



**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.9:531.36

MSC 2010: 70E99, 37E99, 37C55, 37C70

**Маятниковая система  
с бесконечным числом состояний равновесия  
и квазипериодической динамикой**

**А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Ю. В. Седова**

Обсуждаются примеры систем механики, где возможны квазипериодические движения, обусловленные иррациональным отношением радиусов вращающихся элементов, из которых составлена система. Для маятниковой системы с фрикционной передачей вращения между элементами в консервативном и диссипативном случае отмечается сосуществование бесконечного числа устойчивых неподвижных точек, а в автоколебательном случае — наличие множества аттракторов в виде предельных циклов, а также квазипериодических ротационных режимов. При квазипериодической динамике частоты спектральных составляющих зависят от параметров задачи, но имеется фиксированное иррациональное соотношение между частотами компонент, обусловленное геометрическими размерами элементов.

Ключевые слова: динамическая система, механическая передача, квазипериодические колебания, аттрактор

---

Получено 13 мая 2016 года

После доработки 24 мая 2016 года

---

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 15-12-20035 в части построения основной модели и анализа ее консервативного и диссипативного вариантов (разделы 1, 2, 3), а также гранта РФФИ № 14-02-00085 в части анализа автоколебательных процессов (раздел 4).

---

Кузнецов Александр Петрович<sup>1,2</sup>

[kuzalexpr@yandex.ru](mailto:kuzalexpr@yandex.ru)

Кузнецов Сергей Петрович<sup>1,2,3</sup>

[spkuz@yandex.ru](mailto:spkuz@yandex.ru)

Седова Юлия Викторовна<sup>1</sup>

[sedovayv@yandex.ru](mailto:sedovayv@yandex.ru)

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
410019, Россия, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

<sup>2</sup>Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>3</sup>Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

## 1. Введение

Помимо периодических движений и хаоса в нелинейных системах могут реализоваться квазипериодические колебания [1–5], когда возвраты фазовой траектории в окрестность исходного состояния в ходе эволюции во времени происходят регулярно, но при этом период возврата увеличивается по мере повышения точности, с которой фиксируется возврат. Квазипериодические колебания (как в консервативных, так и в диссипативных системах) характеризуются дискретным спектром Фурье, в виде набора составляющих, у которых частоты находятся в иррациональном отношении.

Образом квазипериодических колебаний в фазовом пространстве служат инвариантные торы (в диссипативном случае — аттракторы в виде торов) размерности два или выше, в зависимости от числа участвующих в динамике колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами.

Исследование квазипериодических колебаний имеет долгую историю, в частности, в контексте задач небесной механики и движения планет Солнечной системы [6]. Также многочастотные колебания естественным образом возникают в приложениях, относящихся к радиотехнике, электронике, лазерной физике и нелинейной оптике [2–5].

С квазипериодическими колебаниями связан целый ряд глубоких концепций, повлиявших на современное состояние теории динамических систем в целом. Так, теория Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ) устанавливает возможность квазипериодической динамики как типичного в определенном смысле феномена в системах, получаемых малым возмущением интегрируемых систем, например, для слабо взаимодействующих нелинейных осцилляторов [7]. Широко известна проблема Ферми — Паста — Улама, связанная с одной из первых попыток численного моделирования многомерной нелинейной системы, когда авторы неожиданно столкнулись с возникновением квазипериодических колебаний вместо предполагавшегося установления равновесного состояния, ожидавшегося в соответствии с представлениями статистической физики [8]. Еще одна фундаментальная идея, вовлекающая квазипериодические колебания, — это выдвинутый в свое время Ландау и Хопфом сценарий возникновения гидродинамической турбулентности, который состоит в последовательном рождении колебательных составляющих с несоизмеримыми частотами при увеличении числа Рейнольдса как параметра, отвечающего за степень неравновесности системы [9–12].

Известно, что механические системы, которые составлены из элементов, совершающих движение с трением без проскальзывания, включают в себя иерархию неголономных систем [13, 14], демонстрирующих разнообразные феномены нелинейной динамики, изучавшиеся, помимо прочего, на примере так называемого кельтского камня [15–19].

Мы хотим привлечь внимание к одной специфической возможности возникновения квазипериодических колебаний в механических системах, связанной с иррациональным соотношением геометрических размеров вовлеченных в движение вращающихся элементов. Речь может идти о системах типа маятников, взаимодействующих посредством фрикционной или ременной передачи между вращающимися валами или дисками, которые к ним присоединены, или о системах типа экипажей с колесами разного размера, совершающих движение на шероховатой поверхности без проскальзывания. На простых примерах маятниковых систем с фрикционной передачей мы продемонстрируем те особенности динамического поведения, которые оказываются в некоторых отношениях необычными с точки зрения традиционных представлений нелинейной динамики.

