



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.46
MSC 2010: 70F40

Колебания твердого параллелепипеда на вибрирующем основании

А. И. Муницын, М. А. Муницына

Приводится аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях твердого параллелепипеда на горизонтальном основании. Предполагается, что проскальзывание между телом и основанием отсутствует, а основание движется по гармоническому закону в горизонтальном направлении. Считается также, что высота параллелепипеда существенно больше ширины. Диссипация при ударе учитывается в рамках гипотезы Ньютона. Методом осреднения находятся вынужденные режимы колебаний параллелепипеда, соответствующие основному и двум субгармоническим резонансам. Результаты представлены в виде амплитудно-частотных характеристик.

Ключевые слова: опорная плоскость, нелинейные колебания, метод осреднения

Получено 10 декабря 2015 года
После доработки 22 февраля 2016 года

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00338, 14-01-00432) и программы № I.31 Президиума РАН.

Муницын Александр Иванович
munitsyn@rambler.ru
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
111116, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14

Муницына Мария Александровна
munitsyna@gmail.ru
Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

1. Введение

Задача о колебаниях твердого тела на вибрирующем основании впервые была рассмотрена в работе [1]. Автор обратил внимание на то, что вытянутые в высоту свободно стоящие сооружения, такие как колонны и водонапорные баки, иногда гораздо лучше переносят землетрясения, чем более устойчивые на вид конструкции. Это явление объясняется тем, что такие сооружения могут совершать колебания, поочередно опираясь на одно из опорных ребер. Данной задаче посвящено достаточно много публикаций. Так, в [2] обнаружено большое число комбинационных резонансов и режимы хаотических колебаний.

Рассмотрены аналогичные задачи с учетом проскальзывания между телом и опорной поверхностью, упругости основания и отрыва от основания [3–6]. Большинство результатов получено методом прямого численного интегрирования. Вопросы управления колебаниями рассмотрены в работе [7], там же построены границы области устойчивости тела на плоскости «частота – амплитуда возбуждения» при нулевых граничных условиях.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение твердого параллелепипеда на подвижной горизонтальной плоскости. Предположим, что проскальзывание между параллелепипедом и плоскостью отсутствует, то есть нижнее основание может либо полностью опираться на плоскость, либо отклоняться от нее на некоторый угол α (рис. 1). Ограничимся рассмотрением движений параллелепипеда в плоскости рисунка и будем считать, что опорная плоскость совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении.

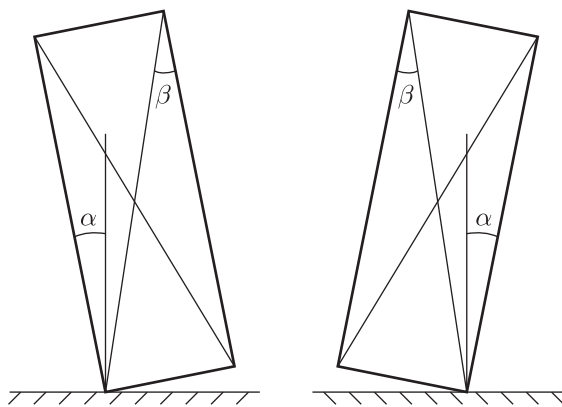


Рис. 1

В качестве модели удара воспользуемся гипотезой Ньютона, согласно которой имеет место соотношение $\dot{\alpha}_+ = -R\dot{\alpha}_-$, где $\dot{\alpha}_\pm = \dot{\alpha}(t_0 \pm 0)$, t_0 – момент времени, в который происходит удар ($\alpha(t_0) = 0$), R – коэффициент восстановления.

