



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 534.015.1; 534-6
MSC 2010: 70K30, 70K50, 70K75

**Осцилляторная цепь с изгибной жесткостью
на упругой подложке в условиях,
близких к акустическому вакууму**

И. П. Королева (Кикоть), Л. И. Маневич

Представлены результаты аналитического и численного исследования нестационарной плоской динамики струны с равномерно распределенными дискретными массами при отсутствии предварительного натяжения и с учетом относительно малой изгибной жесткости. Каждая масса испытывает также действие упругой подложки с нелинеаризуемой в условиях плоского движения характеристикой, которая тоже представляет собой струну без предварительного натяжения. Наиболее важный предельный случай, соответствующий низкоэнергетическим поперечным возбуждениям, рассматривается с учетом геометрической нелинейности. Поскольку такие возбуждения описываются приближенными уравнениями, в которых наиболее существенный вклад вносят кубические упругие силы, колебания происходят фактически в условиях, близких к акустическому вакууму (термин «акустический вакуум» означает, что рассматриваемая система не имеет не зависящих от амплитуд колебаний динамических характеристик, таких как собственные частоты и скорость звука). Получено адекватное аналитическое описание резонансных существенно нестационарных процессов в рассматриваемой системе, соответствующих интенсивному энергообмену между ее частями (кластерами) в области низких частот. Сформулированы условия локализации энергии на одном из кластеров. Полученные аналитические результаты подтверждены данными компьютерного моделирования. Отмечено, что рассматриваемая система может использоваться как энергетическая ловушка повышенной эффективности.

Ключевые слова: нелинейная динамика, нелинейная нормальная мода, предельная фазовая траектория, энергообмен, локализация

Получено 18 мая 2016 года
После доработки 25 июня 2016 года

Королева (Кикоть) Ирина Павловна
irakikotx@gmail.com
Маневич Леонид Исакович
manevitchleonid3@gmail.com
Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова Российской академии наук
119991, г. Москва, ул. Косыгина, д. 4

1. Введение

В последние годы явление интенсивного, почти полного, энергообмена между частями системы и нестационарной локализации энергии на одной из них привлекает все большее внимание в связи с созданием резонансных энергетических ловушек, применяемых с целью защиты от вибраций и ударов, сейсмозащиты, а также для пассивного накопления энергии [1, 2]. Возможность существования обоих режимов в одной и той же системе, но при различных значениях параметров, является отличительной чертой нелинейных систем. Современная методология их исследования связана с использованием концепции нелинейных нормальных мод (ННМ), однако эта концепция становится неадекватной при анализе резонирующих ННМ, которые, в отличие от мод линейной системы, интенсивно взаимодействуют. В работе используется подход, основанный на концепции предельных фазовых траекторий (ПФТ), описывающих максимально интенсивный (при данных условиях) энергообмен между слабо взаимодействующими осцилляторами или кластерами осцилляторов (эффективными частицами). Эта концепция была разработана в ряде работ [3–5] и в настоящее время широко используется для исследования нестационарных резонансных процессов в классических и квантовых нелинейных системах [6–11]. Отметим, что важнейшая черта эффективной энергетической ловушки — ее принадлежность к классу систем, функционирующих в условиях акустического вакуума. В простейшем случае одномассовой ловушки это означает отсутствие собственной частоты, что обеспечивает возможность переноса энергии в широкой полосе частот. Увеличение числа масс в рассматриваемой осцилляторной цепи позволяет увеличить и число достижимых резонансных режимов, следствием чего должно стать повышение энергоемкости, а следовательно, и эффективности энергетической ловушки.

Осцилляторная цепь в условиях акустического вакуума, без упругой подложки, рассматривалась в работе [9]. Было показано, что в этом предельном случае ННМ, описываемые прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве, совпадают с модами линейной осцилляторной цепи. Однако, в отличие от последней, при наличии акустического вакуума резонировать могут не только ННМ с максимальными и близкими по величине волновыми числами. Был предложен критерий резонансного взаимодействия, позволивший охарактеризовать всю совокупность возможных резонансов, в которой доминирующими оказались ННМ с волновыми числами в верхней половине их спектра. В статье [10] на простейшем примере струны с двумя идентичными массами показано, что добавление нелинейной подложки позволяет расширить область резонансного взаимодействия. Этот вывод сохраняется и при замене нерастянутой струны балкой [11]. В настоящей статье впервые рассмотрена струна без предварительного натяжения с произвольным числом идентичных равномерно распределенных дискретных масс на кубической подложке при учете ее относительно малой (по сравнению с жесткостью на растяжение) изгибной жесткости, то есть функционирующая в условиях, близких к акустическому вакууму. Исследованы как стационарная, так и нестационарная динамика рассмотренной модели. Сделаны выводы о повышенной эффективности основанных на этой системе энергетических ловушек.

Отметим, что нестационарная динамика двух идентичных осцилляторов с кубической характеристикой и кубической же связью была рассмотрена с использованием концепции предельных фазовых траекторий в статье [12]. При этом полученные результаты качественно близки к приведенным в работе [10]. Однако их обобщение на случай конечной осцилляторной цепи с локальной кубической связью между соседними массами до настоящего времени получить не удалось. Обобщение на конечномерную модель, реализованное в насто-

ящей статье, оказалось возможным благодаря нелокальности межчастичного нелинейного взаимодействия.

2. Модель и уравнения движения

Рассмотрим нерастянутую предварительно струну с равномерно распределенными и равными по величине дискретными массами (см. рис. 1), испытывающими действие вращающихся сил, пропорциональных кубу смещения, и поперечных сил, линейно зависящих от изменений углов поворота между соседними сегментами с коэффициентом, характеризующим изгибную жесткость, которая, однако, предполагается существенно меньшей, чем жесткость на растяжение. Следуя принятой терминологии, можно рассматривать такую струну как гибкую балку. Тогда уравнения движения имеют вид

$$m \frac{d^2}{dt^2} U_j + T_j \cos \theta_j - T_{j-1} \cos \theta_{j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} V_j + cV_j^3 + T_j \sin \theta_j - T_{j+1} \sin \theta_{j+1} + D \frac{\partial \sum (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 / 2}{\partial V_j} = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

где U_j , V_j — соответственно, продольные и поперечные смещения j -й массы, θ_j — угол поворота j -го сегмента (соединяющего j -ое и $(j+1)$ -ое звено) относительно его положения в недеформированной струне, $\theta_j \approx \frac{V_{j+1} - V_j}{l}$.

