



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 530.182

MSC 2010: 90B10, 34D20, 37K40, 35Q51

## Метастабильные возбуждения в цепочке Морзе – Рэлея

К. С. Сергеев, А. П. Четвериков

Исследуется динамика плотного одномерного ансамбля взаимодействующих активных броуновских частиц. Нелинейная отрицательная диссипация частиц задается в форме Рэлея, а сами частицы связаны потенциальными силами Морзе. Такую цепочку можно рассматривать также как ансамбль связанных вырожденных осцилляторов Рэлея.

Стационарные моды (аттракторы) цепочки с периодическими граничными условиями выглядят как кноидальные волны. Для них характерно равномерное распределение максимумов плотности частиц на длине цепочки. Однако при старте со случайных начальных условий сначала возникает состояние с неравномерным распределением максимумов плотности. Такое состояние является метастабильным, а установлению стационарной моды соответствует длительный переходный процесс.

В работе методами численного моделирования исследуются характеристики метастабильных состояний, закономерности и вероятности их возникновения, оцениваются времена жизни.

Ключевые слова: активные частицы, солитоны, коллективная динамика, ансамбли

---

Получено 30 июня 2016 года

После доработки 19 июля 2016 года

---

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-12-10175.

---

Сергеев Константин Сергеевич

[kssergeev@mail.ru](mailto:kssergeev@mail.ru)

Четвериков Александр Петрович

[chetvap@rambler.ru](mailto:chetvap@rambler.ru)

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83



## 1. Введение

Исследования динамики нелинейных цепочек, инициированные знаменитой работой Э. Ферми, Дж. Паста, С. Улама [1], интенсивно развивались все последующие годы. Сформировалось несколько научных направлений, концентрирующих внимание исследователей на различных аспектах этой многогранной проблемы (см., например, [2–6]). Одним из них является изучение динамики цепочек активных частиц [7–12]. Большая доля работ в этой области выполнена с привлечением популярной модели Тоды–Рэлея, в которой, как следует из названия, точечные частицы, обладающие нелинейной отрицательной диссипацией в форме Рэлея, связаны друг с другом потенциальными силами в форме Тоды [13, 15–17, 19, 25]. Такая цепочка может рассматриваться, с одной стороны, как разновидность плотного одномерного ансамбля взаимодействующих активных броуновских частиц [6, 12], а с другой — как цепочка связанных вырожденных осцилляторов Рэлея [27].

Стационарные моды (аттракторы) цепочки с периодическими граничными условиями выглядят как кноидальные волны с равномерным пространственным распределением максимумов скоростей и плотности частиц. В случае, когда ширина максимумов распределений плотности значительно меньше расстояния между ними, возбужденные моды можно рассматривать как упорядоченный ансамбль диссипативных (дискретных) солитонов [28] или автосолитонов [29]. Разные моды имеют разную среднюю скорость и разное количество максимумов плотности частиц на длине цепочки. В цепочке из  $N$  частиц общее количество мод равно  $N + 1$ , включая две моды, соответствующие движению цепочки как целому в том или другом направлении, и каждая из  $N + 1$  мод может быть возбуждена селективно соответствующим выбором начальных условий [15, 16, 19].

Так, например, общее число мод в ансамбле из десяти частиц равно 11, из которых выделяется так называемая оптическая. В ней направление скорости пяти частиц противоположно направлению скорости остальных пяти частиц, поэтому будем обозначать ее как моду (5, 5). Колебания соседних частиц в ней противофазны, а средняя скорость равна нулю. Остальные моды трактуются как движение всего ансамбля «влево» или «вправо» с разной средней скоростью. Так, например, мода (9, 1) соответствует случаю, когда девять частиц движется в положительном направлении («вправо»), а одна — в отрицательном («влево»). Средняя скорость при этом  $\langle v \rangle = 0.8v_0$ , где  $v_0$  — стационарное значение скорости изолированной частицы (см. ниже). Симметричная ей мода (1, 9) имеет среднюю скорость  $\langle v \rangle = -0.8v_0$  (рис. 1а–с). В дальнейшем под обозначением  $(k, l)$  будем понимать пару мод  $(k, l)$  и  $(l, k)$  в силу их симметрии.

