



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.9  
MSC 2010: 37G35

## **Предельный цикл как результат глобальной бифуркации в одном классе симметричных систем с разрывной правой частью**

**Ю. В. Морозов**

Рассматривается однопараметрическое семейство симметричных планарных систем филипповского типа. В работе найден интервал изменения бифуркационного параметра, при котором возникает предельный неустойчивый цикл, охватывающий конечное число особых точек, вид которых зависит от конкретного значения бифуркационного параметра из этого интервала. Также показано, что происходит перераспределение площади, ограниченной этим циклом, между областями притяжения соответствующих особых точек и внутренних предельных циклов. В работе приведены результаты численного моделирования для наиболее интересных значений бифуркационного параметра.

Ключевые слова: предельный цикл, планарная система с разрывной правой частью, глобальная бифуркация

### **1. Введение**

Исследование многих механических систем с сухим трением обычно сводится к анализу систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Даже довольно простые системы имеют сложный фазовый портрет, который может очень сильно зависеть от некоторого основного параметра, например, маятник с сухим трением, который подробно исследовался в работе [7]. С другой стороны, разрыв в правую часть вводится

---

Получено 09 июля 2015 года  
После доработки 30 декабря 2015 года

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № I.31 Президиума РАН «Актуальные проблемы робототехники» и гранта РФФИ 16-11-10215.

---

Морозов Юрий Викторович  
[tot1983@inbox.ru](mailto:tot1983@inbox.ru)  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН  
117997, Россия, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65



искусственно, например, в виде закона управления [4]. Также можно выделить еще один тип систем с разрывной правой частью: это системы, которые не описывают никакое физическое явление, но позволяют сделать качественные выводы, например о свойствах непрерывной системы, которая достаточно близка к разрывной. В данной работе рассматривается параметрическое семейство плоских систем, частной реализацией которого является загрубленная модель колесного робота [1], движущегося по заданной допустимой кривой. Особенность интерпретации модели заключается в том, что желаемая кривизна траектории зависит от используемого управления. Мы вводим разрывный закон управления в систему из [1] так, что правая часть зависит только от знака кривой переключения. Кроме того, модифицируется также параметрическое возмущение. С учетом внесенных изменений мы получим систему дифференциальных уравнений, которая является частной реализацией семейства плоских систем вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \psi_\beta(y) \left( u - \frac{C \operatorname{sign}(u)}{(1 - C|x|)^{n+1}} \right), \quad u = -U \operatorname{sign}(S_\mu^n(x, y)), \quad (1.1)$$

где точкой обозначена производная по независимой переменной  $t$ , переменную  $x \in \mathcal{R}_C = (-1/C; 1/C)$ ,  $0 < C < U$ , будем трактовать как позицию, а переменную  $y \in \mathcal{R}$  — как скорость. Параметр  $n = 0, 1, \dots, N < \infty$ , — целый строго положительный. Функция  $S_\mu^n(x, y)$  определяет кривую переключения, которая будет задана ниже. Бифуркационный параметр обозначим через  $\mu \in [0, 1]$ . Здесь и далее функция  $\psi_\beta(y)$  имеет вид  $\psi_\beta(y) = \phi_\beta(y)^3$ ,  $\phi_\beta(y) = (1 + \beta y^2)^{\frac{1}{2}}$ . Эта функции отделена от нуля и симметрична относительно оси  $O_y$  для любых  $\beta \in [0, 1]$ . Кроме того,  $\psi_\beta(y)$  обладает следующими свойствами для фиксированного значения  $\beta$ :

$$\min_{y \in \mathcal{R}} \psi_\beta(y) = \psi_\beta(0) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \psi_\beta(y) = \{+\infty, \beta > 0; 1, \beta = 0\}, \quad |d\psi_\beta/dy| \leq \beta|y|. \quad (1.2)$$

Здесь и далее под функцией  $\operatorname{sign}(u)$  понимается многозначная функция, а решение уравнения (1.1) определяется в смысле Филиппова с доопределением (см. п. 3 из [3]).

Кривую переключения определим следующим образом:  $s_\mu^n(x, y) = \{(x, y)^T \in \mathcal{R}_C \times \mathcal{R} : S_\mu^n(x, y) = 0\}$ . Далее, будем предполагать, что для каждого  $n$  определена своя функция  $s_n(x, y)$  и для простоты изложения индекс  $n$  будет по возможности опущен. Наиболее простой способ построить функцию  $S_\mu(x, y)$  — это найти оптимальную по быстродействию поверхность и в амплитуду управления ввести параметр  $\mu$ . Применяя алгоритм, описанный в [2, 5], имеем функцию  $S_\mu(x, y)$ , которая определяется следующим образом:

$$S_\mu(x, y) = \frac{U}{1 + \mu} x + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \right) \operatorname{sign}(y) + \frac{\operatorname{sign}(x)}{n} + H_n(x),$$

$$H_n(x) = \begin{cases} \ln(|1 - C|x||) \operatorname{sign}(x), & n = 0, \\ -\frac{\operatorname{sign}(x)}{n(|1 - C|x||)^n}, & n > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Таким образом, доопределив систему (1.1) формулами (1.3), получаем замкнутую систему с разрывной правой частью. Очевидно, что она при фиксированных параметрах  $U$ ,  $C$ ,  $n$ ,  $\beta$  и  $\mu$  является планарной системой филипповского типа. В качестве бифуркационного параметра в данной работе выбран параметр  $\mu$ . Далее будут рассмотрены бифуркации в системе (1.1), (1.3) при изменении параметра  $\mu$  от нуля до единицы, при фиксированных  $n$ ,  $\beta$ ,  $C$  и  $U$ .

Более того, можно показать, что характер бифуркаций в системе не зависит от  $\beta$ . Параметр  $U$  определяет масштаб, а особенности системы зависят только от соотношения  $U/C$ .

Важно отметить, что рассматриваемая кривая  $s_\mu(x, y)$  при  $\mu = 0$  состоит из ветвей фазовых траекторий, которые проходят через точку  $(0, 0)$ . Приведем общий вид фазовых траекторий системы (1.1), (1.3) в зависимости от следующих начальных условий:

$$\begin{aligned} S_\mu > 0: \quad & g_+(x, y) + g_+^0 = 0, \\ & g_+(x, y) = Ux - \phi_\beta(y) + H_n(x), \\ S_\mu < 0: \quad & g_-(x, y) + g_-^0 = 0, \\ & g_-(x, y) = Ux + \phi_\beta(y) + H_n(x), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $g_\pm^0 = -g_\pm(x_0, y_0)$ . Здесь и далее через  $x_0, y_0$  обозначены координаты начальной точки интегрирования. Легко видеть, что замкнутая система обладает симметрией, вызванной кривой переключения. Из книги Филиппова [3] и работы [9], следует, что у такой системы может существовать предельный цикл, охватывающий положения равновесия (например, для бифуркации точечной особенности типа 3 цикл охватывает 3 особые точки). Рассматриваемая система имеет одинаковые производные  $dx/dy = 0$  на исследуемом множестве оси  $O_x$ . Поэтому можно надеяться, что в ней будет существовать аналогичный предельный цикл.