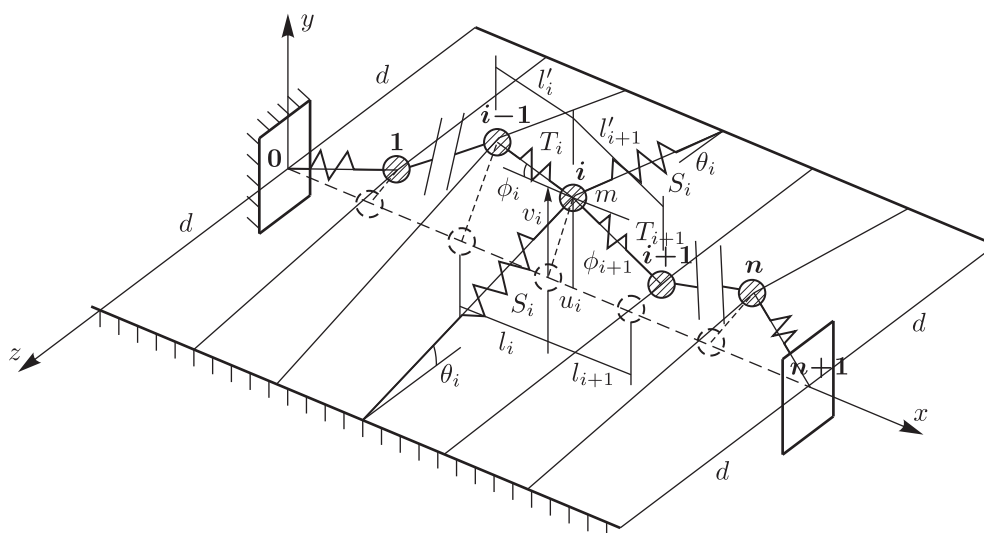


Рис. 1. Осцилляционная цепь на упругой подложке. Для наглядности показана только одна поперечная струна.

Силы натяжения отдельных сегментов струны пропорциональны их деформациям и зависят от смещений следующим образом:

$$T_j = K \frac{1}{l} \left[(U_j - U_{j-1}) + \frac{1}{2l} (V_j - V_{j-1})^2 \right],$$

где l — длина недеформированного сегмента струны.

В работе [9] обсуждался механизм формирования средней силы при доминирующем вертикальном движении, в соответствии с которым сила натяжения цепочки во всех сегментах одинакова и равна среднему значению натяжений:

$$T = \langle T_j \rangle = \frac{1}{N+1} K \frac{1}{2l^2} \sum_{s=0}^N (V_{s+1} - V_s)^2.$$

Таким образом, для поперечных смещений получаем следующее уравнение:

$$m \frac{d^2 V_j}{dt^2} + c V_j^3 + \frac{K}{N+1} \frac{1}{2l^3} \sum_{s=0}^N (V_{s+1} - V_s)^2 (2V_j - V_{j-1} - V_{j+1}) + D (V_{j+2} - 4V_{j+1} + 6V_j - 4V_{j-1} + V_{j-2}) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Введем малый параметр, характеризующий малость амплитуды поперечных колебаний: $\varepsilon = a/l \ll 1$, где a — амплитуда поперечных колебаний. Тогда нормированные смещения v_j определяются следующим образом: $V_j = \varepsilon l v_j$. Введем также «медленный» масштаб времени $\tau_0 = \varepsilon \omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{lm}}$. Изгибную жесткость, как отмечалось выше, предполагаем относительно малой: $D \sim \varepsilon^2$. Тогда все слагаемые имеют один и тот же порядок малости и безразмерные уравнения трансверсального движения принимают вид

$$\ddot{v}_j + \frac{1}{\mu} v_j^3 + \frac{1}{2(N+1)} (2v_j - v_{j+1} - v_{j-1}) \times \sum_{s=0}^N (v_{s+1} - v_s)^2 + \nu (v_{j-2} - 4v_{j-1} + 6v_j - 4v_{j+1} + v_{j+2}) = 0, \quad (2.2)$$

где $\mu = \frac{K}{cl^3}$, $\nu = \frac{Dl}{K\varepsilon^2}$. Предполагается также, что, помимо закрепления границ струны, допускается свободный поворот цепи на границах.

Соответствующая функция Гамильтона рассматриваемой системы записывается следующим образом:

$$H_v = \sum_{j=1}^N \frac{\dot{v}_j^2}{2} + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^N \frac{v_j^4}{4} + \frac{1}{8(N+1)} \left(\sum_{s=0}^N (v_{s+1} - v_s)^2 \right)^2 + \nu \sum_{j=0}^N (3v_j^2 - 4v_j v_{j-1} + v_j v_{j-2}).$$

Хотя в системе уравнений есть линейные члены, зависящие от изгибной жесткости, их вклад не превышает вклада кубических возвращающих сил. С увеличением длины струны влияние изгибной жесткости уменьшается.

3. Проецирование на двухмодовое многообразие

Нелинейные нормальные моды струны без предварительного натяжения имеют вид $v_n^m = a_m(\tau_0) \sin \frac{\pi n m}{N+1}$, однако эти моды не являются точными решениями уравнений движения (2.2).



Рассмотрим резонансный процесс с частотой ω , вводя одновременно параметр $\gamma = \varepsilon^{-1}$, позволяющий сохранить эквивалентность систем (2.2) и (3.1). Представим уравнения движения в таком виде:

$$\ddot{v}_j + \omega^2 v_j + \varepsilon \gamma \left(\frac{1}{\mu} v_j^3 - \omega^2 v_j + \frac{2v_j - v_{j-1} - v_{j+1}}{2(N+1)} \times \right. \\ \left. \times \sum_{s=0}^N (v_{s+1} - v_s)^2 + \nu(v_{j-2} - 4v_{j-1} + 6v_j - 4v_{j+1} + v_{j+2}) \right) = 0 \quad (3.1)$$