По теореме об изменении кинетического момента параллелепипеда относительно опорного ребра получим

$$J\ddot{\alpha} + rJ\dot{\alpha}\delta(\alpha) + mgd \sin(\beta - \alpha) = Fmd \cos(\beta - \alpha) \cos \theta_0 t, \quad \alpha > 0,$$

$$J\ddot{\alpha} + rJ\dot{\alpha}\delta(\alpha) - mgd \sin(\beta + \alpha) = Fmd \cos(\beta + \alpha) \cos \theta_0 t, \quad \alpha < 0,$$

где J – момент инерции параллелепипеда относительно каждого из опорных ребер, m – его масса, d – половина диагонали, β – угол между вертикальным ребром и диагональю,

g — ускорение свободного падения, F и θ_0 — амплитуда ускорения и частота колебаний плоскости соответственно, $r = 1 - R$, $\delta(\alpha)$ — нормированная единицей дельта-функция. Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Введем безразмерное время $\tau = t/\omega_0$, где $\omega_0^2 = mgd \cos \beta / J$, и получим уравнение колебаний тела в безразмерном виде

$$\ddot{\alpha} + r\dot{\alpha}\delta(\alpha) - \sin \alpha + c\mu \cos \alpha = f(\cos \alpha + c\mu \sin \alpha) \cos \theta\tau, \quad (2.1)$$

где $f = F/g$, $\mu = \text{sign}(\alpha)$, $c = \text{tg } \beta$, $\theta = \theta_0/\omega_0$.

Заметим, что те углы отклонения параллелепипеда от горизонтали, при которых линия действия силы тяжести проходит через его основание, определяются соотношением $\alpha \leq \beta$. Поэтому если высота параллелепипеда существенно больше ширины ($c \ll 1$), то уместно предположение о малости угла α . При $\alpha \ll 1$ уравнение (2.1) имеет вид

$$\ddot{\alpha} - \alpha + c\mu = \varepsilon q(\alpha, \dot{\alpha}, \tau), \quad q(\alpha, \dot{\alpha}, \tau) = -f \cos \theta\tau - r\dot{\alpha}\delta(\alpha). \quad (2.2)$$

Здесь введен малый параметр ε , то есть амплитуда возбуждения и сила диссипации предполагаются асимптотически малыми, что позволяет применить эффективные методы нелинейной механики [8, 9].

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2.2) описывает колебания параллелепипеда на неподвижной плоскости. При начальных условиях $\alpha(0) = A$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ решение имеет вид $\alpha(\tau) = c - (c - A) \text{ch } \tau$, которое справедливо на первой четверти периода колебаний. Из условия $\alpha(\pi/(2\omega)) = 0$ получаем зависимость амплитуды колебаний A от частоты ω ,

$$A = c \left(1 - \text{ch}^{-1} \frac{\pi}{2\omega} \right), \quad (2.3)$$

и соответствующее решение на одном периоде имеет вид

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} c - (c - A) \text{ch } \tau, & -\frac{\pi}{2\omega} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2\omega}, \\ -c + (c - A) \text{ch} \left(\tau - \frac{\pi}{\omega} \right), & \frac{\pi}{2\omega} \leq \tau \leq \frac{3\pi}{2\omega}. \end{cases}$$

3. Замена переменных

Запишем решение уравнения (2.2) на одном периоде колебаний в виде

$$\alpha = \mu \left(c - (c - A) \text{ch} \frac{B(\psi)}{\omega} \right), \quad \dot{\alpha} = -\mu(c - A) \text{sh} \frac{B(\psi)}{\omega}. \quad (3.1)$$

Здесь введено обозначение $B(\psi) = \psi - (1 - \mu)\pi/2$, где

$$\mu = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Новые переменные $A = A(\tau)$ и $\psi = \psi(\tau)$ являются функциями времени, а $\omega = \omega(A)$ — соответствующая (2.3) зависимость частоты колебаний от амплитуды в случае неподвижной опорной плоскости. При $\psi = \omega\tau$ равенства (3.1) соответствуют невозмущенному решению уравнения (2.2). Функции α и $\dot{\alpha}$ непрерывны по ψ .



В результате подстановки равенств (3.1) в уравнение (2.2) получим

$$\dot{A} \operatorname{sh} \frac{B(\psi)}{\omega} - (c - A) \operatorname{ch} \frac{B(\psi)}{\omega} \left(\dot{\psi} - \frac{B(\psi)}{\omega^2} \frac{d\omega}{dA} \dot{A} \right) + (c - A) \operatorname{ch} \frac{B(\psi)}{\omega} = \varepsilon \mu q. \quad (3.2)$$

