Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
Полнотекстовая версия в свободном доступе http://nd.ics.org.ru
DOI: 10.20537/nd1602004

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.539.2
MSC 2010: 70Q05

Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением

В. Ф. Журавлёв

Интерес к рассмотрению модели двумерных автоколебаний вызван двумя причинами. Во-первых, на практике находят применение механические системы, где подобная модель востребована [1–3]. Во-вторых, в отличие от одномерного осциллятора Ван дер Поля, двумерная модель как математический объект гораздо богаче свойствами, поскольку помимо потенциальных и диссипативных сил в ней могут рассматриваться и силы более сложной природы, определяющие различные особенности поведения осциллятора.

Ключевые слова: осциллятор Ван дер Поля

1. Основные соотношения

Будем рассматривать уравнения изотропного двумерного осциллятора в следующей форме:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 &= Q_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), \\ \ddot{q}_2 + q_2 &= Q_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Осциллятор в свободном режиме ($Q_1 = Q_2 = 0$) описывает эллиптическую траекторию в плоскости (q_1, q_2) с произвольными главными полуосями и с произвольным наклоном большой полуоси к оси абсцисс q_1 (рис. 1).

Получено 28 февраля 2016 года
После доработки 28 апреля 2016 года

Журавлёв Виктор Филиппович
zhurav@ipmnet.ru
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1

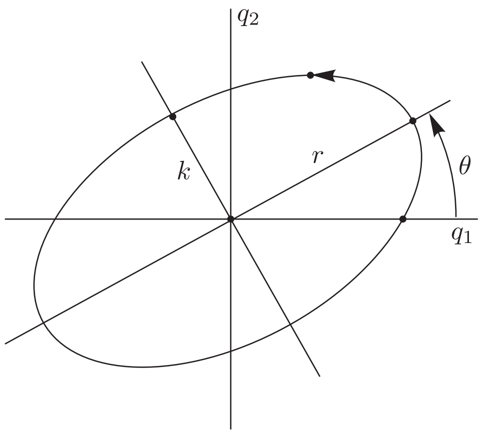

Рис. 1

Стоящие в правой части системы силы будут рассматриваться следующим образом. С одной стороны, это возмущающие силы, деформирующие эллиптическую траекторию свободного режима (изменение длин главных полуосей, изменение ориентации эллипса, разрушение самой формы эллипса). С другой стороны, это управляющие силы, необходимые для стабилизации в том или ином смысле заданной эллиптической траектории.

В отличие от одномерного осциллятора Ван дер Поля, в котором посредством специальной обратной связи поддерживается постоянной амплитуда колебаний, в двумерном случае (1.1) можно стабилизировать энергию колебаний, площадь эллипса, его наклон к оси абсцисс и его прецессию.

Общее решение системы (1.1) при $Q_1 = Q_2 = 0$ определяет уравнение эллиптической траектории в параметрической форме:

$$q_1 = x_1 \cos t + x_3 \sin t, \qquad q_2 = x_2 \cos t + x_4 \sin t. \tag{1.2}$$

Скорость движения по этой траектории:

$$\dot q_1 = -x_1 \sin t + x_3 \cos t, \qquad \dot q_2 = -x_2 \sin t + x_4 \cos t. \tag{1.3}$$

Произвольные постоянные (x_1, x_2, x_3, x_4) в выражениях (1.2) и (1.3) в дальнейшем будут рассматриваться как медленно меняющиеся фазовые переменные, когда силы Q_1, Q_2 не равны нулю и малы в сравнении с восстанавливающей силой осциллятора.

Два первых интеграла системы (1.1) в случае $Q = 0$ представляют собой энергию колебаний

$$E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + \dot q_1^2 + q_2^2 + \dot q_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \tag{1.4}$$

и момент количеств движения (кинетический момент)

$$K = q_1 \dot q_2 - \dot q_1 q_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3. \tag{1.5}$$

Площадь эллипса (квадратура):

$$\pi r k = \frac{1}{2}\oint (q_1\, dq_2 - q_2\, dq_1) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (q_1 \dot q_2 - \dot q_1 q_2)\, dt = \pi K, \tag{1.6}$$

где r — большая полуось эллипса, а k — малая.