(в условиях резонанса комбинация слагаемых в скобках должна быть малой, что отражает введенный параметр ε). Введем комплексные переменные:

$$\psi_j = \dot{v}_j + i\omega v_j, \quad \Phi_j = \psi_{j+1} - \psi_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда уравнения движения можно записать следующим образом:

$$\dot{\psi}_j - i\omega \psi_j = -\varepsilon \gamma \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\psi_j - \psi_j^*}{2i\omega} \right)^3 - \frac{i\omega}{2} (\psi_j - \psi_j^*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(N+1)} \left[\left(\frac{\Phi_{j-1} - \Phi_{j-1}^*}{2i\omega} \right) - \left(\frac{\Phi_j - \Phi_j^*}{2i\omega} \right) \right] \sum_{s=0}^N \left(\frac{\Phi_s - \Phi_s^*}{2i\omega} \right)^2 + \right. \\ \left. + \nu \left[\left(\frac{\psi_{j-2} - \psi_{j-2}^*}{2i\omega} \right) - 4 \left(\frac{\psi_{j-1} - \psi_{j-1}^*}{2i\omega} \right) + 6 \left(\frac{\psi_j - \psi_j^*}{2i\omega} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_{j+1}^*}{2i\omega} \right) + \left(\frac{\psi_{j+2} - \psi_{j+2}^*}{2i\omega} \right) \right] \right\}. \quad (3.2)$$

Теперь используем применявшийся нами ранее [10, 11] метод многомасштабного разложения по степеням малого параметра ε : $\psi_j = \psi_{j,0} + \varepsilon \psi_{j,1} + \dots$, $\frac{d}{d\tau_0} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \dots$. В нулевом порядке имеем: $\frac{\partial \psi_{j,0}}{\partial \tau_0} - i\omega_0 \psi_{j,0} = 0$; таким образом, $\psi_{j,0} = e^{i\omega_0 \tau_0} \varphi_{j,0}$. Подставим это выражение в уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial \varphi_{j,0}}{\partial \tau_2} e^{i\omega \tau_1} + \frac{\partial \psi_{j,1}}{\partial \tau_1} - i\omega \psi_{j,1} = -\gamma \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\frac{\varphi_{j,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right)^3 - \frac{i\omega}{2} (\varphi_{j,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j,0}^* e^{-i\omega \tau_1}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(N+1)} \left[\left(\frac{\Phi_{j-1,0} e^{i\omega \tau_1} - \Phi_{j-1,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right) - \left(\frac{\Phi_{j,0} e^{i\omega \tau_1} - \Phi_{j,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{s=0}^N \left(\frac{\Phi_{s,0} e^{i\omega \tau_1} - \Phi_{s,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right)^2 + \nu \left[\left(\frac{\varphi_{j-2,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j-2,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \left(\frac{\varphi_{j-1,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j-1,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right) + 6 \left(\frac{\varphi_{j,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varphi_{j+2,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j+2,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} - 4 \left(\frac{\varphi_{j+1,0} e^{i\omega \tau_1} - \varphi_{j+1,0}^* e^{-i\omega \tau_1}}{2i\omega} \right) \right] \right\}.$$

Интегрируя эти уравнения по быстрому времени τ_1 , коэффициент при $e^{i\omega\tau_1}$ приравняем к 0 (чтобы избежать экспоненциального роста во времени), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{j,0}}{\partial \tau_2} + \gamma/\mu \frac{3\phi_{j,0}|\phi_{j,0}|^2}{8i\omega^3} - \frac{1}{2(N+1)} \frac{\gamma}{2i\omega} (2\phi_{j,0}^* - \phi_{j-1,0}^* - \phi_{j+1,0}^*) \sum_{s=0}^N \frac{(\phi_{s+1,0} - \phi_{s,0})^2}{4\omega^2} - \\ - \frac{\gamma}{2i\omega} \frac{1}{2(N+1)} (2\phi_{j,0} - \phi_{j-1,0} - \phi_{j+1,0}) \sum_{s=0}^N \frac{|\phi_{s+1,0} - \phi_{s,0}|^2}{2\omega^2} + \gamma \frac{i\omega}{2} \phi_{j,0} + \\ + \frac{\nu\gamma}{2i\omega} (\phi_{j+2,0} - 4\phi_{j+1,0} + 6\phi_{j,0} - 4\phi_{j-1,0} + \phi_{j-2,0}) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В комплексном представлении функция $\phi_j^m = A_m(\tau_2) \exp\left(\frac{i\pi jm}{N+1}\right)$ является точным решением уравнений (3.3), характеризующим ННМ и при наличии подложки. В исходных же переменных при отсутствии подложки точным решением уравнений (2.2) является функция $v_j^m = a_m(t) \sin \frac{\pi mj}{N+1}$, что в комплексном представлении отвечает зависимости $\frac{e^{\frac{ij\pi m}{N+1}} - e^{-\frac{ij\pi m}{N+1}}}{2i} A_m$. Рассматривая двухмодовое многообразие, чтобы обеспечить корректный предельный переход к струне без подложки, будем искать решение в виде комбинации таких мод:

$$\phi_j = \frac{e^{\frac{ij\pi m}{N+1}} - e^{-\frac{ij\pi m}{N+1}}}{2i} A_m + \frac{e^{\frac{ij\pi k}{N+1}} - e^{-\frac{ij\pi k}{N+1}}}{2i} A_k. \quad (3.4)$$

Проецируя уравнения (3.3) на ННМ (3.4), собирая коэффициенты при $e^{\frac{ij\pi m}{N+1}}$ и приравнявая их к нулю, получим следующие уравнения (для простоты мы опустили промежуточные выкладки):

$$\begin{aligned} \dot{A}_m - \frac{3\gamma}{64\mu\omega^3} \cdot (3A_m|A_m|^2 + 2A_k^2 A_m^* + 4A_m|A_k|^2) + \frac{i\gamma}{2\omega} \frac{1}{16\omega^2} 2[|A_m|^2\omega_m^2 + |A_k|^2\omega_k^2]\omega_m^2 A_m + \\ + \frac{i\gamma}{2\omega} \frac{1}{16\omega^2} [A_m^2\omega_m^2 + A_k^2\omega_k^2]\omega_m^2 A_m^* - \gamma \frac{i\omega}{2} A_m - \frac{i\nu\gamma}{2\omega\mu} \omega_m^4 A_m = 0, \\ \dot{A}_k - \frac{3\gamma}{64\mu\omega^3} \cdot (3A_k|A_k|^2 + 2A_m^2 A_k^* + 4A_k|A_m|^2) + \frac{i\gamma}{2\omega} \frac{1}{16\omega^2} 2[|A_m|^2\omega_m^2 + |A_k|^2\omega_k^2]\omega_k^2 A_k + \\ + \frac{i\gamma}{2\omega} \frac{1}{16\omega^2} [A_m^2\omega_m^2 + A_k^2\omega_k^2]\omega_k^2 A_k^* - \gamma \frac{i\omega}{2} A_k - \frac{i\nu\gamma}{2\omega\mu} \omega_k^4 A_k = 0. \end{aligned}$$

