



## ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.925 + 517.93

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35, 70E18, 70F25, 70H45

# Динамика задачи Суслова в поле тяжести: реверс и странные аттракторы\*

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, А. О. Казаков

В работе приведены некоторые результаты исследования хаотической динамики в задаче Суслова, описывающей движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи  $(\omega, e) = 0$ , где  $\omega$  — угловая скорость тела,  $e$  — единичный вектор, неподвижный в теле. В зависимости от параметров системы указаны случаи регулярного (в частности, интегрируемого) поведения, а также обнаружены различные притягивающие множества (в том числе странные аттракторы), типичные для диссипативных систем. В задаче указаны области фазового пространства, в которых консервативная и диссипативная динамика сосуществуют на достаточно мелких масштабах. Подробно исследован эффект реверса, ранее наблюдавшийся в движении кельтских камней.

Ключевые слова: задача Суслова, неголономная связь, реверс, странный аттрактор

---

\*Перевод статьи “Dynamics of the Suslov Problem in a Gravitational Field: Reversal and Strange Attractors”, опубликованной в журнале *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 605–626.

Получено 14 августа 2015 года

После доработки 17 сентября 2015 года

---

Работа Бизяева И. А. и Борисова А. В. (разделы 1–3, 5, 7) выполнена в рамках гранта РНФ (проект № 14-50-00005). Работа Казакова А. О. (разделы 4, 6) поддержана грантом РНФ (проект № 15-12-20035).

---

Бизяев Иван Алексеевич

[bizaev\\_90@mail.ru](mailto:bizaev_90@mail.ru)

Борисов Алексей Владимирович

[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Казаков Алексей Олегович

[kazakovdz@yandex.ru](mailto:kazakovdz@yandex.ru)

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23



## 1. Введение

Данная работа продолжает цикл исследований авторов по динамике неголономных систем. Отметим, что возросший в последнее время интерес к неголономной механике, во-первых, связан с развитием новых методов численного анализа, а во-вторых, обусловлен прикладным значением таких систем (например, в мобильной робототехнике).

Не останавливаясь подробно на современном развитии неголономной механики (см., например, [11, 13]), отметим, что в сравнении с гамильтоновыми системами неголономные обладают существенно более разнообразным поведением [10–13]. Такое многообразие типов поведения (которое было названо иерархией динамики) обусловлено наличием или отсутствием различных *тензорных инвариантов* (первых интегралов, инвариантной меры и пуассоновой структуры) и *обратимостей*. В качестве двух наиболее интересных систем, динамическое поведение которых существенно различается, отметим задачу о качении шара Чаплыгина (подробно исследованную в [14]) и задачу о кельтском камне [16, 30].

Данная работа посвящена исследованию задачи Сулова, в которой твердое тело с неподвижной точкой движется в присутствии неголономной связи (проекция угловой скорости на неподвижную в теле ось равна нулю) и поля тяжести.

Движение твердого тела по инерции (либо если центр масс тела находится в неподвижной точке) было изучено Суловым [33] и Вагнером [32], а также в современных работах [6, 17, 36]. При определенных ограничениях на моменты инерции тела система обладает инвариантной мерой с постоянной плотностью [36] или мерой с сингулярной плотностью (то есть имеющей особенности в определенных точках фазового пространства) [6].

Твердое тело с указанной связью, движущееся в поле тяжести, будем называть для краткости волчком Сулова (по аналогии с волчком Лагранжа и волчком Чаплыгина). При этом в фазовом пространстве в зависимости от параметров системы возможно различное динамическое поведение — от регулярного поведения (которое, однако, не всегда выражается в квадратурах) до странных аттракторов.

При исследовании регулярного поведения волчка Сулова мы исследуем эффект реверса — способность тела менять направление (неустойчивого) вращения вокруг вертикальной неподвижной оси на противоположное (устойчивое), см. подробнее [25]. Известно, что эффект реверса наблюдается в реальных экспериментах с волчками другого типа — кельтскими камнями [28]. Объяснение этому эффекту может быть получено в рамках неголономной модели (см., например, [30, 37]). Недавно эффект реверса был обнаружен для волчка Чаплыгина (динамически несимметричного шара, центр масс которого смещен вдоль всех трех осей инерции) [7]. В данной работе показано, что явление реверса для волчка Сулова может быть двух типов: как у кельтского камня, когда тело меняет направление вращения вокруг вертикальной оси на противоположное, и как у волчка Томпсона [24] (или эллипсоида вращения [31]), когда ось вращения тела переворачивается и также меняет направление вращения.

В работе мы используем компьютерные (численные) методы исследования хаотической динамики. Они основаны на построении карт показателей Ляпунова. Кроме того, предложен численный критерий классификации хаотической динамики. С помощью этого критерия удалось показать, что кроме простых аттракторов и репеллеров (в силу обратимости), а также сложных странных аттракторов в системе существуют зоны псевдоконсервативной динамики (где консервативное и диссипативное поведение перемешивается между собой на весьма мелких масштабах). Такое поведение, называемое также смешанной динамикой, ранее было обнаружено в других неголономных системах [10, 23]. Если центр масс смещен так,

что система инволюциями не обладает, тогда в системе встречаются странные аттракторы типа Фейгенбаума.

В последнем разделе работы рассмотрена задача Суслова в случае неоднородной связи. В этом случае, как правило, отсутствует интеграл энергии. Мы приводим новый случай интегрируемости (обобщающий случай В. В. Козлова для однородной связи) и показываем, что в общем случае задача сводится к исследованию (существенно) трехмерного отображения Пуанкаре, а также отсутствуют два дополнительных интеграла.

Для исследования динамики применен пакет программ «Компьютерная динамика: Хаос», который разработан в Институте компьютерных исследований Удмуртского государственного университета и позволяет строить карты режимов и показателей Ляпунова, исследовать бифуркации неподвижных точек, а также визуализировать движение тела.

## 2. Уравнения движения

Рассмотрим движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в присутствии неголономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = 0, \tag{2.1}$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость тела,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, неподвижный в теле.

Связь (2.1) введена Г. К. Сусловым в [33, с. 593]. Реализация связи (2.1) с помощью колесиков с острыми краями, обкатывающими неподвижную сферу, предложена В. Вагнером [32] (см. рис. 1). Острые края колесиков препятствуют скольжению колесиков в направлении, перпендикулярном их плоскости.

Выберем две системы координат:

- инерциальную (неподвижную) систему координат  $Oxyz$ ;
- неинерциальную (подвижную) систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанную с твердым телом таким образом, что  $Ox_3 \parallel \mathbf{e}$ , а оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  направлены так, чтобы одна из компонент тензора инерции тела обращалась в нуль:  $I_{12} = 0$ .

Для параметризации конфигурационного пространства выберем матрицу направляющих косинусов  $\mathbf{Q} \in SO(3)$ , по столбцам которой стоят  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$  — орты неподвижных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , спроецированные на оси подвижной системы координат  $Ox_1x_2x_3$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3).$$

В подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  уравнение связи (2.1) и тензор инерции  $\mathbf{I}$  твердого тела имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 0, \\ \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & I_{13} \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

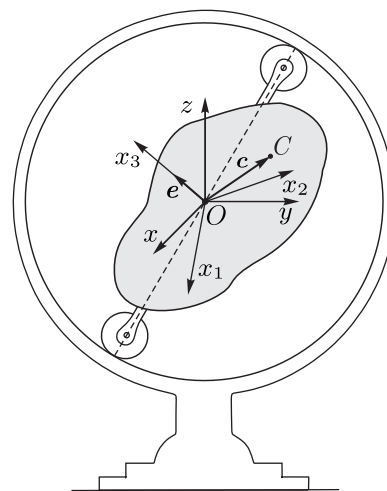


Рис. 1. Реализация задачи Суслова.



Пусть  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  — вектор смещения центра масс тела относительно неподвижной точки  $O$ ; будем считать, что вся система находится в поле тяжести с потенциалом

$$U = (\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \mathbf{b} = -mg\mathbf{c},$$

где  $m$  — масса твердого тела,  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнения движения для  $\boldsymbol{\omega}$  в подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda\mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \lambda &= -\frac{\left(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{e}\right)}{(\mathbf{e}, \mathbf{I}^{-1}\mathbf{e})}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ .

Дополним систему (2.3) кинематическими уравнениями Пуассона, описывающими эволюцию ортов  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}; \quad (2.4)$$

получим полную систему, описывающую движение твердого тела.

В уравнениях (2.3) и (2.4) отделяется замкнутая система для переменных  $(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , которая с учетом связи (2.2) представляется в форме

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + b_3\gamma_2 - b_2\gamma_3, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3\omega_1, \\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Система (2.5) обладает интегралом энергии и геометрическим интегралом:

$$E = \frac{1}{2} (I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) + (\mathbf{b}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (2.6)$$

Таким образом, на фиксированном уровне интеграла энергии  $E = h$  и  $F_1 = 1$  система (2.5) определяет поток на трехмерном многообразии  $\mathcal{M}_h^3$ :

$$\mathcal{M}_h^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \mid E = h, F_1 = 1\},$$

для его интегрируемости по теореме Эйлера–Якоби [29] не хватает дополнительного первого интеграла  $F_2$  и инвариантной меры.

Для того чтобы по найденным решениям  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  из (2.5) восстановить движение твердого тела в неподвижной системе координат  $Oxyz$ , нужно определить  $\boldsymbol{\alpha}$  и  $\boldsymbol{\beta}$  из системы (2.4), которая сводится к уравнению для угла прецессии  $\psi$ , то есть к квадратуре

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1(t)\gamma_1(t) + \omega_2(t)\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)}. \quad (2.7)$$

Поэтому свойства получившейся системы (2.5) во многом определяют свойства динамики всей системы.



### 3. Первые интегралы и инвариантная мера

В зависимости от вида тензора инерции и от смещения центра масс твердого тела система (2.5) может обладать дополнительным первым интегралом, а также (возможно сингулярной) инвариантной мерой. В данном разделе будем рассматривать следующие частные случаи:

- уравновешенное твердое тело ( $\mathbf{b} = 0$ ), у которого  $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$ ;
- неуравновешенное твердое тело ( $\mathbf{b} \neq 0$ ), в котором вектор  $\mathbf{e}$  направлен вдоль одной из главных осей инерции тела:  $I_{13} = I_{23} = 0$ ;
- неуравновешенное твердое тело ( $\mathbf{b} \neq 0$ ), у которого  $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$ .

#### 3.1. Уравновешенное твердое тело ( $\mathbf{b} = 0$ )

В системе (2.5) уравнения для угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отделяются. Фазовый портрет на фиксированном уровне энергии  $E = h$  изображен на рисунке 2: прямая  $I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0$  целиком заполнена неподвижными точками.

На каждом уровне энергии лежат две (изолированные) неподвижные точки, одна асимптотически устойчива, другая асимптотически неустойчива (см., например, [6]).