Имея в виду, что при отсутствии проскальзывания упомянутые выше механические передачи в идеале могут рассматриваться как функционирующие без потерь механической

энергии, мы начнем обсуждение с консервативной системы, относящейся к указанному классу. Затем будут рассмотрены системы с диссипацией, включая модель автоколебательного типа, представляющую собой модификацию исходной системы с использованием идеи маятника Фруда [20].

## 2. Консервативная маятниковая система с фрикционной передачей

Рассмотрим систему в виде двух установленных в вертикальной плоскости дисков, способных совершать вращение вокруг своих осей и соприкасающихся краями, где имеет место трение без проскальзывания (рис. 1). Отношение радиусов дисков будем полагать иррациональным числом, например,  $r_1/r_2 = \rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Для простоты предположим, что инерционные свойства полностью обеспечиваются точечными массами  $m_1$  и  $m_2$ , которые закреплены на одном и другом диске на расстояниях, соответственно,  $l_1$  и  $l_2$  от оси. По существу, это система из двух маятников с наложенной механической связью. Условие отсутствия проскальзывания при вращении дисков выражается соотношением на углы поворота  $\varphi = \rho\theta$  и на угловые скорости  $\dot{\varphi} = \rho\dot{\theta}$ . Учитывая это обстоятельство, можно записать функцию Лагранжа системы как зависящую только от угловой координаты  $\theta$  и скорости  $\dot{\theta}$ :

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \rho^2 \dot{\theta}^2 - g l_1 (1 - \cos \theta) - g l_2 (1 - \cos \rho \theta). \quad (2.1)$$

Тогда уравнение движения имеет вид [21, 22]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (2.2)$$

то есть

$$(m_1 l_1^2 + \rho^2 m_2 l_2^2) \ddot{\theta} + g l_1 \sin \theta + g l_2 \sin \rho \theta = 0, \quad (2.3)$$

или

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta + \omega^2 \sin \rho \theta = 0, \quad (2.4)$$

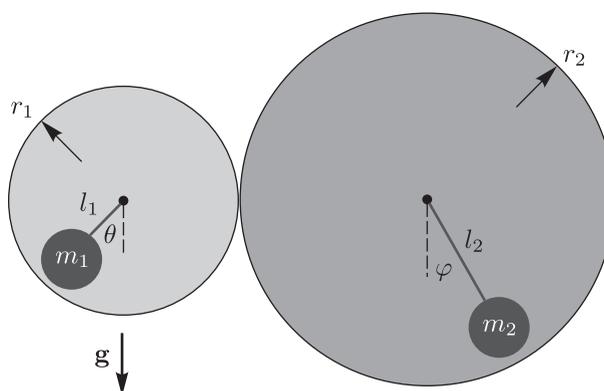


Рис. 1. Исследуемая механическая система.

где

$$\Omega = \sqrt{\frac{gl_1}{m_1 l_1^2 + \rho^2 m_2 l_2^2}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{gl_2}{m_1 l_1^2 + \rho^2 m_2 l_2^2}} \quad (2.5)$$

— параметры с размерностью частоты. Умножая обе части уравнения (2.4) на производную  $\dot{\theta}$ , нетрудно вывести соотношение, выражающее закон сохранения механической энергии:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \Omega^2 (1 - \cos \theta) + \omega^2 \rho^{-1} (1 - \cos \rho \theta) \right] = 0. \quad (2.6)$$

Движение можно представить как колебания частицы в потенциальном рельефе [23], форма которого дается соотношением

$$U(\theta) = \Omega^2 (1 - \cos \theta) + \omega^2 \rho^{-1} (1 - \cos \rho \theta). \quad (2.7)$$

Принципиальный момент состоит в том, что в силу иррациональности константы  $\rho$  зависимость потенциала от обобщенной координаты  $\theta$  является не периодической, а квазипериодической.