Для того чтобы правильно сформировать силы, управляющие энергией, квадратурой, прецессией или частотой колебаний, необходимо построить базис инфинитезимальных эволюций эллиптической траектории.

Укажем еще один тип фазовых переменных, называемых в небесной механике *элементами орбиты* $(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) \to (r, k, \theta, \tau)$ [4]:

$$\begin{aligned}
q_1 &= r\cos(t+\tau)\cos\theta - k\sin(t+\tau)\sin\theta,\\
q_2 &= r\cos(t+\tau)\sin\theta + k\sin(t+\tau)\cos\theta,\\
\dot q_1 &= -r\sin(t+\tau)\cos\theta - k\cos(t+\tau)\sin\theta,\\
\dot q_2 &= -r\sin(t+\tau)\sin\theta + k\cos(t+\tau)\cos\theta.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Смысл новых фазовых переменных таков (рис. 1): r — большая полуось эллипса, k — малая полуось, θ — угол наклона большой полуоси к оси абсцисс, величина τ определяет начальное положение (при $t = 0$) точки (q_1, q_2) на эллиптической траектории.

Учитывая (1.2) и (1.3), найдем связь новых фазовых переменных (r, k, θ, τ) с медленными переменными (x_1, x_2, x_3, x_4):

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\tau\cos\theta - k\sin\tau\sin\theta, \\ x_2 &= r\cos\tau\sin\theta + k\sin\tau\cos\theta, \\ x_3 &= -r\sin\tau\cos\theta - k\cos\tau\sin\theta, \\ x_4 &= -r\sin\tau\sin\theta + k\cos\tau\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Выполним в системе (1.1) замену фазовых переменных $(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2) \to (x_1, x_2, x_3, x_4)$ по формулам (1.2), (1.3):

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= -Q_1(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2)\sin t, \qquad & \dot x_2 &= -Q_2(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2)\sin t, \\ \dot x_3 &= Q_1(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2)\cos t, & \dot x_4 &= Q_2(q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2)\cos t. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Если $(Q_1, Q_2) = 0$, то каждому эллипсу в конфигурационном пространстве $q = (q_1, q_2)$ соответствует точка $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \mathrm{const}$ в фазовом пространстве. И обратно, каждой неподвижной точке в фазовом пространстве соответствует единственная эллиптическая траектория в конфигурационном.

Среди эллиптических траекторий есть вырожденные. Эллипс превращается в отрезок прямой, когда его площадь (квадратура) равна нулю:

$$K = x_1x_4 - x_2x_3 = 0. \tag{1.10}$$

Если квадратура равна нулю, то из (1.8) следует, что угол наклона этого отрезка прямой к оси абсцисс равен

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_4}{x_3}. \tag{1.11}$$

Другой тип вырожденных эллиптических траекторий — это окружности. Найти уравнение многообразия в фазовом пространстве, соответствующее окружности в конфигурационном пространстве, можно так. Следует найти максимум площади эллипса при постоянной энергии. Таким образом, имеем задачу на условный экстремум: найти $\max(x_1x_4 - x_2x_3)$ при условии $\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right) = \mathrm{const}$. Решение этой задачи таково: в конфигурационном пространстве траектория осциллятора есть окружность тогда и только тогда, когда

$$(x_1 \pm x_4)^2 + (x_2 \mp x_3)^2 = 0. \tag{1.12}$$

При этом максимум квадратуры на многообразии (1.12) равен значению полной энергии: $K_{\max} = E$.

