



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 530.182

MSC 2010: 90B10, 34D06, 35B36

**Переход «когерентность – некогерентность»  
с образованием химерных состояний  
в одномерном ансамбле**

**Н. И. Семенова, В. С. Анищенко**

Рассматривается динамика кольца нелокально связанных логистических отображений при вариации коэффициента связи. Вводится функция связи, характеризующая влияние нелокального взаимодействия соседних осцилляторов, и исследуется ее динамика наряду с динамикой ансамбля в целом. Анализируются условия перехода от режима полной хаотической синхронизации к частичной и дается теоретическая оценка для бифуркационных значений параметра  $\sigma$ , отвечающих указанному переходу. Рассматриваются условия рождения фазовых и амплитудных химерных состояний.

Ключевые слова: химерные состояния, нелокальная связь, хаотическая синхронизация, рассинхронизация, одномерный ансамбль

---

Получено 27 апреля 2016 года

После доработки 25 июня 2016 года

---

Работа поддержана грантом РФФ №16-12-10175 (разделы 3, 5) и частично грантом РФФИ №14-52-12002 совместно с Немецким научно-исследовательским сообществом (DFG) в рамках SFB 910 (разделы 4, 6).

---

Семенова Надежда Игоревна

[semenovani@info.sgu.ru](mailto:semenovani@info.sgu.ru)

Анищенко Вадим Семенович

[wadim@info.sgu.ru](mailto:wadim@info.sgu.ru)

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

## 1. Введение

Исследование поведения ансамблей осцилляторов является одной из важных задач современной нелинейной динамики. В то время как изолированные нелинейные системы достаточно хорошо изучены, намного меньше известно о динамике связанных систем, где одну из ключевых ролей играет тип взаимодействия. Интенсивно исследовались такие топологии сетей, как связь «каждый с каждым» в сети из фазовых осцилляторов (моделей Курамото) или хаотических отображений. В таких системах найдено множество различных режимов. Противоположный тип топологии сети — «локальная связь» в сетях из дифференциальных систем или дискретных отображений. Подобные системы на данный момент также хорошо изучены. Они могут демонстрировать разнообразную динамику от рождения солитонов до установления режима пространственно-временного хаоса [1–9].

Случай сетей с нелокальной связью не так хорошо изучен и в последние годы представляет собой одно из актуальных направлений исследований в нелинейной динамике [10–14]. Поводом для изучения таких сетей стало открытие так называемых химерных состояний: одновременное сосуществование областей пространственной когерентности и некогерентности в системе [11, 15]. И хотя изначально этот эффект наблюдался в цепочке связанных фазовых осцилляторов, на данный момент химерные состояния найдены в ансамблях, в которых в качестве парциальных элементов выступают дискретные отображения [16], непрерывные во времени хаотические осцилляторы [17], осцилляторы ван дер Поля [18, 19], модели популяционной динамики [20] и автономные булевы сети [21]. Химерные состояния играют важную роль в описании большого числа эффектов в реальных системах [22], химических реакциях [23, 24], лазерных решетках [25, 26] и др.

Целью данной статьи является анализ влияния нелокальной связи на динамику кольца из идентичных осцилляторов, представляющих собой логистические отображения в хаотическом режиме.

## 2. Исследуемая система

Исследуется кольцо из нелокально связанных логистических отображений с диссипативной связью, которое описывается следующим дискретным уравнением [16]:

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)], \quad (2.1)$$

где  $t$  обозначает дискретное время,  $i = 1, 2, \dots, N$  — число элементов в кольце,  $\sigma$  — коэффициент связи,  $P$  — число соседних элементов слева и справа, связанных с  $i$ -м элементом,  $f(x)$  есть логистическое отображение вида  $f(x) = ax(1-x)$ . Введем обозначение  $r = P/N$  для радиуса нелокальной связи.

В системе (2.1) первое слагаемое соответствует логистическому отображению  $i$ -го осциллятора ансамбля. Второе слагаемое характеризует влияние соседних осцилляторов. В работах [27, 28] проведено детальное исследование динамики ансамбля и функции связи, которая характеризуется вторым слагаемым в (2.1). Однако отметим, что второе слагаемое включает в себя как зависимость от соседних  $2P$  осцилляторов (нелокальная связь), так и зависимость от парциального  $i$ -го осциллятора ансамбля. Несложные преобразования

уравнения (2.1) позволяют записать его в ином виде:

$$x_i^{t+1} = (1 - \sigma)f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P; j \neq i}^{i+P} f(x_j^t). \quad (2.2)$$

Здесь второе слагаемое непосредственно описывает влияние только соседних  $2P$  осцилляторов, то есть теперь характеризует исключительно нелокальную связь. Первое слагаемое в (2.2) характеризует ансамбль осцилляторов без учета связи с соседними  $2P$  осцилляторами.

Из (2.2) следует, что основным бифуркационным параметром системы (2.1) является коэффициент связи  $\sigma$ , значения которого управляют динамикой первого и второго слагаемых в (2.2). Здесь и далее величина параметра составляет  $a = 3.8$ , что отвечает режиму развитого хаоса в парциальной подсистеме в отсутствие связи. Коэффициент связи  $\sigma$ , как видно из (2.2), уменьшает эффективное значение параметра логистического отображения  $f(x_i^t)$ , так как параметр нелинейности меняется:  $a(1 - \sigma)$ . Второе слагаемое отражает влияние нелокальной связи  $2P$  соседних осцилляторов, и роль коэффициента связи  $\sigma$  также меняет величину параметра  $a$ , который принимает значение  $\sigma \cdot a$ . Можно выделить два предельных значения  $\sigma$ . При  $\sigma \rightarrow 1$  динамика системы описывается вторым слагаемым в (2.2) и будет характеризоваться режимом полной хаотической синхронизации. При  $\sigma \rightarrow 0$  мы имеем систему слабосвязанных хаотических осцилляторов. При неодинаковых начальных условиях система будет представлять собой ансамбль полностью асинхронных хаотических осцилляторов во времени и в пространстве. В случае  $0 < \sigma < 1$  динамика (2.1) определяется каждым из двух слагаемых в (2.2) и, как показали исследования, здесь будут реализовываться режимы фазовых и амплитудных химер [27]. Таким образом, в системе (2.1) при изменении параметра связи  $0 \leq \sigma \leq 1$  имеет место глобальный переход «когерентность – некогерентность», который (как будет показано) для значений  $0.2 < \sigma < 0.4$  характеризуется рождением химерных состояний в качестве промежуточных.