На рисунках 2, 3, 4 приводятся иллюстрации формы потенциальной функции  $U(\theta)$  и виды портретов на фазовой плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$ . Минимумам и максимумам потенциальной функции отвечают неподвижные точки (соответственно, центры и седла), расположенные на оси  $\theta$ , как нужно подчеркнуть, с отклонениями от периодического закона. Фазовые траектории, охватывающие отдельные центры, соответствуют периодическим колебаниям системы. При большей энергии имеются траектории, охватывающие два центра или большее их число. Это такие колебательные движения, в ходе которых за период один из дисков поворачивается на угол больше  $2\pi$ , но потом прокручивается обратно. Наконец, при еще больших энергиях движения системы носят характер вращения дисков без изменения направления. С точки зрения временной зависимости динамических переменных, эти ротационные движения являются квазипериодическими. В самом деле, угловая скорость одного и другого диска колеблется из-за присутствия смещенных от осей грузов по квазипериодическому закону в силу иррационального отношения радиусов.

### 3. Динамика маятниковой модели в присутствии вязкого трения

При учете вязкого трения в уравнение (2.4) надо добавить член, пропорциональный обобщенной скорости, в результате чего будем иметь

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta + \omega^2 \sin \rho \theta = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение содержит только один отвечающий за трение параметр  $\alpha$  из-за того, что при отсутствии проскальзывания мгновенные скорости вращения одного и другого диска выражаются через одну из угловых скоростей. Физически величина  $\alpha$  будет определяться силами трения, действующими и на один, и на другой диск.

Умножая обе части уравнения на угловую скорость  $\dot{\theta}$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \Omega^2 (1 - \cos \theta) + \omega^2 \rho^{-1} (1 - \cos \rho \theta) \right] = -\alpha \dot{\theta}^2. \quad (3.2)$$

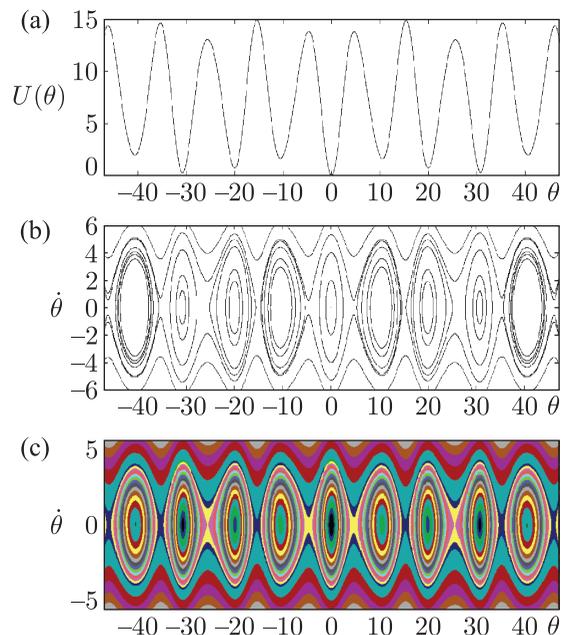


Рис. 2. Вид потенциальной функции нелинейного осциллятора (2.4) для случая  $\Omega = 1, \omega = 2$  (a), фазовый портрет на плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  (b) и фазовый портрет, где траектории представлены цветом в зависимости от энергии  $E = \dot{\theta}^2/2 + U(\theta)$  (c).<sup>a</sup>

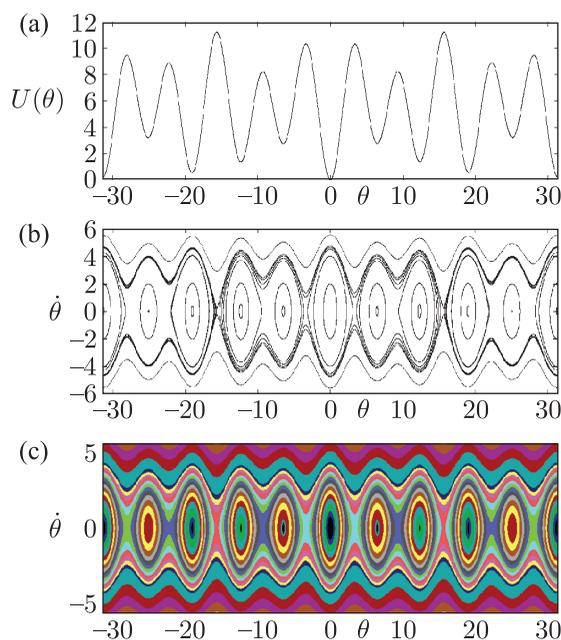


Рис. 3. Вид потенциальной функции нелинейного осциллятора (2.4) для случая  $\Omega = 2, \omega = 1$  (a), фазовый портрет на плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  (b) и фазовый портрет, где траектории представлены цветом в зависимости от энергии  $E = \dot{\theta}^2/2 + U(\theta)$  (c).