Рассматриваемые ННМ резонируют и, следовательно, не являются слабо взаимодействующими, поэтому введем «кластерные» переменные $\varphi_1 = \frac{A_m + A_n}{2}$, $\varphi_2 = \frac{A_m - A_n}{2}$, характеризующие динамику слабо взаимодействующих частей цепи (кластеров). В этих

переменных получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_j}{d\tau_1} = & \gamma \frac{M}{16\omega^3} (9\varphi_j|\varphi_j|^2 + \varphi_j^*\varphi_{3-j}^2 + 2\varphi_j|\varphi_{3-j}|^2) + \frac{i\gamma}{64\omega^3} (3A\varphi_j|\varphi_j|^2 + 3C\varphi_{3-j}^*\varphi_j^2 + \\ & + 3C\varphi_{3-j}|\varphi_{3-j}|^2 + 6C\varphi_{3-j}|\varphi_j|^2 + 2B\varphi_j|\varphi_{3-j}|^2 + B\varphi_{3-j}^2\varphi_j^*) + \frac{i\omega}{2}\varphi_j + \\ & + \frac{i\nu C}{4\omega\mu}\varphi_{3-j} + \frac{i\nu D}{4\omega\mu}\varphi_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A = (\omega_m^2 + \omega_n^2)^2, \quad B = (\omega_m^2 + \omega_n^2)^2 + 2(\omega_m^2 - \omega_n^2)^2, \quad C = \omega_m^4 - \omega_n^4, \\ D = \omega_m^4 + \omega_n^4, \quad M = \frac{3}{4\mu}. \end{aligned}$$

Полученная система является интегрируемой, поскольку, кроме интеграла энергии, она допускает также второй интеграл (интеграл чисел заполнения в квантовомеханической интерпретации)

$$N = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2, \quad (3.5)$$

что может быть проверено непосредственно.

С учетом второго интеграла $N = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$ можно ввести угловые переменные:

$$\varphi_1 = \sqrt{N} \cos \theta e^{i\delta_1}, \quad \varphi_2 = \sqrt{N} \sin \theta e^{i\delta_2}.$$

В угловых переменных получаем следующую систему ($\Delta = \delta_1 - \delta_2$ — сдвиг по фазе):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin 2\theta \dot{\Delta} = & M \left(-\frac{7}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \cos 2\Delta \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{3A}{4} \sin 4\theta - \frac{B}{4} \sin 4\theta (\cos 2\Delta + 2) - 3C \cos 2\theta \cos \Delta \right) + \\ & + \frac{8\omega^2\nu C}{N} \cos \Delta \cos 2\theta, \\ \dot{\theta} = & \frac{3}{2\mu} \sin 2\theta \sin 2\Delta + \frac{1}{2} (B \sin \theta \cos \theta \sin 2\Delta + 3C \sin \Delta) + \frac{8\omega^2\nu C}{N} \sin \Delta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь точка означает интегрирование по нормированному (для упрощения уравнений) времени $\tau_1^* = \frac{\gamma N}{32\omega^3} \tau_1$. Интеграл энергии в новых переменных принимает вид

$$\begin{aligned} H = & -M \left(\frac{9}{2} \sin^4 \theta + \frac{9}{2} \cos^4 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(-\frac{3A}{2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - B \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \nu_0/2 \cos \Delta \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь для краткости обозначено $\nu_0 = \frac{8\omega^2\nu C}{N}$.

3.1. Первый динамический переход: стационарная локализация энергии (влияние подложки и изгибной жесткости на устойчивость ННМ)

На рисунке 2 показана эволюция фазовой плоскости при изменении параметра μ , характеризующего относительный вклад подложки. По-прежнему рассматривается двухмодовое многообразие, образованное резонирующими ННМ с минимальными волновыми числами.

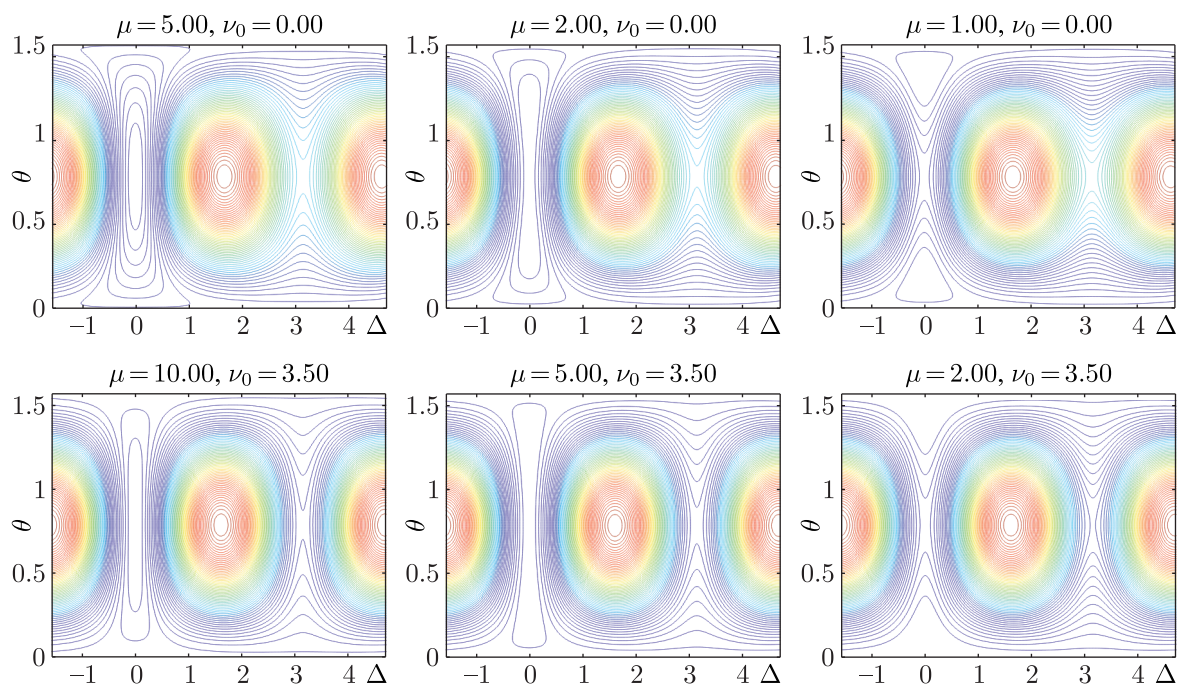


Рис. 2. Изменение топологии фазовой плоскости в угловых переменных (динамические переходы) при отсутствии ($\nu_0 = 0$) (вверху) и при наличии ($\nu_0 = 3.5$) (внизу) изгибной жесткости.