Сформулируем задачу, которой посвящена данная работа, следующим образом: необходимо для параметра  $\mu$  указать интервал на отрезке  $[0, 1]$ , на котором существует внешний предельный цикл. Если такой цикл отсутствует, указать линейные особенности, точечные особенности и биссектрисы (согласно определению Филиппова) для грубых и негрубых бифуркаций, происходящих в рассматриваемой системе при изменении параметра  $\mu$ .

## 2. Исследование системы (1.3)

Перепишем систему (1.1), (1.3) в компактном виде, используя новые переменные  $Z = (x, y)^T = (z_1, z_2)^T \in \mathcal{R}_C \times \mathcal{R}$ ,

$$\dot{Z} = F_{S_\mu}(Z), \tag{2.1}$$

где  $F_{S_\mu} = (z_2, -\psi(z_2)(U - C(1 - C|z_1|)^{-(n+1)}) \text{sign}(S_\mu(Z))) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ . Система (2.1) представима в виде двух подсистем:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\psi\beta(y)(U - C/(1 - C|x|)^{n+1}), \quad S_\mu > 0, \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = +\psi\beta(y)(U - C/(1 - C|x|)^{n+1}), \quad S_\mu < 0. \tag{2.3}$$

Прежде чем приступить к изучению бифуркаций, рассмотрим влияние параметра  $n$  и функции  $\psi_\beta(y)$  на фазовый портрет каждой подсистемы.

### 2.1. Особые траектории системы

Важно заметить, что системы (2.2) и (2.3) не зависят от бифуркационного параметра  $\mu$ , а значит, фазовый портрет системы (2.1) зависит только от того, как кривая  $s_\mu(Z)$  сшивает уже построенные фазовые портреты двух систем воедино. Построим эскиз фазового портрета этих систем на одном рисунке. Для простоты на рисунке 1 представлен эскиз траекторий обеих систем (2.2) и (2.3) одновременно, а все точки, представляющие интерес,



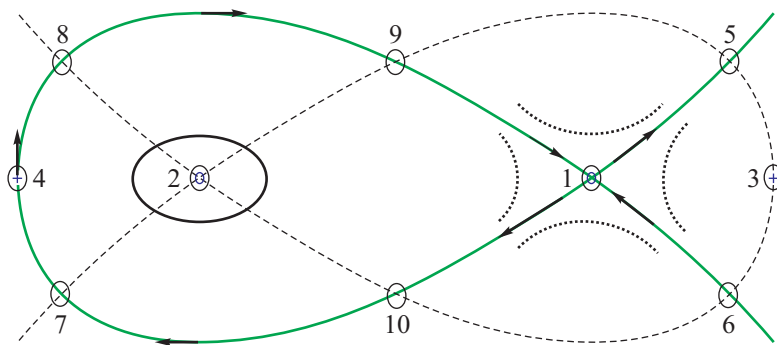


Рис. 1. Гомоклинические орбиты,  $\omega$ - и  $\alpha$ -предельные множества и особые точки №1–№10.

пронумерованы от 1 до 10. Стрелками указано движение по траекториям, соответствующее увеличению независимой переменной  $t$ . Так как кривая  $s_\mu(Z)$  пересекает ось  $O_y$  только в точке  $(0, 0)$ , точки №10 и №9 не будут особыми для системы (2.1). Кривая переключения не сможет пересечь точки №6 и №8 в силу построения (состоит из кусков фазовых траекторий, проходящих через точку  $(0, 0)$ ). Остальные точки будут рассмотрены ниже.

Для начала определим стационарные точки каждой из подсистем (2.2) и (2.3). Это легко сделать, так как таких точек всего по 2 у каждой из систем, причем их координаты попарно совпадают. Не уменьшая общности, рассмотрим систему (2.2) при  $x \in \mathcal{R}_c$ . Эта система имеет следующую пару особых точек:

$$Z_*^\pm = (\pm x_*^0, 0), \quad x_*^0 = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{C} n^{n+1} \sqrt{\frac{C}{U}} \right) > 0. \quad (2.4)$$

Легко проверить, что точка  $Z_*^+$  — это седло, у которого собственные векторы  $e_\pm^A = (1, \pm U)^T$  соответствуют собственным значениям  $\lambda_\pm^A = \pm U$ , а точка  $Z_*^-$  — это центр (может быть и фокусом, но в силу симметрии относительно  $O_x$  это невозможно), у которого собственные векторы  $e_\pm^A = (1, \pm iU)^T$  соответствуют собственным значениям  $\lambda_\pm^A = \pm iU$  (чисто мнимые). Аналогично для системы (2.3)  $Z_*^+$  — центр,  $Z_*^-$  — седло. Итак, из формулы (2.4) в силу условия  $C/U = 1 - \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , следует, что изменения параметра  $n$  и функции  $\psi_\beta(y)$ ,  $\beta \in [0, 1]$ , не могут привести к исчезновению точек  $Z_*^\pm$  или хотя бы к смене знака этих точек. Таким образом, исходная система (2.1) будет иметь для некоторых значений параметра  $\mu$  либо 2 центра, либо 2 седла при условии, что эти точки не лежат на кривой разрыва вне зависимости от того, какой параметр  $n$  и  $\beta$  выбран. На рисунке 1 им соответствуют номера №1 и №2.

Теперь построим сепаратрисы, исходящие из седла. В неявном виде имеем 4 кривых  $\Gamma_{+\pm} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_{+\pm}(\varepsilon)$  и  $\Gamma_{-\pm} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_{-\pm}(\varepsilon)$ , где

$$\Gamma_{+\pm}(\varepsilon) = \{(x, y)^T : g_+(x, y) - g_+(x_*^0, \pm\varepsilon) = 0\}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{-\pm}(\varepsilon) = \{(x, y)^T : g_+(x, y) - g_+(x_*^0 \pm \varepsilon, 0) = 0\}. \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что кривые  $\Gamma_{-\pm}(\varepsilon)$  симметричны относительно оси  $O_y$ . Поэтому достаточно рассмотреть только часть кривой при  $y > 0$ . Аналогично для  $\Gamma_{+\pm}(\varepsilon)$ .