<sup>a</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1602005/>

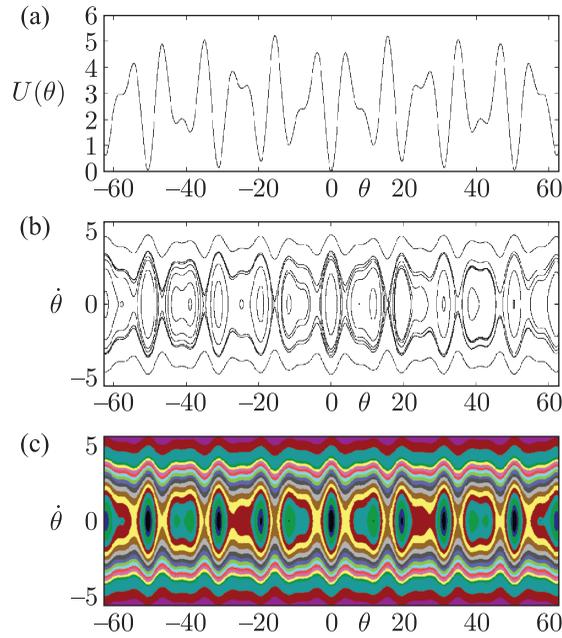


Рис. 4. Вид потенциальной функции нелинейного осциллятора (2.4) для случая  $\Omega = \omega = 1$  (а), фазовый портрет на плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  (б) и фазовый портрет, где траектории представлены цветом в зависимости от энергии  $E = \dot{\theta}^2/2 + U(\theta)$  (с).

При отличной от нуля скорости правая часть отрицательна, поэтому величина полной механической энергии, фигурирующая в квадратных скобках, с течением времени будет монотонно убывать до тех пор, пока потенциальная функция (2.7) не достигнет минимума, а скорость обратиться в нуль. Это отвечает остановке в одном из состояний устойчивого равновесия, которым теперь на фазовой плоскости отвечают неподвижные точки типа фокус [23].

Если первоначально сообщенная системе угловая скорость велика и реализуется ротационное движение, то из-за иррациональности параметра  $\rho$  вариантов разных финальных состояний равновесия много. Они различаются количеством оборотов, совершенных дисками до полной остановки, и, соответственно, разными величинами углов отклонения грузов от вертикали. При этом потенциальная энергия отличается от минимального значения, соответствующего расположению обоих грузов в самом низу. (Такое поведение системы при релаксации к состоянию равновесия вызывает ассоциации с поведением спиновых стекол, где при охлаждении может реализоваться множество состояний с отличающейся энергией [24].) На рисунке 5 показаны бассейны притяжения различных неподвижных точек на фазовой плоскости модели (3.1).

#### 4. Автоколебательная система

Модифицируем систему так, чтобы один из дисков представлял собой маятник Фруда [20], а именно: будем считать, что этот диск насажен на вал, вращающийся с угловой скоростью  $\Omega_0$ , и действующий на диск момент силы трения зависит от относительной угловой скорости. Предположим, что эта зависимость в определенном интервале аргумента является убывающей и имеет точку перегиба, около которой разложение в ряд представля-

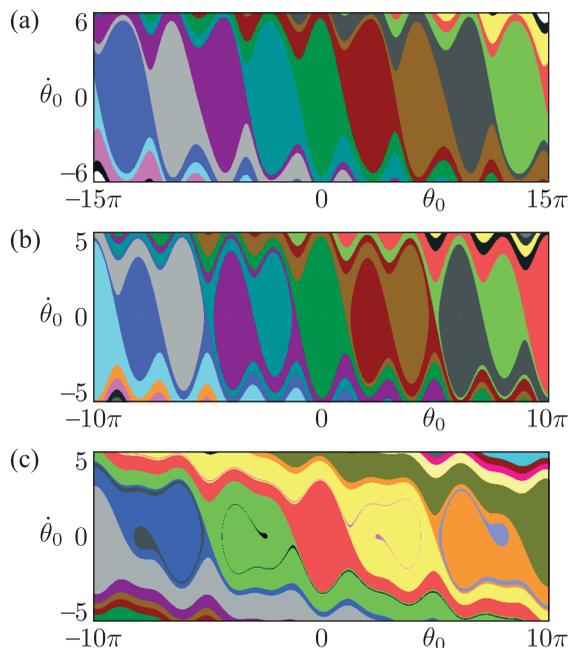


Рис. 5. Бассейны притяжения различных неподвижных точек для модели (3.1) на фазовой плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  в случае  $\alpha = 0.1$  при  $\Omega = 1, \omega = 2$  (а),  $\Omega = 2, \omega = 1$  (б),  $\Omega = \omega = 1$  (с).