Усиление влияния подложки соответствует уменьшению параметра μ . До достижения его первого критического значения топология фазовой плоскости остается неизменной. Однако при критическом значении этого параметра ННМ с минимальным волновым числом (синфазная ННМ в двумерном многообразии) становится неустойчивой, и вследствие ее бифуркации появляются две дополнительные устойчивые ННМ и разделяющая их сепаратриса (рис. 2).

Критическое значение можно найти аналитически из условия

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\pi/4, \Delta=0} = 0. \quad (3.8)$$

Отсюда

$$\mu_{cr1} = \frac{9}{(-3A + 6C + 3B - 2\nu_0)}.$$

Видно, что изгибная жесткость качественно не меняет результат, однако количественно влияет на значение параметра μ , при котором происходит динамический переход.

3.2. Второй динамический переход: от энергообмена к локализации

При дальнейшем увеличении вклада подложки количество ННМ не изменяется, однако наблюдается переход от полного энергообмена к нестационарной локализации энергии на одном из кластеров, в данном случае на половине цепи (на фазовой плоскости нет фазовых траекторий, реализующих переход от $\theta = 0$ к $\theta = \pi/2$, см. рис. 2). Но здесь речь идет о нестационарной локализации, которая возникает при спонтанном возбуждении кластера. Локализации этого типа соответствует в медленном времени не стационарная точка, а ПФТ, реализующая максимально возможный при данных условиях частичный энергообмен между кластерами. Второе критическое значение параметра μ можно также найти аналитически, учитывая, что при этом значении ПФТ является сепаратрисой (неустойчивая стационарная точка $(\pi/4, 0)$ принадлежит ПФТ): $H(\pi/4, 0) = H(0, \pi)$. Отсюда

$$\mu_{cr2} = \frac{51}{2(-3(A + 8C + 2B) + 8\nu_0)}.$$

Снова видно, что наличие изгибной жесткости качественно не меняет поведения системы, однако влияет количественно. Полученные результаты подтверждаются численным интегрированием исходной системы (2.2) с начальными условиями, соответствующими возбуждению одного из кластеров (комбинация резонирующих мод с минимальными волновыми числами): $v_j = \sin \frac{\pi j(N-1)}{N+1} + \sin \frac{\pi jN}{N+1}$. При $\mu < \mu_{cr2}$ наблюдается локализация в первоначально возбужденном кластере, а при $\mu > \mu_{cr2}$ — практически полный энергообмен между двумя кластерами (рис. 3).

3.3. Аналитическое представление ПФТ

Полный энергообмен между кластерами и локализация энергии на одном из них, описываемые ПФТ, представляют собой фундаментальные нестационарные процессы, играющие к тому же важную роль в приложениях. В связи с этим желательно получить их аналитическое описание. Это действительно можно сделать в угловых переменных, удовлетворяющих уравнениям (3.6). Поскольку ПФТ задается условием

$$H(\theta, \Delta) = H(0, 0),$$

где интеграл энергии определяется выражением (3.7), получаем уравнение

$$\begin{aligned} & -M \left(\frac{9}{2} \sin^4 \theta + \frac{9}{2} \cos^4 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(-\frac{3A}{2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - B \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \nu_0/2 \cos \Delta \sin 2\theta = \\ & = -\frac{9}{2}M - \frac{3A}{4}. \end{aligned}$$

Это соотношение позволяет выявить связь между переменными θ и Δ на ПФТ:

$$\begin{aligned} & -M \left(\frac{9}{2} \sin^4 \theta + \frac{9}{2} (\cos^4 \theta - 1) + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(-\frac{3A}{2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta - 1) - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - B \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \\ & + \nu_0/2 \cos \Delta \sin 2\theta = 0, \end{aligned}$$

