

Прямой метод нахождения потенциала двумерного тела

Учебно-методическое пособие

Федеральное агентство по образованию РФ
ФГБОУ ВО "Удмуртский государственный университет"

Прямой метод нахождения потенциала двумерного тела
Учебно-методическое пособие

Ижевск

УдГУ

2016

УДК 521.1

ББК 22.654

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Н.Г. Трубицына

Прямой метод нахождения потенциала двумерного тела: учебно-методическое пособие
/ Н.Г. Трубицына. – Ижевск: Удгу, 2016. - 33 с.

Учебно-методическое пособие рекомендуется студентам, специализирующимся по физике
и математике.

УДК 521.1

ББК 22.654

©Н.Г. Трубицына

Оглавление

Основные определения	5
1. Постановка задачи.....	8
2. Преобразование главного интеграла (1.4)	10
3. Приведение интеграла R_0 из (1.8) к вещественной форме	11
4. Приведение интеграла R_1 из (1.9)	11
5. Приведение интеграла R_2 из (1.10)	13
6. Преобразование интеграла N из (1.7)	13
7. Преобразование вспомогательных интегралов I_1 и I_2	15
8. Нормированный внутренний потенциал цилиндра.....	16
9. Нахождение вспомогательных интегралов	17
10. Выражения в конечном виде для интегралов Φ_1 , Φ_2 , Φ'_1 , Φ'_2 в точках на оси симметрии	17
11. Преобразование основных интегралов во втором вырожденном случае .	19
12. Вычисление Φ_1 и Φ_2 в случае комплексных корней.....	21
13. Вычисление Φ'_1	22
14. Вычисление Φ'_2	24
15. Резюме расчетов	26
16. Заключение	27
Вопросы.....	28
Список литературы	29

Основные определения

Открытие Ньютоном закона всемирного тяготения положило начало развитию небесной механики и теории притяжения тел. Важный шаг в теории притяжения тел был сделан благодаря введению Лагранжем, Лапласом и Гауссом понятия потенциала. Рассмотрим для примера потенциал гравитирующей точки. По закону обратных квадратов, сила притяжения точечной массы m , находящейся в точке $\mathbf{x}'$, на пробную точку единичной массы с радиус-вектором $\mathbf{x}$ равна

$$F = G \frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = \frac{Gm}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}. \quad (1)$$

Эту силу удобно записать в виде градиента от некоторой функции $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \text{grad } \varphi. \quad (2)$$

Введенная таким образом функция $\varphi(\mathbf{x})$ и называется потенциалом материальной точки.

Введение понятия потенциала стало ценной находкой в математической физике, позволившей упростить и упорядочить многие громоздкие расчеты в стремительно развивающейся небесной механике.

Потенциал является силовой и энергетической характеристикой взаимодействующих тел. Для ньютоновского гравитационного потенциала объемных тел обычная нормировка такова, что потенциал в данной точке поля численно равен работе по выносу пробного тела единичной массы из этой точки на бесконечность.

Рассмотрим прямоугольную систему координат, назовем точку $M(x'_1, x'_2, x'_3)$ притягивающей, а $P(x_1, x_2, x_3)$ – притягиваемой (пробной). Замечательно, что [1]:

1). Функция $\varphi(\mathbf{x})$ конечна, однозначна и непрерывна во всем пространстве, за исключением самой точки M , где φ обращается в бесконечность. Все частные производные любого порядка от функции φ по

координатам пробной точки P (и по любому другому направлению) также есть функции конечные, однозначные и непрерывные во всем пространстве, за исключением опять-таки точки M , где все они обращаются в бесконечность.

2). Когда пробная точка P неограниченно удаляется от точки M , функция φ , оставаясь положительной, убывает до нуля, притом

$$\lim_{D \rightarrow \infty} D\varphi = Gm, \quad (3)$$

где $D = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$.

Кроме того, при удалении точки P на бесконечность, любая частная производная функции φ имеет своим пределом нуль и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = -Gm, \quad (4)$$

где r – радиус-вектор точки P (т.е. функция φ регулярна на бесконечности).

3). Во всем пространстве, за исключением самой точки M , функция φ является гармонической и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \Delta \varphi = 0. \quad (5)$$

4). Из свойств потенциала объемного тела отметим: гравитационный потенциал тела объемом V и плотностью $\rho(\mathbf{x}')$

$$\varphi(\mathbf{x}) = G \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad (7)$$

повсюду удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = -4\pi G \rho(\mathbf{x}). \quad (8)$$

В частности, вне тела $\rho(\mathbf{x}) = 0$ и уравнение Пуассона (8) сводится к уравнению Лапласа.

В классической теории основным методом представления внешних и внутренних потенциалов тел разной формы был и остается так называемый прямой метод. Для объемных тел с распределением плотности вещества $\rho(\mathbf{x}')$ прямой метод основан на вычислении интеграла (7). Большое число примеров на вычисление потенциалов тел в конечном виде приводится в [2], см. также и [3].

Именно прямым методом впервые был найден внешний и внутренний ньютоновский потенциал однородного трехосного эллипсоида и, как отметил Чандрасекхар [4], решение этой важной задачи составило целую эпоху в развитии математической физики.

Внутренний потенциал однородного эллипсоида является квадратичной функцией от координат пробной точки и имеет вид

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \pi G \rho (I - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2), \quad (9)$$

где коэффициенты

$$A_i = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u) \Delta(u)}, \quad (10)$$

в общем случае выражаются через эллиптические интегралы, а величина нормированного потенциала в центре эллипсоида

$$I = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(u)}. \quad (11)$$

Здесь $\Delta(u) = \sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}$.

Однако нахождение *логарифмических потенциалов* для двумерных тел долгое время оставалось в тени, и углубленные теоретические разработки в этой области не велись. В частности, когда в девятнадцатом веке потребовалось знать внешний и внутренний логарифмический потенциал однородного эллиптического цилиндра, то исследователи (Кирхгоф) применили для решения этой задачи *косвенный, а не прямой метод*.