ется в виде  $M(\dot{\theta} - \Omega_0) = M_0 + k\dot{\theta} - \beta\dot{\theta}^3$ . Тогда уравнение принимает вид

$$(m_1 l_1^2 + \rho^2 m_2 l_2^2) \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} - k\dot{\theta} + \beta \dot{\theta}^3 + gl_1 \sin \theta + gl_2 \sin \rho \theta = M_0 \tag{4.1}$$

или

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta + \omega^2 \sin \rho \theta = M'_0 + \lambda \dot{\theta} - \beta' \dot{\theta}^3, \tag{4.2}$$

где

$$M'_0 = \frac{M_0}{m_1 l_1^2 + \rho^2 m_2 l_2^2}, \quad \lambda = \frac{k - \alpha}{m_1 l_1^2 + \rho^2 m_2 l_2^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{m_1 l_1^2 + \rho^2 m_2 l_2^2}. \tag{4.3}$$

Если постепенно увеличивать приложенный момент, то около неподвижных точек типа фокусов, теряющих устойчивость через посредство бифуркаций Андронова–Хопфа, будут возникать автоколебания, представленные на фазовой плоскости предельными циклами. При дальнейшем увеличении параметра возможны ситуации, когда некоторые предельные циклы будет охватывать два фокуса или большее их число.

На рисунке 6 показаны предельные циклы, реализующиеся в модели (4.2) в случае  $\Omega = \omega = 1, \beta = 0.1, M_0 = 0.1$  при значениях параметра  $\lambda$  от 0.1 до 0.4. На каждой из диаграмм можно видеть множество предельных циклов, при этом попадание системы после завершения переходного процесса на тот или иной из них зависит от начальных условий.

На рисунке 7 приведена аналогичная диаграмма для  $\lambda = 0.5$ , дополненная графиками, иллюстрирующими установление в системе автоколебаний, отвечающих двум различным предельным циклам, и спектры Фурье в этих автоколебательных режимах. Как можно видеть, установившиеся автоколебания оказываются периодическими в обоих случаях, хотя различаются как по форме, так и по частотному спектру: во втором случае период больше, а расстояние по частоте между составляющими эквидистантного дискретного спектра меньше, чем в первом случае.

