. Множество Мандельброта и его фрагменты для $z_{n+1} = g_\lambda(z_n) = \lambda \exp(iz_n)$, $\lambda \neq 0$. Осям абсцисс и ординат отвечают $\operatorname{Re} \lambda$, $\operatorname{Im} \lambda$ соответственно. Глубина расчета — 500 итераций. Оттенки серого — уход в бесконечность, оттенки синего — уход к аттрактору, оттенки желтого — периодическое решение (большинство циклов имеют длину около 10, от числа, указанного в легенде, надо отнять 500), красный цвет — области случайной динамики. Серая область около нуля — фантом вычислений. (а) Общий вид, (б) фрагмент в области «пересечения» двух «пальм» в левой стороне, (с) фрагмент в области конфигурации клюва, (д) фрагмент в области касания двух «пальм» вблизи бассейна притяжения.

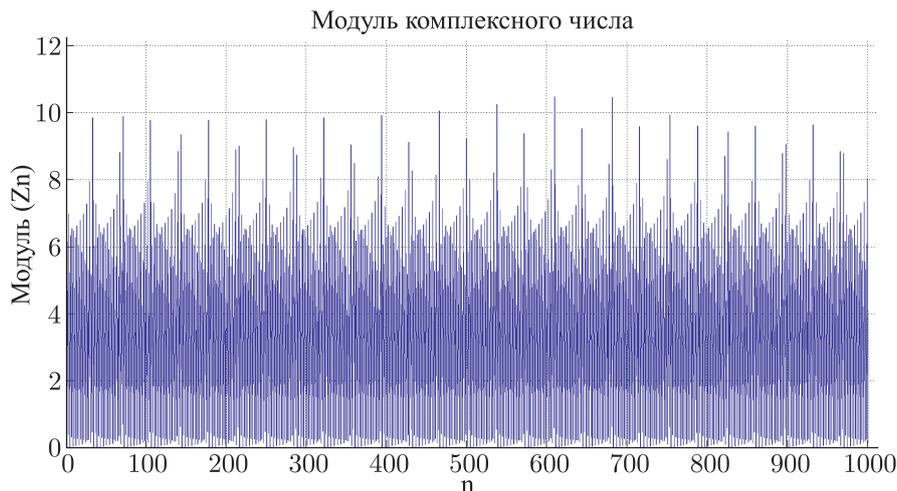


Рис. 7. Случайная динамика для $\lambda = 5.5 + 2.73i$ (n — номер итерации). Можно считать динамику квазипериодической, поскольку один и тот же паттерн повторяется при несколько различных значениях Z_n . При небольшом изменении параметра вертикальные всплески могут составлять до 10^4 , их может быть несколько (расположенных асимметрично по времени) в пределах одного квазипериода (паттерна). При другом изменении всплески выравниваются и наступает периодичность.

Например, в формуле (1) дано определение множества Жюлиа, близкое к классическому, но более грубое и одновременно более пригодное для компьютерной реализации. Из потребности компьютерной раскраски мы ввели функцию «судьбы»; перевод в цвет числа итераций до достижения бесконечности или неподвижной точки — лишь частный пример использования этой, в общем, естественной конструкции. Из той же эстетической потребности мы специфицировали разбиение множества Фату на подмножества, взяв вполне тривиально за параметр скорость сходимости. При этом мы впервые наблюдали наличие локальных ее максимумов («светлячков»), что, по-видимому, можно обобщить на все гиперболические отображения и что отличает наш случай от картины множеств Фату для рациональных отображений. Выскажем предположение, что их расположение связано со строением букетов Кантора для множества Жюлиа, а для координат выполнен параболический закон (интересна аналогия с так называемой parabola lemma для семейства $z \mapsto ae^z + be^{-z}$ [16]). Из тех же соображений раскраски мы выделили подмножество F_{null} и впервые визуализировали его строение, причем четко выражено подобие его «язычков» и внутренних областей букетов Кантора.

Наконец, из тех же эстетических соображений мы предложили специфицировать множество убегающих точек по признаку спиральности (13) и высказали утверждение 5. И поскольку компьютер тут бессилен, то в будущем бремя доказательства ляжет на «классических» математиков.