Обозначим в (2.2) второе слагаемое:  $\Phi_i = \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} f(x_j^t), j \neq i$ . Величина  $\Phi_i$  определяет влияние  $2P$  соседних осцилляторов на  $i$ -й элемент. Первое слагаемое можно рассматривать как исходное логистическое отображение, умноженное на  $(1 - \sigma)$ , или как логистическое отображение  $f^*(x_i^t) = b \cdot x_i^t(1 - x_i^t)$  с параметром  $b = a(1 - \sigma)$ . В этом случае уравнение (2.2) можно переписать как

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (1 - \sigma)f(x_i^t) + \Phi_i, \quad \text{или} \\ x_i^{t+1} &= f^*(x_i^t) + \Phi_i \end{aligned} \quad (2.3)$$

Целью настоящей работы является анализ динамики системы (2.2) при вариации коэффициента связи  $\sigma$  и выявление особенностей и роли первого и второго слагаемых в процессе формирования химерных структур.

### 3. Результаты исследований

#### 3.1. Эволюция пространственно-временных режимов в системе (2.3) при вариации коэффициента связи $\sigma$

Рассмотрим динамику кольца (2.1), (2.2) при следующих значениях параметров:  $N = 1000$ ,  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$  (хаотический режим парциальной системы). Отметим важное обстоятельство. В силу полной симметрии системы (2.1) при задании одинаковых начальных

условий  $x_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) реализуется режим полной хаотической синхронизации всех элементов ансамбля. В связи с этим мы задавали начальные условия случайно распределенными в интервале  $0.1 \leq x_i^0 \leq 0.9$ . Исследования показали, что в строгом смысле результаты оказываются зависящими от начальных условий, поэтому целью работы явилось нахождение характерных режимов кольца, которые качественно сохраняются при вариации начальных данных.

Известны результаты исследования динамики системы (2.1), которые представлены на бифуркационной диаграмме (рис. 1) [17]. Область  $D$  при достаточно больших значениях  $\sigma$  и  $r$  характеризует полную пространственно-временную синхронизацию всех элементов и строго соответствует режиму когерентности  $|x_i^t - x_j^t| = 0$  для  $i, j = 1, 2, \dots, N$  при любом  $t$ . В области  $C$  (как и в областях  $A$  и  $B$ ) имеют место регулярные периодические колебания с периодом  $2^k$  ( $k = 1, 2$  и  $3$ ), что также характеризует полную когерентность. В области  $E$  ( $\sigma < 0.2$ ) имеет место режим несинхронных хаотических колебаний. В областях, показанных белым цветом, реализуются режимы частичной когерентности и переходы «когерентность – некогерентность», связанные с образованием химерных состояний.

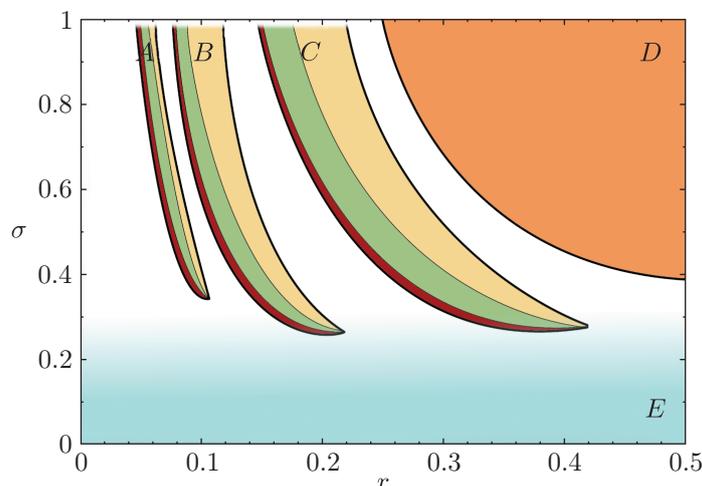


Рис. 1. Области когерентности для системы (2.1) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  с волновыми числами  $k = 1, 2, 3$  (области  $A, B$  и  $C$  соответственно).  $D$  — область полной хаотической синхронизации,  $E$  — область полной некогерентности. Параметры:  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$ . В областях  $A, B$  и  $C$  светло-серым (желтым<sup>a</sup>) отмечена область с динамикой во времени периода 2, серым (зеленым) — периода 4, темно-серым (красным) — периода 8.

### 3.2. Разрушение режима полной хаотической синхронизации

Проведем численный анализ характеристик колебаний в ансамбле и функции связи  $\Phi_i$  при изменении коэффициента связи  $\sigma$ , зафиксировав  $r = 0.32$  (как и в работах [17, 27]). В отличие от работ по химерам [16, 17], в которых анализировалось мгновенное распределение амплитуд элементов ансамбля  $x_i^t$  при некотором  $t = \text{const}$  (так называемый мгновенный профиль), используем метод, предложенный в [27]. Будем для каждого парциального элемента  $1 \leq i \leq 1000$  выводить на график последние 50 итераций  $x_i^t$  и  $\Phi_i^t$  ( $9950 \leq t \leq 10000$ ).

<sup>a</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1603001/>

Этот метод позволяет диагностировать тип колебаний (периодический или хаотический), определять период колебаний и режимы синхронизации (десинхронизации) элементов ансамбля. Будем называть данную графическую иллюстрацию «пространственно-временным профилем». При необходимости будем изображать и мгновенные профили при фиксированном номере итерации  $t = \text{const}$ .

Для значений  $\sigma \in D$  (при  $r = 0.32$  это соответствует значениям  $0.6 < \sigma \leq 1.0$ ) в системе реализуется режим полной хаотической синхронизации колебаний в пространстве и времени (рис. 2а). Все элементы ансамбля в любой момент времени имеют одинаковые значения  $x_i$  (рис. 2а, график слева). Во времени значения  $x_i^t$  меняются хаотически, но синхронно (рис. 2а, график справа). При выходе из области  $D$  с пересечением линии бифуркации прорыва рождается новый интересный режим (рис. 2б). Мгновенный профиль (рис. 2б, слева) становится отличным от прямой линии, но представляет собой гладкую медленно меняющуюся функцию. Соседние элементы ансамбля имеют близкие амплитуды:

$$|x_i^t - x_{i+1}^t| < \delta, \quad \delta \ll 1. \quad (3.1)$$

Авторы [16] считают выполнение неравенства (3.1) условием когерентности колебаний. В строгом смысле это не верно, так как расчеты свидетельствуют об отсутствии равенства единице коэффициента пространственной корреляции колебаний элементов ансамбля в указанном режиме. Во времени пространственный профиль совершает нерегулярные колебания (рис. 2б, справа), оставаясь в любой момент времени гладкой медленно меняющейся функцией. Можно говорить о режиме частичной хаотической синхронизации, когда соседние осцилляторы практически синхронны, но степень синхронизации разрушается с удалением их друг от друга. Нам представляется, что подобный режим наблюдается впервые.