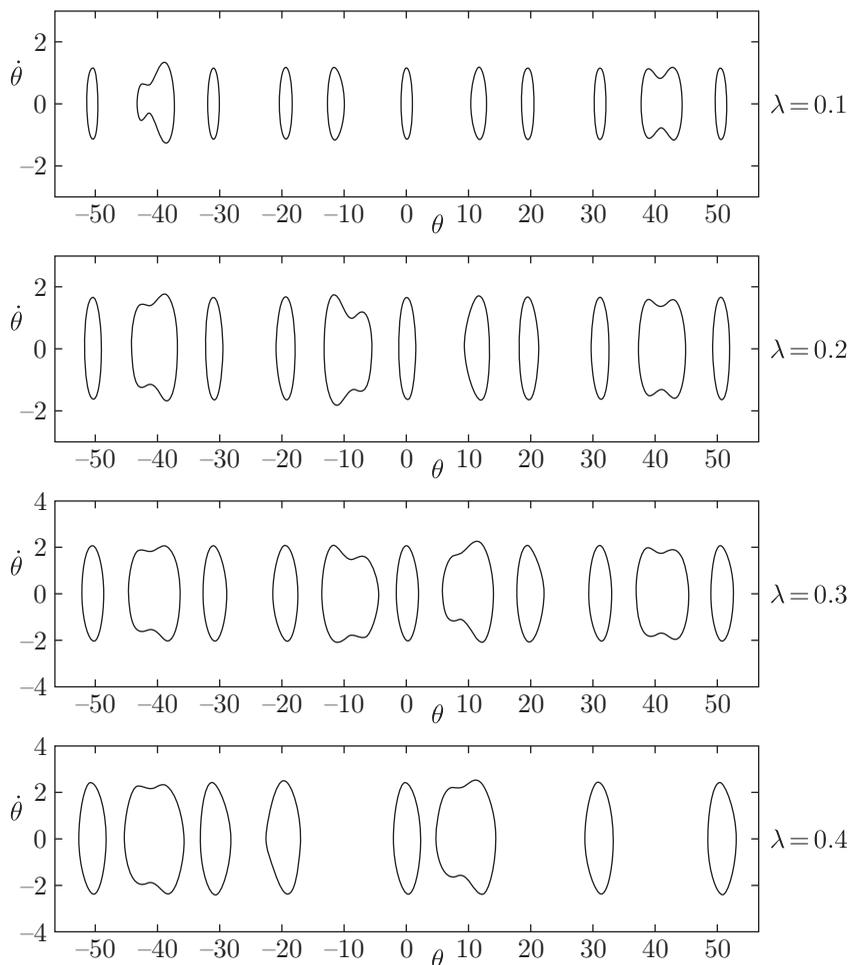


Рис. 6. Предельные циклы, отвечающие установившимся периодическим автоколебаниям в модели (4.2) на фазовой плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  для четырех различных значений параметра  $\lambda$ . Остальные параметры:  $\Omega = \omega = 1$ ,  $\beta' = 0.1$ ,  $M'_0 = 0.1$ .

Наконец, если параметр надкритичности еще больше, то установившийся режим становится не колебательным, а ротационным, то есть движение отвечает вращению одного и другого диска — неравномерному, но без изменения направления.

На рисунке 8а приводится фазовый портрет системы для такой ситуации в случае  $\lambda = 0.6$ .

Установившемуся движению отвечает монотонное увеличение во времени угла поворота  $\theta$ ; угловая скорость при этом совершает квазипериодические колебания, что иллюстрируется на рисунке 8б для траектории, показанной жирной красной линией на предыдущей диаграмме (а).

Также показан спектр Фурье, построенный на основе обработки временного ряда, полученного в численных расчетах для той же траектории по методике, рекомендованной в руководствах по численному спектральному анализу [25, 26]. Спектр имеет вид, характерный для квазипериодических процессов: имеется множество дискретных составляющих, различающихся по уровню и расположенных на разных расстояниях друг от друга по частоте. Данный режим можно квалифицировать как квазипериодическую авторотацию.

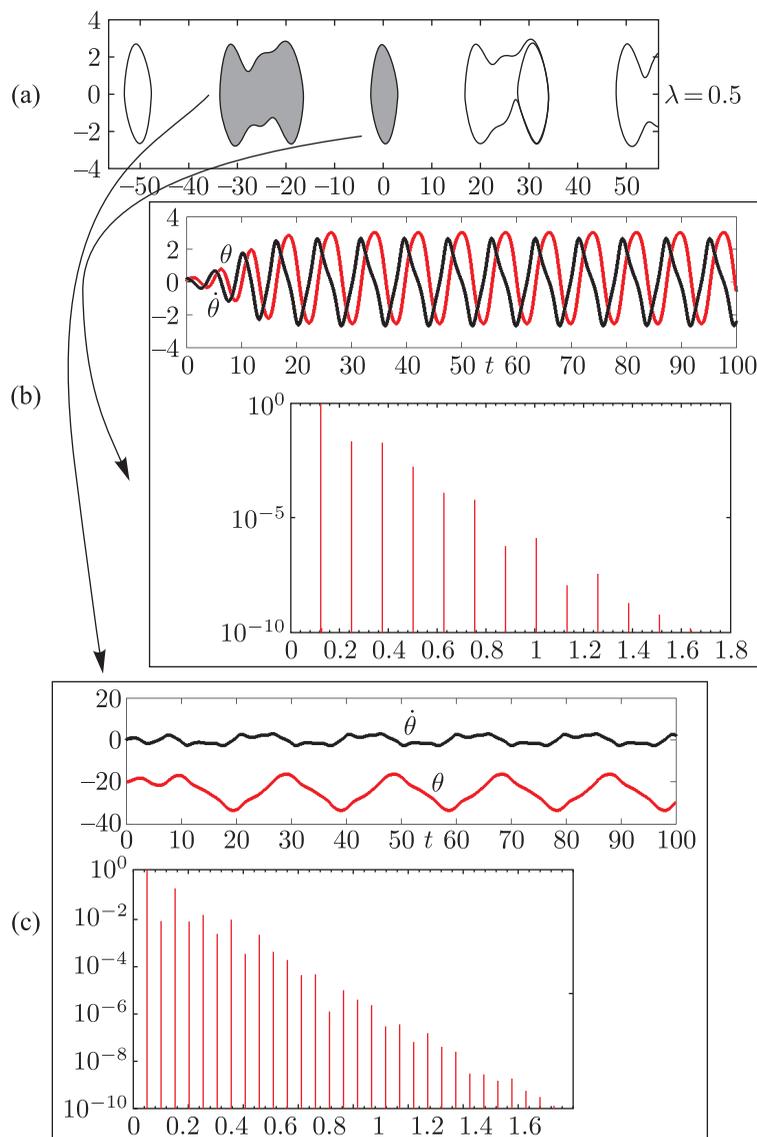


Рис. 7. Предельные циклы, отвечающие установившимся периодическим автоколебаниям в модели (4.2) на фазовой плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  для  $\lambda = 0.5$  и параметрах  $\Omega = \omega = 1$ ,  $\beta' = 0.1$ ,  $M'_0 = 0.1$  (а). Временные зависимости угла поворота и угловой скорости и спектры для двух различных сосуществующих автоколебательных режимов (b), (c).