Вследствие асимптотического поведения система (2.5) в данном случае обладает инвариантной мерой с сингулярной плотностью [6]

$$\rho = (I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2)^{-1}.$$

Явно проинтегрировав, находим

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \frac{\omega_0 I_{22}}{I_{11} I_{23}^2 + I_{22} I_{13}^2} \frac{2I_{13} \sqrt{I_{11} I_{22}} e^{\omega_0 t} \pm I_{11} I_{23} (1 - e^{2\omega_0 t})}{1 + e^{2\omega_0 t}}, \\ \omega_2(t) &= \frac{\omega_0 I_{11}}{I_{11} I_{23}^2 + I_{22} I_{13}^2} \frac{2I_{23} \sqrt{I_{11} I_{22}} e^{\omega_0 t} \pm I_{22} I_{13} (1 - e^{2\omega_0 t})}{1 + e^{2\omega_0 t}}, \\ h &= \frac{I_{11}^2 I_{22}^2 \omega_0^2}{I_{11} I_{23}^2 + I_{22} I_{13}^2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для найденных  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  орт  $\gamma$  определяется согласно (2.5) линейной неавтономной системой уравнений, которая при помощи комплексной замены переменных сводится к уравнению Риккати (см., например, [32]). Тем не менее, в общем случае ее решение ветвится на комплексной плоскости времени [34], а потому не представляется в квадратурах.

В работе [6] отмечено, что при ограничении на моменты инерции

$$I_{13} = 0, \quad I_{11} = I_{22} + \frac{I_{23}^2}{I_{22}} k^2, \quad \text{где } k = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

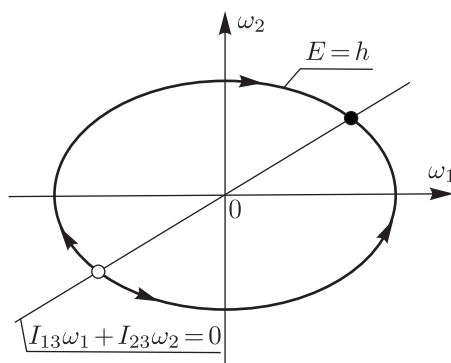


Рис. 2. Характерный фазовый портрет системы.



система (2.5) обладает дополнительным интегралом  $F_2$ :

$$F_2 = f_1^{(k)}(\omega_1, \omega_2)\gamma_1 + f_2^{(k)}(\omega_1, \omega_2)\gamma_2 + f_3^{(k)}(\omega_1, \omega_2)\gamma_3,$$

где коэффициенты  $f_1^{(k)}$ ,  $f_2^{(k)}$  и  $f_3^{(k)}$  представляют собой полиномы нечетной степени  $k$  по скоростям  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Например, при  $k = 1$  получаем:

$$f_1^{(1)} = \left( I_{22} + \frac{I_{23}^2}{I_{22}} \right) \omega_1, \quad f_2^{(1)} = I_{22}\omega_2, \quad f_3^{(1)} = I_{23}\omega_2.$$

Явное решение  $\gamma(t)$  в этом случае получено в работе [17].

Опишем движение твердого тела в абсолютном пространстве, то есть в неподвижной системе координат  $Oxyz$ . Неподвижным точкам системы (2.5) в  $Oxyz$  соответствуют стационарные вращения вокруг  $\omega$ . Все остальные движения твердого тела представляют собой переход от неустойчивого стационарного вращения к устойчивому. Связь такой асимптотической задачи с явлением реверса была указана в [25], где также обсуждаются аналогичные эффекты в других неголономных задачах.

При этом происходит поворот оси вращения на некоторый угол  $\Delta\Phi$ , который, оказывается, не зависит от энергии и при  $I_{13} = 0$  определяется соотношением [17]:

$$\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\frac{I_{22}}{I_{23}}\right)}, \quad k^2 = \frac{I_{22}}{I_{23}}(I_{11} - I_{22}). \quad (3.3)$$

Таким образом, при нечетных  $k$ , то есть когда имеется указанный выше интеграл, ось вращения меняет направление на обратное:  $\Delta\Phi = \pm\pi$ .

### 3.2. Неуравновешенное тяжелое твердое тело ( $\mathbf{b} \neq 0$ )

Пусть центр масс твердого тела смещен относительно геометрического центра сферической оболочки (то есть  $\mathbf{b} \neq 0$ ). В этом случае систему (2.5) можно называть волчком Суслова (по аналогии с волчком Лагранжа).

Как показано в [36], необходимым и достаточным условием существования инвариантной меры является  $I_{13}^2 + I_{23}^2 = 0$ . Рассмотрим условия существования дополнительного интеграла при наличии и отсутствии инвариантной меры.

**Случай  $I_{13} = I_{23} = 0$ .** Система (2.5) сохраняет стандартную инвариантную меру ( $\rho = \text{const}$ ), а дополнительный интеграл  $F_2$  найден в двух случаях:

- случай Е. И. Харламовой ( $b_3 = 0$ ) [39] и  $F_2 = I_{11}b_1\omega_1 + I_{22}b_2\omega_2$ ;
- случай В. В. Козлова ( $b_1 = b_2 = 0$ ,  $I_{22} = I_{11}$ ) [36] и  $F_2 = \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2$ .

В [38] было доказано, что если центр масс смещен только вдоль  $Ox_3$  (то есть  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $b_3 \neq 0$ ), дополнительный мероморфный интеграл существует только при  $I_{22} = I_{11}$ . Отсутствие дополнительного мероморфного интеграла при более общих ограничениях на  $\mathbf{b}$  доказано в [21, 22].



ЗАМЕЧАНИЕ. Задача Суслова при  $I_{13} = 0$  и  $I_{23} = 0$ , но в различных интегрируемых потенциальных полях  $U = U(\gamma_1, \gamma_2)$  обладает необычными топологическими свойствами, которые указаны в работах [6, 20, 39, 40]. При этом двумерные интегральные многообразия могут иметь род  $g > 2$ , то есть не являются торами. В этом случае уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме, после замены времени  $dt = \gamma_3^{-1} d\tau$ , которая не определена при  $\gamma_3 = 0$ .

**Случай  $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$ .** Здесь укажем новый случай, в котором существует дополнительный интеграл  $F_2$ . В этом случае система уже неинтегрируема по теореме Эйлера – Якоби, но ее динамика является регулярной.

Если компоненты тензора инерции и смещение центра масс удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} I_{13} = 0, \quad I_{23}^2 - I_{22}(I_{11} - I_{22}) = 0, \\ b_1 = 0, \quad I_{22}b_2 + I_{23}b_3 = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

система (2.5) обладает дополнительным интегралом

$$F_2 = (I_{22}^2 + I_{23}^2)\gamma_1\omega_1 + I_{22}(I_{22}\gamma_2 + I_{23}\gamma_3)\omega_2.$$

Отметим, что семейство (3.4) одновременно является обобщением семейства (3.2) при  $k = 1$  и случая В. В. Козлова.

Таким образом, система (2.5) при условиях (3.4) определяет поток без гладкой инвариантной меры на некотором двумерном многообразии

$$\mathcal{M}_{h,f}^2 = \{(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mid E = h, F_1 = 1, F_2 = f\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Поток на двумерном многообразии без гладкой инвариантной меры также встречались в других неголомомных системах (см., например, [3, 5]).

Открытым остается вопрос о топологическом типе  $\mathcal{M}_{h,f}^2$  и структуре слоения, определяемого интегралами  $H, F_1$  и  $F_2$ .

#### 4. Отображение Пуанкаре и инволюции

В общем случае уравнения (2.5) задают поток  $\mathcal{F}$  на трехмерном многообразии

$$\mathcal{M}_h^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mid E = h, F_1 = 1\}.$$

Для параметризации этого потока будем использовать переменные  $\omega_1, \gamma_1$  и  $\gamma_2$ , выражая  $\omega_2$  и  $\gamma_3$  через интегралы (2.6)<sup>1</sup>:

$$(\dot{\omega}_1, \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) = \mathcal{F}(\omega_1, \gamma_1, \gamma_2).$$

Выбрав плоскость  $\gamma_1 = \text{const}$  в качестве секущей трехмерного потока  $\mathcal{F}$ , получим двумерное отображение Пуанкаре

$$(\bar{\gamma}_2, \bar{\omega}_1) = \mathcal{P}(\gamma_2, \omega_1). \tag{4.1}$$

Так как переменные  $\gamma_3$  и  $\omega_2$  определяются через интегралы неоднозначно, то полученное отображение является многолистным (выбор знаков  $\gamma_3$  и  $\omega_2$  определяет конкретный лист). В дальнейшем для определенности будем выбирать лист, соответствующий положительным значениям переменной  $\omega_2$ .

На сконструированном двумерном отображении Пуанкаре  $\mathcal{P}$  неподвижным точкам соответствуют периодические орбиты (циклы) в исходной системе (2.5).

<sup>1</sup>При этом  $\omega_2$ , а также  $\gamma_3$  легко выражается через энергию и геометрический интеграл. Так как переменные  $\omega_1$  и  $\omega_2$  входят в уравнения (2.5) равноценно, то аналогичным образом можно записать трехмерный поток в переменных  $(\omega_2, \gamma_1, \gamma_2)$





#### 4.1. Обратимость и инволюции

Исследования [7, 10, 23] показывают, что наличие обратимости и количество инволюций в системе существенно влияют на тип и сложность динамики неголономных систем. Работы [10, 23] посвящены исследованиям движения твердых тел различной формы,двигающихся по поверхности без проскальзывания и верчения. Показано, что в зависимости от геометрических и динамических свойств тела система может обладать различным количеством инволюций, что в итоге определяет тип хаотической динамики в системе. В работе [7] представлены результаты исследования волчка Чаплыгина (динамически несимметричного шара со смещенным центром масс). При произвольном смещении центра масс этого волчка система обратима относительно единственной инволюции, а сам волчок может совершать реверс (как кельтский камень). Кроме того, в этом случае в системе удалось обнаружить странный аттрактор восьмерочного типа. Работы [8, 16, 30] посвящены исследованию движения кельтского камня. В них также отмечено, что динамика кельтского связана с инволюциями.

Перейдем к исследованию обратимости в системе (2.5). В общем случае (при любых параметрах) система обратима только относительно одной инволюции

$$R_0 : \omega_1 \rightarrow -\omega_1, \quad \omega_2 \rightarrow -\omega_2, \quad t \rightarrow -t. \quad (4.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что система называется *обратимой* относительно инволюции  $R$ , если эта система инвариантна относительно замены  $R$  и при обращении времени  $t \rightarrow -t$ , а преобразование  $R \circ R$  является тождественным.

Благодаря наличию этой инволюции, фазовый портрет системы (2.5) обладает следующими свойствами:

- для каждой траектории  $\mathcal{F}(\gamma_1, \gamma_2, \omega_1)$  существует симметричная (относительно  $Fix(R_0) = \{\omega_1 = 0\}$ ) траектория  $\mathcal{F}^{-1}(R_0(\gamma_1, \gamma_2, \omega_1))$ , находящаяся в инволюции с исходной;
- если множество  $A$  является притягивающим (аттрактором), то множество  $R_0(A)$  будет притягивающим для потока в обратном времени  $\mathcal{F}^{-1}$  (то есть репеллером).

В следующих разделах будет показано, что благодаря описанным свойствам в системе (2.5) возможен реверс того же типа, что и для кельтских камней.<sup>2</sup>

Рассмотрим волчок Суслова, центр масс которого смещен только вдоль оси  $Ox_3$ , то есть  $\mathbf{b} = (0, 0, b_3)$ . В этом случае, в зависимости от тензора инерции  $\mathbf{I}$ , в системе (2.5) могут появиться дополнительные инволюции, полный перечень которых содержится ниже, в таблице 1.