При  $\sigma = 0.502$  ансамбль резко переходит в режим устойчивых периодических колебаний периода 4 (рис. 2с), который при  $\sigma = 0.457$  сменяется режимом колебаний периода 2 (рис. 2д). При этом крутизна фронта мгновенного профиля (рис. 2д, слева) и пространственно-временного профиля (рис. 2д, справа) резко возрастает. Как отмечено во многих работах, этот эффект является одной из главных причин рождения фазовых химер [16, 17].

Расчеты пространственно-временных профилей функции связи  $\Phi_i^t$  качественно повторяют результаты, представленные на рисунке 2 (колонка справа) и здесь не приведены.

### 3.3. Рождение химерных состояний

При дальнейшем уменьшении значения  $\sigma$  мгновенные профили характеризуются появлением разрывов. Пространственная производная в точках разрывов стремится к бесконечности (рис. 3а). При этом функция связи остается периодической с периодом 2. Разрыв профиля связан с резким изменением фазы колебаний: колебания элементов ансамбля на верхних и нижних ветвях профилей (рис. 3а, слева и в центре) являются периодическими с периодом 2, но сдвинуты по фазе на полпериода. При этом функция связи остается также периодической с периодом 2. В точках пересечения графиков  $\Phi_i^t$  (рис. 3а, справа) функции связи также характеризуются сменой фазы на полпериода.

При дальнейшем уменьшении значения  $\sigma$  в окрестностях разрыва профилей рождается режим фазовой химеры [17, 27], который характеризуется нерегулярным чередованием во времени колебаний периода 4, отличающихся сдвигом фазы на полпериода. При этом все элементы ансамбля вне области фазовых химер колеблются регулярно с периодом 4. Функция связи  $\Phi_i^t$  также характеризуется регулярными колебаниями периода 4. Результаты расчетов приведены на рисунке 3б.

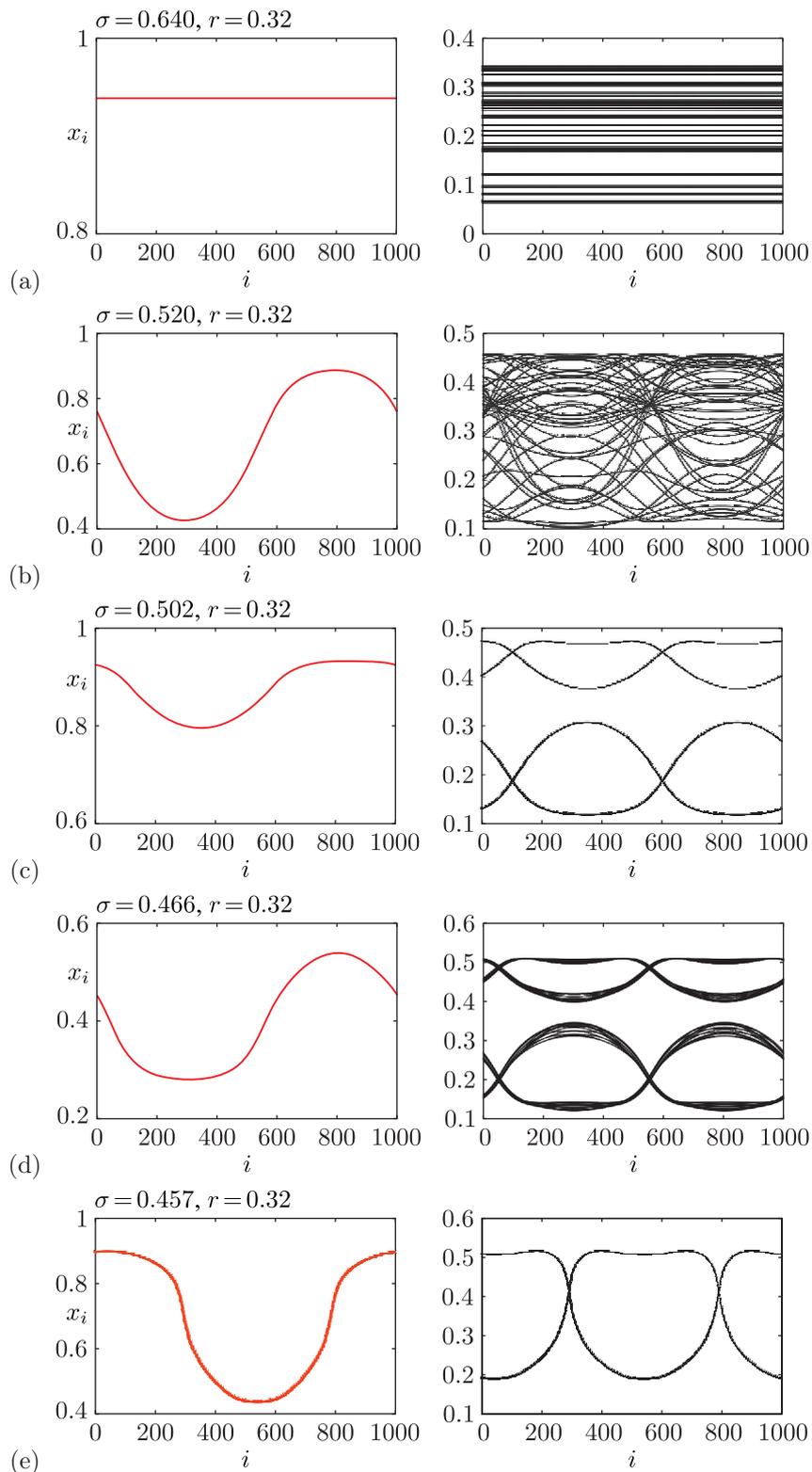


Рис. 2. Эволюция мгновенных и пространственно-временных профилей ансамбля при изменении коэффициента связи  $\sigma$ : (a) режим полной хаотической синхронизации, (b) режим частичной синхронизации, (c) рождение регулярных колебаний периода 4, (d) переход к циклу периода 2, (e) регулярные колебания периода 2.