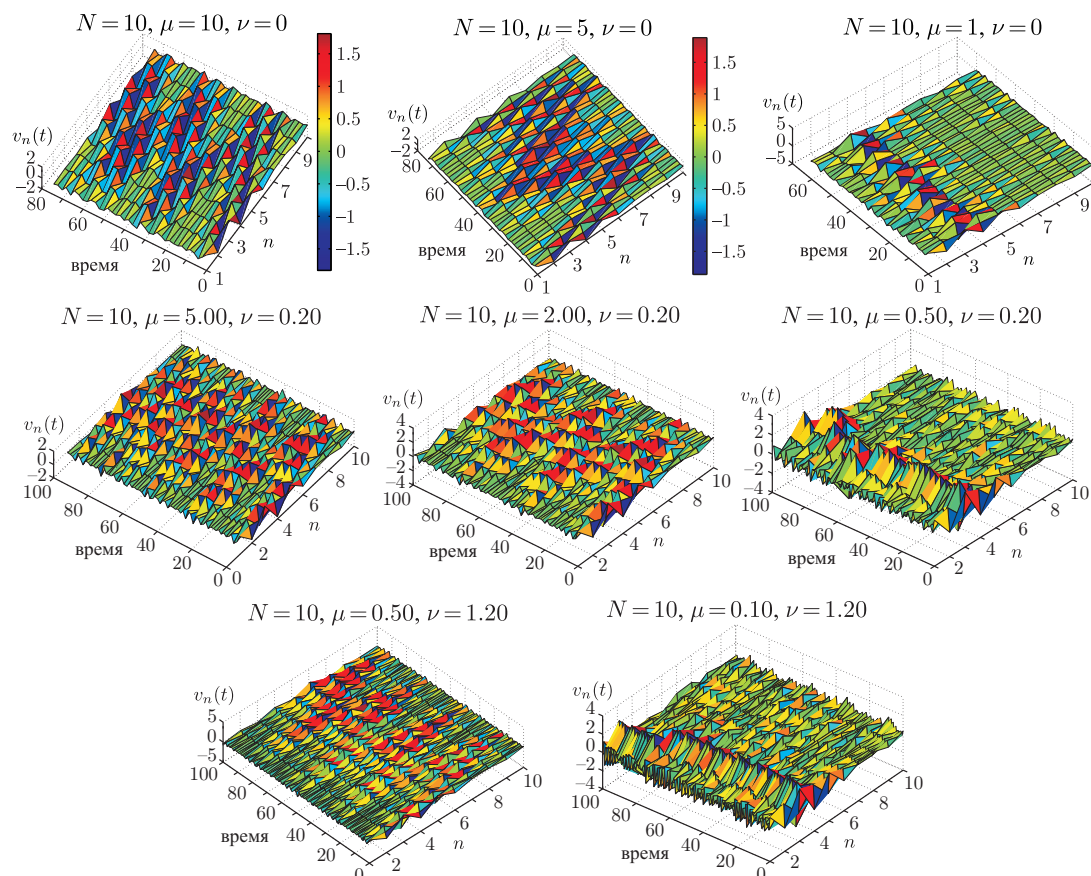


Рис. 3. Интенсивный энергообмен между частями цепочки из 10 звеньев и локализация энергии при указанных различных параметрах жесткости подложки μ и изгибной жесткости ν . Верхний ряд — при отсутствии изгибной жесткости. Результаты численного интегрирования системы (2.2); начальные условия соответствуют сумме двух последних мод^a.

$$-M \left(-\frac{9}{4} \sin^2 2\theta + \frac{1}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3A}{4} \sin^2 2\theta - 3C \sin 2\theta \cos \Delta - \frac{B}{4} \sin^2 2\theta (\cos 2\Delta + 2) \right) + \nu_0/2 \cos \Delta \sin 2\theta = 0.$$

Отсюда либо $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, что соответствует прямолинейным участкам ПФТ, либо

$$\cos \Delta = \frac{\frac{3}{2} C - \frac{\nu_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2} C - \frac{\nu_0}{2}\right)^2 + (2M - \frac{B}{8} + \frac{3A}{8})(2M + B) \sin^2 2\theta}}{\left(-M - \frac{B}{2}\right) \sin 2\theta}.$$

Таким образом, получается аналитическое представление для ПФТ:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tau(t/a),$$

$$\Delta = -\arccos \left(\frac{\frac{3}{2} C - \frac{\nu_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2} C - \frac{\nu_0}{2}\right)^2 + (2M - \frac{B}{8} + \frac{3A}{8})(2M + B) \sin^2 \pi \tau}}{\left(-M - \frac{B}{2}\right) \sin \pi \tau} \right). \quad (3.9)$$

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1603002/>

Здесь τ — пилообразная функция с периодом $T = 4a$,

$$\tau(\tau_1) = 0.5 \left((2/\pi) \arcsin(\sin(\pi\tau_1/a - \pi/2)) + 1 \right),$$

а $e(\tau)$ — ее производная в терминах обобщенных функций: $e(\tau_1) = d\tau/d\tau_1$. Период можно найти из темпорального уравнения для θ :

$$T = 4a = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{M \sin 2\theta \sin 2\Delta + \frac{1}{2} (B \sin \theta \cos \theta \sin 2\Delta + 3C \sin \Delta) + \nu_0 \sin \Delta}.$$

4. Альтернативный способ построения проекции на двухмодовое многообразие

Рассмотрим другой подход, который заключается в переходе к континуальному пределу и прямому проецированию на двухмодовое многообразие (метод Галёркина). Для исследования динамики в условиях $N \gg 1$ можно перейти к континуальному пределу. Здесь имеются две возможности. При анализе длинноволновой динамики вводятся вместо дискретного индекса j непрерывный параметр длины ξ , принимающий значения j в точках расположения дискретных масс, и непрерывная функция $v(\tau_0, \xi)$ (вместо $v_j(\tau_0)$ в дискретном случае). Тогда уравнение движения в частных производных будет иметь следующий вид (L — безразмерная длина цепи, $L = N + 1$):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{\mu} v^3 - \frac{1}{2L} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \right] \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\mu} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = 0, \quad v(0) = v(L) = 0. \quad (4.1)$$

Однако при высокочастотных колебаниях величина $v_j(\tau_0)$ быстро изменяется как функция индекса j , и континуальное описание самих перемещений в этом случае уже не оправдано. Но оно становится возможным после предварительной замены переменных $w_j = (-1)^j v_j$ («инвертные переменные»). Сделаем замену $\nu/\mu \rightarrow \nu$:

$$\frac{d^2 w_j}{d\tau_0^2} + \frac{1}{\mu} w_j^3 + \frac{1}{2(N+1)} \sum_{s=0}^N (w_{s+1} + w_s)^2 (2w_j + w_{j+1} + w_{j-1}) + \nu (w_{j-2} + 4w_{j-1} + 6w_j + 4w_{j+1} + w_{j+2}) = 0, \quad w_0 = w_{N+1} = 0. \quad (4.2)$$

Тогда континуальное уравнение, описывающее плавную модуляцию быстро изменяющихся по длине перемещений струны, имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{\mu} w^3 + \frac{1}{2L} \int_0^L \left(2w(x, \tau_0) + \frac{\partial w(x, \tau_0)}{\partial x} \right)^2 dx \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 4w \right) + \nu \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 8 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 16w \right) = 0, \\ w_0 = w_L = 0. \quad (4.3)$$

Как отмечалось выше, при отсутствии подложки ННМ рассматриваемой системы с прямыми траекториями совпадают с модами линейной осцилляционной цепи [9]. Каждая

мода (с номером m) описывается законом движения $v_j(\tau_0) = a(\tau_0) \sin \frac{\pi j m}{N+1}$, представляющим собой точное решение уравнений (2.2) при $\frac{1}{\mu} = 0$ и при $\nu = 0$ с частотой, которая зависит от амплитуды и пропорциональна частоте соответствующих колебаний линейной осцилляторной цепи с тем же волновым числом:

$$\omega_m = 2 \sin \frac{\pi m}{2(N+1)}. \quad (4.4)$$

При введении подложки ситуация становится более сложной. ННМ собственно струны перестают быть точными решениями. Однако они, являясь теперь приближенными ННМ, по-прежнему образуют подходящий ортогональный базис для проецирования континуальных уравнений движения. В данной статье детально рассмотрен случай, когда резонанс обусловлен близостью волновых чисел двух высших ННМ. В связи с этим далее выполняется проецирование «высокочастотного» континуального уравнения (4.3) на подпространство, образованное именно этими модами. Спроецируем уравнение (4.3) на каждую из двух мод, соответствующих наибольшему волновому числу ($m = N-1$, $n = N$) в исходных переменных v_j (и наименьшему волновому числу ($m = 2$, $n = 1$) в преобразованных переменных w_j). При этом само двухмодовое приближение в преобразованных координатах имеет вид

$$w = a_m(t) \sin \frac{m\pi\xi}{L} + a_n(t) \sin \frac{n\pi\xi}{L}, \quad m = 2, \quad n = 1$$

(моды m , n в «инвертных» координатах w соответствуют модам с номерами $N+1-m$, $N+1-n$ в исходных координатах v).