Таблица 1. Дополнительные инволюции системы (2.5) при  $\mathbf{b} = (0, 0, b_3)$

	$I_{13} = 0, I_{23} = 0$	$I_{13} = 0, I_{23} \neq 0$	$I_{13} \neq 0, I_{23} = 0$	$I_{13} \neq 0, I_{23} \neq 0$
$R_1: \omega_1 \rightarrow -\omega_1, \gamma_1 \rightarrow -\gamma_1, t \rightarrow -t$	+	+	−	−
$R_2: \omega_2 \rightarrow -\omega_2, \gamma_2 \rightarrow -\gamma_2, t \rightarrow -t$	+	−	+	−

<sup>2</sup>Напомним, что реверс для кельтского камня заключается в изменении направления вращения вокруг вертикальной оси на противоположное при вращении камня вокруг этой оси в «неудобном» направлении.



Для того чтобы приведенные выше инволюции перенести на отображение Пуанкаре (4.1), нужно в качестве секущей задать многообразие, инвариантное по отношению действия инволюции. Наиболее подходящей секущей для системы (2.5) является гиперплоскость  $\gamma_1 = 0$ . Заметим, что на отображении Пуанкаре (4.1) мы работаем с листом, соответствующим определенному (положительному) значению переменной  $\omega_2$ , а значит, некоторые инволюции (например,  $R_0$  и  $R_2$ ) не могут быть перенесены.

Сконструированное отображение Пуанкаре (4.1) при выборе секущей  $\gamma_1 = 0$  и дополнительном условии  $I_{13} = 0$  может обладать лишь единственной инволюцией

$$r_1: \omega_1 \rightarrow -\omega_1, \tag{4.3}$$

множество неподвижных точек которой образует прямую

$$Fix(r_1) = \{\omega_1 = 0\}.$$

В разделе 6 прямая  $Fix(r_1)$  нам понадобится для исследования и классификации хаотической динамики, поэтому, для удобства, введем следующие определения. Будем называть *обратимым аттрактором* предельное множество, образованное итерациями (на отображении Пуанкаре) линии  $\omega_1 = 0$  в прямом времени, а *обратимым репеллером* — предельное множество, состоящее из итераций этой линии в обратном времени. По теореме Пуанкаре о возвращении, в случае существования в системе гладкой инвариантной меры обратимые аттрактор и репеллер неразличимы. В противном случае, эти множества различимы, но симметричны друг другу относительно  $\omega_1$ . В разделе 6 будет использована степень такой различимости для классификации хаотических режимов.

На рисунке 3 приведены фазовые портреты системы (2.5) при различных параметрах. Для волчка Суслова, у которого  $I_{13} = 0$ , отображение Пуанкаре инволютивно относительно прямой  $\omega_1 = 0$  (см. рис. 3а).

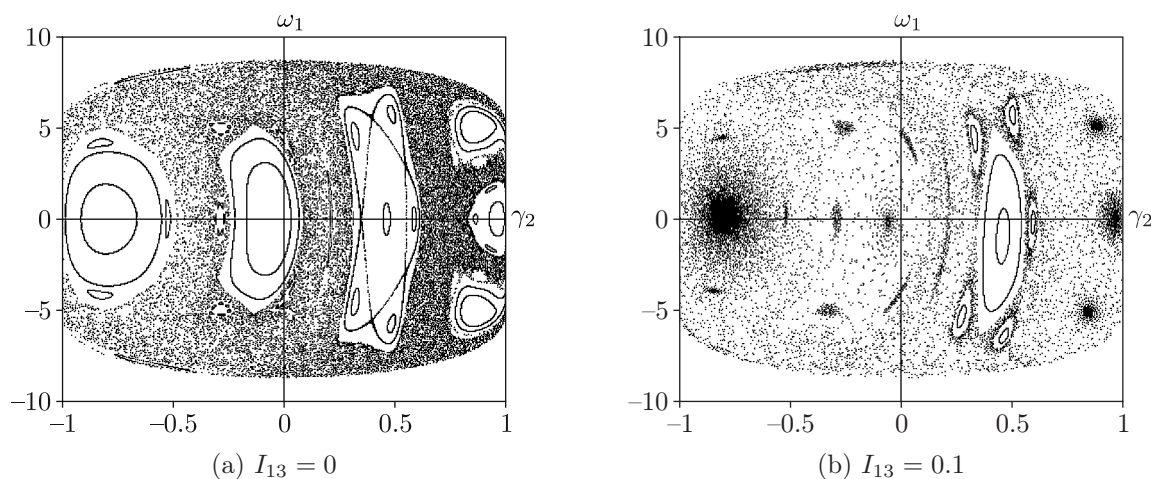


Рис. 3. Фазовый портрет на отображении Пуанкаре (4.1). Все параметры (кроме  $I_{13}$ ) выбраны следующим образом:  $E = 50$ ,  $I_1 = 4$ ,  $I_2 = 3$ ,  $I_{23} = 0$ ,  $c = (0, 0, 100)$ . а) Благодаря наличию инволюции  $r_1$  фазовый портрет на отображении Пуанкаре выглядит симметричным относительно горизонтальной оси. б) При  $I_{13} \neq 0$  инволюция  $r_1$  пропадает, а фазовый портрет на отображении Пуанкаре становится несимметричным. Более того, на отображении Пуанкаре видны сгущения траекторий вблизи асимптотически устойчивых точек различных периодов.

В общем случае отображение Пуанкаре (4.1) инволюциями не обладает, причем на нем заметны сгущения точек (практически черные области), соответствующие простым аттракторам — неподвижным и периодическим точкам на отображении Пуанкаре (см. рис. 3b). Как известно, существование любых аттракторов препятствует существованию гладкой инвариантной меры. Кроме того, наличие хаотического слоя свидетельствует об отсутствии дополнительного первого интеграла  $F_2$ .

## 5. Реверс и неподвижные точки

В данном разделе мы приводим результаты исследования состояний равновесия системы (2.5) для неуравновешенного волчка Сулова ( $\mathbf{b} \neq 0$ ), распределение масс которого задается недиагональным тензором инерции ( $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$ ).

### 5.1. Неподвижные точки приведенной системы

На фиксированном уровне геометрического интеграла ( $F_1 = 1$ ) в системе (2.6) при  $\mathbf{b} \neq 0$  и  $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$  можно выделить три семейства состояний равновесия.

1. Пара изолированных положений равновесия

$$\Omega_1 = \left\{ \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \gamma_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{b^2}}, \gamma_2 = \pm \frac{b_3}{\sqrt{b^2}}, \gamma_3 = \pm \frac{b_3}{\sqrt{b^2}} \right\}.$$

2. Однопараметрическое семейство положений равновесий вида

$$\Omega_2 = \left\{ \omega_1 = \sin \varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \omega_2 = \cos \varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \gamma_1 = \sin \varphi, \gamma_2 = \cos \varphi, \gamma_3 = 0 \right\}.$$

3. Однопараметрическое семейство положений равновесий вида

$$\Omega_3 = \left\{ \omega_1 = -\sin \varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \omega_2 = -\cos \varphi \sqrt{\frac{b_3}{A}}, \gamma_1 = \sin \varphi, \gamma_2 = \cos \varphi, \gamma_3 = 0 \right\}.$$

Переменная  $A$  и угол  $\varphi$  (в зависимости от знака параметра  $b_3$ ) для семейств  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= I_{13} \sin \varphi + I_{23} \cos \varphi, \\ \varphi &\in (\tilde{\varphi}, \pi + \tilde{\varphi}), \text{ если } b_3 > 0, \\ \varphi &\in (\pi + \tilde{\varphi}, 2\pi + \tilde{\varphi}), \text{ если } b_3 < 0, \\ \tilde{\varphi} &= -\operatorname{arctg} \frac{I_{23}}{I_{13}}. \end{aligned}$$

Пара изолированных положений равновесия семейства  $\Omega_1$  лежит на фиксированном уровне интеграла энергии  $h = \pm b_3$  и имеет характеристический полином вида

$$P(\lambda) = \lambda \left( -\lambda^4 \pm \left( \frac{b_1^2 + b_3^2}{I_{22}\sqrt{b^2}} + \frac{b_2^2 + b_3^2}{I_{22}\sqrt{b^2}} \right) \lambda^2 - \frac{b_3^2}{I_{11}I_{22}} \right). \quad (5.1)$$

Заметим, что на изолированных состояниях равновесия интеграл энергии  $E = h$  и геометрический интеграл  $F_1 = 1$  зависимы, поэтому характеристический полином имеет лишь один нулевой корень. Анализ остальных корней уравнения (5.1) показывает, что одно из состояний равновесия является центром, а второе — консервативным седлом.

Рассмотрим подробнее второе и третье семейства неподвижных точек. Подставив состояние равновесия из  $\Omega_2$  (или  $\Omega_3$ ) в уравнение (2.6), получим соотношение, связывающее  $\varphi$  с уровнем интеграла энергии  $E = h$ :

$$h(\varphi) = \frac{b_3}{2A} (I_{11} \sin^2 \varphi + I_{22} \cos^2 \varphi) + b_1 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi. \quad (5.2)$$

Характерная зависимость  $h(\varphi)$  в случае  $b_3 > 0$  представлена на рисунке 4.

Таким образом, при малых значениях параметра энергии  $h < h_1$  в системе (2.5) отсутствуют состояния равновесия  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , при  $h = h_1$  появляется два состояния равновесия, а при  $h > h_1$  их становится четыре.

Характеристическое уравнение для второго семейства  $\Omega_2$  состояний равновесия линеаризованной системы записывается в виде

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2(p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4), \\ p_1 &= -I_{11} I_{22} A, \quad p_2 = (I_{11} I_{23} \sin \varphi - I_{22} I_{13} \cos \varphi) \sqrt{A b_3}, \\ p_3 &= A(I_{11} b_1 \sin \varphi + I_{22} b_2 \cos \varphi) - b_3(I_{11} I_{22} + 2A^2), \\ p_4 &= 2A \sqrt{A b_3} (b_1 \cos \varphi - b_2 \sin \varphi) + \\ &+ (I_{11} - I_{22}) \sqrt{A b_3} \sin \varphi \cos \varphi + \sqrt{A b_3} (I_{11} I_{23} \sin \varphi - I_{22} I_{13} \cos \varphi). \end{aligned} \quad (5.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При  $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$  след матрицы линеаризации имеет вид  $-\frac{p_2}{p_1} \neq 0$ , что свидетельствует об отсутствии гладкой инвариантной меры в системе (2.6) в рассматриваемом случае [36].

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что третье семейство состояний равновесия находится в инволюции  $R_0$  со вторым семейством. Следовательно, если состояние равновесия  $O_1 \in \Omega_2$  обладает собственными числами  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ , то  $O_2 = R_0(O_1)$  будет принадлежать семейству  $\Omega_3$  и иметь собственные числа  $-\lambda_1, \dots, -\lambda_5$ . Таким образом, далее будем проводить исследования состояний равновесия, принадлежащих лишь семейству  $\Omega_2$ .

В общем случае на каждом уровне интеграла энергии  $E > h_1$  семейство  $\Omega_2$  содержит два состояния равновесия, каждое из которых имеет три ненулевых собственных числа  $(\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \lambda_3^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ .

Заметим, что коэффициенты характеристического уравнения (5.3) кроме параметров системы зависят от угла  $\varphi$ , который, в свою очередь, выражается через энергию из уравнения (5.2). Таким образом, аналитические исследования устойчивости состояний равновесия затруднительны.