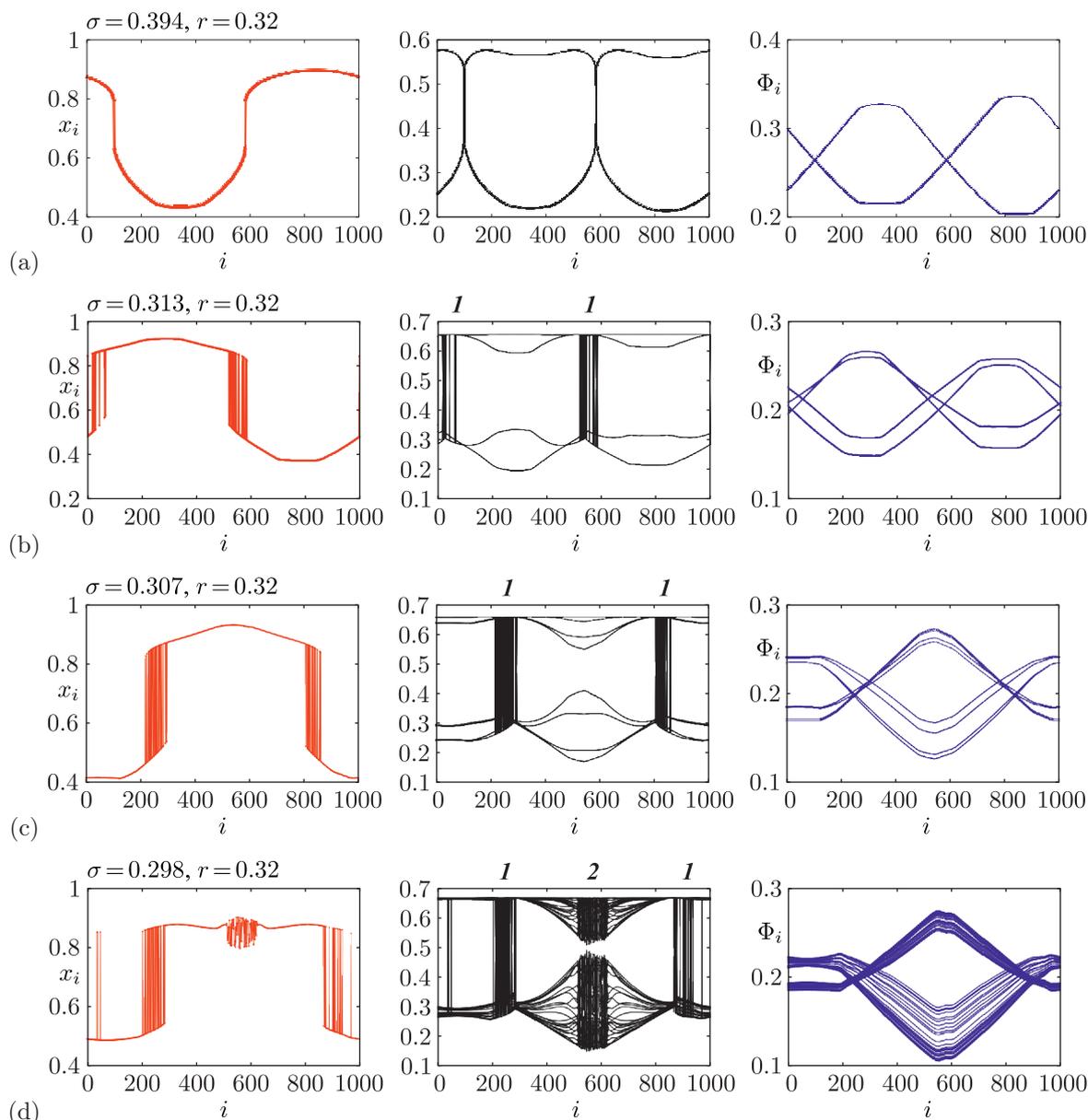


Рис. 3. Эволюция мгновенных профилей (колонка слева), пространственно-временных профилей (в центре) и пространственно-временных профилей функции связи  $\Phi_i^t$  (колонка справа) при уменьшении значения коэффициента связи  $\sigma$  в ансамбле (2.2): 1 — режим фазовой химеры, 2 — режим амплитудной химеры.

С уменьшением коэффициента связи до значения  $\sigma \approx 0.298$  наблюдается рождение амплитудной химеры, которая сосуществует с фазовой (рис. 3d) [27]. Кластер элементов с некогерентной динамикой возникает в области  $500 \leq i \leq 600$  и характеризуется режимом несинхронных хаотических колебаний.

Возникновение амплитудной химеры сопровождается резкой хаотизацией колебаний соответствующего кластера элементов ансамбля (рис. 3d, в центральной колонке) и функции связи (рис. 3d, справа) [27]. Отметим, что результаты, представленные на рисунке 3b и 3c могут существенно зависеть от начальных условий. Однако влияние начальных условий

сводится к тому, что указанные режимы воспроизводятся при малом изменении параметра  $\sigma$ .

Как уже отмечалось, при  $\sigma \rightarrow 0$  ансамбль переходит в режим несинхронного пространственно-временного хаоса. Этот переход, как показали расчеты, происходит следующим образом. В области значений  $0.22 \lesssim \sigma \lesssim 0.28$  все элементы находятся в режиме регулярных колебаний периода 2, но при этом пространственная корреляция отсутствует. Система характеризуется пространственным хаосом, но регулярными колебаниями парциальных осцилляторов во времени. В области  $0.154 \leq \sigma \leq 0.22$  дупериодические колебания сменяются колебаниями периода 4. В результате каскада удвоения периода при  $\sigma \leq 0.1$  все элементы переходят в режим хаотических колебаний и являются некоррелированными в пространстве. Устанавливается режим пространственно-временного хаоса.

#### 4. Анализ влияния функции связи $\Phi_i^t$ в (3.1)

Все наблюдаемые в системе (2.1) режимы функционирования ансамбля можно классифицировать следующим образом: 1 — режим полной пространственно-временной хаотической синхронизации, 2 — режим частичной синхронизации, когда мгновенные профили удовлетворяют условию (3.1) и представляются гладкими функциями, 3 — режим некогерентности, когда (3.1) не выполняется, 4 — периодические во времени колебания, 5 — хаотические колебания во времени и пространстве. Построим фазопараметрическую диаграмму, которая иллюстрирует множество значений амплитуд колебаний  $i$ -го отображения  $x_i^t$  в зависимости от интенсивности связи  $\sigma$  (см. рис. 4).