Напомним, что прямой метод основан на вычислении интеграла по площади сечения цилиндра

$$\varphi(x_1, x_2) = 2G \iint_S \rho(x') \ln \frac{2H}{D} dx'_1 dx'_2, \quad D = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}. \quad (12)$$

Суть примененного здесь *косвенного метода* в том, что берется выражение потенциала однородного трехосного эллипсоида (внутренний потенциал, например, дается формулой (9)), и затем наибольшая из полуосей эллипсоида устремляется к бесконечности. При фиксированных малой и средней полуосях в таком методе эллипсоид превращается в однородный эллиптический цилиндр. Однако по сути своей этот косвенный метод весьма ограничен уже потому, что не позволяет находить логарифмические потенциалы цилиндров с неэллиптическим сечением.

Поэтому остается актуальной проблема нахождения логарифмических потенциалов тел именно прямым методом, используя для этого формулу (12). Заметим, что отсутствие результатов на применение прямого метода было вызвано, по-видимому, возникающими здесь значительными математическими трудностями. Впервые применение прямого метода для нахождения логарифмических потенциалов было продемонстрировано в работе Б. П. Кондратьева [5], где этим способом удалось найти внутренний и внешний потенциал однородного эллиптического цилиндра. Следующий шаг по развитию прямого метода в теории потенциала был сделан в статье [6], где была решена сложная задача нахождения внутреннего потенциала однородного цилиндра с лемнискатным сечением. Рассмотрим эту задачу подробно.

1. Постановка задачи

Дан гравитирующий однородный двумерный цилиндр с лемнискатным сечением. В параметрическом виде форма лемнискаты Бернулли описывается уравнениями:

$$x'_1 = a \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta}, \quad x'_2 = a \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}, \quad (1.1)$$

где для правой и левой петли соответственно

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}. \quad (1.2)$$

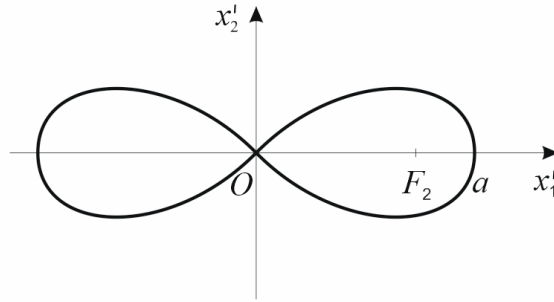


Рис. 1. Лемниската Бернулли. Здесь a – расстояние от начала координат O до максимально удаленной точки кривой, а F_2 – одна из фокальных точек.

Согласно [6], гравитационный потенциал цилиндра дается выражением

$$\varphi(x_1, x_2) = \text{const} + G\rho \cdot N, \quad (1.3)$$

где ρ – плотность, а величина

$$N = \oint_L \ln D \left[-(x_2 - x'_2) dx'_1 + (x_1 - x'_1) dx'_2 \right] \quad (1.4)$$

представлена интегралом по контуру L , ограничивающему площадь сечения

S . Здесь и далее $D = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}$.

Формулу (1.3) можно записать также в виде

$$\frac{\varphi}{2G\rho a^2} - \left(\ln(2H) + \frac{1}{2} \right) = \frac{N}{2a^2}. \quad (1.5)$$

Здесь высота цилиндра $2H \gg a$. Далее высота цилиндра рассматривается как величина, удобная для нормировки потенциала φ .

Заметим, что интегрирование вдоль левой петли лемнискаты заменой $\theta \rightarrow \theta - \pi$ сводится к интегрированию по первому интервалу $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ при одновременной замене знака величины a в формуле (1.1), то есть при

$$x'_1 = -a \cos \theta \sqrt{\cos 2\theta}, \quad x'_2 = -a \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}. \quad (1.6)$$

2. Преобразование главного интеграла (1.4)

Используя формулы (1.1) и (1.6), после некоторых преобразований получим интеграл для N из (1.4) в виде

$$\frac{2N}{a^2} = -R'_0 + \frac{x_1}{a} R'_1 + \frac{x_2}{a} R'_2, \quad (1.7)$$

где

$$R'_0 = R_0 + R_0^+, \quad R'_1 = R_1 + R_1^+, \quad R'_2 = R_2 + R_2^+,$$

причем здесь мы обозначили следующие определенные интегралы

$$R_0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \cdot \ln(z^2 - a^2 e^{2i\theta} \cos 2\theta) d\theta, \quad (1.8)$$

$$R_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \cdot \ln \frac{z - ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}}{z + ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}} d\theta, \quad (1.9)$$

$$R_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \cdot \ln \frac{z - ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}}{z + ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}} d\theta. \quad (1.10)$$

Здесь $z = x_1 + ix_2$ (i – мнимая единица), x_1 и x_2 есть координаты пробной точки внутри лемнискаты. Символ «+» обозначает комплексное сопряжение. Подчеркнем, что в формуле (1.7) мы учли вклад в потенциал в испытываемой точке (x_1, x_2) уже от обеих (левой и правой) петель лемнискаты.

Таким образом, данная задача сводится к вычислению сложных определенных интегралов (1.8)–(1.10).