2. Базис инфинитезимальных эволюций

В четырехмерном пространстве x многообразие (1.10) представляет собой трехмерный конус, а многообразие (1.12) является двумерной осью этого конуса.

Если $Q \neq 0$, то точка $x(t)$ в фазовом пространстве $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ движется. В конфигурационном пространстве $q = (q_1, q_2)$ этому соответствует эволюция начальной (невозмущенной) траектории, эллипса или отрезка прямой. Будем отталкиваться от начальной траектории в виде отрезка прямой, поскольку в приложениях это чаще всего и требуется. Стабилизация эллиптической траектории с неравной нулю квадратурой необходима в проекте инерциальной навигационной системы маятникового типа [6].

Имеется четыре типа простейших эволюций:

а) прецессия формы — вращение отрезка прямой в плоскости $q = (q_1, q_2)$, когда существует такая вращающаяся система координат в плоскости $q = (q_1, q_2)$, в которой этот отрезок неподвижен;

б) изменение амплитуды колебаний, когда меняется лишь длина отрезка;

в) изменение частоты колебаний $q(t)$ вдоль неподвижного отрезка;

г) наконец, разрушение формы — это такая эволюция, которая не сводится к первым трем.

Всем этим типам эволюции прямолинейной формы колебаний в плоскости $q = (q_1, q_2)$ соответствуют определенные направления движения точки $x(t)$ в фазовом пространстве.

Для выяснения направления, определяющего прецессию, подвергнем (1.2), (1.3) преобразованию поворота $x \to y$ (α — угол поворота):

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\cos t + x_3\sin t \\ x_2\cos t + x_4\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\cos t + y_3\sin t \\ y_2\cos t + y_4\sin t \end{pmatrix},$$

откуда вытекает

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha, \qquad & y_2 &= -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha, \\ y_3 &= x_3\cos\alpha + x_4\sin\alpha, \qquad & y_4 &= -x_3\sin\alpha + x_4\cos\alpha. \end{aligned}$$

Вектор, определяющий искомое направление, имеет вид

$$e_1 = dy/d\alpha|_{\alpha=0} = \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\}.$$

Для построения направления, определяющего изменение амплитуды, подвергнем (1.2), (1.3) преобразованию растяжения (μ — параметр растяжения):

$$\begin{pmatrix} (1+\mu)x_1\cos t + (1+\mu)x_3\sin t \\ (1+\mu)x_2\cos t + (1+\mu)x_4\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\cos t + y_3\sin t \\ y_2\cos t + y_4\sin t \end{pmatrix}.$$

Искомое направление задается вектором

$$e_2 = dy/d\mu|_{\mu=0} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Направление наискорейшего разрушения прямолинейной формы определяется нормалью к конусу (1.10):

$$e_3 = dK/dx = \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\}.$$

Для построения направления, определяющего изменение частоты, подвергнем (1.2), (1.3) преобразованию трансляции по времени (τ — параметр преобразования):

$$\begin{pmatrix} x_1\cos(t+\tau)+x_3\sin(t+\tau) \\ x_2\cos(t+\tau)+x_4\sin(t+\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\cos t+y_3\sin t \\ y_2\cos t+y_4\sin t\end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\cos\tau + x_3\sin\tau, \qquad & y_2 &= x_2\cos\tau + x_4\sin\tau, \\ y_3 &= -x_1\sin\tau + x_3\cos\tau, \qquad & y_4 &= -x_2\sin\tau + x_4\cos\tau. \end{aligned}$$

Вектор, определяющий искомое направление, имеет вид

$$e_4 = dy/d\tau|_{\tau=0} = \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\}.$$

Итак, базис инфинитезимальных эволюций таков:

$$\begin{aligned} e_1 &= \{x_2, -x_1, x_4, -x_3\}, \\ e_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \\ e_3 &= \{x_4, -x_3, -x_2, x_1\}, \\ e_4 &= \{x_3, x_4, -x_1, -x_2\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где e_1 определяет прецессию прямолинейной формы, e_2 — вариацию амплитуды, e_3 — разрушение прямолинейной формы, а e_4 — изменение частоты.