Дополнив полученные уравнения (3.2) условиями совместности замены (3.1)

$$\dot{A} \operatorname{ch} \frac{B(\psi)}{\omega} - \frac{c - A}{\omega} \operatorname{sh} \frac{B(\psi)}{\omega} \left(\dot{\psi} - \frac{\dot{A} B(\psi)}{\omega} \frac{d\omega}{dA} \right) = -(c - A) \operatorname{sh} \frac{B(\psi)}{\omega}, \quad (3.3)$$

получим уравнения колебаний параллелепипеда в новых переменных

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\varepsilon \mu q \operatorname{sh} \frac{B(\psi)}{\omega}, \\ \dot{\psi} &= \omega - \varepsilon \mu q \left(\frac{\omega}{c - A} \operatorname{ch} \frac{B(\psi)}{\omega} + \frac{d\omega}{dA} \frac{B(\psi)}{\omega} \operatorname{sh} \frac{B(\psi)}{\omega} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

в которых следует учесть зависимость

$$\frac{d\omega}{dA} = \frac{2\omega^2}{c\pi} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2\omega}.$$

В задаче о вынужденных колебаниях нелинейных систем особую роль играют резонансные режимы, близкие к режимам свободных колебаний порождающей консервативной системы. В наиболее общем случае комбинационного резонанса вводится малая частотная расстройка $\varepsilon \lambda = n\theta - m\omega$, где n и m — взаимно простые целые числа. Главному резонансу соответствуют значения $n = m = 1$. В соответствии с этим предположением положим

$$\psi = \frac{n}{m} \theta \tau - \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{n}{m} \theta - \dot{\varphi}$$

и получим следующую систему уравнений для медленных переменных A и φ :

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\varepsilon \mu q \operatorname{sh} \frac{B(\psi)}{\omega}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\varepsilon \lambda}{m} + \varepsilon \mu q \left(\frac{\omega}{c - A} \operatorname{ch} \frac{B(\psi)}{\omega} + \frac{d\omega}{dA} \frac{B(\psi)}{\omega} \operatorname{sh} \frac{B(\psi)}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Осредненные уравнения

Запишем систему (3.5) в виде

$$\dot{A} = \varepsilon E_1(A, \varphi, \tau), \quad \dot{\varphi} = \varepsilon E_2(A, \varphi, \tau).$$

Так как A и φ являются медленными функциями времени, эти уравнения можно заменить осредненными по времени уравнениями

$$\dot{A} = \varepsilon E_{10}(A, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \varepsilon E_{20}(A, \varphi),$$

где

$$E_{i0}(A, \varphi) = \frac{1}{T} \int_0^T E_i(A, \varphi, \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} E_i(A, \psi) d\psi.$$

В рассматриваемой задаче осредненные уравнения имеют достаточно простой вид для главного резонанса и комбинационных резонансов $n = 1, m = 1, 3, 5, \dots$

Запишем правую часть уравнения (2.2) в виде

$$\varepsilon q(\alpha, \dot{\alpha}, \tau) = -\varepsilon f \cos(m\psi + \varphi) - \varepsilon r \dot{\alpha} \delta(\alpha).$$

Тогда для указанных резонансов осредненные уравнения (3.5) с точностью до членов первого порядка малости имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2\varepsilon f c \omega \sin \varphi}{\pi(c-A)(1+m^2\omega^2)} + \frac{\varepsilon r A(A-2c)}{\pi(c-A)}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\varepsilon \lambda}{m} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{8\varepsilon m f c^2 \omega^4 \cos \varphi}{\pi^2(c-A)^3(1+m^2\omega^2)^2} \operatorname{sh}^{-1} \frac{\pi}{2\omega}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

Полученные уравнения позволяют найти зависимость $A(\tau)$ для свободных колебаний параллелепипеда на неподвижной плоскости ($f = 0$) при учете диссипации при ударе по модели Ньютона

$$A(\tau) = c - \left(c^2 + \exp \left(\ln(A_0^2 - 2cA_0) - \frac{2r}{\pi} \tau \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $A_0 = A(0)$. Второе уравнение (4.1) в этом случае имеет вид $\dot{\psi} = \omega$, где зависимость $\omega(A)$ может быть найдена из уравнения (2.2).