Поскольку рассматриваются высшие моды исходной системы, резонанс имеет место при близких по величине амплитудах осцилляторов и $m, n \ll N$. Для удобства введем обозначение $n_L = \frac{\pi n}{N+1}$, $m_L = \frac{\pi m}{N+1}$.

Тогда уравнения, полученные проекцией на ННМ с волновыми числами m и n , имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{a}_m + \frac{3}{4\mu} (a_m^3 + 2a_m a_n^2) + \frac{1}{4} [(4 + m_L^2) a_m^2 + (4 + n_L^2) a_n^2] (4 - m_L^2) a_m + (m_L^2 - 4)^2 a_m &= 0, \\ \ddot{a}_n + \frac{3}{4\mu} (a_n^3 + 2a_n a_m^2) + \frac{1}{4} [(4 + m_L^2) a_m^2 + (4 + n_L^2) a_n^2] (4 - n_L^2) a_n + (n_L^2 - 4)^2 a_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

После замены переменных (масштабирования) имеем: $a_m = \sqrt{\frac{4 - m_L^2}{4 + m_L^2}} A_m$, $a_n = \sqrt{\frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2}} A_n$; учитывая близость волновых чисел рассматриваемых мод, уравнения (4.5) можно привести к симметризованной форме:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_m + \frac{3}{4\mu} \frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2} A_m (A_m^2 + 2A_n^2) + \\ + \frac{1}{4} [(4 - m_L^2) A_m^2 + (4 - n_L^2) A_n^2] (4 - m_L^2) A_m + \nu (m_L^2 - 4)^2 A_m &= 0, \\ \ddot{A}_n + \frac{3}{4\mu} \frac{4 - m_L^2}{4 + m_L^2} A_n (A_n^2 + 2A_m^2) + \\ + \frac{1}{4} [(4 - m_L^2) A_m^2 + (4 - n_L^2) A_n^2] (4 - n_L^2) A_n + \nu (n_L^2 - 4)^2 A_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Рассматриваемые ННМ резонируют и, следовательно, не являются слабо взаимодействующими, поэтому введем «кластерные» переменные $v_1 = \frac{A_m + A_n}{2}$, $v_2 = \frac{A_m - A_n}{2}$, характеризующие динамику слабо взаимодействующих частей цепи (кластеров). В новых переменных получим систему

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + Mv_1(3v_1^2 + v_2^2) + \frac{A}{8}v_1^3 + \frac{3C}{8}v_1^2v_2 + \frac{B}{8}v_1v_2^2 + \frac{C}{8}v_2^3 + \\ + \nu \frac{(m_L^2 - 4)^2(v_1 + v_2) + (n_L^2 - 4)^2(v_1 - v_2)}{2} = 0, \\ \ddot{v}_2 + Mv_2(3v_2^2 + v_1^2) + \frac{A}{8}v_2^3 + \frac{3C}{8}v_2^2v_1 + \frac{B}{8}v_2v_1^2 + \frac{C}{8}v_1^3 + \\ + \nu \frac{(m_L^2 - 4)^2(v_1 + v_2) + (n_L^2 - 4)^2(v_2 - v_1)}{2} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь для краткости введены обозначения: $A = (m_L^2 + n_L^2 - 8)^2$, $B = (m_L^2 + n_L^2 - 8)^2 + 2(m_L^2 - n_L^2)^2$, $C = (m_L^2 - n_L^2)(m_L^2 + n_L^2 - 8)$, $M = \frac{3}{4\mu} \frac{4 - n_L^2}{4 + n_L^2}$. Поэтому интеграл энергии, соответствующий данной системе, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} H = \frac{\dot{v}_1^2}{2} + \frac{\dot{v}_2^2}{2} + M \left(\frac{3}{4}v_1^4 + \frac{3}{4}v_2^4 + \frac{1}{2}v_1^2v_2^2 \right) + \frac{A}{32}(v_1^4 + v_2^4) + \frac{C}{8}(v_2^3v_1 + v_1^3v_2) + \frac{B}{16}v_1^2v_2^2 + \\ + \nu \frac{(m_L^2 - 4)^2}{2}(v_1 + v_2)^2 + \nu \frac{(n_L^2 - 4)^2}{2}(v_1 - v_2)^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

5. Сечения Пуанкаре

Поскольку исходная система и после проецирования на двумерное многообразие, образованное ННМ с наименьшими (в преобразованных координатах) волновыми числами, неинтегрируема, представляет интерес построение соответствующих системе (4.7) сечений Пуанкаре.

Рассмотрим набор траекторий с одинаковым значением энергии. В качестве секущей плоскости взята плоскость $\dot{v}_2 = 0$. Точки пересечения с этой плоскостью проецируются на плоскость (v_1, \dot{v}_1) . Предельные фазовые траектории получаются на той же плоскости, если взять траекторию с начальными условиями, соответствующими возбуждению одного кластера.

Полученные сечения изображены на рисунке 4. Видно, что по количеству точек равновесия и расположению ПФТ они полностью соответствуют фазовым портретам, полученным при асимптотическом анализе в угловых переменных. В отличие от результатов, полученных для струны и балки с двумя массами, хаотическое поведение не наблюдается.