Отметим важнейшие свойства построенного базиса.

Свойство 1 (матрица Грама). Вычислим матрицу скалярных произведений:

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} (e_1\cdot e_1) & \cdot & \cdot & (e_1\cdot e_4) \\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ (e_4\cdot e_1) & \cdot & \cdot & (e_4\cdot e_4) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^2 & 0 & 0 & -2K \\ 0 & x^2 & 2K & 0 \\ 0 & 2K & x^2 & 0 \\ -2K & 0 & 0 & x^2 \end{Vmatrix}. \tag{2.2}$$

Ее определитель $\det\Gamma = (x^4-4K^2)^2$. Этот определитель на конусе ($K=0$) равен восьмой степени нормы вектора x: $\det\Gamma|_{K=0} = \|x\|^8$. На оси конуса (1.12) он равен нулю: $x^4-4K^2=0$.

Свойство 2. Эволюционный базис e_1, e_2, e_3, e_4 ортогонален на конусе. Это свойство непосредственно следует из вида матрицы Грама.

Свойство 3. Четыре векторных поля (2.1) порождают четырехпараметрическую абелеву группу Ли диффеоморфизмов фазового пространства x в себя. Это следует из того, что все скобки Пуассона векторных полей (2.1) равны нулю $[e_k, e_j] = 0\ \forall\, k, j$.

Свойство 4. Базис (2.1) является неголономным. Из четырех векторов базиса только два потенциальны: $e_3 = dK/dx$ и $e_2 = dS/dx$. Здесь поверхность $S = (x^2-1)/2 = (x_1^2+x_2^2+ +x_3^2+x_4^2-1)/2$ представляет собой сферу единичного радиуса (в дальнейшем, решая задачу стабилизации энергии колебаний, будем без ограничения общности полагать, что $E_0 = 1/2$).

Свойство 5 (глобальные эволюции конуса $K = 0$ вдоль векторных полей (2.1)). Выпишем операторы ортов эволюционного базиса

$$\begin{aligned}
U_1 &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4},\\
U_2 &= x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial}{\partial x_4},\\
U_3 &= x_4\frac{\partial}{\partial x_1} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4},\\
U_4 &= x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4}.
\end{aligned}$$

Глобальная эволюция [7] конуса K вдоль e_3:

$$\exp\{\pm\tau U_3\}\,K = K\operatorname{ch}2\tau \pm \frac{1}{2}\,x^2\operatorname{sh}2\tau.$$

При $\tau\to\infty$ многообразие $K\operatorname{ch}2\tau \pm \frac{1}{2}\,x^2\operatorname{sh}2\tau = 0$ стремится к многообразию $K \pm \frac{1}{2}\,x^2 = 0$, представляющему собой ось конуса (1.12).

Глобальная эволюция конуса K вдоль e_1, e_4 и e_2 определяется тем фактом, что $U_1K=0$, $U_4K = 0$, $U_2K = 2K$. Отсюда следует, что K является инвариантом векторных полей e_1 и e_4, а многообразие $K = 0$ является инвариантным многообразием векторного поля e_2.

Свойство 6. Определитель системы базисных векторов (2.1):

$$\begin{aligned}
\Delta = \det\begin{Vmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4\end{Vmatrix} &= \det\begin{Vmatrix} x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1\\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2\end{Vmatrix} =\\
&= 4(x_1x_2 + x_3x_4)^2 + \left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\right)^2 = 4\left(K_1^2 + K_2^2\right),
\end{aligned}\tag{2.3}$$

где

$$K_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \qquad K_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\right).\tag{2.4}$$