Рассматривая вынужденные колебания, ограничимся рассмотрением установившихся колебаний (стационарных режимов), положив в (4.1) $\dot{A} = 0, \dot{\varphi} = 0$. Полученные уравнения совместно с (2.2) связывают между собой амплитуду и фазу колебаний A, φ , частоту свободных колебаний ω и малую частотную расстройку λ . Частота возбуждения и частота свободных колебаний связаны зависимостью $\varepsilon \lambda = n\theta - m\omega$, что позволяет построить зависимости амплитуды колебаний от частоты возбуждения.

Для исследования устойчивости полученных решений линеаризуем систему уравнений (4.1) в окрестности установившегося режима

$$\begin{aligned} \Delta \dot{A} &= \frac{\partial E_{10}}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial E_{10}}{\partial \varphi} \Delta \varphi, \\ \Delta \dot{\varphi} &= \frac{\partial E_{20}}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial E_{20}}{\partial \varphi} \Delta \varphi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для асимптотической устойчивости стационарных режимов необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы правой части уравнений (4.2) имели отрицательные действительные части, то есть условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$\frac{\partial E_{10}}{\partial A} + \frac{\partial E_{20}}{\partial \varphi} < 0, \quad \frac{\partial E_{10}}{\partial A} \frac{\partial E_{20}}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_{20}}{\partial A} \frac{\partial E_{10}}{\partial \varphi} > 0.$$

Их явный вид не приводится в силу громоздкости соответствующих выражений.



5. Обсуждение результатов

На рисунке 2 приведены зависимости $A(\theta)$ для параметров задачи $c = 0.1$, $r = 0.1$ и двух значений амплитуды движения основания $f = 0.01$ и $f = 0.02$ (кривые 2 и 3 соответственно). Кривой 1 обозначена зависимость амплитуды от частоты свободных колебаний (2.2). К этой кривой прилегают решения, соответствующие главному резонансу. Жирными линиями обозначены устойчивые решения.

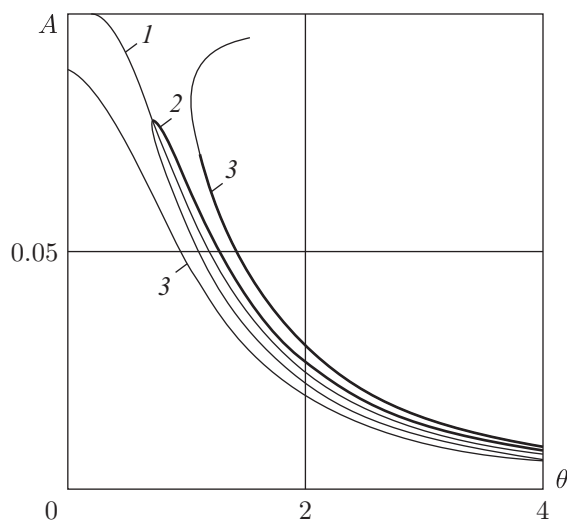


Рис. 2

При малых значениях амплитуды возбуждения $f = 0.01$ влияние принятого значения параметра диссипации $r = 0.1$ значительно, и оба решения образуют петлю, верхняя часть которой соответствует устойчивому решению. При увеличении амплитуды возбуждения существует две ветви решений, одна из которых имеет устойчивый участок.

Как следует из (4.1), частотная расстройка возрастает с увеличением частоты возбуждения, поэтому на рисунке 2 приведены результаты только в области малых частот. Для $f = 0.02$ даже в этом диапазоне частот расстройка λ не является малой, так что полученные результаты следует рассматривать как качественные.

На рисунке 3 приведены зависимости $A(\theta)$ для параметров задачи $c = 0.1$, $r = 0.02$, $f = 0.02$. Как и на рисунке 2, кривой 1 соответствует зависимость $A(\omega)$. Кривые 2 соответствуют основному резонансу, кривые 3 и 4 — субгармоническим резонансам $n = 1$, $m = 3$ и $n = 1$, $m = 5$ соответственно. Зависимости $A(\theta)$ для основного резонанса практически совпадают с кривыми 3 рисунка 2, отличающимися большим значением r .

Для данного семейства решений частотная расстройка неограниченно возрастает не только при больших частотах, но и при приближении амплитуды колебаний к предельному значению $A = c$.