## 5. Заключение

Рассмотрен относительно простой пример механической системы на основе маятников, взаимодействующих посредством фрикционной передачи между присоединенными к ним дисками, где квазипериодическая динамика может возникать вследствие иррационального отношения радиусов дисков. Кроме того, к не вполне обычным особенностям можно отнести сосуществование множества устойчивых неподвижных точек в консервативных и диссипативных версиях системы или аттракторов в виде предельных циклов в автоколебательной системе. Ротационные движения в консервативной системе и авторотация в автоколебательной системе характеризуются квазипериодическим поведением во времени.

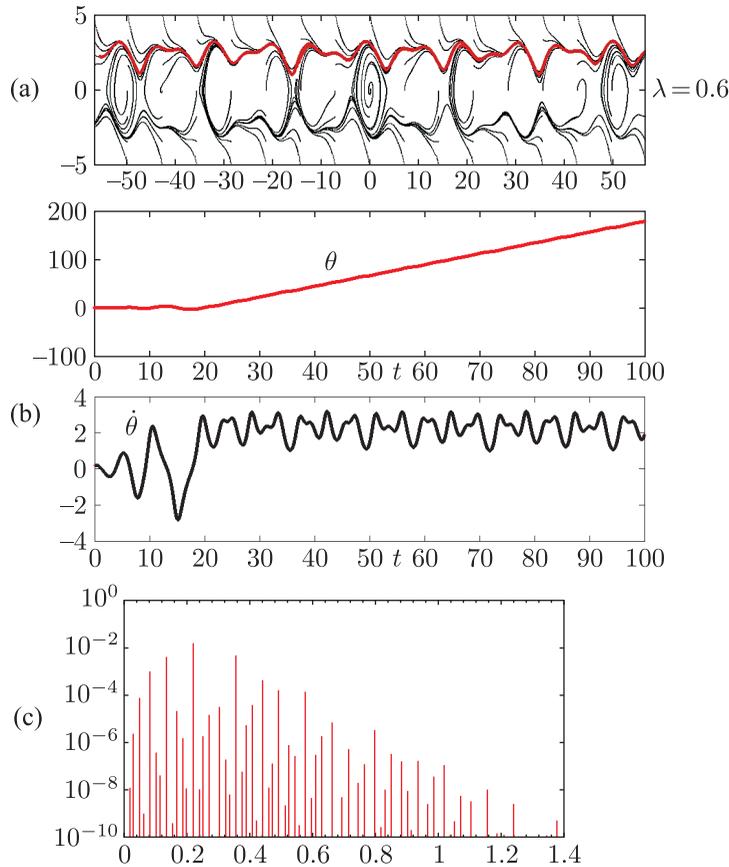


Рис. 8. Фазовый портрет системы (4.2) для случая, когда возникает квазипериодическая авторотация для  $\lambda = 0.6$  при остальных параметрах  $\Omega = \omega = 1$ ,  $\beta' = 0.1$ ,  $M'_0 = 0.1$  (а). Временные зависимости угла поворота и угловой скорости (б) и спектр колебаний угловой скорости в режиме авторотации (с).

Динамические феномены, подобные тем, которые обсуждаются в данной работе, могут иметь место также в системах, где имеются вращающиеся элементы, соединенные ременной передачей (модификации систем типа Кайдановского–Хайкина [20]), и в системах типа экипажей с колесами разного размера, совершающих движение на шероховатой поверхности без проскальзывания. При увеличении числа элементов, составляющих систему, по-видимому, можно реализовать примеры квазипериодических движений с большим числом несоизмеримых частот и другие нетривиальные феномены, такие как странные нехаотические аттракторы [27, 28]. Системы описанного типа могут представлять интерес для приложений, в том числе в робототехнике, в плане реализации специфических режимов движения и управления движениями.