Найдем точки №3 и №4 как пересечение кривой  $\Gamma_{++}$  с осью  $O_x$ . Обозначим эти точки через  $Z_\pm^\Gamma = (x_\Gamma^0, 0)^T$ ,  $x_\Gamma^0 > 0$ . Из уравнений (1.4) и (2.5) получаем алгебраическое уравнение

на абсциссу  $Ux_{\Gamma}^0 + H_n(x_{\Gamma}^0) = Ux_*^0 + H_n(x_*^0)$  при условии  $x_{\Gamma}^0 > x_*^0$ . В силу симметричности относительно оси  $O_x$  правой части системы (1.4) и монотонности функции  $H_n$  имеет единственный корень на интервале  $x \in (x_*, 1/C)$ .

Более того, на всем множестве  $\mathcal{R}^* = \{(x, y)^T : x \in (-x_{\Gamma}^0, x_*^+), y = 0\}$  производная  $dx/dy|_{\mathcal{R}^*} = 0$ , то есть  $d \arg(\Gamma_{-+})/dy|_{\mathcal{R}^*} = d \arg(\Gamma_{--})/dy|_{\mathcal{R}^*} = 0$ . Последнее означает, что центр  $Z_*^-$  охвачен двумя кривыми, которые начинаются в седле  $Z_*^+$  и пересекают ось  $Ox$  в точке  $-x_{\Gamma}^0$ , причем в этой точке имеют одинаковые производные. Так как точка  $Z_*^+$  является седлом, то такую траекторию принято называть гомоклинической орбитой [8].

Стоит также заметить, что кривая  $\Gamma_{++}$  исходит из точки  $Z_*^+$  и уходит на бесконечность, имея вертикальную асимптоту, проходящую через точку  $(1/C, 0)$ . Аналогично для  $\Gamma_{+-}$ .

Таким образом, для каждой из систем из седла исходит одна  $\omega$ -предельная траектория ( $t \rightarrow +\infty$ ),  $\alpha$ -предельная траектория ( $t \rightarrow -\infty$ ) и гомоклиническая орбита, причем направления движения в прямом и обратном времени можно построить, исходя из направления собственных векторов. На рисунке 1 эти траектории изображены, соответственно, сплошной и пунктирной линией. Важно отметить, что изменения параметров  $n$  и  $\beta$  кардинально не меняют фазовый портрет. Более точно, параметр  $n$  влияет на близость точек  $Z_*^{\pm}$  и  $Z_{\Gamma}^{\pm}$  соответственно, а параметр  $\beta$  деформирует замкнутые кривые, не затрагивая особые точки каждой из подсистем. На приведенном ниже рисунке 2 эти деформированные кривые изображены пунктирной линией.

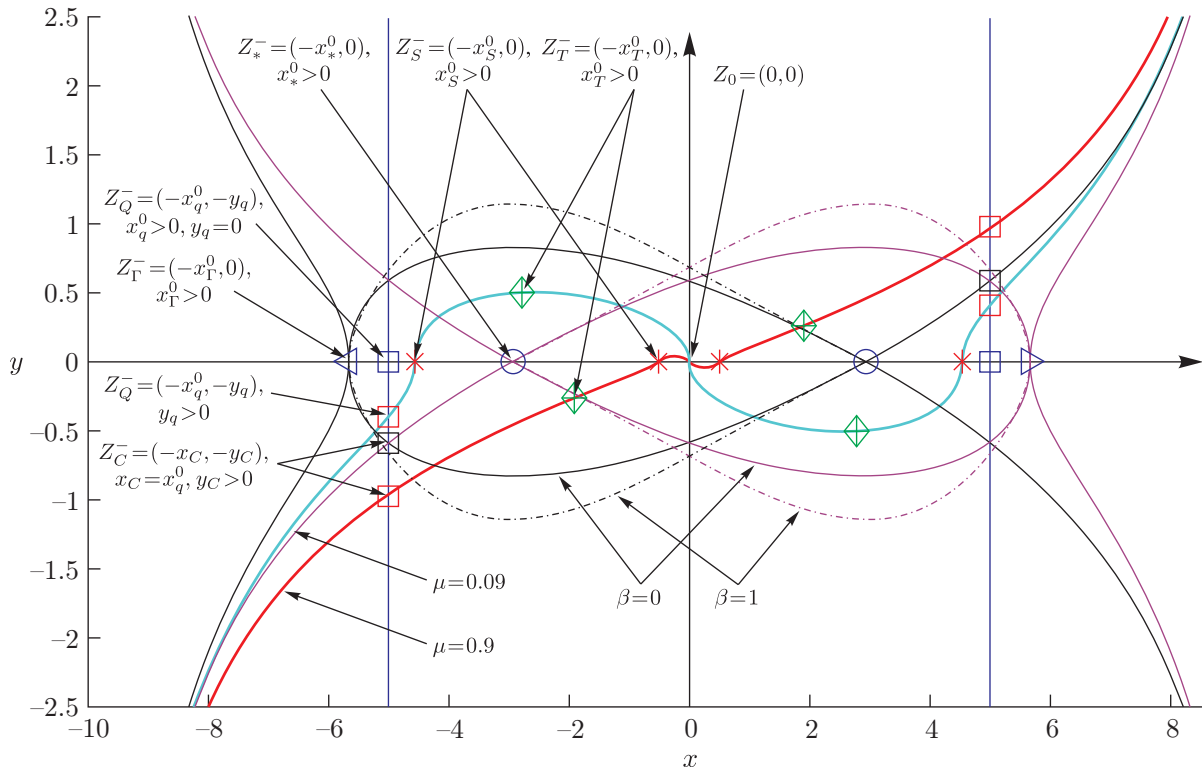


Рис. 2. Точечные и линейные особенности.

Стоит также отметить, что начало координат не является особой точкой ни одной из двух подсистем, а траектории подсистем, проходящие через эту точку, являются замкнутыми и симметричными относительно оси  $O_x$  траекториями для всех  $n$  и  $\beta$ .



## 2.2. Влияние параметра $\mu$ на форму кривой переключения

Для простоты изложения обозначим точки пересечения кривой  $s_\mu$  с осью  $O_x$  через  $Z_S^\pm = (\pm x_S^0, 0)^T$ ,  $x_S^0 > 0$ , где абсцисса удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\begin{cases} U_\mu x_S^0 + \ln(|1 - Cx_S^0|) = 0, & n = 0, \\ x_S^0 = \frac{1}{C} - \frac{1}{U_\mu}, & n = 1, \\ (1 + U_\mu n x_S^0)(|1 - Cx_S^0|)^n = 1, & n > 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.7) видно, что случай  $n = 1$  выгодно отличается от других тем, что многие особые точки системы можно найти аналитически. В силу построения и с учетом уравнения (2.7) можно утверждать, что кривая  $s_\mu$  имеет 3 пересечения с осью  $O_x$  в точках  $Z_S^\pm, Z^0$ , причем во всех этих точках  $dx/dy = 0$  и они лежат на отрезке  $[-x_\Gamma^0, +x_\Gamma^0]$ .