Во всех рассмотренных случаях амплитуда возбуждения мала ($f < c$), так что при нулевых начальных условиях тело находится в покое относительно плоскости, и существует еще одно устойчивое решение $A \equiv 0$. Для малых частот возбуждения колебаний при произвольных начальных условиях параллелепипед либо возвращается в положение покоя относительно основания, либо опрокидывается. С увеличением частоты возбуждения появляется еще одно решение — стационарные колебания в окрестности положения равновесия

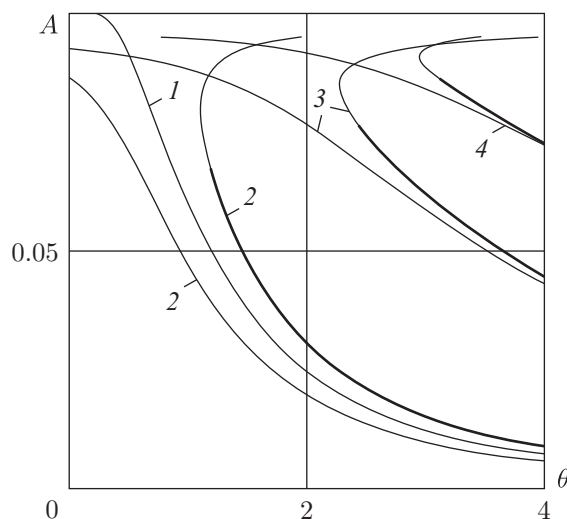


Рис. 3

или выход на главный резонанс. При дальнейшем увеличении частоты возможен выход на комбинационные резонансы.

Полученные результаты совпадают с точным решением [10]. Использование в настоящей работе метода возмущений позволило не только получить решения, но и исследовать их устойчивость, что особенно важно для практического применения полученных результатов.

Список литературы

- [1] Housner J. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes // *B. Seismol. Soc. Am.*, 1963, vol. 53, № 2, pp. 403–417.
- [2] Hogan S. J. The many steady state responses of a rigid block under harmonic forcing // *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1990, vol. 19, no. 7, pp. 1057–1071.
- [3] Sinopoli A. Earthquakes and large block monumental structures // *Ann. Geofis.*, 1995, vol. 38, nos. 5–6, pp. 737–751.
- [4] Prieto F., Lourenco P. B. On the rocking behavior of rigid object // *Meccanica*, 2005, vol. 40, no. 2, pp. 121–133.
- [5] Andreaus U., Casini P. On the rocking-uplifting motion of a rigid block in free and forced motion: Influence of sliding and bouncing // *Acta Mech.*, 1999, vol. 138, no. 3, pp. 219–241.
- [6] Sinopoli A. Unilaterality and dry friction: A geometric formulation for two-dimensional rigid body dynamics // *Nonlinear Dynam.*, 1997, vol. 12, no. 4, pp. 343–366.
- [7] Lenci S., Rega G. Optimal control and anti-control of the nonlinear dynamic of a rigid block // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2006, vol. 364, no. 1846, pp. 2353–2381.
- [8] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 503 с.
- [9] Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. Москва: Наука, 1985. 320 с.
- [10] Каралетян А. В., Муницына М. А. Динамика параллелепипеда на горизонтальной вибрирующей плоскости // *Автоматика и телемеханика*, 2015, № 3, с. 32–43.

Oscillations of a solid parallelepiped on a supported base

Alexander I. Munitsyn¹, Mariya A. Munitsyna²

¹National Research University “Moscow Power Engineering Institute”

Krasnokazarmennaia 14, Moscow, Russia, 111116

²Moscow Institute of Physics and Technology

9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russian Federation

¹munitsyn@rambler.ru, ²munitsyna@gmail.ru

An analytical solution of the problem of forced oscillation of the solid parallelepiped on a horizontal base is presented. It is assumed that the slippage between the body and the base is absent, and the base moves harmonically in a horizontal direction. It is also assumed that the height of the box is much larger than the width. The dissipation of impact is taken into account in the framework of Newton’s hypothesis. The forced oscillation modes of parallelepiped corresponding to the main and two subharmonic resonances are found by using the averaging method. The results are shown in the form of amplitude-frequency characteristics.

MSC 2010: 70F40

Keywords: supported plane, nonlinear oscillations, averaging method

Received December 10, 2015, accepted February 22, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 1, pp. 91–98 (Russian)