Для численного исследования устойчивости состояний равновесия, принадлежащих семейству  $\Omega_2$ , построим диаграмму устойчивости состояний равновесия на плоскости параметров  $(I_{23}, E)$ , зафиксировав остальные параметры следующими значениями:

$$I_1 = 4, \quad I_2 = 2, \quad I_{13} = 1.5, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 100. \quad (5.4)$$

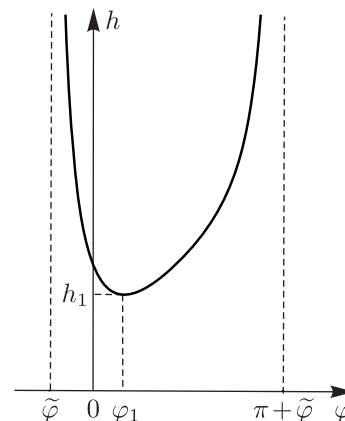


Рис. 4. Зависимость  $h(\varphi)$ .



При указанных параметрах характеристическое уравнение всегда обладает одним действительным корнем (для определенности обозначим его как  $\lambda_1$ ) и парой комплексно-сопряженных корней.

Для построения диаграммы устойчивости мы разбиваем плоскость параметров  $(I_{23}, E)$  на  $200 \times 200$  точек, а каждую из точек, в зависимости от количества состояний равновесия и их типов, окрашиваем определенным цветом<sup>a</sup> в соответствии со следующими правилами:

- серый: не существует состояний равновесия;
- зеленый: два состояния равновесия, у которых  $\lambda_1^{(1)} > 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(1)}) < 0$  и  $\lambda_1^{(2)} < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(2)}) < 0$ ;
- голубой: два состояния равновесия, у которых  $\lambda_1^{(1)} < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$  и  $\lambda_1^{(2)} > 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(2)}) > 0$ .

Прокомментируем построенную на рисунке 5 диаграмму устойчивости. При малых энергиях ( $E < h_1$ ) состояния равновесия в системе отсутствуют. При достижении критического уровня энергии  $E = h_1$  в системе происходит седло-узловая бифуркация, в результате которой рождается седло-узловое состояние равновесия, распадающееся, при дальнейшем увеличении энергии, на устойчивый узел ( $\lambda_1^{(1)} < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(1)}) < 0$ ) и седло ( $\lambda_1^{(2)} > 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(2)}) < 0$ ).

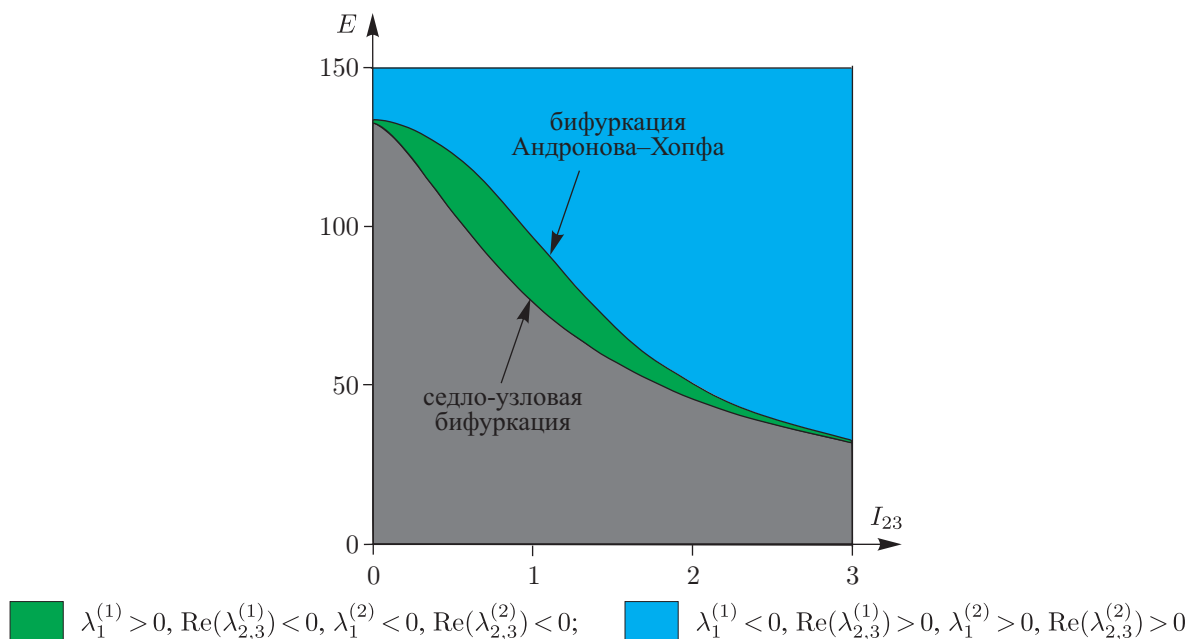


Рис. 5. Диаграмма устойчивости состояний равновесия из семейства  $\Omega_2$  при параметрах (5.4).

Далее, при увеличении энергии до значения  $E = h_2$ , седловое состояние равновесия претерпевает бифуркацию Андронова–Хопфа и (при  $E > h_2$ ) становится вполне неустойчивым ( $\lambda_1^{(2)} > 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(2)}) > 0$ ). Отметим, что бифуркация Андронова–Хопфа здесь может быть двух разных типов (подробное описание представлено в разделе 6.2).

<sup>a</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1602008/>

### 5.2. Движение в абсолютном пространстве твердого тела в неподвижных точках

Рассмотрим абсолютные движения волчка Сулова на каждом из трех семейств состояний равновесия.

В изолированных положениях равновесия семейства  $\Omega_1$  твердое тело остается неподвижным в системе координат  $Oxyz$ . При этом для состояния равновесия типа седло центр масс волчка Сулова лежит на оси  $Oz$  ниже неподвижной точки, а для состояния равновесия типа центр — выше.

На состояниях равновесия, принадлежащих семействам  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , векторы  $\omega$  и  $\gamma$  коллинеарны. Поэтому волчок Сулова вращается с постоянной скоростью вокруг оси  $Oz$ . Так как на рассматриваемых семействах  $\gamma_3 = 0$ , ось  $Ox_3$  всегда находится в плоскости  $Oxy$ , а параметр  $\varphi$  определяет угол между  $Oz$  и  $Ox_2$ . При этом уравнение прецессии (2.7) принимает следующий вид:

$$\dot{\psi} = \pm \sqrt{\frac{b_3}{A}}.$$

Во время вращения волчка Сулова точка контакта колес с (неподвижной) сферой движется по окружности с центром  $(0, 0, \pm R_s \sin(\varphi + \Theta))$ , где  $R_s$  — радиус сферы, а  $\Theta$  — угол поворота оси, соединяющей колеса относительно оси  $Ox_1$  (см. рис. 6).

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что ориентация осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ , а следовательно, и угол  $\Theta$  выбраны таким образом, чтобы одна из компонент тензора инерции ( $I_{12}$ ) обратилась в нуль.

### 5.3. Реверс

В зависимости от количества устойчивых и неустойчивых состояний равновесия в системе (2.5) возможны различные типы движений волчка Сулова в абсолютном пространстве.

При выборе параметров, соответствующих узкой (окрашенной зеленым цветом) области на рисунке 5, в системе (помимо пары седловых) существует устойчивое  $O^+$  и вполне неустойчивое  $O^-$  состояния равновесия, находящиеся в инволюции  $R_0$ , то есть  $O^+ = R_0(O^-)$ . Траектории, запущенные из окрестности вполне неустойчивого состояния равновесия  $O^-$ , могут переходить на устойчивое состояние равновесия  $O^+$ . В результате этого перехода ось вращения волчка ( $Ox_3$ ) переворачивается (см. рис. 7). В абсолютном пространстве этому процессу соответствуют изменение направления вращения волчка вокруг неподвижной вертикальной оси на противоположное. Как уже указывалось, такой тип реверса впервые был обнаружен при исследований кельтского камня [28].

Большой области, закрашенной на рисунке 5 голубым цветом, соответствуют значения параметров, при которых в системе (2.5) существует пара устойчивых и пара вполне неустойчивых состояний равновесия. В этом случае траектории, запущенные вблизи одного из неустойчивых состояний равновесия ( $\tilde{O}^-$ ), как показывают численные эксперименты, могут переходить на устойчивое состояние равновесия ( $\tilde{O}^+$ ), не находящееся (в отличие

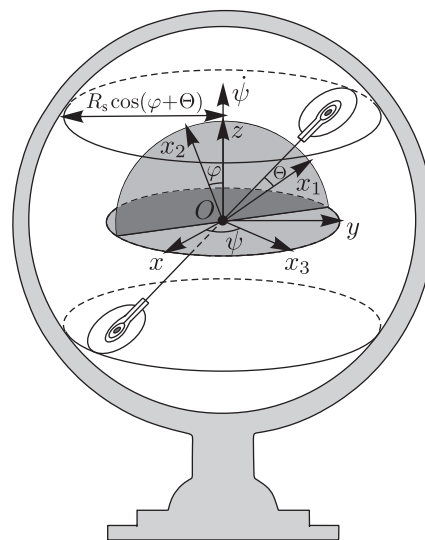


Рис. 6. Движение твердого тела на состояниях равновесия, принадлежащих семействам  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  системы (2.5).

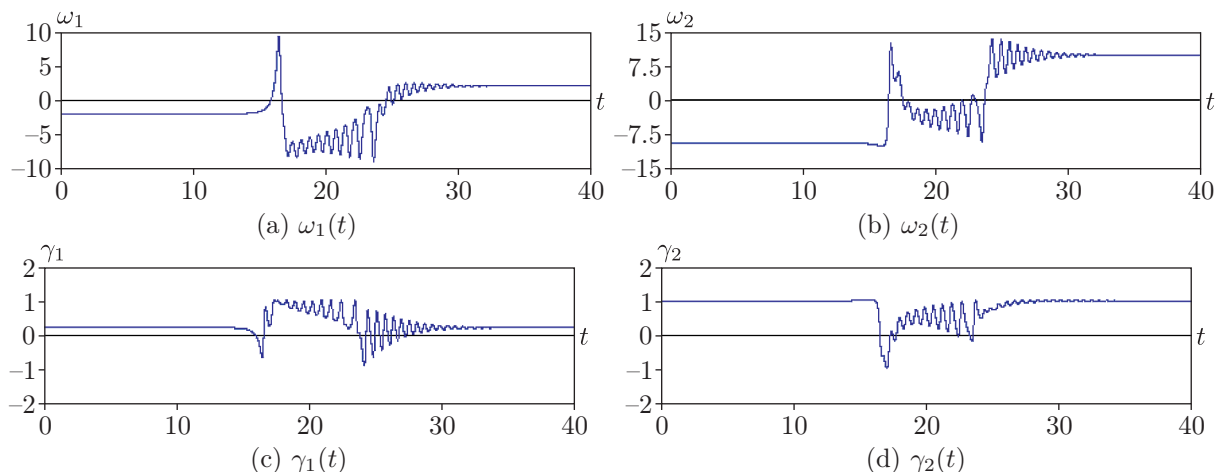


Рис. 7. Зависимость фазовых переменных от времени при запуске траектории из окрестности неустойчивого состояния равновесия при  $E = 100$ ,  $I_1 = 4$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_{13} = 1.5$ ,  $I_{23} = 0.75$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 100$ .