Построим поверх особых траекторий систем (2.2), (2.3), изображенных на рисунке 1, кривую  $s_\mu$  для различных параметров  $\mu$ . При  $n = 1, U = 1, C = U/2, \beta = 0$  имеем рисунок 3.

Из рисунка 3 и формул (2.7) видно, что точки  $Z_S^\pm$  стремятся к точке  $Z^0$ , при этом интервал оси  $O_x$ , на котором определена кривая  $s_\mu$ , остается постоянным. Кроме того, рассматриваемые кривые переключений (красный цвет<sup>a</sup>) могут при некоторых значениях параметра пересекать точки №1, №12, №5, №7. Очевидно, что при этих значениях параметров происходят глобальные негрубые бифуркации в системе, то есть сколь угодно малое отклонение в значении параметра  $\mu$  приводит к существенному изменению фазового портрета системы.

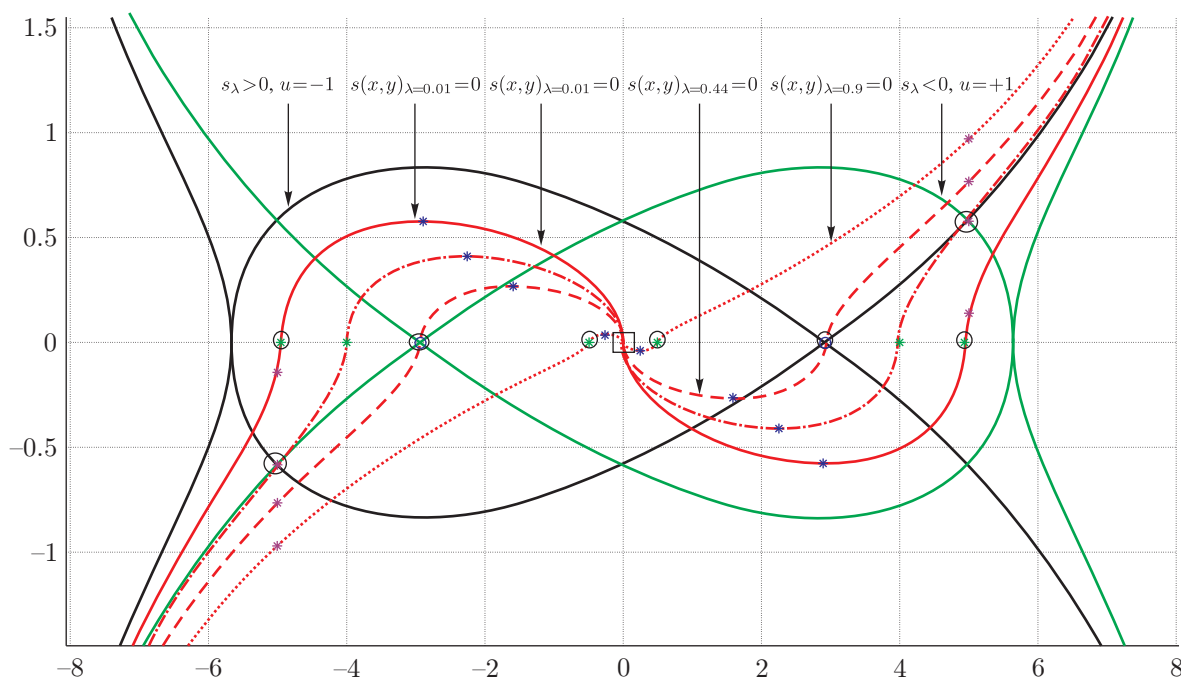


Рис. 3. Гомоклинические орбиты,  $\omega$ - и  $\alpha$ -предельные множества и кривые переключения для различных значений параметра  $\mu$  при  $n = 1, U = 1, C = U/2, \beta = 0$ .

<sup>a</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1601002/>

### 2.3. Бифуркации в системе (2.1)

Прежде чем приступить к перечислению и классификации бифуркаций, важно заметить, что касание кривой переключений также приводит к возникновению негрубых бифуркаций, причем результатом касания в данной системе обычно является возникновение линейной особенности типа  $AA_1$  с окончанием в точке касания. Таким образом, все точки касания легко найти, используя условие Филиппова для скользящего режима. Сначала перечислим точечные особенности, относящиеся к реальным положениям равновесия:

- $\mu \in (0, \mu^*)$ :  $Z_S^\pm$  — неустойчивый сшитый фокус,  $Z_*^\pm$  — седло,
- $\mu = \mu^*$ :  $Z_S^\pm = Z_*^\pm$  — сшитый седло-узел,
- $\mu \in (\mu^*, 1)$ :  $Z_*^\pm$  — центры.

Теперь посмотрим, что происходит, когда возникают точечные и линейные особенности на самой кривой разрыва. Для краткости будем обозначать линейную особенность через  $s^k$ , а через  $Z_{T_k}^\pm$  — точки касания (границы скользящего режима). Из анализа рисунков 1 и 3 можно сделать следующие предположения:

- $s^0$  (тип  $AA_1$ ) — устойчивый (или притягивающий [6]) скользящий режим возникает и сохраняется при  $\mu \in (0, 1)$  в окрестности точки  $(0, 0)$ , которая является устойчивым положением равновесия. При  $\mu = 0$  особой точки нет (тип  $AA_0$ ). При  $\mu = 1$  скользящий режим разрушается и точка  $(0, 0)$  является неустойчивым положением равновесия.
- $Z_{T_0}^\pm$  границы скользящего режима возникают и сохраняются при  $\mu \in (0, \mu^{**})$ .
- $s_\pm^1$  (тип  $AA_1$ ) — устойчивый скользящий режим от точки  $Z_{T_1}^\pm$  до точки  $Z_{T_2}^\pm$ , при этом через точки  $Z_{T_2}^\pm$  проходят замкнутые траектории; значение параметра  $\mu \in (\mu^{**}, 1]$ .
- $s_\pm^2 = (\pm x_C, \pm y_C)$  (тип  $AA_0$ ) — эта точечная особенность не является линейной особенностью, то есть происходит просто протыкание кривой переключения. Особенность этих точек в том, что траектории, проходящие через них, образуют замкнутый контур, состоящий из пары траекторий. Такой контур определяет область, которую не могут покинуть траектории системы, начавшиеся в этой области. Можно утверждать, что это предельный цикл, который возникает и сохраняется при  $\mu \in (\mu^{***}, 1)$ .

Найдем все значения параметра  $\mu$ , при которых возникают перечисленные линейные и точечные особенности.