## Список литературы

- [1] Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B. Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: Order amidst chaos. (Lecture Notes in Math., vol. 1645.) Berlin: Springer, 2009. 200 pp.
- [2] Glazier J. A., Libchaber A. Quasi-periodicity and dynamical systems: An experimentalist's view // IEEE Trans. Circuits and Systems, 1988, vol. 35, no. 7, pp. 790–809.

- [3] Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Станкевич Н. В., Тюрюкина Л. В. Физика квазипериодических колебаний. Саратов: Наука, 2013. 251 с.
- [4] Кузнецов С. П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
- [5] Анищенко В. В., Астахов Т. Е., Вадивасова Т. Е. Регулярные и хаотические автоколебания. Синхронизация и влияние флуктуаций. Москва: Интеллект, 2009. 336 с.
- [6] Poincaré H. *New methods of celestial mechanics. (History of Modern Physics and Astronomy, vol. 13.)* New York: Springer, 1993. 1077 pp.
- [7] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.
- [8] Fermi E., Pasta J., Ulam S. *Studies of nonlinear problems: Los Alamos Report LA-1940 (1955).*
- [9] Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности // Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8, с. 339–342.
- [10] Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1948, vol. 1, no. 4, pp. 303–322.
- [11] Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Сценарий Ландау – Хопфа в ансамбле взаимодействующих осцилляторов // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 5, с. 863–873.
- [12] Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V. About Landau – Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Phys. Lett. A*, 2013, vol. 377, nos. 45–48, pp. 3291–3295.
- [13] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a rigid body on plane and sphere: Hierarchy of dynamics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [14] Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев (ред.). Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 328 с.
- [15] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // *УФН*, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [16] Борисов А. В., Казаков А. О., Кузнецов С. П. Нелинейная динамика кельтского камня: неголономная модель // *УФН*, 2014, т. 184, № 5, с. 493–500.
- [17] Кузнецов С. П. К вопросу о правомерности неголономной модели динамики кельтского камня // *УФН*, 2015, т. 185, № 12, с. 1342–1344.
- [18] Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголономной механике «кельтского камня» // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 4, с. 735–762.
- [19] Borisov A. V., Jalnin A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [20] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Либроком, 2010. 552 с.
- [21] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. Москва: Физматгиз, 1960. 296 с.
- [22] Goldstein H., Poole Ch. P. Jr., Saffo J. L. *Classical mechanics.* 3rd ed. Boston, Mass.: Addison-Wesley, 2001. 680 pp.
- [23] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. Москва: Физматлит, 2002. 292 с.
- [24] Stein D. L. Spin glasses // *Sci. Am.*, 1989, vol. 261, pp. 52–59.
- [25] Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. 2-е изд. Москва: Наука, 1968. 252 с.
- [26] Jenkins G. M., Watts D. G. *Spectral analysis and its applications.* San Francisco: Holden-Day, 1968. 548 pp.

- [27] Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J. A. Strange attractors that are not chaotic // *Phys. D*, 1984, vol. 13, nos. 1–2, pp. 261–268.
- [28] Кузнецов С. П., Пиковский А. С., Фойдель У. Странный нехаотический аттрактор // *Нелинейные волны – 2004* / А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин (ред.). Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. С. 484–509.

## Pendulum system with an infinite number of equilibrium states and quasi-periodic dynamics

Alexander P. Kuznetsov<sup>1,2</sup>, Sergey P. Kuznetsov<sup>1,2,3</sup>, Yuliya V. Sedova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kotel'nikov's Institute of Radio-Engineering and Electronics of RAS, Saratov Branch, ul. Zelenaya 38, Saratov, 410019 Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, ul. Astrahanskaya 83, Saratov, 410012 Russia

<sup>3</sup>Udmurt State University, Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

<sup>1</sup>kuzalexp@yandex.ru, <sup>2</sup>spkuz@yandex.ru, <sup>3</sup>sedovayv@yandex.ru

Examples of mechanical systems are discussed, where quasi-periodic motions may occur, caused by an irrational ratio of the radii of rotating elements that constitute the system. For the pendulum system with frictional transmission of rotation between the elements, in the conservative and dissipative cases we note the coexistence of an infinite number of stable fixed points, and in the case of the self-oscillating system the presence of many attractors in the form of limit cycles and of quasi-periodic rotational modes is observed. In the case of quasi-periodic dynamics the frequencies of spectral components depend on the parameters, but the ratio of basic incommensurate frequencies remains constant and is determined by the irrational number characterizing the relative size of the elements.

MSC 2010: 70E99, 37E99, 37C55, 37C70

Keywords: dynamic system, mechanical transmission, quasi-periodic oscillations, attractor

Received May 13, 2016, accepted May 24, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 223–234 (Russian)