6. Выводы

Таким образом, впервые показано, что в струне с произвольным числом дискретных масс, в условиях, близких к акустическому вакууму, при наличии подложки, наряду с ННМ существуют регулярные режимы полного энергообмена между частями струны (кластерами) и, наряду со стационарной локализацией энергии, ее нестационарная локализация на

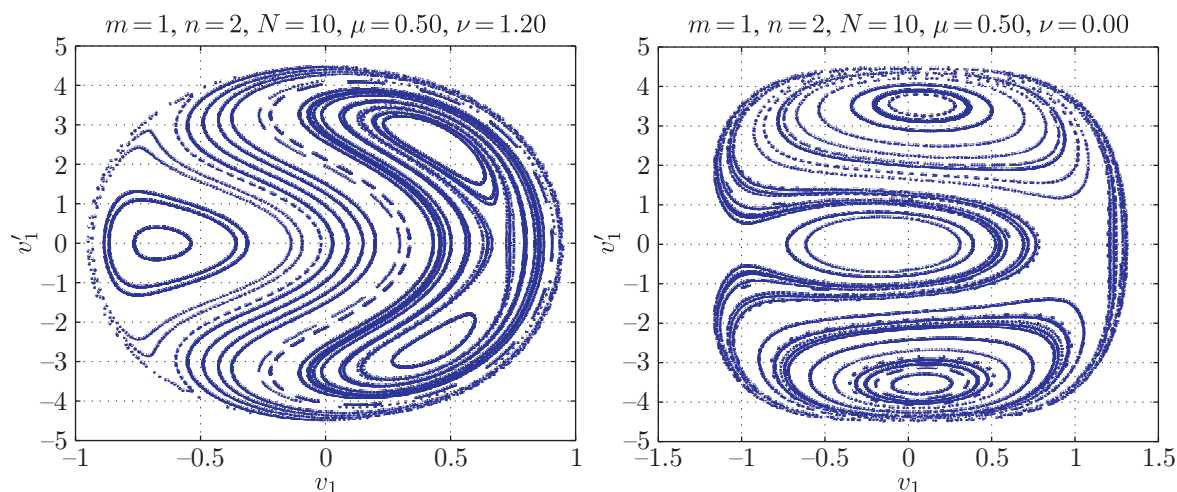


Рис. 4. Сечения Пуанкаре для различных значений параметров.

одном из кластеров. Получено аналитическое описание указанных режимов и определены условия переходов между ними в параметрическом пространстве. Возможность существования разных режимов в одной и той же системе определяется наличием нелинейной подложки, которая позволяет и существенно расширить область волновых чисел, соответствующих резонирующим модам. Это означает возможность использования данной системы в качестве эффективной энергетической ловушки повышенной энергоемкости.

Благодарности

Авторы выражают благодарность РФФИ (гранты 14-01-00284 А, 16-02-00400 А).

Список литературы

- [1] Manevitch L. I., Gourdon E. E., Lamarque C. H. Towards the design of an optimal energetic sink in a strongly inhomogeneous two-degree-of-freedom system // ASME. J. Appl. Mech., 2006, vol. 74, no. 6, pp. 1078–1086.
- [2] Vakakis A. F., Gendelman O. V., Bergman L. A., McFarland D. M., Kerschen G., Lee Y. S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems. (Solid mechanics and its applications, vol. 156.) Dordrecht: Springer, 2009. 1030 pp.
- [3] Manevitch L. I. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains // Arch. Appl. Mech., 2007, vol. 77, no. 5, pp. 301–312.
- [4] Manevitch L. I., Kovaleva A. S., Manevitch E. L. Limiting phase trajectories and resonance energy transfer in a system of two coupled oscillators // Math. Probl. Eng., 2010, vol. 2010, 760479, 24 pp.
- [5] Manevitch L. I., Kovaleva A. S., Shepelev D. S. Non-smooth approximations of the limiting phase trajectories for the Duffing oscillator near 1 : 1 resonance // Phys. D, 2011, vol. 240, no. 1, pp. 1–12.
- [6] Kovaleva A. S., Manevitch L. I. Resonance energy transport and exchange in oscillator arrays // Phys. Rev. E, 2013, vol. 88, no. 2, 022904, 10 pp.
- [7] Ковалева М. А., Маневич Л. И., Пилипчук В. Н. О новом типе синхронизации генераторов с жестким возбуждением // ЖЭТФ, 2013, т. 144, № 2, с. 428–437.
- [8] Manevitch L. I., Kovaleva M. A., Pilipchuk V. N. Non-conventional synchronization of weakly coupled active oscillators // Europhys. Lett., 2013, vol. 101, no. 5, 50002, 5 pp.

- [9] Manevitch L. I., Vakakis A. F. Nonlinear oscillatory acoustic vacuum // *SIAM J. Appl. Math.*, 2014, vol. 74, no. 6, pp. 1742–1762.
- [10] Кикоть И. П., Маневич Л. И. Связанные осцилляторы на упругой подложке в условиях акустического вакуума // *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 3, с. 245–263.
- [11] Silina K. G., Kikot I. P., Manevitch L. I. Energy exchange and localization in the planar motion of a weightless beam carrying two discrete masses // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 109–122.
- [12] Starosvetsky Y., Ben-Meir Y. Nonstationary regimes of homogeneous hamiltonian systems in the state of sonic vacuum // *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, no. 6, 062919, 18 pp.

Oscillatory chain with elastic supports and bending stiffness under conditions close to acoustic vacuum

Irina P. Koroleva (Kikot)¹, Leonid I. Manevich²

^{1,2} N. N. Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences
Kosygina st. 4, Moscow, 117977, Russia

¹irakikotx@gmail.com, ²manevitchleonid3@gmail.com

We present results of analytical and numerical investigation of the nonstationary planar dynamics of a string with uniformly distributed discrete masses without preliminary tension and taking into account the bending stiffness. Each mass is coupled to the ground by lateral springs without tension which have (effectively) a characteristic that is nonlinearizable in the case of planar motion. The most important limiting case corresponding to low-energy transversal motions is considered taking into account geometrical nonlinearity. Since such excitations are described by approximate equations where cubic elastic forces contribute the most, oscillations take place under conditions close to the acoustic vacuum. We obtain an adequate analytical description of resonant nonstationary processes in the system under consideration, which correspond to an intensive energy exchange between its parts (clusters) in the domain of low frequencies. Conditions of energy localization are given. The analytical results obtained are supported by computer numerical simulations. The system considered may be used as an energy sink of enhanced effectiveness.

MSC 2010: 70K30, 70K50, 70K75

Keywords: nonlinear dynamics, nonlinear normal mode, limiting phase trajectory, energy exchange, localization

Received May 18, 2016, accepted June 25, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 311–325 (Russian)