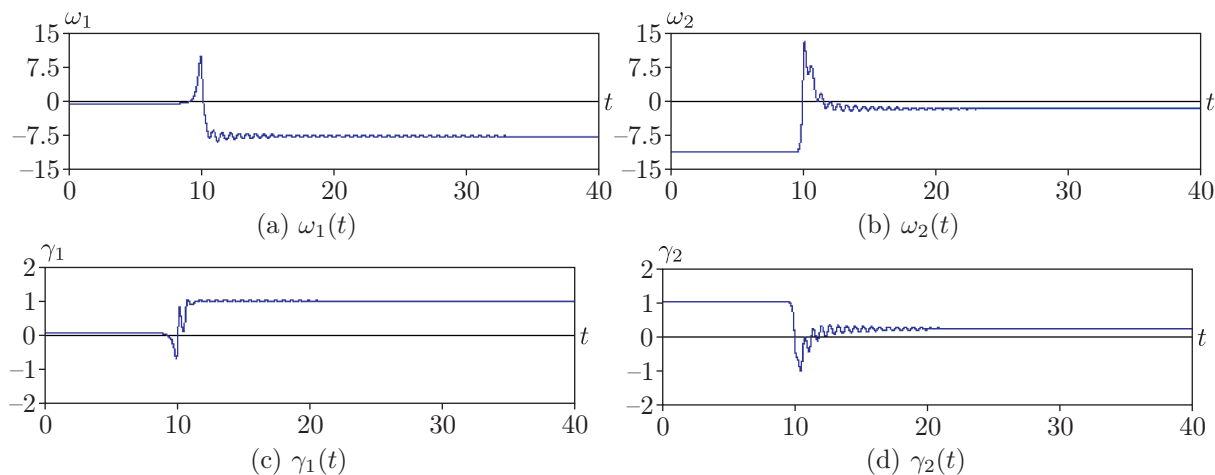


Рис. 8. Зависимость фазовых переменных от времени при запуске траектории из окрестности неустойчивого состояния равновесия при  $E = 120$ ,  $I_1 = 4$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_{13} = 1.5$ ,  $I_{23} = 0.75$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 100$ .

от предыдущего случая) в инволюции  $R_0$  с исходным. При таком переходе ось вращения  $Ox_3$  совершает поворот на угол  $\Delta\varphi$  (см. рис. 8):

$$\Delta\varphi = \arctg\left(\frac{\tilde{\gamma}_1^{(+)} }{\tilde{\gamma}_2^{(+)} }\right) - \arctg\left(\frac{\tilde{\gamma}_1^{(-)} }{\tilde{\gamma}_2^{(-)} }\right).$$

В абсолютном пространстве в этом случае происходит изменение ориентации тела, в результате чего угол между осями  $Ox_2$  и  $Oz$  изменяется на угол  $\Delta\varphi$ .

Из рисунка 4 следует, что  $\Delta\varphi \rightarrow \pm\pi$  при  $E \rightarrow \infty$ , то есть при очень больших энергиях волчок Суслова, запущенный в окрестности неустойчивого состояния равновесия, совершает переворот и продолжает устойчиво вращаться вокруг перевернутой оси. Ранее такой эффект наблюдался для волчка Томпсона (tippe-top) [24] в натурном эксперименте, а также в неголономной модели «суперкельтского» камня [31].

## 6. Хаотическая динамика

В настоящем разделе мы приводим результаты численного исследования хаотической динамики в неголономной модели Суслова и показываем, что рассматриваемая система демонстрирует сложное хаотическое поведение, тип которого существенно зависит от параметров системы, а следовательно, и от количества инволюций.

Классификацию различных предельных (в том числе хаотических) режимов будем проводить на основе анализа карт показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(I_{23}, E)$ , зафиксировав остальные параметры системы.

Опишем схему построения карт показателей Ляпунова.<sup>3</sup> Мы разбиваем плоскость параметров  $(I_{23}, E)$  на  $400 \times 400$  узлов, а из каждого узла запускаем траекторию на отображении Пуанкаре (4.1) с некоторыми начальными условиями  $(\gamma_2, \omega_1)$ . По истечении  $10^4$  промежуточных итераций отображения Пуанкаре, мы, на протяжении следующих  $4 \cdot 10^4$  итераций, оцениваем набор ляпуновских показателей с помощью алгоритма Бенеттина [1]. В зависимости от значений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  мы закрашиваем соответствующий узел на карте определенным цветом.

Отметим, что система (2.5) обладает тремя существенными (ненулевыми) показателями  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Для исключения из рассмотрения двух нулевых показателей, соответствующих интегралам (2.6), мы применяем процедуру нормировки фазовых переменных на уровне интегралов [9].

Далее будем рассматривать 2 принципиально разных случая:

- $I_{13} = 0$  — система (2.5) обратима относительно двух инволюций:  $R_0$  и  $R_1$ ;
- $I_{13} \neq 0$  — система (2.5) обратима относительно единственной инволюции  $R_0$ .

### 6.1. Хаотическая динамика при $I_{13} = 0$

В рассматриваемом случае отображение Пуанкаре (4.1) симметрично относительно прямой  $Fix(R_1) = \{\omega_1 = 0\}$ . Для построения карты показателей Ляпунова зафиксируем параметры системы следующими значениями:

$$I_{13} = 0, \quad I_1 = 3, \quad I_2 = 4, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 100; \quad (6.1)$$

в качестве начальной точки для каждого узла карты будем использовать точку с координатами  $(\gamma_2, \omega_1) = (0.9, 0.1)$ . Опишем режимы, изображенные на карте (см. рис. 9). Среди регулярных режимов ( $\lambda_1 \leq 0$ ) на карте показателей Ляпунова мы будем различать

- $\lambda_1 < 0$  — состояние равновесия,
- $\lambda_1 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$  — цикл (периодическая или неподвижная точка на отображении (4.1)),
- $\lambda_1 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  — эллиптическая орбита (инвариантные кривые вокруг эллиптической точки или сама эллиптическая точка).

<sup>3</sup>В работах [7, 9] такие карты строятся для неголономных систем, описывающих качение кельтского камня и волчка Чаплыгина соответственно. Однако в настоящей работе мы немного модифицировали процедуру классификации хаотических режимов.



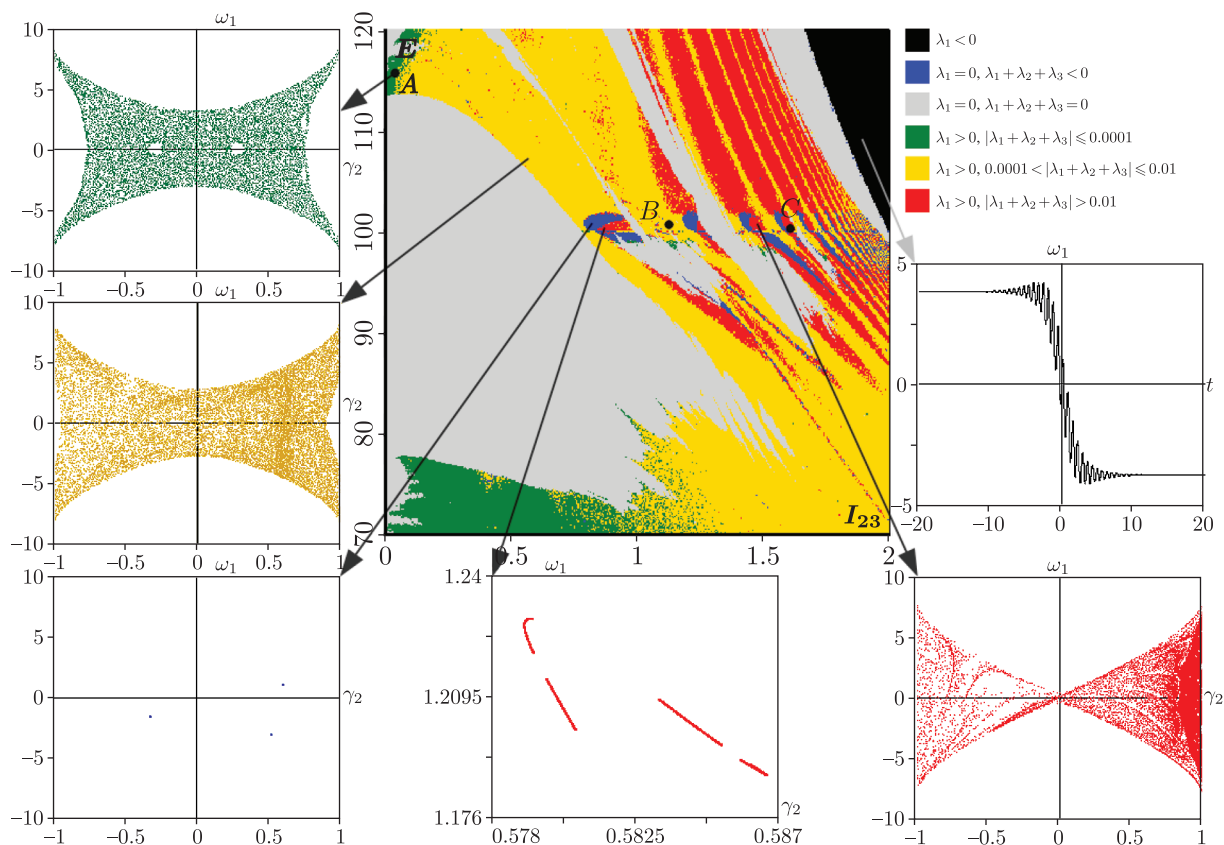


Рис. 9. Карта показателей Ляпунова и характерные фазовые портреты при различных параметрах  $I_{23}$  и  $E$ . Остальные параметры выбраны согласно (6.1).

Помимо регулярных предельных режимов на карте показателей Ляпунова мы также будем классифицировать различные хаотические ( $\lambda_1 > 0$ ) режимы. Отметим, что случай  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  соответствует консервативному хаосу (см. рис. 9 слева), в котором фазовый объем (инвариантная мера) сохраняется. В этом случае обратимый аттрактор и обратимый репеллер оказываются неразличимы.

Если система (2.5) не обладает гладкой инвариантной мерой, то обратимый аттрактор и обратимый репеллер становятся различимыми. Мы заметили, что степень такой различимости хорошо характеризуется величиной суммы показателей Ляпунова  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ , и в зависимости от этой величины классифицируем хаотические режимы следующим образом:

- 1°.  $\lambda_1 > 0$ ,  $|\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3| \leq 0.0001$ . Рассматриваемый случай близок к консервативному. Обратимый аттрактор и обратимый репеллер практически неразличимы (см. рис. 10).
- 2°.  $\lambda_1 > 0$ ,  $0.0001 < |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3| \leq 0.01$ . В этом случае обратимый аттрактор и обратимый репеллер хотя и имеют большую общую часть, но все же различимы (см. рис. 11).
- 3°.  $\lambda_1 > 0$ ,  $0.01 < |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3|$ . Обратимый аттрактор сильно отличается от обратимого репеллера, хотя и симметричен ему (см. рис. 12). В этом случае хаотическая динамика ассоциируется со странными аттракторами.