Построение фазопараметрической диаграммы проводилось следующим образом: для каждого значения параметра  $\sigma$  выбирался некоторый  $i$ -й осциллятор, который соответствовал максимальному значению  $x_i$  пространственного профиля в момент времени  $t_0$ . Далее для каждого значения  $\sigma$  выводятся значения  $x_i^t$  в интервале времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + 50$ . Построение фазопараметрической диаграммы в зависимости от параметра  $\sigma$  аналогично построению дерева Фейгенбаума в случае изолированного логистического отображения.

Диаграмма на рисунке 4 отражает все вышеуказанные режимы колебаний ансамбля и переходы между ними при изменении коэффициента связи. Как следует из уравнений системы (2.2), (2.3), динамика каждого осциллятора складывается из двух составляющих: собственная динамика логистического отображения и влияние соседей  $\Phi_i$ . При значении параметра  $a = 3.8$  одно изолированное логистическое отображение  $f(x) = a \cdot x(1-x)$  находится в хаотическом режиме, при этом  $x_{\max} \approx 0.95$ ,  $x_{\min} \approx 0.18$  — максимальное и минимальное значения переменной  $x$ . Слагаемое связи  $\Phi_i$ , по сути, является средним арифметическим  $2P$  логистических отображений в хаотическом режиме, умноженным на  $\sigma$ , то есть слагаемое связи должно вести себя как одно логистическое отображение с амплитудой, умноженной на  $\sigma$ .

В области полной и частичной хаотической синхронизации ( $\sigma > 0$ ) динамика кольца определяется главным образом слагаемым связи. Об этом свидетельствует график на рисунке 5. Он представляет собой то же, что и диаграмма на рисунке 4, но по вертикальной оси отложены значения функции связи  $\Phi_i^t$ . Как видно из графика, в области хаотической синхронизации разброс значений слагаемого связи находится в интервале от  $\sigma x_{\min}$  до  $\sigma x_{\max}$ , где  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  — это максимальное и минимальное значения, которые может принимать переменная  $x$  в изолированном логистическом отображении при значении параметра  $a = 3.8$ .

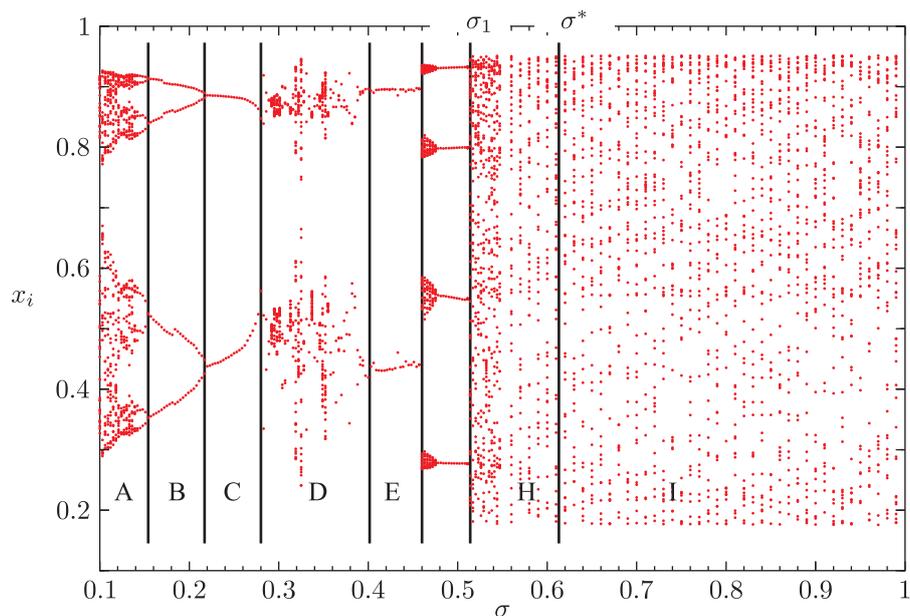


Рис. 4. Зависимость множества амплитуд  $x_i^t$  для  $9950 \leq t \leq 10000$  от величины коэффициента связи  $\sigma$  для  $i$ -го осциллятора. Обозначение областей характерных режимов:  $A$  — пространственно-временной хаос (полная некогерентность);  $B, C$  — пространственная некогерентность, но периодичность во времени;  $D$  — область реализации химерных состояний;  $E, F, G$  — области когерентных профилей с периодичностью колебаний во времени;  $H$  — область частичной хаотической синхронизации;  $I$  — область полной хаотической синхронизации.  $\sigma^*$  — точка бифуркации прорыва, когда режим полной хаотической синхронизации с уменьшением  $\sigma$  теряет устойчивость.

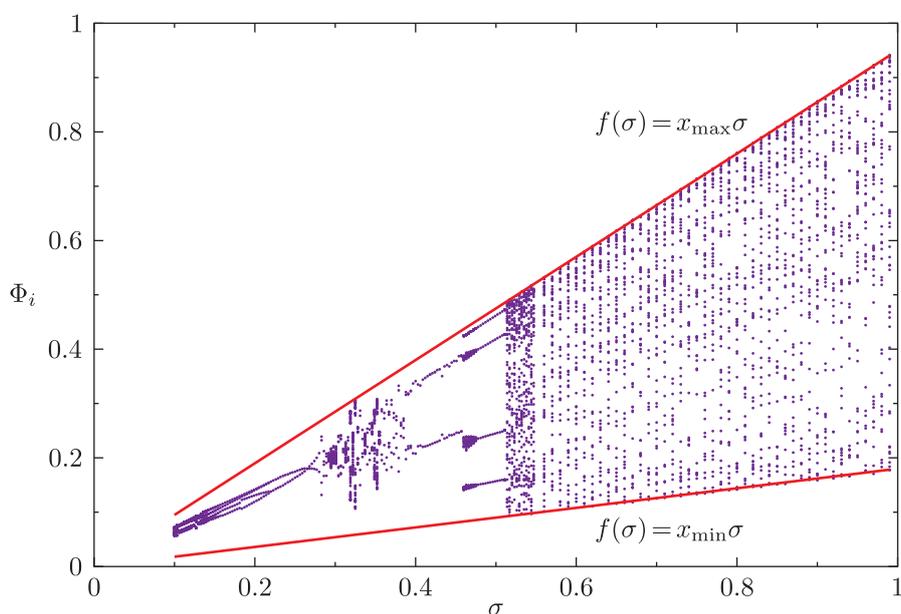


Рис. 5. Зависимость значений функции связи  $\Phi_i^t$  для 50 итераций ( $9950 \leq t \leq 10000$ ). Верхняя и нижняя границы значений  $\Phi_i(\sigma)$  аппроксимированы линейной функцией  $f(\sigma) = x \cdot \sigma$  ( $x_{\max} = 0.95$ ,  $x_{\min} = 0.18$ ).