### 2.4. Вычисление $\mu^{***}$

Начнем с внешнего предельного цикла. Этот цикл состоит из решений системы (2.1), сшитых в симметричных точках  $(-x_C, -y_C)$  и  $(x_C, y_C)$ ,  $x_C > 0$ ,  $y_C > 0$ . Оказывается, что пересечение кривой и фазовых траекторий может иметь место только в точке с абсциссой  $x_C = \arg_{x>0}(s_{\mu=0}(x, y) = 0)$ . Зная кривую переключения, легко посчитать, что  $y_C = \sqrt{\left(\frac{\mu+1}{Ux^*\mu}\right)^2} - 1$ . Однако, чтобы определить значение  $\mu^{***}$ , необходимо введение дополнительных ограничений, так как при стремлении  $\mu$  к нулю значение  $y_C$  стремится к бесконечности, что противоречит моделированию. Потребуем, чтобы при  $\mu = \mu^{***}$  точки  $Z_C^\pm$  лежали



на сепаратрисах седла, уходящих на бесконечность. В I и III квадрантах на кривой переключений нет особых точек, из которых может исходить траектория, образующая цикл, кроме тех, которые возникают при пересечении этой кривой сепаратрис седла. Сначала находим по абсциссе  $x_C$  значение ординаты  $y_C$ , а только затем находим  $\mu^{***}$ . Таким образом, удастся избежать неоднозначности в определении параметра  $\mu$ . Пусть далее  $\beta = 1$  и  $n = 1$ . Тогда легко подсчитать, что  $x_C = 1/C - 1/\sqrt{UC}$ ,  $x_S^\mu = 1/C - (1 + \mu)/U$ ,  $x_S^0 = (1/C - 1/U)$ . Формула для вычисления  $\mu^{***}$  примет простой вид:  $\mu^{***} = -Ux_S^\mu / (U(x_C + x_S^\mu) + H(x_C)) - 1$ . Если подставить соответствующие значения, получим окончательную формулу

$$\mu^{***} = (U/C - 1) / (\sqrt{U/C} - 1) / 2 - 1, \quad (2.8)$$

из которой следует, что значение  $\mu^{***}$  зависит только от соотношения  $U/C$ . Например,  $\mu^{***}|_{U/C=2} = 0.2071$ , что полностью согласуется с численным моделированием.

Остается проверить, что фазовые траектории, выпущенные из точек  $Z_C^\pm$ , приходят в точки  $Z_C^\mp$  соответственно.

Выберем значения  $\varepsilon$  для кривой  $\Gamma_{++}(\varepsilon) \doteq \Gamma_C$  так, чтобы эта кривая проходила через точку  $Z_C^+$ . Из уравнений (1.4) имеем  $\Gamma_{++}(Z_C^-) = \Gamma_C$ , причем концы кривой не могут пересечь сепаратрисы седла. Для каждого значения  $\varepsilon$  существует  $\mu(\varepsilon) > \mu^{***}$  в силу уравнения кривой  $s_\mu$ . Таким образом, цикл состоит из фазовых траекторий, «охватывающих» части гомоклинических орбит. Отметим, что  $\mu(0) = \mu^{***}$ , то есть в предельном случае цикл должен быть образован из сепаратрис седла и кусков гомоклинических орбит, разделенных кривой переключений, а значит, нет фазовой траектории при  $y > 0$  (соответственно, при  $y < 0$ ), охватывающей гомоклиническую орбиту и начинающуюся с ней в одной точке.

Остается показать, что при  $\varepsilon_1 > \varepsilon$  выполняется условие  $\Gamma_{++}(\varepsilon_1) = \Gamma_{++}(x_C, y_C + \varepsilon) > \Gamma_C$  и  $\Gamma_{++}(-x_C, -\hat{y}) = \Gamma_{++}(x_C, y_C + \varepsilon)$ ,  $-\hat{y} > y_C + \varepsilon$ , то есть цикл неустойчивый.

Для этого рассмотрим аналог функции последования. В нашем случае ее удобно разбить на две функции

$$\begin{aligned} w_p(x) &= (Ux + H_n(x)) + (U_\mu x + H_n(x)) + w_0(\mu) + \varepsilon, & x > 0, \\ w_m(x) &= (Ux + H_n(x)) - (U_\mu x + H_n(x)) + w_0(\mu) + \varepsilon, & x < 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $w_0(\mu)$  — постоянная величина, которая определяется из условия пересечения фазовой траектории, образующей цикл, и кривой  $s_\mu$  для некоторого фиксированного  $\mu$ . Например, для  $n = 1$ ,  $\beta = 0$  имеем  $w_0 = \mu / (1 + \mu) (U/C - 1)$ .

Так как функции  $w_p(x)$  и  $w_m(x)$  получены из фазовых траекторий и кривой  $s_\mu$ , достаточно найти значения  $x$ , в которых  $w_p(x) = 0$  и  $w_m(x) = 0$ .

Для случая  $n = 1$ ,  $\beta = 0$  имеем:

$$\begin{aligned} x_m &= -((1/C - 1/U) + (1 + \mu)\varepsilon/\mu) = -6.0556, \\ x_p &= \left(-B + \sqrt{B^2 - 4A(w_0 + \varepsilon)}\right) / 2A = 5.19, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $A = (2 + \mu)UC / (1 + \mu)$ ,  $B = 2 * C - A/C - C * (w_0 + \varepsilon)$ . Из полученных уравнений следует, что  $|x_m| > |x_p|$ . Последнее означает, что уже за половину периода мы удалились от исходной точки на величину  $||x_m| - |x_p||$ . Так как для всех  $x > x_C$ ,  $dy/dx|_{s_\mu} > 0$ , за полный период смещение точки составит не меньше  $2||x_m| - |x_p||$ , а значит, происходит раскручивание решения и постепенный уход на бесконечность.



**2.5. Линейные особенности  
(устойчивый и неустойчивый скользящий режим)**

Покажем, что при  $1 > \mu > 0$  возникает устойчивый скользящий режим в окрестности точки  $(0, 0)$ , границы которого легко определить из условия  $0 < \lambda(Z) < 1$ , где

$$\lambda(Z) = \frac{\langle \nabla S_\mu, F_{S_\mu > 0} \rangle}{\langle \nabla S_\mu, F_{S_\mu > 0} - F_{S_\mu < 0} \rangle}, \tag{2.11}$$

Более того, можно показать, что для точки  $Z^0 = (0, 0)^T$  выполняется условие

$$F_s(Z^0, \mu, \lambda(Z^0)) = 0, \tag{2.12}$$

где  $F_s(Z, \mu, \lambda) = (1 - \lambda(Z))F_{S_\mu > 0} + \lambda(Z)F_{S_\mu < 0}$ . Выполнение данного условия совместно с требованием о принадлежности данной точки кривой переключений означает, что эта точка является псевдо положением равновесия. Стоит напомнить, что точки, соответствующие границам отрезка  $Z_l^*$  и  $Z_r^*$  кривой со скользящим режимом принято относить в отдельный класс положений равновесия — граничные положения равновесия (или типа  $T$  [6]). Для их отыскания необходимо выполнение либо условия  $\lambda(Z_r^*) = 1$ , либо условия  $\lambda(Z_l^*) = 0$ .