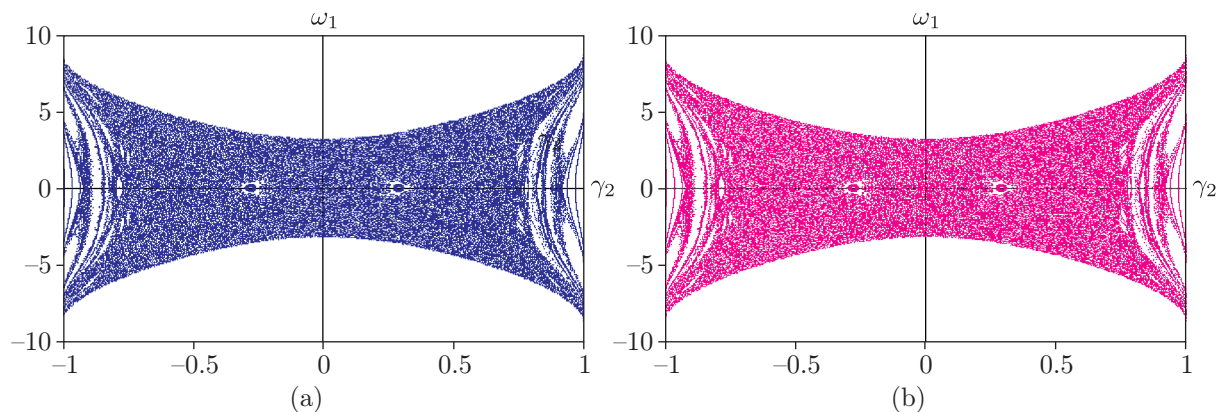


Рис. 10. Фазовые портреты на отображении Пуанкаре при параметрах (6.1),  $I_{23} = 0.015$ ,  $E = 115.125$  (точка  $A$  на карте показателей Ляпунова (см. рис. 9)): обратимый аттрактор (a) и обратимый репеллер (b) практически неразличимы.

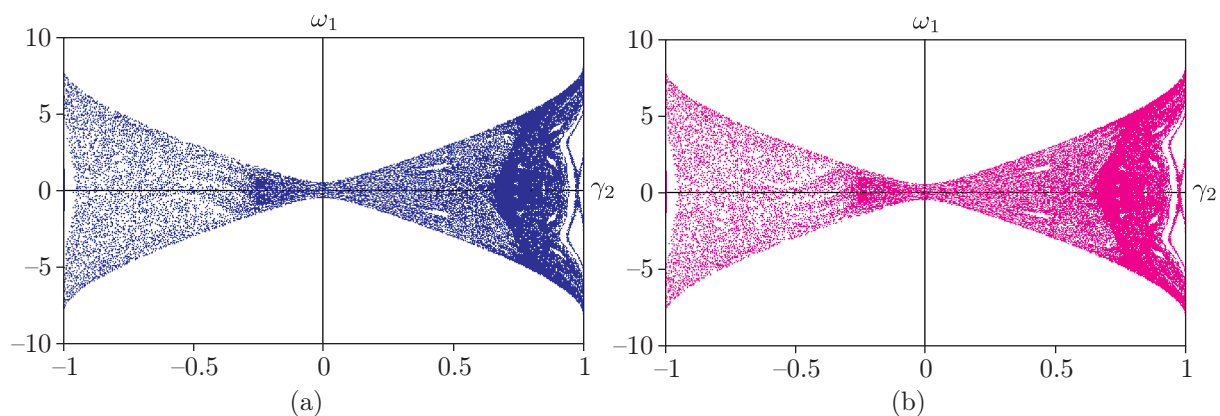


Рис. 11. Фазовые портреты на отображении Пуанкаре при параметрах (6.1),  $I_{23} = 1.5$ ,  $E = 100$  (точка  $B$  на карте показателей Ляпунова (см. рис. 9)): обратимый аттрактор (a) и обратимый репеллер (b) имеют большую общую часть, однако все же различимы.

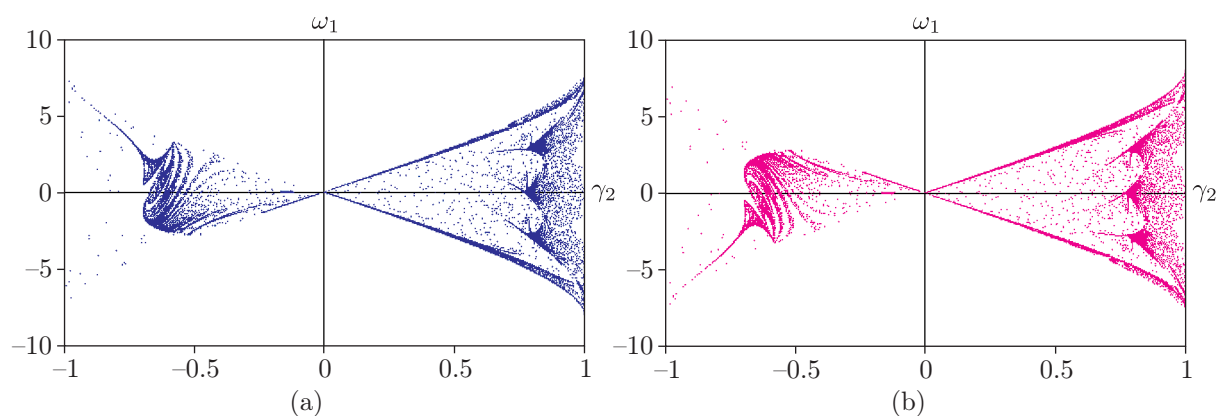


Рис. 12. Фазовые портреты на отображении Пуанкаре при параметрах (6.1),  $I_{23} = 1.5895$ ,  $E = 100$  (точка  $C$  на карте показателей Ляпунова (см. рис. 9)): обратимый аттрактор (a) и обратимый репеллер (b) различаются сильно.

Отметим, что при  $0 < |\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3| < 0.01$  различимость обратимого аттрактора и обратимого репеллера связана с существованием внутри хаотического слоя устойчивых и вполне неустойчивых периодических орбит различных периодов, не отделимых друг от друга. Так, например, на рисунке 13а (при  $E = 74.16$  и  $I_{23} = 1.505$ ) внутри хаотической области обнаружены устойчивая и неустойчивая точка периода 7. При этом удалось установить, что при  $I_{23} \rightarrow I_{23}^* \approx 1.50752$  и  $E \rightarrow E^* \approx 74.5$  эти точки сближаются, сливаясь (вместе с седловой точкой), в результате субкритической бифуркации потери симметрии, в эллиптическую точку периода 7. На рисунках 13б и 13с изображены фрагменты фазовых портретов вблизи

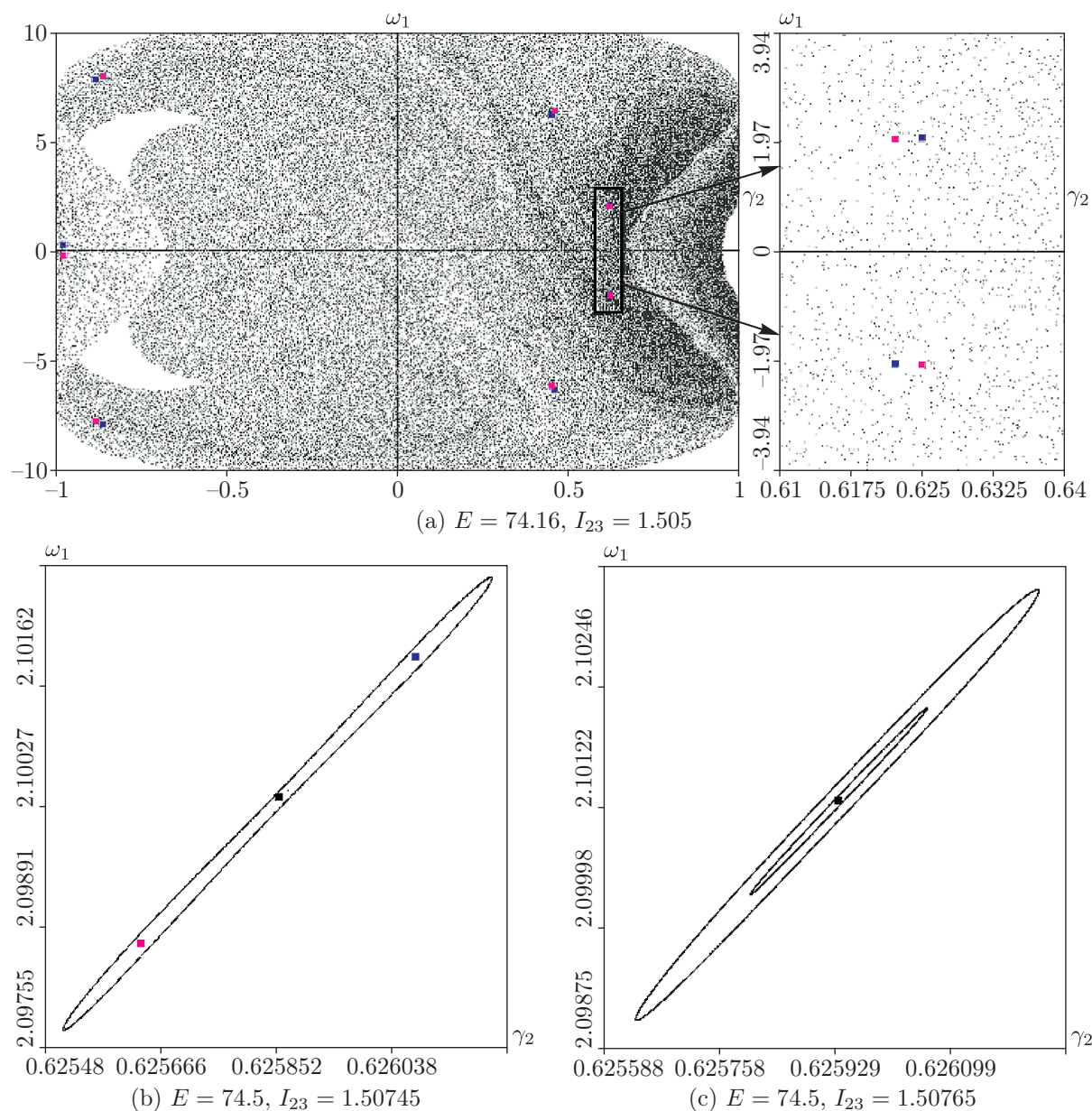


Рис. 13. (а) Внутри хаотического слоя обнаружена устойчивая (синий цвет) и неустойчивая (розовый цвет) точка периода 7; (б) и (с) фрагменты фазовых портретов вблизи одной из компонент точки периода 7 до и после бифуркации.

одной из компонент точки периода 7 до и после бифуркации. Таким образом, точки обратимого аттрактора накапливаются вблизи устойчивых периодических точек, а точки обратимого репеллера — вблизи симметричных им вполне неустойчивых точек. Такое строение хаотического множества характерно для обратимых двумерных отображений без гладкой инвариантной меры и называется *смешанная динамика* или *псевдоконсервативный хаос*.