3. Приведение интеграла R_0 из (1.8) к вещественной форме

Рассмотрим интеграл R_0 из (1.8). Интегрирование его по частям при замене $\left(u = \ln(z^2 - a^2 e^{2i\theta} \cos 2\theta), \quad v = \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)$ дает

$$R_0 = 2 \ln z + ia^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2\theta e^{4i\theta} d\theta}{z^2 - a^2 e^{2i\theta} \cos 2\theta}.$$

Полагая теперь

$$x = \sin 2\theta, \quad (1.11)$$

последний интеграл приводим к виду

$$R_0 = 2 \ln z + \int_{-1}^1 \frac{-2x\sqrt{1-x^2} + i(1-2x^2)}{C + iD} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1.12)$$

где введены следующие обозначения:

$$C = b^2 - p^2 - 2(1-x^2), \quad D = 2(bp - x\sqrt{1-x^2}), \quad (1.13)$$

а нормированные координаты испытываемой точки есть

$$b = \frac{\sqrt{2}}{a} x_1, \quad p = \frac{\sqrt{2}}{a} x_2.$$

Умножим числитель и знаменатель подынтегральной части (1.12) на $C - iD$. Затем, чтобы избавиться от мнимости, найдем комплексно сопряженный интеграл R_0^+ и сложим оба выражения

$$R'_0 = R_0 + R_0^+ = 2 \ln \left[\frac{2(b^2 + p^2)}{a^2} \right] + 2 \int_{-1}^1 \frac{D(1-2x^2) - 2Cx\sqrt{1-x^2}}{C^2 + D^2} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1.14)$$

Цель этих преобразований состоит в том, что интеграл (1.14) является уже вещественной величиной.

4. Приведение интеграла R_1 из (1.9)

Делая подстановки

$$u = \ln \frac{z - ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}}{z + ae^{i\theta} \sqrt{\cos 2\theta}}, \quad v = \int \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \sin \theta \sqrt{\cos 2\theta}$$

и интегрируя по частям интеграл R_1 из (1.9), находим

$$R_1 = 2iaz \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta e^{3i\theta} d\theta}{z^2 - a^2 e^{2i\theta} \cos 2\theta}.$$

Вновь делая подстановку (1.11) и принимая во внимание, что $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$,

после некоторых преобразований имеем

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{A + iB}{C + iD} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1.15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= b(1 - 2x^2 - \sqrt{1-x^2}) - px(2\sqrt{1-x^2} - 1), \\ B &= bx(2\sqrt{1-x^2} - 1) + p(1 - 2x^2 - \sqrt{1-x^2}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где величины C и D из (1.13). Избавляясь от мнимости в знаменателе (1.15) и складывая с R_1^+ , получим уже вещественный интеграл

$$R'_1 = R_1 + R_1^+ = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1.17)$$

5. Приведение интеграла R_2 из (1.10)

После несложных преобразований R_2 из (1.10) имеем

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{A} + i\tilde{B}}{C + iD} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1.18)$$

так что

$$R'_2 = R_2 + R_2^+ = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{A}C + \tilde{B}D}{C^2 + D^2} \cdot \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= p(1 - 2x^2 + \sqrt{1-x^2}) + bx(2\sqrt{1-x^2} + 1), \\ \tilde{B} &= px(2\sqrt{1-x^2} + 1) - b(1 - 2x^2 + \sqrt{1-x^2}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

6. Преобразование интеграла N из (1.7)

Подставляя R'_0 из (1.14), R'_1 из (1.17) и R'_2 из (1.19) в (1.7) и сокращая на общий знаменатель, получаем

$$\frac{2N}{a^2} = I - 2 \ln \left[\frac{2(b^2 + p^2)}{a^2} \right], \quad (1.21)$$

где интеграл I имеет вид

$$I = \int_{-1}^1 \frac{CT + DT_1}{\sqrt{1-x^2}(C^2 + D^2)} dx \quad (1.22)$$

с обозначениями

$$T = bA + p\tilde{A} + 4x^2\sqrt{1-x^2}, \quad T_1 = bB + p\tilde{B} - 2x(1-2x^2).$$

С учетом A из (1.16) и $\tilde{A}$ из (1.20) получим

$$\begin{aligned} T &= b(1 - 2x^2 - \sqrt{1-x^2}) + p^2(1 - 2x^2 + \sqrt{1-x^2}) + 2bpx + 4x^2\sqrt{1-x^2} = \\ &= -\sqrt{1-x^2}C^2 + CT'. \end{aligned}$$

Тогда находим

$$T_1 = b^2 x \left(2\sqrt{1-x^2} - 1 \right) + p^2 x \left(2\sqrt{1-x^2} + 1 \right) - 2bpx\sqrt{1-x^2} - 2x^2(1-2x^2) = \\ = -\sqrt{1-x^2} D^2 + DT'_1,$$

где

$$T' = (p^2 + b^2)(1-2x^2 + 2bpx) - 2\sqrt{1-x^2}(1-3x^2), \\ T'_1 = x \left[-2(2-3x^2) + 2(p^2 + b^2)\sqrt{1-x^2} + p^2 - b^2 \right].$$

Теперь интеграл (1.22) примет вид

$$I = -2 + \int_{-1}^1 \frac{CT' + DT'}{\sqrt{1-x^2}(C^2 + D^2)} dx. \quad (1.23)$$

Числитель в подынтегральной части (1.23) допускает дальнейшее упрощение

$$T' = 2x \left(bp - x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} \right) + (p^2 + b^2)(1-2x^2) - \\ - 2\sqrt{1-x^2}(1-3x^2) = xD + T'', \\ T'_1 = -x \left[b^2 - p^2 - 2(1-x^2) + 2(1-x^2) \right] + 2x(p^2 + b^2)\sqrt{1-x^2} - \\ - 2x(2-3x^2) = -x + T''.$$

Здесь

$$T'' = 2x^2\sqrt{1-x^2} + (p^2 + b^2)(1-2x^2) - 2\sqrt{1-x^2}(1-3x^2), \\ T''_1 = -2x(1-x^2) + 2x\sqrt{1-x^2}(p^2 + b^2) - 2x(2-3x^2).$$

В результате вместо (1.23) получим

$$I = -2 + \int_{-1}^1 \frac{CT'' + DT''_1}{\sqrt{1-x^2}(C^2 + D^2)} dx. \quad (1.24)$$

Множитель в (1.24) $k = C^2 + D^2 = F(x^2) - 8bpx\sqrt{1-x^2}$, где

$F(x^2) = (b^2 + p^2)^2 + 4(1 + p^2 - b^2)(1 - x^2)$. Чтобы сделать знаменатель (1.24)