Можно показать, что квадратичные формы (2.4) позволяют вычислять угол наклона эллипса формы колебаний, когда $K = x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0$. Таким образом, в общем случае вместо (1.11) имеем

$$\cos 2\theta = \frac{2K_1}{\sqrt{\Delta}}, \qquad \sin 2\theta = \frac{2K_2}{\sqrt{\Delta}}, \qquad \operatorname{tg}2\theta = \frac{K_2}{K_1}.\tag{2.5}$$

3. Оператор проектирования возмущений

Будем исходить из уравнений (1.9), в которых выполняется осреднение по явно входящему времени. Использование метода осреднения предполагает, что правые части удовлетворяют известным требованиям [5, 7], в частности, они являются малыми, что обычно формализуется присутствием перед ними малого параметра. Уравнения (1.9) приобретают вид

$$\dot{x} = X(x),\tag{3.1}$$

в котором правая часть $X(x)$ связана с правыми частями Q в (1.1) следующим образом:

$$X(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \begin{Vmatrix} -E\sin t \\ E\cos t \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Vmatrix} dt, \qquad \left(E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right). \tag{3.2}$$

Наиболее общий вид линейных по координатам и скоростям сил в (1.1) следующий:

$$\begin{Vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Vmatrix} = (C + N + H)\begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Vmatrix} + (D + \Gamma + G)\begin{Vmatrix} \dot q_1 \\ \dot q_2 \end{Vmatrix},$$

$$C = c\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad N = n\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad H = h\begin{Vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{Vmatrix},$$

$$D = d\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \Gamma = \gamma\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad G = g\begin{Vmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{Vmatrix},$$

где C — симметрическая матрица потенциальных сил сферического типа (скалярная матрица), N — кососимметрическая матрица циркулярных сил, H — симметрическая матрица потенциальных сил гиперболического типа, D — симметрическая матрица диссипативных сил сферического типа, Γ — кососимметрическая матрица гироскопических сил, G — симметрическая матрица диссипативных сил гиперболического типа. Матрицы H и G имеют след, равный нулю (девиаторы); силы, определяемые этими матрицами, для целей управления траекторией осциллятора не используются.

Выполним отображение сил с матрицами C, N, D, Γ в правые части системы (3.1) по формуле (3.2). В результате получим

$$\begin{aligned}
C: &\quad X(x) = \frac{c}{2}\{-x_3, -x_4, x_1, x_2\} = -\frac{c}{2}e_4,\\
N: &\quad X(x) = \frac{n}{2}\{-x_4, x_3, x_2, -x_1\} = -\frac{n}{2}e_3,\\
D: &\quad X(x) = \frac{d}{2}\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \frac{d}{2}e_2,\\
\Gamma: &\quad X(x) = \frac{\gamma}{2}\{x_2, -x_1, x_4, -x_3\} = \frac{\gamma}{2}e_1.
\end{aligned}$$

Коэффициенты c, n, d, γ будут считаться малыми.

Теперь, для того чтобы выяснить, какую эволюцию вызывают все эти силы, достаточно спроектировать их на векторы эволюционного базиса (2.1).

Если нас интересует локальная эволюция прямолинейной траектории, то, в силу ортогональности базиса (2.1) на конусе $K = 0$, при вычислении проекций достаточно брать скалярные произведения найденных выше векторов X с векторами (2.1).

Результат локального проектирования представлен в таблице 1.

Из таблицы 1 следует, что потенциальные сферические силы (матрица этих сил C) приводят только к изменению частоты колебаний. Циркулярные силы (матрица N) вызывают вариацию квадратуры (разрушение прямолинейной формы колебаний). Амплитуду изменяют скоростные силы сферического типа (матрица D). К прецессии приводят гироскопические силы (матрица Γ).