### 6.2. Хаотическая динамика при $I_{13} \neq 0$

В данном разделе при построении карты показателей Ляпунова будем использовать параметры системы, заданные в соответствии с (5.4), чтобы сопоставить карту ляпуновских показателей с диаграммой устойчивости, изображенной на рисунке 5. В каждом узле карты в качестве начальной точки зададим точку с координатами  $(\gamma_2, \omega_1) = (0.999, 0)$ . Для кодировки режимов на карте будем использовать такую же схему, что и в разделе 6.1, лишь подчеркнем, что в рассматриваемом случае (так как отображение Пуанкаре инволюциями не обладает) понятия «обратимый аттрактор» и «обратимый репеллер» теряют смысл. Теперь сумма показателей Ляпунова характеризует степень сжатия фазового объема вдоль траектории. Построенную ранее диаграмму устойчивости и карту показателей Ляпунова приведем для удобства на одном рисунке 14.

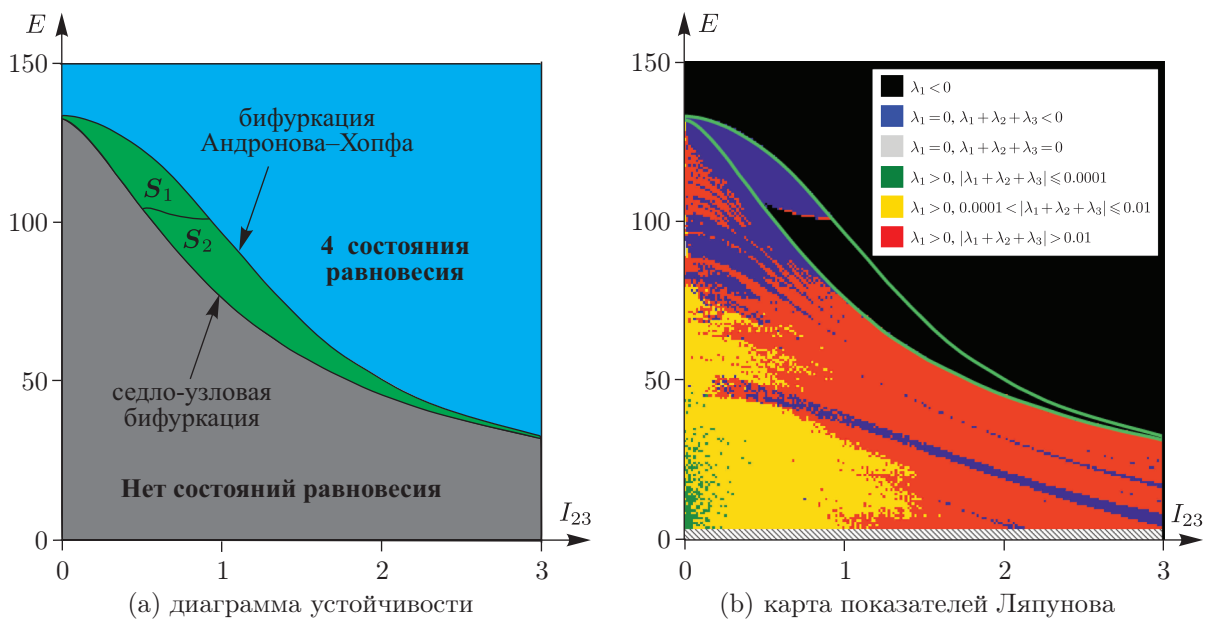


Рис. 14. Диаграмма устойчивости и карта показателей Ляпунова при параметрах (5.4).

Подробнее рассмотрим на карте область параметров (обозначим ее через  $S$ ), окрашенную на рисунке в зеленый цвет. Как показано в разделе 5.1, в этой области система (2.5) обладает двумя седловыми ( $\lambda_1^{(1)} > 0, \text{Re}(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$  и  $\lambda_1^{(4)} < 0, \text{Re}(\lambda_{2,3}^{(4)}) > 0$ ), устойчивым ( $\lambda_1^{(2)} < 0, \text{Re}(\lambda_{2,3}^{(2)}) < 0$ ) и неустойчивым ( $\lambda_1^{(3)} > 0, \text{Re}(\lambda_{2,3}^{(3)}) > 0$ ) состояниями равновесия (см. рис. 15). Нижнюю границу этой области образуют параметры, при которых в системе возникает пара седло-узловых бифуркаций, а верхняя граница образована параметрами, при которых в системе возникает пара бифуркаций Андронова–Хопфа. Однако, как показывает рисунок 14b, бифуркации Андронова–Хопфа качественно различаются для верхней ( $S_1$ ) и нижней ( $S_2$ ) частей области  $S$ . Так, в области  $S_1$ , помимо состояний равновесия,



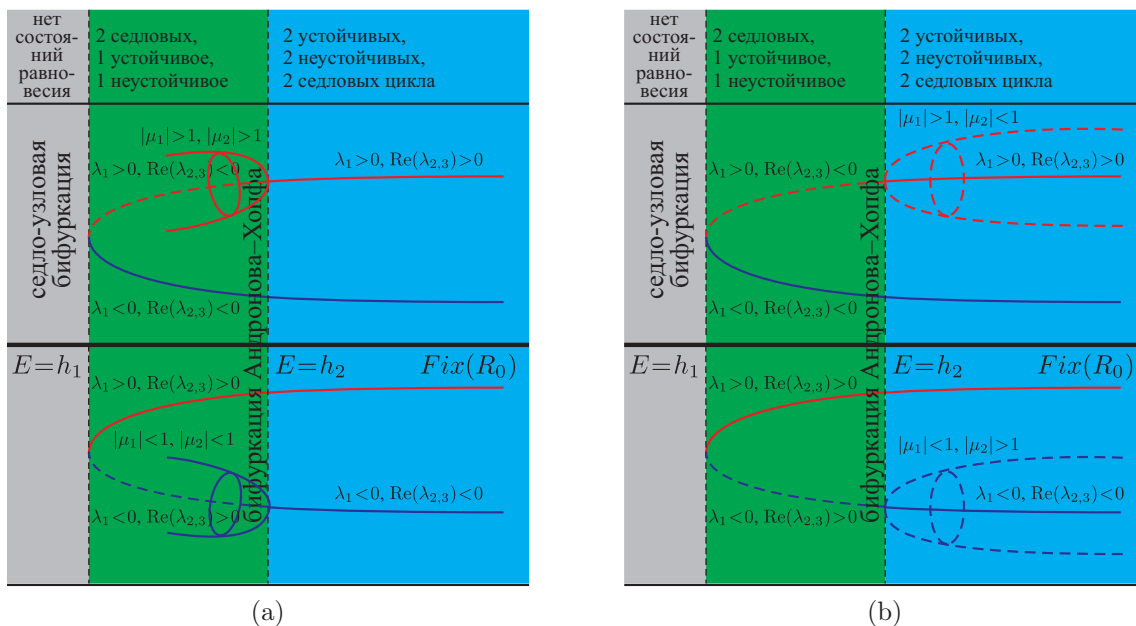


Рис. 15. Бифуркационные диаграммы состояний равновесия, принадлежащих семействам  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ : а) для области параметров  $S_1$ ; б) для области параметров  $S_2$ .

обнаружен устойчивый цикл с мультипликаторами  $|\mu_1| < 1$  и  $|\mu_2| < 1$ . На верхней границе области  $S_1$  этот устойчивый цикл сливается с седловым состоянием равновесия ( $\lambda_1^{(4)} < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(4)}) > 0$ ), в результате чего это состояние равновесия становится устойчивым ( $\lambda_1^{(4)} < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(4)}) < 0$ ) (см. рис. 15а)<sup>4</sup>.

В области  $S_2$  устойчивый цикл обнаружить не удалось, однако мы нашли седловой цикл чуть выше верхней границы этой области. Таким образом, на верхней границе области  $S_2$  от седловой точки, в результате субкритической бифуркации Андронова – Хопфа, отделяется седловой цикл с мультипликаторами  $|\mu_1| > 1$ ,  $|\mu_2| < 1$ , а седловая точка становится вполне неустойчивой ( $\lambda_1^{(1)} > 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$ ). Описанные бифуркации приведены на рисунке 15б.

Продолжив по параметру  $E$  неподвижную точку, соответствующую обнаруженному в области  $S_1$  устойчивому циклу, мы обнаружили последовательность бифуркаций удвоения периода, в результате которой из неподвижной точки рождается странный аттрактор типа Фейгенбаума [18] (см. рис. 16). Обнаруженному аттрактору соответствуют показатели Ляпунова

$$\Lambda_1 = 0.3978, \quad \Lambda_2 = -0.0002, \quad \Lambda_3 = -1.9277,$$

а размерность аттрактора по Каплану – Йорке [9] составляет

$$D = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_3|} \approx 1.2063.$$

<sup>4</sup>Согласно инволюции  $R_0$ , бифуркация Андронова – Хопфа такого же типа происходит со вторым седловым состоянием равновесия ( $\lambda_1^{(1)} > 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(1)}) < 0$ ). После влипания вполне неустойчивого цикла это состояние равновесия становится неустойчивым ( $\lambda_1^{(1)} > 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_{2,3}^{(1)}) > 0$ ).

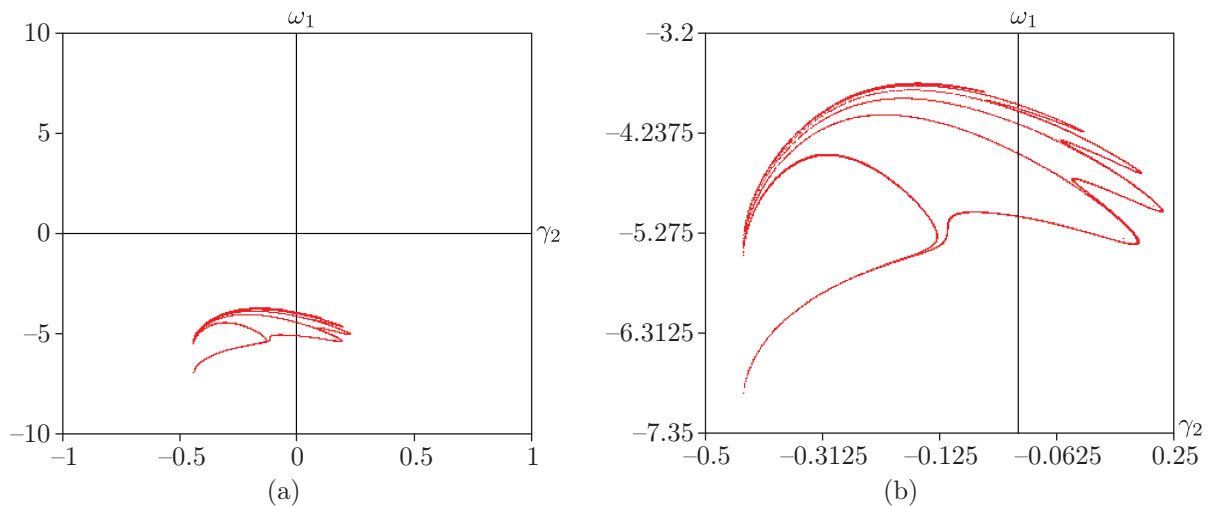


Рис. 16. Странный аттрактор типа Фейгенбаума, обнаруженный на границе областей  $S_1$  и  $S_2$  при параметрах (5.4),  $I_{23} = 0.675$ ,  $E = 102.75$ .

## 7. Задача Суллова в случае неоднородной связи

Различные обобщения (вариации) задачи Суллова рассмотрены в работах [2, 6]. В данном разделе рассмотрим случай, при котором в точке контакта колесика и неподвижной сферической оболочки присутствует постоянное (не зависящее от времени) проскальзывание  $s$ . Это проскальзывание можно интерпретировать как увод колеса по Рокару. Механика увода, связанная с деформацией колеса, обсуждается в [26, 41].