четной функцией от x , умножим числитель и знаменатель подынтегрального

выражения в (1.24) на фактор $k' = F(x^2) + 8bpx\sqrt{1-x^2}$. Тогда в (1.24) все

интегралы от нечетных функций от x исчезают и после преобразований

получаем $\frac{1}{4}I = -\frac{1}{2} + I_1 + (b^2 + p^2)I_2$, где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{F(x^2) \left[(4x^2 - 1)(b^2 - p^2) + 2(1 - 2x^2) \right] + 16b^2 p^2 x^2 (4x^2 - 3)}{F^2(x^2) - 64b^2 p^2 x^2 (1 - x^2)} dx, \quad (1.25)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{F(x^2) \left[(1 + b^2 - p^2)x^2 - \left(1 + \frac{b^2 - p^2}{2} \right) \right] + 16b^2 p^2 x^2 (1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2} \left[F^2(x^2) - 64b^2 p^2 x^2 (1 - x^2) \right]} dx. \quad (1.26)$$

Таким образом, для N из (1.21) теперь имеем

$$\frac{N}{2a^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{a^2(b^2 + p^2)}{2} \right] + I_1 + I_2. \quad (1.27)$$

7. Преобразование вспомогательных интегралов I_1 и I_2

После многих преобразований, подынтегральные части в I_1 из (1.25) и

I_2 из (1.26) можно представить в форме [7]

$$I_1' = \frac{x^4 - a_1 x^2 + b_1}{x^4 - a_2 x^2 + b_2} = 1 + \frac{(a_2 - a_1)x^2 + b_1 - b_2}{x^4 - a_2 x^2 + b_2} \quad (1.28)$$

$$I_2' = -\frac{1}{4} \frac{x^4 - \alpha x^2 + \beta}{x^4 - a_2 x^2 + b_2} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{(a_2 - \alpha)x^2 + (\beta - b_2)}{x^4 - a_2 x^2 + b_2} \right) \quad (1.29)$$

со следующими коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q(5Q + W + 1) + 3E}{4(Q^2 + E)}, & b_1 &= \frac{(1 + Q)(4Q + W)}{16(Q^2 + E)}, \\ a_2 &= \frac{Q(4Q + W) + 2E}{2(Q^2 + E)}, & b_2 &= \frac{(4Q + W)^2}{16(Q^2 + E)} \end{aligned} \quad (1.30)$$

и

$$\alpha = \frac{Q(6Q+W+2)+4E}{4(Q^2+E)}, \quad \beta = \frac{(1+Q)(4Q+W)}{8(Q^2+E)} = 2b_1, \quad (1.31)$$

где для краткости мы обозначили некоторые функции от нормированных координат b и p испытываемой точки $Q=1+p^2-b^2$, $W=(b^2+p^2)^2$, $E=4^2b^2p^2$.

С учетом вида подынтегральных частей I'_1 из (1.28) и I'_2 из (1.29) получаем искомые выражения интегралов I_1 и I_2 :

$$I_1 = 1 + (a_2 - a_1)\Phi_2 + (b_1 - b_2)\Phi_1, \quad (1.32)$$

$$I_2 = -\frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} + (a_2 - \alpha)\Phi'_2 + (\beta - b_2)\Phi'_1 \right], \quad (1.33)$$

где

$$\Phi_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 - a_2x^2 + b_2}, \quad \Phi_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^4 - a_2x^2 + b_2} \quad (1.34)$$

и

$$\Phi'_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(x^4 - a_2x^2 + b_2)}, \quad \Phi'_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}(x^4 - a_2x^2 + b_2)}. \quad (1.35)$$

8. Нормированный внутренний потенциал цилиндра

Подставляя интегралы из (1.32) и (1.33) в (1.27) и затем в (1.7), после элементарных преобразований получим следующее выражение нормированного потенциала цилиндра:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \equiv \frac{\varphi}{2G\rho a^2} - \ln \left(\frac{\sqrt{2}eH}{a} \right) = & -\frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + p^2}{4} + (b_1 - b_2)\Phi_1 + \\ & + (a_2 - a_1)\Phi_2 - \frac{1}{4}(b^2 + p^2) \left[\frac{\pi}{2} + (a_2 - \alpha)\Phi'_2 + (\beta - b_2)\Phi'_1 \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Подчеркнем: зависимость $\tilde{\varphi}$ от координат испытываемой точки b и p проявляется двояким образом: в явном виде и неявно, через коэффициенты

$a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta$. Заметим также, что последние величины входят также в интегралы $\Phi_1, \Phi_2, \Phi'_1, \Phi'_2$ из (1.34)–(1.35).

9. Нахождение вспомогательных интегралов

Для нахождения интегралов $\Phi_1, \Phi_2, \Phi'_1, \Phi'_2$ необходимо (см. [2]) вначале исследовать биквадратное уравнение

$$x^4 - a_2 x^2 + b_2 = 0, \quad (1.37)$$

имеющее решение $x^2 = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4b_2}}{2}$. Дискриминант здесь равен

$$d = a_2^2 - 4b_2 = -p^2 b^2 \left[\frac{(p^2 + b^2)^2 + 2(p^2 - b^2)}{(1 + p^2 - b^2) + 4b^2 p^2} \right]^2 \leq 0. \quad (1.38)$$

На оси симметрии $p = 0$ и на границе лемнискаты этот определитель равен нулю:

$$d = 0 \text{ для } \begin{cases} p = 0, \\ (p^2 + b^2)^2 = 2(p^2 - b^2). \end{cases} \quad (1.39)$$

Во всех других внутренних точках лемнискаты дискриминант строго меньше нуля. Таким образом, в общем случае уравнение (1.37) имеет внутри лемнискаты комплексные корни, за исключением двух вырожденных случаев (1.39), где корни вещественные. Далее необходимо рассмотреть эти три случая по отдельности.