Таблица 1

	C	N	D	Γ
Прецессия (e_1)	0	0	0	$\frac{\gamma}{2}$
Амплитуда (e_2)	0	0	$\frac{d}{2}$	0
Квадратура (e_3)	0	$-\frac{n}{2}$	0	0
Частота (e_4)	$-\frac{c}{2}$	0	0	0

4. Уравнения идеального 2D осциллятора Ван дер Поля

Для стабилизации только энергии колебаний достаточно, в соответствии с таблицей, правые части в системе (1.1) выбрать так:

$$\left\|\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix}\right\| = -d\left(E - \frac{1}{2}\right)\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{matrix}\right\|.$$

Для дополнительной стабилизации равной нулю квадратуры (прямолинейная форма колебаний), а также для управления прецессией формы достаточно правые части сформировать следующим образом:

$$\left\|\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix}\right\| = -d\left(E - \frac{1}{2}\right)\left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{matrix}\right\| - nK \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\| - \gamma \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{matrix}\right\|. \tag{4.1}$$

Уравнения двумерного управляемого осциллятора Ван дер Поля приобретают вид

$$\begin{gathered} \ddot{q}_1 + q_1 = -d(E - 1/2)\dot{q}_1 - nKq_2 - \gamma\dot{q}_2, \\ \ddot{q}_2 + q_2 = -d(E - 1/2)\dot{q}_2 + nKq_1 + \gamma\dot{q}_1, \\ E = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right), \qquad K = q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2, \end{gathered} \tag{4.2}$$

или, в краткой записи, где $q = (q_1, q_2)$:

$$\ddot{q} + q = \frac{d}{2}\left(1 - q^2 - \dot{q}^2\right)\dot{q} + nq \times \dot{q} \times q - \Gamma\dot{q}. \tag{4.3}$$

Уравнение двумерного осциллятора с управляющими силами (4.1), записанное в форме (4.2) или (4.3), помимо тривиального стационарного решения $(q, \dot{q}) = 0$, или $x = 0$, обладает стационарным решением

$$q^2 + \dot{q}^2 = 1, \qquad q \times \dot{q} \times q = 0. \tag{4.4}$$

Устойчивость этого стационарного многообразия будет исследована ниже.

5. Уравнения в элементах орбиты

Замена переменных (1.7) приводит к уравнениям двумерного осциллятора Ван дер Поля в элементах орбиты:

$$
\begin{aligned}
\dot r &= -(Q_1\cos\theta + Q_2\sin\theta)\sin(t+\tau),\\
\dot k &= -(Q_1\sin\theta - Q_2\cos\theta)\cos(t+\tau),\\
\dot\theta &= \frac{1}{r^2-k^2}\,[k(Q_1\cos\theta + Q_2\sin\theta)\cos(t+\tau) + r(Q_1\sin\theta - Q_2\cos\theta)\sin(t+\tau)],\\
\dot\tau &= -\frac{1}{r^2-k^2}\,[r(Q_1\cos\theta + Q_2\sin\theta)\cos(t+\tau) + k(Q_1\sin\theta - Q_2\cos\theta)\sin(t+\tau)],
\end{aligned}
$$

при учете соотношений (1.7) и (3.2). Эти уравнения (после осреднения по времени) имеет смысл использовать, если интерес представляют эволюции именно таких переменных.

6. Уравнения в фазовом пространстве

Двумерные уравнения Ван дер Поля (4.2) в медленных переменных x по формулам (1.9) и (4.1) после осреднения приобретают вид

$$\dot x = -dSe_2 - nKe_3 - \gamma e_1, \tag{6.1}$$

где

$$S = \frac{x^2-1}{2}, \qquad K = x_1x_4 - x_2x_3, \tag{6.2}$$

а e_2, e_3 задаются формулами (2.1).

Для исследования устойчивости стационарного многообразия $S = 0$, $K = 0$ (6.2), являющегося в переменных q многообразием (4.4), удобно перейти в уравнениях (6.1) от фазовых переменных x к переменным, представляющим собой базовые квадратичные формы двумерного линейного осциллятора.