Список литературы

- [1] Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.
- [2] Mandelbrot B. B. Fractals: Form, chance, and dimension. San Francisco, Calif.: Freeman, 1977. 365 pp.
- [3] Alexander D., Devaney R. L. A century of complex dynamics // A century of advancing mathematics / S. F. Kennedy, D. J. Albers, G. L. Alexanderson, D. Dumbaugh, F. A. Farris, D. B. Haunsperger, and P. Zorn (eds.). Washington, D.C.: Math. Assoc. America, 2015. P. 15–34.

- [4] Devaney R. L. e^z : Dynamics and bifurcation // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1991, vol. 1, no. 2, pp. 287–308.
- [5] Devaney R. L. Cantor bouquets, explosions, and Knaster continua: Dynamics of complex exponentials // *Publ. Mat.*, 1999, vol. 43, no. 1, pp. 27–54.
- [6] Kapoor G. P., Guru Prem Prasad M. Chaotic burst in the dynamics of a class of noncritically finite entire functions // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 1999, vol. 9, no. 6, pp. 1137–1151.
- [7] Kapoor G. P., Guru Prem Prasad M. Dynamics of $(e^z - 1)/z$: The Julia set and bifurcation // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1998, vol. 18, no. 6, pp. 1363–1383.
- [8] Guru Prem Prasad M. Chaotic burst in the dynamics of $f_\lambda(z) = \lambda \frac{\sinh(z)}{z}$ // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, vol. 10, no. 1, pp. 71–80.
- [9] Moreno Rocha M. On indecomposable subsets of the Julia set for unstable exponentials: PhD dissertation. Boston: Boston Univ., 2002. 79 pp.
- [10] Moreno Rocha M. Existence of indecomposable continua for unstable exponentials // *Topology Proc.*, 2003, vol. 27, no. 1, pp. 233–244.
- [11] Kotus J. «Cantor bouquets» for non-entire meromorphic functions // Workshop on Cantor bouquets in hedgehogs and transcendental iteration (june 16th-19th 2009, Toulouse, France); http://www.math.univ-toulouse.fr/anr_abc/bouquet/Slides/Janina.pdf
- [12] Mihaljević-Brandt H. Topological dynamics of transcendental entire functions: PhD Dissertation. Liverpool: Univ. of Liverpool, 2009. 137 pp.
- [13] Rempe-Gillen L., Sixsmith D. Hyperbolic entire functions and the Eremenko–Lyubich class: Class \mathcal{B} or not class \mathcal{B} ?, arXiv:1502.00492 (2015).
- [14] Al-Husseiny H. F. A study of the dynamics of the family $\lambda \frac{\sinh^m z}{z^{2m}}$ // *Iraqi J. Sci.*, 2011, vol. 52, no. 4, pp. 494–503.
- [15] Urbański M., Zdunik A. Real analyticity of Hausdorff dimension of finer Julia sets of exponential family // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 279–315.
- [16] Schleicher D. Dynamics of entire functions // *Holomorphic dynamical systems: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School (Cetraro, Italy, July 7–12, 2008)* / G. Gentili, J. Guenot, and G. Patrizio (eds). (Lecture Notes in Math., vol. 1998.) Berlin: Springer, 2010. P. 295–339.
- [17] Ghys É., Goldberg L. R., Sullivan D. P. On the measurable dynamics of $z \mapsto e^z$ // *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1985, vol. 5, no. 3, pp. 329–335.
- [18] Aarts J. M., Oversteegen L. G. The geometry of Julia sets // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1993, vol. 338, no. 2, pp. 897–918.

On some properties of an $\exp(iz)$ map

Igor V. Matyushkin

Molecular Electronics Research Institute
Zapadnyj 1st valley, 12, building 1, Zelenograd, Moscow, 124460, Russia
imatyushkin@mikron.ru

The properties of an e^{iz} map are studied. It is proved that the map has one stable and an infinite number of unstable equilibrium positions. There are an infinite number of repellent two-periodic cycles. The nonexistence of wandering points is heuristically shown by using MATLAB. The definition of helicity points is given. As for other hyperbolic maps, Cantor bouquets are visualized for the Julia and Mandelbrot sets.

MSC 2010: 30C20

Keywords: holomorphic dynamics, fractal, Cantor bouquet, hyperbolic map

Received March 24, 2015, accepted January 16, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 3–15 (Russian)