10. Выражения в конечном виде для интегралов $\Phi_1, \Phi_2, \Phi'_1, \Phi'_2$ в точках на оси симметрии

При $p = 0$, как мы выяснили, $d = 0$, и поэтому

$$x^4 - a_2 x^2 + b_2 = (x^2 - \gamma)^2 = 0, \text{ где } \gamma = \frac{a_2}{2} = \frac{(2 - b^2)^2}{4(1 - b^2)} \neq 0. \text{ В этом вырожденном}$$

случае обозначаем $T = \frac{2-b^2}{2\sqrt{1-b^2}} > 1$ ($0 \leq b < 1$) и $\tilde{T} = \frac{2-b^2}{2\sqrt{b^2-1}} < 1$ ($1 < b \leq \sqrt{2}$).

Ясно, что точка $b = 1$ является сингулярной.

Теперь находим интегралы

$$\Phi_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - \gamma)^2} = \begin{cases} \frac{1}{2T^2(T^2 - 1)} + \frac{1}{4T^3} \ln \frac{T+1}{T-1} & \text{для } b < 1, \\ \frac{1}{2\tilde{T}^2(\tilde{T}^2 + 1)} + \frac{1}{2\tilde{T}^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\tilde{T}} & \text{для } b > 1; \end{cases} \quad (1.40)$$

$$\Phi_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^2 - \gamma)^2} = \begin{cases} \frac{1}{2(T^2 - 1)} - \frac{1}{4T} \ln \frac{T+1}{T-1} & \text{для } b < 1, \\ \frac{1}{2(\tilde{T}^2 + 1)} + \frac{1}{2\tilde{T}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\tilde{T}} & \text{для } b > 1; \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\Phi'_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (x^2 - \gamma)^2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \frac{1+2T^2}{T^3(T^2 - 1)^{3/2}} & \text{для } b < 1, \\ \frac{\pi}{4} \frac{1-2\tilde{T}^2}{\tilde{T}^3(\tilde{T}^2 + 1)^{3/2}} & \text{для } b > 1; \end{cases} \quad (1.42)$$

$$\Phi'_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2} (x^2 - \gamma)^2} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \frac{1}{T\sqrt{T^2 - 1}} \left(2 + \frac{1+2T^2}{T^2 - 1} \right) & \text{для } b < 1, \\ \frac{\pi}{4} \frac{1}{\tilde{T}\sqrt{\tilde{T}^2 + 1}} \left(2 - \frac{1}{\tilde{T}^2 + 1} \right) & \text{для } b > 1. \end{cases} \quad (1.43)$$

Если подставим полученные интегралы (1.40)–(1.43) в (1.36) и учтем разности коэффициентов

$$b_1 - b_2 = -\frac{(2-b^2)^3}{16(1-b^2)}, \quad a_2 - a_1 = -\frac{2-b^2}{4},$$

$$a_2 - \alpha = -\frac{b^2(2-b^2)}{4(1-b^2)}, \quad \beta - b_2 = \frac{b^2(2-b^2)}{16(1-b^2)^2},$$

то после преобразований и дальнейших упрощений получим очень простую формулу

$$\tilde{\varphi} = \ln \frac{2}{b} + K - \frac{\pi b^2}{4}, \quad (1.44)$$

где $b \neq 1$ и

$$K = \begin{cases} -\frac{\sqrt{1-b^2}}{4} \ln \frac{T+1}{T-1} & \text{для } b < 1, \\ \frac{\sqrt{b^2-1}}{2} \operatorname{arctg} \tilde{T} & \text{для } b > 1. \end{cases}$$

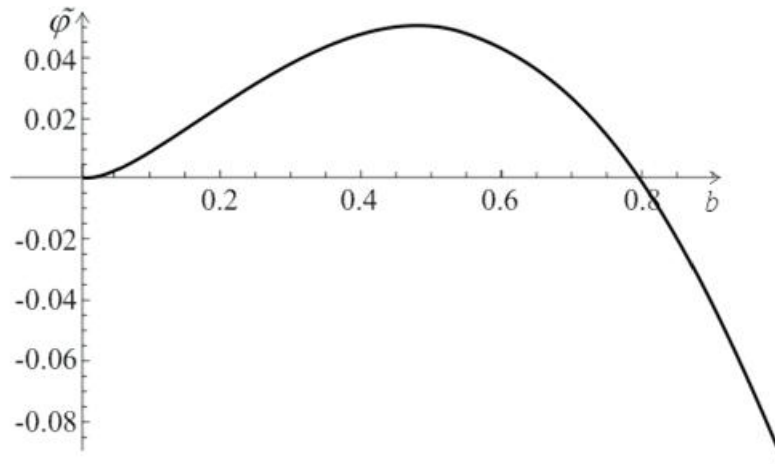


Рис. 2. Нормированный потенциал однородного цилиндра с лемнискатным сечением, вычисленный на оси симметрии лемнискаты, $p = 0$. Потенциал достигает максимума в точке $b \approx 0.47078$.

11. Преобразование основных интегралов во втором вырожденном случае

Во втором вырожденном случае в (1.39) испытываемые точки находятся на границе лемнискаты. Тогда коэффициенты в (1.30) заметно упрощаются:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{3}{2} \sin^2 2\theta, & a_2 &= 2 \sin^2 2\theta, \\
b_1 &= \frac{1}{2} \sin^4 2\theta, & b_2 &= \sin^4 2\theta.
\end{aligned}
\tag{1.45}$$

Таким образом, действительно $d = a_2^2 - 4b_2 = 0$. Угол θ изменяется в пределах (1.2).