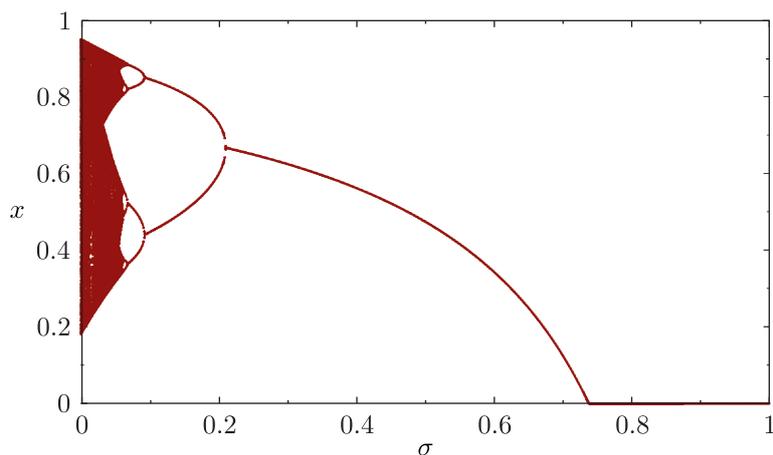


Рис. 6. Зависимость значений  $x$ , принимаемых первым слагаемым в (2.2)  $a(1 - \sigma)x(1 - x)$ , от параметра связи  $\sigma$  для  $a = 3.8$ .

Другой интересной особенностью системы является первое слагаемое  $(1 - \sigma)f(x_i^t) = (1 - \sigma)ax_i^t(1 - x_i^t)$ , которое можно рассматривать как логистическое отображение с новым параметром  $b = a(1 - \sigma)$ . Если построить зависимость принимаемых значений отображения  $f^*(x) = bx(1 - x)$  от  $\sigma$  (рис. 6), то можно сделать вывод, что всем динамическим режимам в области  $0.2 \leq \sigma \leq 0.73$  со стороны первого слагаемого соответствует неподвижная точка периода один со значением  $x^* = \frac{b-1}{b}$ ,  $a = 3.8$  ( $x^* = (1 - \frac{1}{a - \sigma a})$ ).

В областях полной и частичной хаотической синхронизации динамика определяется исключительно слагаемым связи. При этом значения, которые соответствуют первому слагаемому уравнения (2.3)  $bx_i(1 - x_i)$ , много меньше, чем максимальные значения, которые принимает  $\Phi_i$ . В области некогерентности ситуация обратная: первое слагаемое имеет большее значение, чем второе. Между областями хаотической синхронизации и пространственной некогерентности наблюдается появление разрывов пространственного распределения  $x_i(i)$  и химерные состояния обоих типов (фазовые и амплитудные).

## 5. Оценка бифуркационных значений параметра связи при переходах к частичной и полной хаотической синхронизации ансамбля

В области хаотической синхронизации динамика зависит от слагаемого связи  $\Phi_i$ , которое принимает значения от  $\sigma x_{\min}$  до  $\sigma x_{\max}$ . Собственная динамика определяется при помощи отображения  $bx(1 - x)$ , в котором значение  $b$  соответствует неподвижной точке с координатой  $x^* = (b - 1)/b$ . Здесь можно выделить два предельных случая: 1 — величина первого слагаемого уравнения (2.3)  $bx_i(1 - x_i)$  меньше, чем максимальное значение, которое принимает  $\Phi_i$ ; 2 — величина первого слагаемого уравнения (2.3)  $bx_i(1 - x_i)$  меньше, чем среднее значение, которое принимает  $\Phi_i$ . Как видно из графиков (рис. 5 и рис. 6), в первом случае мы будем сравнивать  $x^*$  с  $\sigma x_{\max}$ , а во втором случае мы будем сравнивать  $x^*$  с  $\sigma \bar{x}$ , где  $\bar{x} = (x_{\max} + x_{\min})/2$ . Предположим, что при помощи неравенств  $x^* < \sigma x_{\max}$  и  $x^* < \sigma \bar{x}$  можно найти критические значения параметра  $\sigma$ , при которых осуществляются переходы

к частичной хаотической синхронизации (из области  $G$  в область  $H$ ) и полной хаотической синхронизации (из области  $H$  в область  $I$ ).

Рассмотрим первое неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{b} < x_{\max} \cdot \sigma &\Leftrightarrow b-1 < x_{\max} \cdot \sigma b, \quad 0 < \sigma < 1, \\ a - a\sigma - 1 < a\sigma x_{\max} - ax_{\max}\sigma^2 &\Rightarrow \\ ax_{\max}\sigma^2 - (ax_{\max} + a)x_{\max} + (a-1) < 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Из (5.1) следует

$$\frac{a(x_{\max} + 1) - \sqrt{a^2(x_{\max} + 1)^2 - 4(a-1)ax_{\max}}}{2ax_{\max}} < \sigma < 1. \quad (5.2)$$

Отсюда получаем, что при  $a = 3.8$  области частичной хаотической синхронизации соответствует  $\sigma > 0.499$ . Обозначим это значение как  $\sigma_1$ .

Рассмотрим второе неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{b} < \bar{x} \cdot \sigma &\Leftrightarrow b-1 < \bar{x} \cdot \sigma b, \quad 0 < \sigma < 1, \\ a - a\sigma - 1 < a\sigma\bar{x} - a\bar{x}\sigma^2 &\Rightarrow \\ a\bar{x}\sigma^2 - (a\bar{x} + a)\bar{x} + (a-1) < 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из (5.3) следует

$$\frac{a(\bar{x} + 1) - \sqrt{a^2(\bar{x} + 1)^2 - 4(a-1)a\bar{x}}}{2a\bar{x}} < \sigma < 1. \quad (5.4)$$

Отсюда получаем, что при  $a = 3.8$  области полной хаотической синхронизации соответствует  $\sigma > 0.601$ , то есть получаем оценку для  $\sigma^* \approx 0.601$ .

При  $a = 3.7$  области хаотической синхронизации соответствует  $\sigma > 0.498$ , так как при этом  $x_{\max} \approx 0.925$ . При  $a = 3.9$  областям полной и частичной хаотической синхронизации соответствует  $\sigma > 0.5$ , так как при этом  $x_{\max} \approx 0.975$ .