Сначала вычислим  $\lambda(Z)$  в силу системы (2.1)–(2.3). Имеем

$$\lambda_\mu(Z) = \frac{\langle (\delta_\mu(x), |y|/\psi\beta(y)), (y, \psi\beta(y)\delta_0(x)) \rangle}{\langle (\cdot, |y|/\psi\beta(y)), (0, 2\psi\beta(y)(\delta_0(x))) \rangle} = 1/2 + \frac{\delta_\mu(x) \text{sign}(y)}{2\delta_0(x)}, \tag{2.13}$$

где  $\delta_\mu(x) = U_\mu - C/(1 - C|x|)^{n+1} > 0$ ,  $|x| < x_*^+$ . При  $\lambda_{\mu \in (0,1)}(0, y) \in (0, 1)$ . Найдем точки касания, все они лежат на пересечении кривой переключения и прямой  $x = x_T$ , где  $x_T$  удовлетворяет условию

$$\delta_\mu(x) = -\delta_0(x). \tag{2.14}$$

После упрощения этого уравнения получаем формулу

$$x_T = \frac{1}{C} \left( 1 - \sqrt[n+1]{\frac{2C(\mu + 1)}{u(\mu + 2)}} \right). \tag{2.15}$$

Данная формула позволяет аналитически определить абсциссы точек  $Z_{T_0}^\pm$  и  $Z_{T_1}^\pm$ , а формула (2.14) позволяет найти эти же значения, но численно. Как видим, они не зависят от  $\beta$ .

Сравним значение  $x_T$  с абсциссами других особых точек. Для этого необходимо рассмотреть три случая. Но сначала найдем значение  $\mu^{**}$ . Для этого достаточно решить уравнение

$$x_T(\mu) = x_*^0(\mu) \tag{2.16}$$

относительно  $\mu$ . Для  $n = 1$  имеем простое выражение

$$\mu^{**} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 9(1 - U/C)}}{2}, \tag{2.17}$$

для других  $n$  решаем численно уравнение (2.16).

1.  $0 < \mu < \mu^*$ :  $0 < x_T < x_*^0 < x_S^0$  и  $Z_*^+$  — седло. Из приведенного неравенства следует, что все траектории, попадающие в точку  $(x_T, y_T)$  на кривой  $s$  при  $|x| < x_T$  и  $y_T > 0$ , приходят в  $(0, 0)$  за конечное время, двигаясь по кривой в устойчивом скользящем режиме (аналогично для точки  $(-x_T, -y_T)$ ).



2.  $\mu^* < \mu < \mu^{**}$ :  $0 < x_T < x_*^0 < x_S^0$  и  $Z_*^+$  — центр. Из приведенного неравенства следует, что все траектории, попадающие в точку  $(x_T, y_T)$  на кривой  $s_\mu$  при  $|x| < x_T$  и  $y_T > 0$ , приходят в  $(0, 0)$  за конечное время, двигаясь по кривой в устойчивом скользящем режиме (аналогично для точки  $(-x_T, -y_T)$ ). Кроме того, возникает дополнительное касание кривой переключения и фазовой траектории в точках  $Z_{T_1}^\pm = Z_S^\pm$ . Однако дополнительных особых траекторий, проходящих через эти точки, не возникает.
3.  $\mu^{**} < \mu < 1$ :  $0 < x_*^0 < x_T < x_S^0$  и  $Z_*^+$  — центр. Из приведенного неравенства следует, что все траектории, попадающие на кривую при  $|x| < x_*^0$ , приходят в  $(0, 0)$  за конечное время, двигаясь по кривой  $s_\mu$  в устойчивом скользящем режиме. На интервале  $(x_*^0, x_T)$  происходит также скользящий режим, но вот решение приходит за конечное время в точку  $(x_T, y_T)$ ,  $y_T < 0$ , через которую проходит замкнутая кривая, касающаяся также кривой переключения в точке  $(x_*^0, 0)$ . Таким образом, кривые, испущенные из точек с абсциссами  $x_*^0$  и  $x_T$ , являются сепаратрисами. В силу симметрии аналогично мы имеем две сепаратрисы, исходящие из точек с абсциссами  $-x_*^0$  и  $-x_T$ . Переплетаясь, эти особые траектории делят внутреннюю область, ограниченную циклом, причудливым образом. Такая ситуация имеет место, так как каждая сепаратриса протыкает кривую переключения, то есть в точках протыкания нет линейных особенностей.

В явном виде  $y_T = -\text{sign}(\mu - \mu^*)\sqrt{2|U/(\mu + 1)x_T + H_n(x_T)}$ . Все описанные точки изображены на рисунке 2.

## 2.6. Области притяжения

Итак, область притяжения  $\Omega(Z_p)$  точки  $Z_p = (x_p, y_p)$  — это множество всех начальных точек, из которых гарантируется попадание за конечное время либо в точку  $Z_p$ , либо в  $O_\varepsilon(Z_p)$ , но скорость сходимости экспоненциальная. Через  $O_\varepsilon(Z_p)$  обозначена  $\varepsilon$ -окрестность точки  $Z_p$ .

Посмотрим, какие области притяжения возникают при различных значениях  $\mu$ .

1.  $0 < \mu < \mu^{***}$ . Область притяжения  $\Omega(0, 0)$  имеет сложную структуру, ограниченную сепаратрисами седла и сшитых неустойчивых фокусов.
2.  $\mu^{***} < \mu < 1$ . Из предыдущего параграфа следует, что внутренность, ограниченная циклом, разбивается сепаратрисами на несколько областей, границами которых являются сепаратрисы.
  - (а) При  $\mu^{***} \leq \mu < \mu^*$  такая область одна — это  $\Omega(0, 0)$ . Ее внешняя граница представляет собой предельный цикл, а внутри вырезаны сепаратрисы, исходящие из седла  $(x_\pm^*, 0)$  и неустойчивых сшитых фокусов  $(x_\pm^p, 0)$ .
  - (б) При  $\mu^* \leq \mu < \mu^{**}$  такая область одна — это  $\Omega(0, 0)$ . Ее внешняя граница представляет собой предельный цикл, а внутри вырезаны области, ограниченные замкнутыми фазовыми траекториями, исходящими из точек  $(x_\pm^*, 0)$ .
  - (в) При  $1 > \mu > \mu^{**}$  таких областей три:  $\Omega(0, 0)$ ,  $\Omega(Z_T^+)$ ,  $\Omega(Z_T^-)$ .