7. Базовые квадратичные формы

Наряду с квадратичными формами (6.2) рассмотрим еще две (2.4). Четыре формы

$$
\begin{gathered}
S = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1\right), \quad K = x_1x_4 - x_2x_3,\\
K_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad K_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2\right)
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

определяют отображение $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (S, K, K_1, K_2)$ с тождественно равным нулю якобианом:

$$\frac{\partial(S,K,K_1,K_2)}{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)} = \det\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1\\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3\\ x_1 & -x_2 & x_3 & -x_4\end{Vmatrix} = 0. \tag{7.2}$$

Ранг якобиева определителя (7.2) равен 3, поскольку имеется одно линейное соотношение между формами (7.1):

$$x_1K + x_3K_1 - x_4\left(S + K_2 + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

8. Уравнения в базовых формах

Воспользуемся заменой (7.1) для построения уравнений движения двумерного осциллятора Ван дер Поля в базовых формах

$$\dot{S} = \frac{dS}{dx}\,\dot{x} = x \cdot \frac{1}{2}\,(-dSe_2 + nKe_3 - \gamma e_1).$$

Поскольку $x = e_2$, то, воспользовавшись матрицей Грама (2.2), получим

$$\dot{S} = -\frac{d}{2}\,S(2S+1) + nK^2.$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= \frac{1}{2}\,e_3(-dSe_2 + nKe_3 - \gamma e_1) = -dSK + \frac{1}{2}\,nK(2S+1),\\
\dot{K}_1 &= \frac{1}{2}\,(x_2, x_1, x_4, x_3)(-dSe_2 + nKe_3 - \gamma e_1) = -dSK_1 - \gamma K_2,\\
\dot{K}_2 &= \frac{1}{2}\,(x_1, -x_2, x_3, -x_4)(-dSe_2 + nKe_3 - \gamma e_1) = -dSK_2 + \gamma K_1.
\end{aligned}$$

Окончательно уравнения в базовых формах получились такими:

$$\begin{gathered}
\dot{S} = -\frac{d}{2}\,S(2S+1) + nK^2, \qquad \dot{K} = -dSK + \frac{n}{2}\,K(2S+1),\\
\dot{K}_1 = -dSK_1 - \gamma K_2, \qquad \dot{K}_2 = -dSK_2 + \gamma K_1.
\end{gathered} \tag{8.1}$$

Если $S = 0$ стабилизировано, то из последних двух уравнений (8.1) следует, что $\ddot{K}_1 + \gamma^2 K_1 = 0$, $\ddot{K}_2 + \gamma^2 K_2 = 0$, что означает, что $\cos 2\theta$ и $\sin 2\theta$ изменяются по закону колебаний линейного осциллятора, для которого $2\theta = \gamma t$, то есть угол прецессии θ линейно растет со временем.

9. Устойчивость стационарного многообразия

Уравнения по интересующим нас переменным S и K отделились. Исследуемое на устойчивость стационарное многообразие инвариантно к гироскопическим силам. Фазовый портрет этой подсистемы в частном случае $d = n$ изображен на рисунке 2.

Система имеет четыре особые точки: точка $(0, 0)$ асимптотически устойчивая и три неустойчивые точки $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

Если на двумерный осциллятор Ван дер Поля не действуют никакие силы кроме стабилизирующих энергию колебаний ($n = \gamma = 0$, $d \neq 0$), то уравнения (8.1) приобретают вид

$$\begin{gathered}
\dot{S} = -\frac{d}{2}\,S(2S+1), \qquad \dot{K} = -dSK,\\
\dot{K}_1 = -dSK_1, \qquad \dot{K}_2 = -dSK_2.
\end{gathered}$$