Результаты теоретической оценки (5.2), (5.4) подтверждаются данными расчета. Так, для  $a = 3.8$  переход в режим частичной хаотической синхронизации имеет место при  $\sigma \geq 0.513$ , теория дает значение  $\sigma_1 > 0.499$  (см. рис. 4), а переход к полной хаотической синхронизации происходит при  $\sigma > 0.605$  (аналитическая оценка дает  $\sigma > \sigma^* = 0.601$ ).

Динамика ансамбля исследовалась нами при значениях  $a$ , отличных от 3.8. Рассматривались значения  $a = 0.53$  (четырёхтактный цикл в парциальном осцилляторе) и  $a = 0.33$  (двухтактный цикл). Расчеты показали, что последовательность режимов, показанная на рисунке 4, может несколько отличаться. Однако вариацией распределения начальных условий по ансамблю удастся реализовать типичные структуры, найденные для значения  $a = 3.8$ . В качестве примера на рисунке 7 приведен режим существования фазовой химеры для значения  $a = 3.53$ , который реализуется при  $\sigma = 0.075$ . Данные рисунка 7 качественно соответствуют представленным на рисунке 3б.

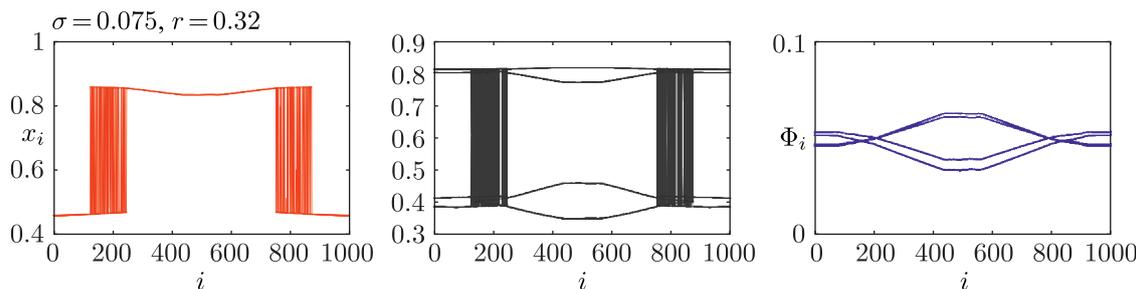


Рис. 7. Фазовая химера в (2.2) для  $a = 3.53$ ,  $\sigma = 0.075$ ,  $r = 0.32$  и  $N = 1000$ .

## 6. Качественное моделирование динамики ансамбля (2.2) с помощью двумерного отображения

Как уже отмечалось, выражение (2.1) можно разделить на две части: логистическое отображение  $f^*(x_i^t)$  с новым параметром  $b = a(1 - \sigma)$  и связь  $\Phi_i$ , которая по своей сути выполняет роль еще одного логистического отображения, но с параметром  $a$  (2.2), (2.3). Оба слагаемых зависят от параметра  $\sigma$ , причем при увеличении значения  $\sigma$  первое слагаемое уменьшается, а второе — увеличивается.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим два связанных отображения с параметрами  $a$  и  $b = a(1 - \lambda)$ . Будем обозначать их как  $z_{n+1} = f(a, z_n)$  и  $y_{n+1} = f(b, y_n)$ . Введем между ними диффузионную связь с коэффициентами связи  $\gamma_1 = \lambda C_1$  и  $\gamma_2 = (1 - \lambda)C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые константы. Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= f(b, y_n) + \gamma_1[f(a, z_n) - f(b, y_n)], \\ z_{n+1} &= f(a, z_n) + \gamma_2[f(b, y_n) - f(a, z_n)]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Уравнения (6.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= f(b, y_n) + \lambda C_1[f(a, z_n) - f(b, y_n)], \\ z_{n+1} &= f(a, z_n) + (1 - \lambda)C_1[f(b, y_n) - f(a, z_n)]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Рассмотрим, как ведет себя система (6.2) при изменении управляющего параметра  $\lambda$ , который по смыслу аналогичен параметру  $\sigma$  в системе (2.2). Фазопараметрическая диаграмма системы (6.2) приведена на рисунке 8.

Из сравнения графиков на рисунках 8 и 4 видно, что динамику системы (2.2) качественно можно рассматривать как динамику двух связанных отображений (6.2). Естественно, что в системе двух связанных отображений химерных состояний не может существовать.

## 7. Заключение

В работе приведены данные численных экспериментов по исследованию временной и пространственно-временной динамики кольца нелокально связанных логистических отображений с диффузионной связью. Основные полученные результаты следующие:

1. Переход от режима полной хаотической синхронизации ансамбля с уменьшением коэффициента связи  $\sigma < 1$  происходит в результате бифуркации прорыва потери устойчивости синхронного режима при  $\sigma = \sigma^*$  (что было установлено в [17]). При  $\sigma < \sigma^*$

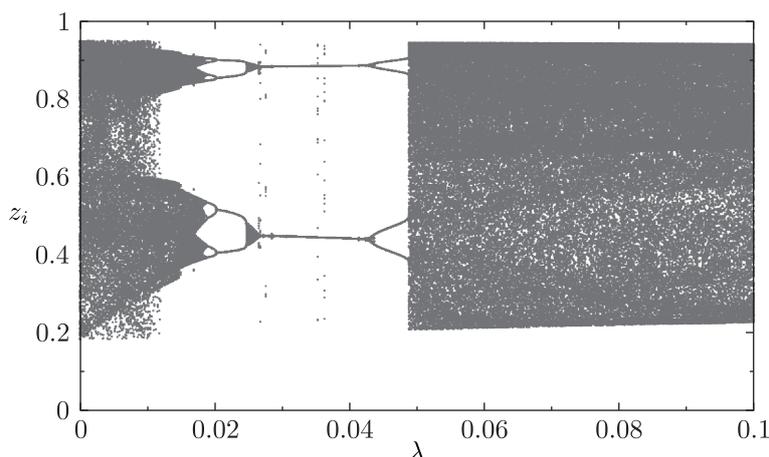


Рис. 8. Отображение 100 итераций второго уравнения системы (6.2) в зависимости от управляющего параметра  $\lambda$ . Параметры:  $C_1 = 2.5$ ,  $C_2 = 0.11$ .

рождается новый режим, названный нами режимом частичной синхронизации, при котором соседние осцилляторы практически синхронны, но степень взаимной синхронизации ухудшается с увеличением расстояния между осцилляторами в пространстве. Этот режим (область  $H$  на рисунке 4) имеет место в области  $\sigma_1 < \sigma < \sigma^*$ . Значения для  $\sigma_1$  и  $\sigma^*$  установлены аналитически в виде неравенств (5.2), (5.4).