## 2.7. Примеры бифуркаций

Результаты моделирования представлены на рисунках 4, 5, на которых изображены фазовые портреты системы (2.1) с выделенными сепаратрисами при дискретных изменениях параметра  $\mu$  от 0 до 1 для  $n = 0$ ,  $U = 0.2$ ,  $C = U/2$ ,  $\beta = 1$ .



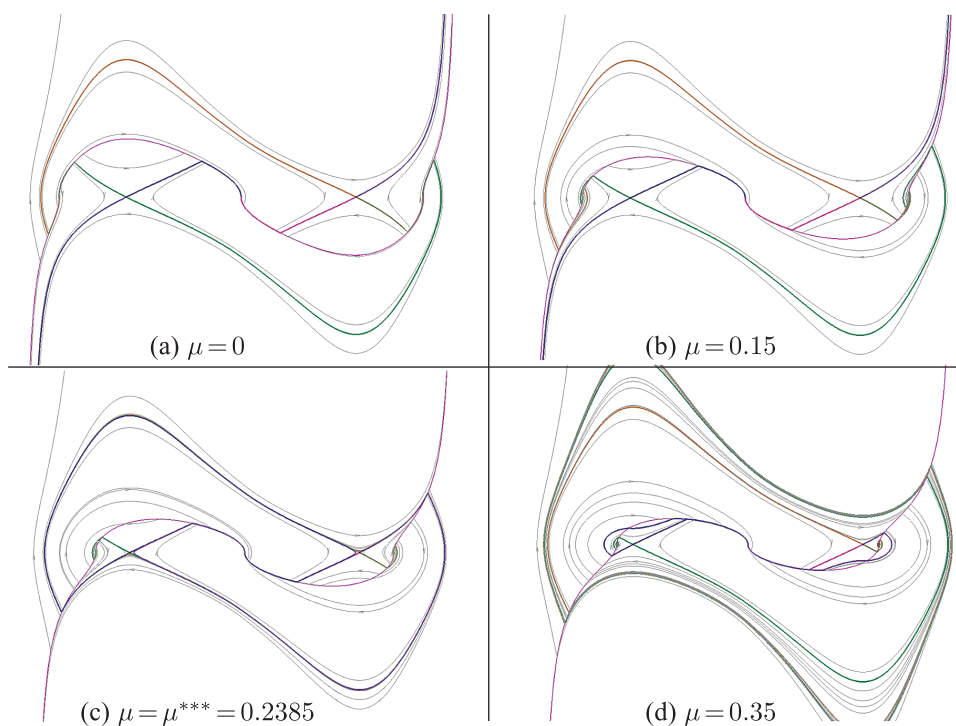


Рис. 4. Фазовые портреты системы (2.1) для  $n = 0$ ,  $U = 0.2$ ,  $C = U/2$ ,  $\beta = 1$ .

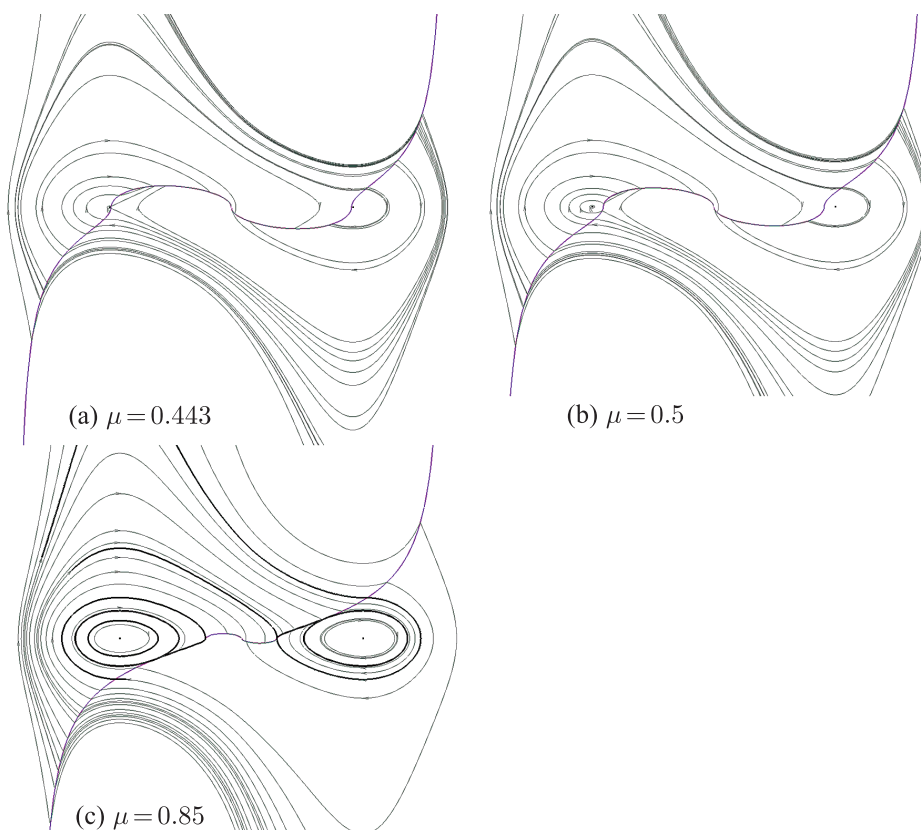


Рис. 5. Фазовые портреты системы (2.1) для  $n = 0$ ,  $U = 0.2$ ,  $C = U/2$ ,  $\beta = 1$ .

## 2.8. Примеры областей притяжения

На рисунке 6 цветом выделены области, ограниченные особыми траекториями.

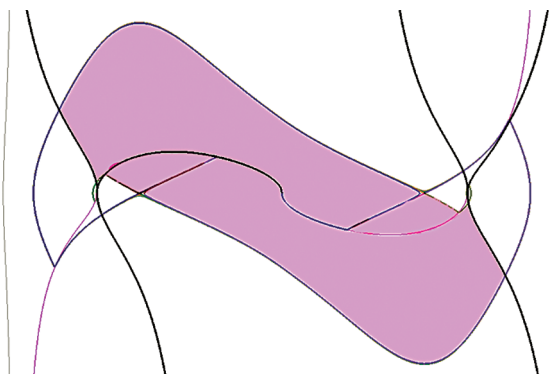


Рис. 6.  $\mu = 0.2385$  для системы (2.1) при  $n = 0$ ,  $U = 0.2$ ,  $C = U/2$ ,  $\beta = 1$ .

Все выделенные куски составляют одну область притяжения  $\Omega(0, 0)$ .

На рисунке 7 представлены результаты моделирования для системы (2.1) при  $n = 1$ ,  $U = 0.2$ ,  $C = U/2$  и  $\psi\beta(y) = 1$ . Область притяжения  $\Omega(0, 0)$  обозначена красным цветом, а области притяжения  $\Omega(Z_T^+)$  — желтым. Синим цветом обозначены области, ограниченные замкнутыми траекториями, касающиеся точек  $\Omega(Z_T^+)$ .