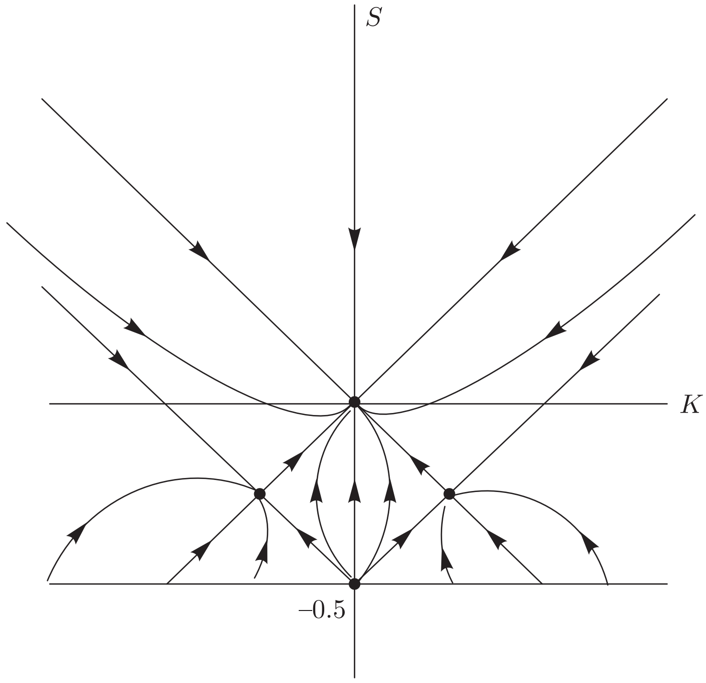

Рис. 2

Видно, что $S = 0$ по-прежнему является асимптотически устойчивым многообразием постоянной полной энергии колебаний; равная нулю квадратура также устойчива асимптотически, но с нулевым собственным значением. Квадратичные формы K_1 и K_2 стремятся к нулю, сохраняя постоянным отношение K_1/K_2, то есть угол θ (2.5) остается неизменным. Если, например, для бесплатформенной инерциальной системы маятникового типа [6] необходимо стабилизировать эллипс с постоянной полной энергией и постоянной площадью (квадратурой), то уравнения (4.3) должны быть такими:

$$\ddot{q} + q = \frac{d}{2}\left(1 - q^2 - \dot{q}^2\right)\dot{q} + n\left(q \times \dot{q} \times q - q \times \dot{q} \times q\big|_0\right) - \Gamma\dot{q}.$$

Список литературы

[1] Loper E. J., Lynch D. D. The HRG: A new low-nose inertial rotation sensor // Proc. of the 16 Jt. Services Data Exchange For Inertial Systems (Los Angeles, Calif., 1982).

[2] Stiles J. C. Vibrating ring gyro: Patent US № 3 924 475 (Dec 9, 1975).

[3] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. Москва: Наука, 1985. 125 с.

[4] Friedland B., Hutton M. F. Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope // IEEE Trans. Automat. Control, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 545–556.

[5] Журавлёв В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. Москва: Наука, 1988. 328 с.

[6] Журавлёв В. Ф. Решение уравнений линейного осциллятора относительно матрицы инерциального триэдра // Докл. РАН, 2005, т. 404, № 4, с. 491–495.

[7] Zhuravlev V. Ph., Klimov D. M. Group-theoretic methods in mechanics and applied mathematics. (Differential and Integral Equations and Their Applications, vol. 2.) Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2002. 230 pp.

Van der Pol's controlled 2D oscillator

Viktor F. Zhuravlev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101, block 1, Moscow, 119526, Russia
zhurav@ipmnet.ru

There are two reasons for 2D auto-oscillations to be of such interest for analysis. Firstly, mechanical systems based on such a model are widely used. Secondly, unlike 1D van der Pol's oscillator, a 2D model as a mathematical object has much more characteristics: in addition to potential and dissipative forces, more complicated forces can be taken into account, which characterize different specific behaviors of the oscillator.

MSC 2010: 70Q05
Keywords: van der Pol's oscillator

Received February 28, 2016, accepted April 28, 2016
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 211–222 (Russian)