Далее, теперь $x^4 - a_2 x^2 + b_2 = (x^2 - T^2)^2$ с $T^2 = \frac{a_2}{2} = \sin^2 2\theta \leq 1$, так что интегралы (1.34)–(1.35) оказываются равными:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= -\frac{2}{\sin^2 4\theta} + \frac{1}{4\sin^3 2\theta} \ln \frac{1 + \sin 2\theta}{1 - \sin 2\theta}, \\
\Phi_2 &= -\frac{1}{2\cos^2 2\theta} - \frac{1}{4\sin 2\theta} \ln \frac{1 + \sin 2\theta}{1 - \sin 2\theta},
\end{aligned}
\tag{1.46}$$

$$\Phi'_1 = 0, \quad \Phi'_2 = 0.$$

Подставляя выражения (1.45) и (1.46) в (1.36), после преобразований получаем потенциал на границе цилиндра в замечательно кратком виде

$$\tilde{\varphi} = -\frac{\pi}{4} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \ln \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \ln \frac{1 + \sin 2\theta}{1 - \sin 2\theta}.
\tag{1.47}$$

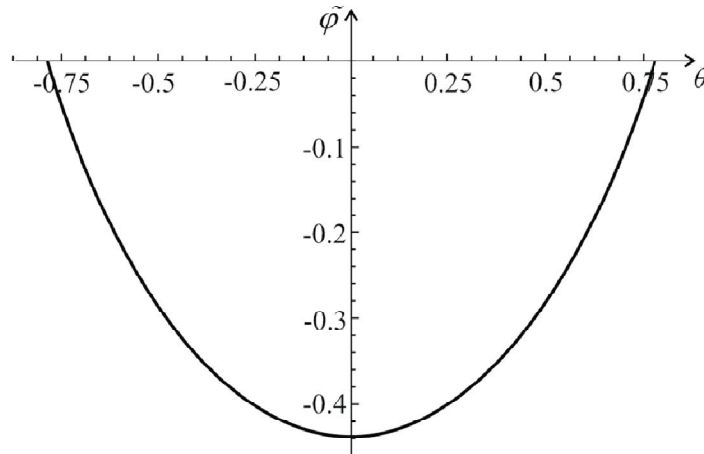


Рис. 3. Нормированный потенциал однородного цилиндра с лемнискатым сечением, вычисленный на границе. По модулю его максимум достигается при $\theta = 0$, то есть в точках лемнискаты, наиболее удаленных от ее центра

12. Вычисление Φ_1 и Φ_2 в случае комплексных корней

Рассматривая случай комплексных корней при $d < 0$ в уравнении (1.37), введем следующие обозначения:

$$q^4 = b_2, \quad \cos \alpha = \frac{a_2}{2\sqrt{b_2}} = \frac{a_2}{2q^2} < 1. \quad (1.48)$$

Ясно, что уравнение $x^4 - a_2x^2 + b_2 = x^4 - 2q^2x^2 \cos \alpha + q^4 = 0$ имеет корни $\gamma_{1,2} = q^2 e^{\pm i\alpha}$. Поэтому выражение

$$k = \frac{1}{x^4 - a_2x^2 + b_2} = \frac{1}{x^4 - 2q^2x^2 \cos \alpha + q^4}$$

мы можем написать в виде

$$k = \frac{1}{(x^2 - \gamma_1)(x^2 - \gamma_2)} = \frac{1}{2iq^2 \sin \alpha} \left(\frac{1}{x^2 - q^2 e^{i\alpha}} - \frac{1}{x^2 - q^2 e^{-i\alpha}} \right).$$

Дальнейшее разложение на простейшие дроби дает

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4iq^3 \sin \alpha} \left[\left(\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{x - qe^{i\frac{\alpha}{2}}} - \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{x - qe^{-i\frac{\alpha}{2}}} \right) - \left(\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{x + qe^{i\frac{\alpha}{2}}} - \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{x + qe^{-i\frac{\alpha}{2}}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2q^3 \sin \alpha} \left[\frac{q \sin \alpha - x \sin \frac{\alpha}{2}}{\left(x - q \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 + q^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{q \sin \alpha + x \sin \frac{\alpha}{2}}{\left(x + q \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 + q^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Если мы подставим теперь k под знак интеграла (1.34), то получим

$$\Phi_1 = \frac{u + v}{4q^3 \sin \alpha}. \quad (1.50)$$

Тем же самым способом найдем выражение для функции

$$k' = \frac{x^2}{x^4 - a_2x^2 + b_2}.$$

В конечном итоге интеграл Φ_2 из (1.34) имеет вид

$$\Phi_2 = \frac{v-u}{4q \sin \alpha}. \quad (1.51)$$

В формулах (1.50) и (1.51) мы обозначили

$$u = \sin \frac{\alpha}{2} \ln \frac{q^2 + 2q \cos \frac{\alpha}{2} + 1}{q^2 - 2q \cos \frac{\alpha}{2} + 1} \quad (1.52)$$

и

$$v = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - q \cos \frac{\alpha}{2}}{q \sin \frac{\alpha}{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1 + q \cos \frac{\alpha}{2}}{q \sin \frac{\alpha}{2}} \right). \quad (1.53)$$

В отличие от Φ_1 и Φ_2 , интегралы Φ'_1 и Φ'_2 из (1.35) содержат в знаменателе радикал $\sqrt{1-x^2}$, вследствие чего найти их труднее, чем два первых. Мы предлагаем свой метод для взятия интегралов Φ'_1 и Φ'_2 .

13. Вычисление Φ'_1

Для нахождения Φ'_1 представим этот интеграл в форме

$$\Phi'_1 = \frac{1}{2q^3 \sin \alpha} [P_1(q) - P_1(-q)], \quad (1.54)$$

где

$$P_1(q) = \int_0^1 \frac{q \sin \alpha - x \sin \frac{\alpha}{2}}{x^2 - 2qx \cos \frac{\alpha}{2} + q^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (1.55)$$

Избавимся от радикала $\sqrt{1-x^2}$ подстановкой

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \text{ т.е. } x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (1.56)$$

Тогда после преобразований получим

$$P_1(q) = 2 \left[\left(q \sin \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \bar{\Phi}_1 + \left(q \sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \bar{\Phi}_2 \right], \quad (1.57)$$

где обозначено

$$\bar{\Phi}_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\bar{C}_1 t^4 + \bar{C}_2 t^2 + \bar{C}_3}, \quad \bar{\Phi}_2 = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\bar{C}_1 t^4 + \bar{C}_2 t^2 + \bar{C}_3} \quad (1.58)$$