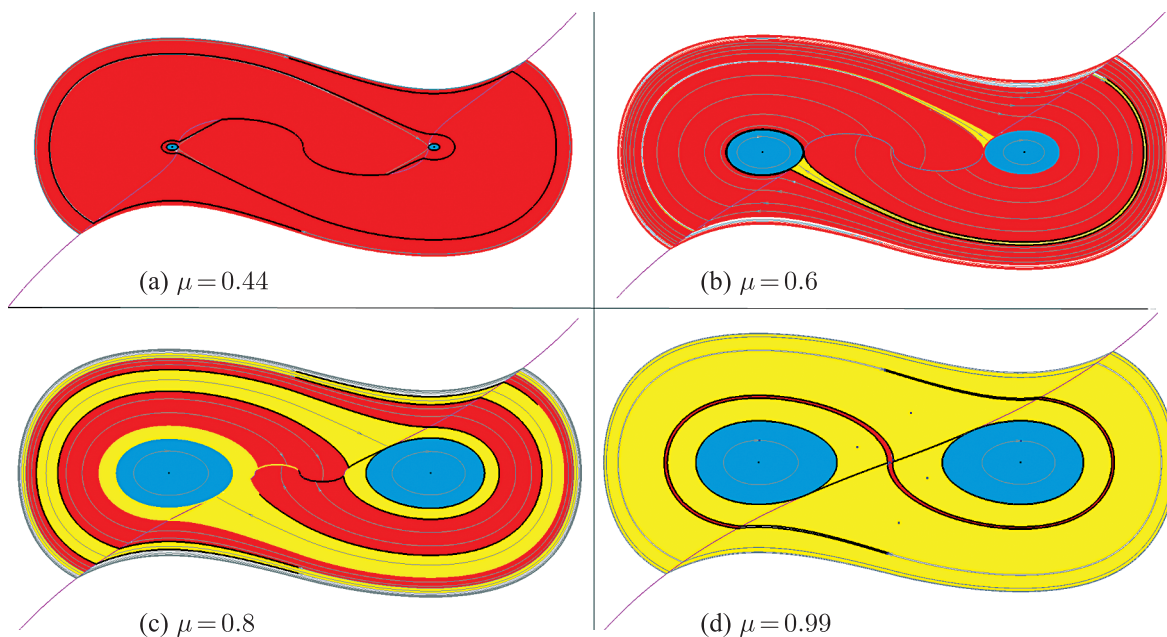


Рис. 7.  $\mu = 0.44$  для системы (2.1) при  $n = 1$ ,  $U = 0.2$ ,  $C = U/2$ ,  $\beta = 0$ .

## 3. Заключение

В данной работе показано, что даже среди планарных филлшовских систем можно выделить класс систем, обладающих очень сложной динамикой и при этом отличающихся

от простейшей двумерной системы с разрывной правой частью (двойной интегратор, замкнутый квазиоптимальным по быстродействию законом управления) одним дополнительным слагаемым в правой части. С помощью теории Филиппова легко отыскать все точечные и линейные особенности этого класса. К сожалению, остается открытым вопрос, касающийся момента времени, когда сепаратрисы сливаются в одну замкнутую траекторию — внешний предельный цикл. По-видимому, это событие происходит за конечное время, а не за бесконечное время, то есть число протыканий сепаратрисами кривой  $s_\mu$  конечно.

Можно также показать, что внешний цикл сохраняется, если вместо  $s_\mu$  взять дважды гладкую кривую, удовлетворяющую нескольким условиям, а именно:

1. кривая целиком лежит в четырех квадрантах фазовой плоскости, как и кривая  $s_\mu$ ,
2. проходит через те же точки  $Z_C^\pm$ , что и кривая  $s_\mu$ ,
3. имеет максимальное (минимальное) значение не больше (не меньше), чем у  $s_\mu$ .

В качестве такой дважды гладкой кривой можно взять, например, функцию  $y = -A(\mu)x^3 + B(\mu)x$ ,  $A(\mu) > 0, B(\mu) > 0$ . Зависимость параметров  $A, B$  от  $\mu$  нужно доопределять для каждой системы отдельно.

Стоит также отметить, что число бифуркаций в системе (2.1) можно существенно сократить, если выбрать в качестве кривой переключения  $x = -y|y|/2(\mu + 1)$ . Это связано с тем, что данная кривая лежит только во втором и четвертом квадрантах и имеет только одно критическое значение  $\mu$ . Оно определяется из условия прохождения точек № 6 и № 8 на рисунке 1. Таким образом, на всем интервале  $\mu \in (0, 1)$  мы имеем три существенно разных фазовых портрета и ни на одном из них не возникает внешнего предельного цикла.

## Список литературы

- [1] Rapoport L. B., Morozov Yu. V. Estimation of attraction domains in wheeled robot control using absolute stability approach // Proc. of the 17th IFAC World Congress (Seoul, 2008): Vol. 17: Part 1, pp. 5903–5908.
- [2] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука, 1969. 408 с.
- [3] Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.
- [4] Матюхин В. И. Стабилизация движений лагранжевых систем за конечное время переходного процесса // Докл. РАН, 1997, т. 353, № 4, с. 484–487.
- [5] Lee E. B., Markus L. Foundations of optimal control theory. New York: Wiley, 1967. 588 pp.
- [6] di Bernardo M., Pagano D. J., Ponce E. Nonhyperbolic boundary equilibrium bifurcations in planar Filippov systems: A case study approach // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2008, vol. 18, no. 5, pp. 1377–1392.
- [7] Барбашин Е. А., Табуева В. А. О колебаниях маятника при наличии сухого трения // Изв. вузов. Матем., 1959, № 5, с. 48–57.
- [8] Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2013, vol. 23, no. 1, 1330002, 69 pp.
- [9] Филиппов А. Ф. Достаточное условие существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка // Матем. сб., 1952, т. 30, № 1, с. 171–180.

## The limit cycle as a result of global bifurcation in a class of symmetric systems with discontinuous right-hand side

Yury V. Morozov

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences  
Russia, 117997, Moscow, Profsoyuznaya st., 65  
tot1983@inbox.ru

We consider a class of symmetric planar Filippov systems. We find the interval of variation of the bifurcation parameter for which there is an unstable limit cycle. There exist stationary points into the domain, which has this cycle as a boundary. The type of points depends on the value of the bifurcation parameter. There is a redistribution of the area, bounded by this cycle, between the attraction domains of stationary points. The results of numerical simulations are presented for the most interesting values of the bifurcation parameter.

MSC 2010: 37G35

Keywords: limit cycle, planar system with a discontinuous right-hand side, global bifurcation

Received July 09, 2015, accepted December 30, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 17–30 (Russian)