2. Проведен анализ переходов «когерентность – некогерентность» при уменьшении  $\sigma < \sigma_1$  (области  $A, B, C, D, E, F, G$  на рисунке 4). Подтвержден факт реализации как фазовых, так и амплитудных химерных состояний. При этом исследованы особенности эволюции режимов колебаний ансамбля и проведено их сопоставление с динамикой функции связи  $\Phi_i$ .
3. Предложена простая двумерная дискретная модель для качественного описания динамики ансамбля нелокально связанных логистических отображений.

## Список литературы

- [1] Jensen M. H., Bak P. Spatial chaos // Phys. Scripta, 1985, vol. 1985, T9, 64 pp.
- [2] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. S. Universality and scaling of period-doubling bifurcations in a dissipative distributed medium // Phys. D, 1986, vol. 19, no. 3, pp. 384–396.
- [3] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Пространственные структуры в диссипативных средах у порога возникновения хаоса // Изв. вузов. Радиофизика, 1991, т. 34, № 2, с. 142–146.
- [4] Кузнецов А. П., Кузнецов С. П. Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика, 1991, т. 34, № 10–12, с. 1079–1115.
- [5] Kaneko K., Tsuda I. Complex systems: Chaos and beyond: A constructive approach with applications in life sciences. Berlin: Springer, 2001. 274 pp.
- [6] Fernandez B., Luna B., Ugalde E. Spatial chaos of traveling waves has a given velocity // Phys. Rev. E, 2009, vol. 80, no. 2, 025203(R), 4 pp.
- [7] Chow Sh.-N., Mallet-Paret J. Pattern formation and spatial chaos in lattice dynamical systems: 1 // IEEE Trans. Circuits Systems 1 Fund. Theory Appl., 1995, vol. 42, no. 10, pp. 746–751.

- [8] Afraimovich V. Some topological properties of lattice dynamical systems // Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems / J.-R. Chazottes, B. Fernandez (Eds.). (Lecture Notes in Phys., vol. 671.) Berlin: Springer, 2005. P. 153–179.
- [9] Nizhnik L. P., Nizhnik I. L., Hasler M. Stable stationary solutions in reaction-diffusion systems consisting of a 1-D array of bistable cells // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2002, vol. 12, no. 2, pp. 261–279.
- [10] Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // Nonlinearity, 2015, vol. 28, no. 3, R67–R87.
- [11] Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonl. Phen. Compl. Sys., 2002, vol. 5, no. 4, pp. 380–385.
- [12] Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett., 2004, vol. 93, no. 17, 174102, 4 pp.
- [13] Omel'chenko O., Maistrenko Y., Tass P. A. Chimera states: The natural link between coherence and incoherence // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 100, no. 4, 044105, 4 pp.
- [14] Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? // Europhys. Lett., 2015, vol. 112, no. 4, 40002, 6 pp.
- [15] Omel'chenko O., Wolfrum M., Maistrenko Yu. Chimera states as chaotic spatiotemporal patterns // Phys. Rev. E, 2010, vol. 81, no. 6, 065201(R), 4 pp.
- [16] Omelchenko I., Maistrenko Yu., Hövel Ph., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // Phys. Rev. Lett., 2011, vol. 106, no. 23, 234102, 4 pp.
- [17] Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel Ph., Maistrenko Yu., Schöll E. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems // Phys. Rev. E, 2012, vol. 85, no. 2, 026212, 9 pp.
- [18] Omelchenko I., Provata A., Hizanidis J., Schöll E., Hövel Ph. Robustness of chimera states for coupled FitzHugh–Nagumo oscillators // Phys. Rev. E, 2015, vol. 91, no. 2, 022917, 13 pp.
- [19] Bastidas V. M., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E., Brandes T. Quantum signatures of chimera states // Phys. Rev. E, 2015, vol. 92, no. 6, 062924, 5 pp.
- [20] Hizanidis J., Panagakou E., Omelchenko I., Schöll E., Hövel Ph., Provata A. Chimera states in population dynamics: Networks with fragmented and hierarchical connectivities // Phys. Rev. E, 2015, vol. 92, no. 1, 012915, 11 pp.
- [21] Rosin D. P., Rontani D., Gauthier D. J. Synchronization of coupled Boolean phase oscillators // Phys. Rev. E, 2014, vol. 89, no. 4, 042907, 7 pp.
- [22] Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states on a flat torus // Phys. Rev. Lett., 2013, vol. 110, no. 9, 094102, 5 pp.
- [23] Vanag V. K., Epstein I. R. Pattern formation in a tunable medium: The Belousov–Zhabotinsky reaction in an aerosol OT microemulsion // Phys. Rev. Lett., 2001, vol. 87, no. 22, 228301, 4 pp.
- [24] Tinsley M. R., Nkomo S., Showalter K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators // Nature Phys., 2012, vol. 8, no. 9, pp. 662–665.
- [25] Rogister F., Roy R. Localized excitations in arrays of synchronized laser oscillators // Phys. Rev. Lett., 2007, vol. 98, no. 10, 104101, 4 pp.
- [26] Böhm F., Zakharova A., Schöll E., Lüdge K. Amplitude-phase coupling drives chimera states in globally coupled laser networks // Phys. Rev. E, 2015, vol. 91, no. 4, 040901, 6 pp.
- [27] Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Schöll E., Анищенко В. С. Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // Письма в ЖТФ, 2016, т. 42, № 14, с. 103–110.
- [28] Bogomolov S., Slepnev A., Strelkova G., Schöll E., Anishchenko V. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2017, vol. 43, pp. 25–36.

## Coherence-incoherence transition with appearance of chimera states in a one-dimensional ensemble

Nadezhda I. Semenova<sup>1</sup>, Vadim S. Anishchenko<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>National Research Saratov State University

Astrakhanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

<sup>1</sup>semenovani@info.sgu.ru, <sup>2</sup>wadim@info.sgu.ru

We consider the dynamics of a ring of nonlocally coupled logistic maps when varying the coupling coefficient. We introduce the coupling function, which characterizes the impact of nonlocal neighbors and study its dynamics together with the dynamics of the whole ensemble. Conditions for the transition from complete chaotic synchronization to partial one are analyzed and the corresponding theoretical estimation of the bifurcation parameter  $\sigma$  is given. Conditions for the appearance of phase and amplitude chimera states are also studied.

MSC 2010: 90B10, 34D06, 35B36

Keywords: chimera states, nonlocal coupling, chaotic synchronization, desynchronization, one-dimensional ensemble

Received April 27, 2016, accepted June 25, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 295–309 (Russian)