с коэффициентами

$$\bar{C}_1 = 1 + 2q \cos \frac{\alpha}{2} + q^2, \quad \bar{C}_2 = -2(1 - q^2), \quad \bar{C}_3 = 1 - 2q \cos \frac{\alpha}{2} + q^2. \quad (1.59)$$

Таким образом, интеграл (1.55) сводится к комбинации двух определенных интегралов типа Φ_1 и Φ_2 из (1.34). Здесь мы имеем дело со случаем $4\bar{C}_1\bar{C}_3 > \bar{C}_2^2$, когда уравнение $\bar{C}_1 t^4 + \bar{C}_2 t^2 + \bar{C}_3 = 0$ имеет комплексные корни. Введем обозначение (см. также (1.48))

$$\bar{q}^4 = \frac{\bar{C}_3}{\bar{C}_1} = \frac{1 - 2q \cos \frac{\alpha}{2} + q^2}{1 + 2q \cos \frac{\alpha}{2} + q^2}, \quad \cos \bar{\alpha} = -\frac{\bar{C}_2}{2\sqrt{\bar{C}_1\bar{C}_3}} = \frac{1 - q^2}{\sqrt{q^4 - 2q^2 \cos \alpha + 1}}, \quad (1.60)$$

после чего с учетом решений (1.50) и (1.51) получаем для интегралов (1.58) следующие выражения:

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{4\bar{C}_1\bar{q}^3 \sin \bar{\alpha}}, \quad \bar{\Phi}_2 = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{4\bar{C}_1\bar{q} \sin \bar{\alpha}}. \quad (1.61)$$

Здесь

$$\bar{u} = \sin \frac{\bar{\alpha}}{2} \ln \frac{\bar{q}^2 + 2\bar{q} \cos \frac{\bar{\alpha}}{2} + 1}{\bar{q}^2 - 2\bar{q} \cos \frac{\bar{\alpha}}{2} + 1} \quad (1.62)$$

и

$$\bar{v} = 2 \cos \frac{\bar{\alpha}}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - \bar{q} \cos \frac{\bar{\alpha}}{2}}{\bar{q} \sin \frac{\bar{\alpha}}{2}} + \operatorname{arctg} \frac{1 + \bar{q} \cos \frac{\bar{\alpha}}{2}}{\bar{q} \sin \frac{\bar{\alpha}}{2}} \right). \quad (1.63)$$

Далее, для второго члена в (1.54) имеем

$$P_1(-q) = - \left[\left(q \sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \tilde{\Phi}_1 + \left(q \sin \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \tilde{\Phi}_2 \right], \quad (1.64)$$

где интегралы $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ получаются из $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ соответственно изменением знака величины q . При $q \rightarrow -q$ мы также имеем $\bar{q} \rightarrow \frac{1}{q}$, $\bar{C}_1 \Leftrightarrow \bar{C}_3$, причем $\bar{\alpha} \equiv \tilde{\alpha}$, $\bar{u} = \tilde{u}$ и $\bar{v}$ заменяется на $\tilde{v}$. Следовательно, имеем решение

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{\bar{u} + \tilde{v}}{4\bar{C}_1\bar{q} \sin \bar{\alpha}}, \quad \tilde{\Phi}_2 = \frac{\tilde{v} - \bar{u}}{4\bar{C}_1\bar{q}^3 \sin \bar{\alpha}}, \quad (1.65)$$

где $\tilde{v}$ получается из $\bar{v}$ заменой $\bar{q} \rightarrow \frac{1}{q}$, а именно

$$\tilde{v} = 2 \cos \frac{\tilde{\alpha}}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\bar{q} - \cos \frac{\bar{\alpha}}{2}}{\sin \frac{\bar{\alpha}}{2}} + \operatorname{arctg} \frac{\bar{q} + \cos \frac{\bar{\alpha}}{2}}{\sin \frac{\bar{\alpha}}{2}} \right). \quad (1.66)$$

Если теперь подставим полученные $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$, $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ из (1.61) и (1.65) в $P_1(q)$ из (1.57) и $P_1(-q)$ из (1.64), а затем последние в (1.54), то

$$\Phi'_1 = \frac{1}{q^3 \sin \alpha} \left[q \sin \alpha \left(\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2 \right) + \sin \frac{\alpha}{2} \left(-\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2 \right) \right] \quad (1.67)$$

или, после преобразований и упрощений,

$$\Phi'_1 = \frac{2q \cos \frac{\alpha}{2} (1 + \bar{q}^2) + \bar{q}^2 - 1}{8\bar{C}_1 q^3 \bar{q}^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \bar{\alpha}} (\bar{v} + \tilde{v}). \quad (1.68)$$

Следует подчеркнуть, что величины $\bar{u}$ в (1.68) взаимно сократились.

14. Вычисление Φ'_2

Для Φ'_2 из (1.35) теперь имеем

$$\Phi'_2 = \frac{1}{2q \cos \frac{\alpha}{2}} [P_2(q) - P_2(-q)]. \quad (1.69)$$

Здесь

$$P_2(q) = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2} \left(x^2 - 2qx \cos \frac{\alpha}{2} + q^2 \right)}. \quad (1.70)$$

Делая подстановку (1.56), получаем $P_2(q) = 2(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2)$ с известными уже $\bar{\Phi}_1$ и $\bar{\Phi}_2$ из (1.61). Таким образом, интеграл

$$P_2(-q) = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2} \left(x^2 + 2qx \cos \frac{\alpha}{2} + q^2 \right)} \quad (1.71)$$

сводится к $P_2(-q) = 2(\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2)$ с известными $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ из (1.65). В результате

получаем $\Phi'_2 = \frac{1}{2q \cos \frac{\alpha}{2}} (\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2)$, или

$$\Phi'_2 = \frac{1 - \bar{q}^2}{8\bar{C}_1 q \bar{q}^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \bar{\alpha}} (\bar{v} + \tilde{v}). \quad (1.72)$$

Здесь взаимно уничтожаются величины $\bar{u}$.