Указанное условие приводит к неоднородной (по скоростям) неголономной связи, которая в подвижной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  имеет вид

$$\omega_3 = s, \quad s = \text{const.} \tag{7.1}$$

Отметим, что теоретические исследования неоднородных неголономных связей начаты совсем недавно [4, 5, 15, 19]. Переписав систему уравнений (2.3) и (2.4) с учетом (7.1), получим уравнения движения на  $M^5 = \{\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  в форме

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) + (I_2 - I_3)s\omega_2 + I_{23}s^2 + b_3\gamma_2 - b_2\gamma_3, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) - (I_1 - I_3)s\omega_1 - I_{13}s^2 + b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_2 = \gamma_3\omega_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \tag{7.2}$$

В случае  $I_{13} = I_{23} = 0$  система (7.2) обладает стандартной инвариантной мерой ( $\rho = \text{const}$ ).

Как известно (см. [5]), неголономные системы с неоднородными по скоростям связями не сохраняют энергию, поэтому в общем случае система (7.2) обладает только геометрическим интегралом

$$F_1 = \gamma^2 = 1.$$

Тем не менее, можно выделить частный случай, в котором удастся указать обобщение интеграла энергии — *интеграл Якоби*. В работе [5] показано, что система (7.2), при следу-

ющих ограничениях на параметры

$$I_{13} = I_{23} = 0, \quad I_{22} = I_{11}, \quad b_1 = b_2 = 0, \quad (7.3)$$

обладает интегралом Якоби:

$$H = \frac{I_{11}}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + b_3 \gamma_3.$$

Отметим, что условия (7.3) совпадают со случаем В. В. Козлова, в котором существует дополнительный интеграл  $F_2$  при  $s = 0$  (см. раздел 5). Более того, оказывается, что при  $s \neq 0$  этот интеграл допускает непосредственное обобщение

$$F_2 = I_{11}(\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) + s I_{33} \gamma_3.$$

Таким образом, система (7.2) при ограничении на параметры (7.3) интегрируема по теореме Эйлера–Якоби.

Однако в общем случае система (7.2) является неинтегрируемой. На рисунке 17 представлен фазовый портрет системы (7.2) на трехмерном<sup>5</sup> отображении Пуанкаре. Заметим, что отображение Пуанкаре (см. рис. 17) не расслаивается на инвариантные поверхности, а следовательно, в общем случае система (7.2) не обладает ни одним из двух дополнительных интегралов.

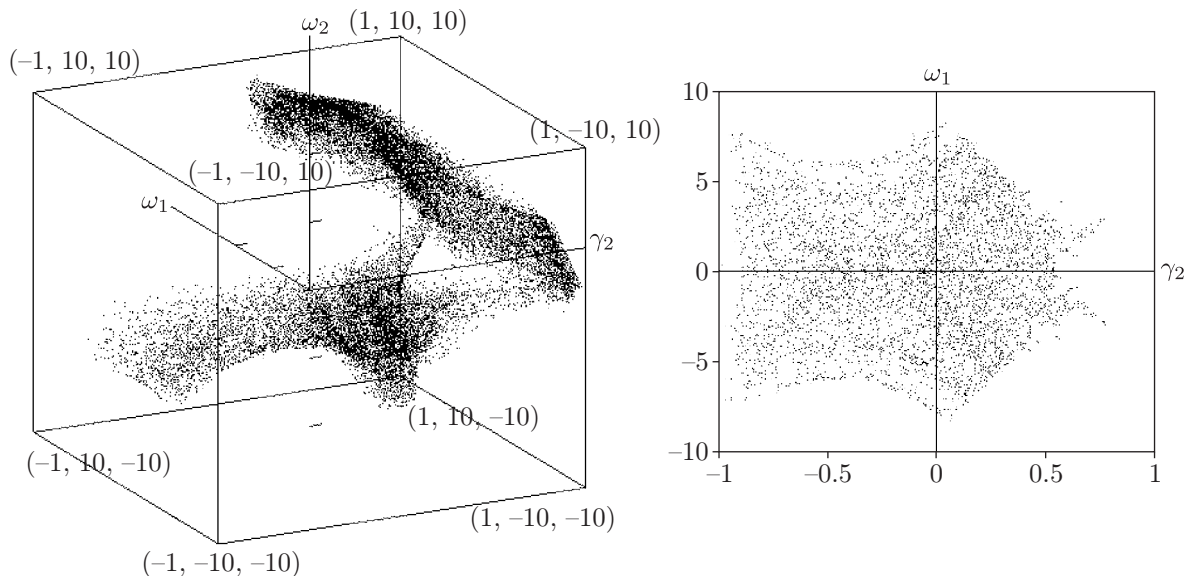


Рис. 17. Отображение Пуанкаре и его сечение плоскостью  $\omega_2 = 1$  при фиксированных  $I_{11} = 3$ ,  $I_{22} = 4$ ,  $I_{33} = 5$ ,  $I_{13} = I_{23} = 0$ ,  $c_1 = c_2 = 0$ ,  $b_3 = 100$ ,  $s = 1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если центр масс твердого тела находится в геометрическом центре оболочки, то есть  $\mathbf{b} = 0$  и  $I_{13}^2 + I_{23}^2 \neq 0$ , в системе (7.2) отделяется замкнутая подсистема, описывающая эволюцию  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которая подробно рассмотрена в работе [15], где найдены случаи трансцендентных по скоростям первых интегралов.

Компьютерное моделирование проведено с помощью программного комплекса «Компьютерная динамика: Хаос» (<http://lab.ics.org.ru/lab/page/kompyuternaya-dinamika/>).

<sup>5</sup>В случае неоднородной неголономной связи (7.1) система (7.2) не обладает интегралом энергии, поэтому отображение Пуанкаре становится трехмерным.



## Список литературы

- [1] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them: P. 1: Theory; P. 2: Numerical application // *Meccanica*, 1980, vol. 15, pp. 9–30.
- [2] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The dynamics of nonholonomic systems consisting of a spherical shell with a moving rigid body inside // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 198–213.
- [3] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a ball without spinning on a plane: The absence of an invariant measure in a system with a complete set of integrals // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 571–579.
- [4] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Geometrisation of Chaplygin’s reducing multiplier theorem // *Nonlinearity*, 2015, vol. 28, no. 7, pp. 2307–2318.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Jacobi integral in nonholonomic mechanics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 383–400.
- [6] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116.
- [7] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin’s top // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 718–733.
- [8] Борисов А. В., Казаков А. О., Кузнецов С. П. Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель // *УФН*, 2014, т. 184, № 5, с. 493–500.
- [9] Borisov A. V., Jahnine A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [10] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.
- [11] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The rolling motion of a ball on a surface: New integrals and hierarchy of dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 201–219.
- [12] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [13] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a rigid body on plane and sphere: Hierarchy of dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [14] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859.
- [15] García-Naranjo L. C., Maciejewski A. J., Marrero J. C., Przybylska M. The inhomogeneous Suslov problem // *Phys. Lett. A*, 2014, vol. 378, nos. 32–33, pp. 2389–2394.
- [16] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a celtic stone // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 521–538.
- [17] Fedorov Yu. N., Maciejewski A. J., Przybylska M. Suslov problem: Integrability, meromorphic and hypergeometric solutions // *Nonlinearity*, 2009, vol. 22, no. 9, pp. 2231–2259.
- [18] Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems // *Phys. D*, 1983, vol. 7, nos. 1–3, pp. 16–39.
- [19] Fassò F., Sansonetto N. Conservation of energy and momenta in nonholonomic systems with affine constraints: Preprint, arXiv:1505.01172 (2015).



- [20] Fernandez O. E., Bloch A. M., Zenkov D. V. The geometry and integrability of the Suslov problem // J. Math. Phys., 2014, vol. 55, no. 11, 112704, 14 pp.
- [21] Mahdi A., Valls C. Analytic non-integrability of the Suslov problem // J. Math. Phys., 2012, vol. 53, no. 12, 122901, 8 pp.
- [22] Maciejewski A. J., Przybylska M. Nonintegrability of the Suslov problem // J. Math. Phys., 2004, vol. 45, no. 3, pp. 1065–1078.
- [23] Kazakov A. O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 5, pp. 508–520.
- [24] Kane T. R., Levinson D. A. A realistic solution of the symmetric top problem // J. Appl. Mech., 1978, vol. 45, no. 4, pp. 903–909.
- [25] Kozlov V. V. The phenomenon of reversal in the Euler – Poincaré – Suslov nonholonomic systems // J. Dyn. Control Syst., 2015, 12 pp.
- [26] Rocard Y. L'instabilité en mécanique: Automobiles, avions, ponts suspendus. Paris: Masson, 1954. 239 pp.
- [27] Pikovsky A., Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // Phys. D, 2002, vol. 170, pp. 118–130.
- [28] Walker G. T. On a curious dynamical property of celts // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.
- [29] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2, с. 71–132.
- [30] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [31] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // Докл. РАН, 2006, т. 408, № 2, с. 192–195.
- [32] Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1941, № 5, с. 301–327.
- [33] Суслов Г. К. Теоретическая механика. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1946. 655 с.
- [34] Козлова З. П. К задаче Суслова // МТТ, 1989, № 1, с. 13–16.
- [35] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ, 1987, т. 51, № 4, с. 538–545.
- [36] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.
- [37] Маркеев А. П. О динамике твердого тела на абсолютно шероховатой плоскости // ПММ, 1983, т. 47, № 4, с. 575–582.
- [38] Зиглин С. Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в частном случае задачи Г. К. Суслова // УМН, 1997, т. 52, № 2, с. 167–168.
- [39] Харламова-Забелина Е. И. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки при наложении неголономной связи // Тр. Донецк. индустр. ин-та, 1957, т. 20, № 1, с. 69–75.
- [40] Татаринов Я. В. Разделяющиеся переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах // Тр. сем. по векторн. и тензорн. анал., 1988, т. 23, с. 160–174.
- [41] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. 520 с.

## Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors

Ivan A. Bizyaev<sup>1</sup>, Alexey V. Borisov<sup>2</sup>, Alexey O. Kazakov<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, ul. Gubkina 8, Moscow, 119991 Russia

<sup>3</sup>Udmurt State University, Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>3</sup>Higher School of Economics National Research University, 25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia

<sup>3</sup>Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia

<sup>1</sup>bizaev\_90@mail.ru, <sup>2</sup>borisov@rcd.ru, <sup>3</sup>kazakovdz@yandex.ru

In this paper, we present some results on chaotic dynamics in the Suslov problem which describe the motion of a heavy rigid body with a fixed point, subject to a nonholonomic constraint, which is expressed by the condition that the projection of angular velocity onto the body-fixed axis is equal to zero. Depending on the system parameters, we find cases of regular (in particular, integrable) behavior and detect various attracting sets (including strange attractors) that are typical of dissipative systems. We construct a chart of regimes with regions characterizing chaotic and regular regimes depending on the degree of conservativeness. We examine in detail the effect of reversal, which was observed previously in the motion of rattlebacks.

MSC 2010: 37J60, 37N15, 37G35, 70E18, 70F25, 70H45

Keywords: Suslov problem, nonholonomic constraint, reversal, strange attractor

Received August 14, 2015, accepted September 17, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 263–287 (Russian)