Как известно, $\bar{q} < 1$, тогда легко видеть, что величины $\bar{v}$ из (1.63) и $\tilde{v}$ из (1.66) определяются равенствами

$$\bar{v} = 2 \cos \frac{\bar{\alpha}}{2} \left(\pm \pi - \operatorname{arctg} \frac{2\bar{q} \sin \frac{\bar{\alpha}}{2}}{1 - \bar{q}^2} \right), \quad (1.73)$$

и

$$\tilde{v} = 2 \cos \frac{\bar{\alpha}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\bar{q} \sin \frac{\bar{\alpha}}{2}}{1 - \bar{q}^2}, \quad (1.74)$$

где знак берется в соответствии с

$$+\pi \text{ для } \sin \frac{\bar{\alpha}}{2} > 0,$$

$$-\pi \text{ для } \sin \frac{\bar{\alpha}}{2} < 0.$$

Следовательно,

$$\bar{v} + \tilde{v} = \pm 2\pi \cos \frac{\bar{\alpha}}{2}. \quad (1.75)$$

Подставив $(\bar{v} + \tilde{v})$ из (1.75) в (1.68) и (1.72), после преобразований имеем

$$\Phi'_1 = \frac{\pi}{\left| \sin \frac{\bar{\alpha}}{2} \right|} \frac{2q \cos \frac{\alpha}{2} (1 + \bar{q}^2) + \bar{q}^2 - 1}{8\bar{C}_1 q^3 \bar{q}^3 \cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \Phi'_2 = \frac{\pi}{\left| \sin \frac{\bar{\alpha}}{2} \right|} \frac{1 - \bar{q}^2}{8\bar{C}_1 q \bar{q}^3 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (1.76)$$

Таким образом, подставляя найденные интегралы Φ_1 и Φ_2 из (1.50), (1.51) и интегралы Φ'_1 и Φ'_2 из (1.76) в основную формулу (1.36), мы получим окончательное выражение для искомого потенциала цилиндра с лемнискатным сечением.

15. Резюме расчетов

В итоге, найден нормированный внутренний потенциал цилиндра в форме (1.36)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \equiv & \frac{\varphi}{2G\rho a^2} - \ln \left(\frac{\sqrt{2}eH}{a} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + p^2}{4} + (b_1 - b_2)\Phi_1 + \\ & + (a_2 - a_1)\Phi_2 - \frac{1}{4}(b^2 + p^2) \left[\frac{\pi}{2} + (a_2 - \alpha)\Phi'_2 + (\beta - b_2)\Phi'_1 \right], \end{aligned}$$

с двумя ее специальными вариантами (1.44) и (1.47). Он зависит от нормированных координат b и p испытуемой точки. Вспомогательные функции Φ_1 , Φ_2 , Φ'_1 , Φ'_2 выражаются через элементарные функции.

16. Заключение

Найденный потенциал является симметричной функцией по отношению к осям Ox_1 и Ox_2 . В центре лемнискаты потенциал и компоненты силы притяжения равны нулю. Кривые равного потенциала показаны на рис. 4. Два семейства кривых разделены сепаратрисой: внутри нее изопотенциали замкнутые, а вне – разомкнуты и выходят на контур цилиндра. Потенциал цилиндра убывает от внутренних кривых к внешним.

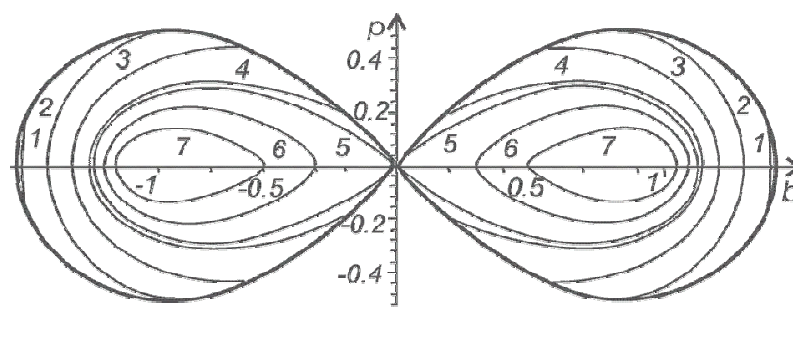


Рис. 4. Потенциал цилиндра в единицах $2G\rho a^2$. Кривые равного потенциала разделены сепаратрисой на два семейства. Внутри нее кривые замкнутые, потенциал на них всюду положительный и достигает максимума в точке $b \approx 0.47077$. Вне сепаратрисы эквипотенциали разомкнуты и потенциал на них отрицателен.

Вопросы

1. Какова размерность потенциала.
2. Определение оператора Лапласа.
3. Получите выражение для N в виде (1.7).
4. Какие преобразования интегралов позволяют привести их к вещественному виду.
5. Выражение потенциала цилиндра в точках на оси симметрии лемнискаты. Постройте график.
6. Выражение потенциала цилиндра на границе лемнискаты. Постройте график.
7. Постройте кривые равного потенциала по формуле (1.36)

Список литературы

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.:Наука, 1968.
2. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. Москва: Мир, 2007.
3. Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПбГУ, 2008.
4. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
5. Кондратьев Б.П. Прямой метод нахождения внутренних потенциалов однородных двумерных гравитирующих тел // Тез. Всерос. астрон. конф. Москва, 2000.
6. Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г., Мухаметшина Э.Ш. Прямой метод нахождения потенциалов двумерных однородных тел // Вестник Удмуртского Университета. Серия Математика. 2003. С. 71.
7. Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва; Ижевск: Изд-во РХД, 2003.

Трубицына Наталья Геннадьевна

Прямой метод нахождения потенциала двумерного тела

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать Формат

Печать офсетная. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.

Тираж 50 экз. Заказ №

Издательство «Удмуртский университет»

426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 2