Аналогичными свойствами обладает и цепочка Морзе–Рэлея, где силы взаимодействия между частицами задаются потенциалом Морзе, который при небольших смещениях частиц подобен потенциалу Тоды [14, 18, 20–26]. Однако было обнаружено, что если задаются случайные начальные возмущения скоростей частиц или их отклонения от положения равновесия, то в результате короткого переходного процесса возникает мода с неравномерным распределением максимумов плотности частиц, похожим на распределение частиц в мультисолитонной моде консервативной цепочки [2]. Такая мода не является стационарной, а является метастабильной, соответствующей длительному переходному процессу, заканчивающемуся установлением одной из стационарных мод. В настоящей работе исследуются свойства таких метастабильных состояний, особенности их возникновения, времена жизни, поскольку в силу длительности их существования они могут влиять на макроскопические характеристики системы, а также играть существенную роль в процессах транспорта энергии и электрических зарядов вдоль цепочки.

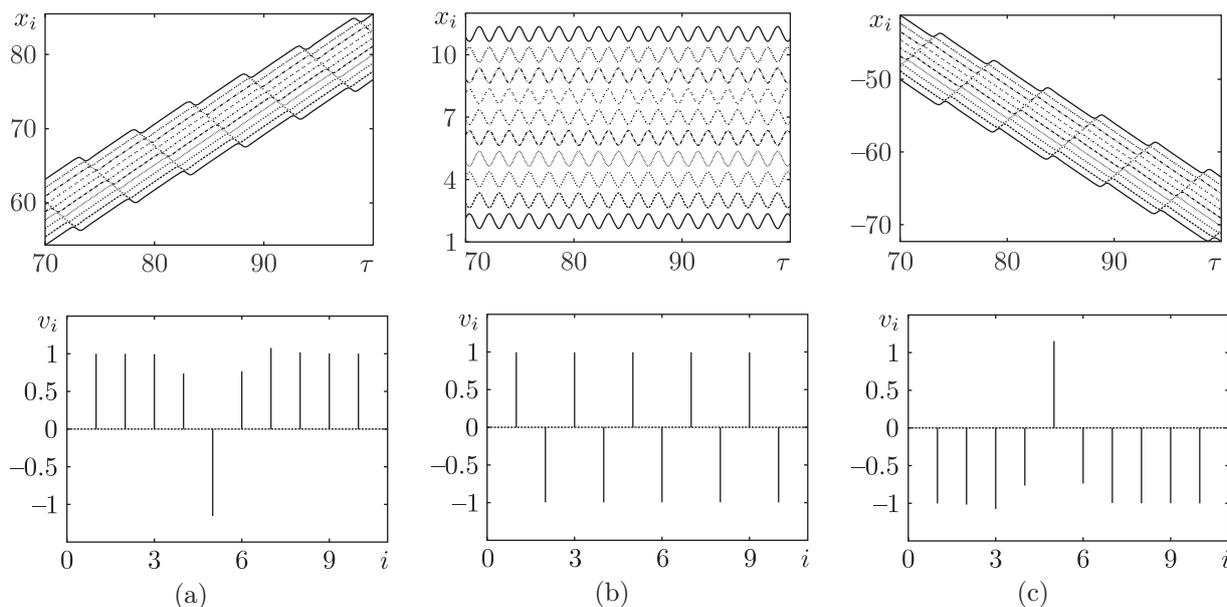


Рис. 1. Верхний ряд: траектории частиц, иллюстрирующие моды (9,1) (а), (5,5) (б) и (1,9) (с). Нижний ряд: соответствующие распределения скорости частиц в последний момент времени на картинах траекторий.

## 2. Модель и уравнения динамики цепочки

Рассмотрим одномерную цепочку точечных масс (частиц), обладающих нелинейным активным трением и связанных потенциальными силами. Пусть динамика изолированной частицы описывается уравнением движения

$$m\ddot{x} - \gamma_0 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2}{v_0^2} \right) \dot{x} = 0, \tag{2.1}$$

в котором  $m$  — масса частицы,  $\gamma_0$  — коэффициент трения,  $v_0$  определяет значение стационарной скорости. Нетрудно видеть, что при  $\gamma_0 > 0$  и малых значениях  $\dot{x}$  скорость частицы экспоненциально нарастает, а когда нелинейное ограничение скорости становится существенным, она достигает со временем одного из двух стационарных значений  $\pm v_0$ . Если ансамбль таких частиц образует равновесную цепочку вследствие связи между соседями нелинейными силами с потенциалом Морзе

$$U(r) = D \left( e^{-2br} - 2e^{-br} \right), \tag{2.2}$$

то динамика цепочки будет описываться безразмерными уравнениями движения:

$$\ddot{q}_i - \mu \left( 1 - \frac{\dot{q}_i^2}{v_0^2} \right) \dot{q}_i = (1 - e^{q_i - q_{i+1}}) e^{q_i - q_{i+1}} - (1 - e^{q_{i-1} - q_i}) e^{q_{i-1} - q_i}. \tag{2.3}$$

Здесь  $D$  — глубина потенциальной ямы Морзе (потенциал имеет значение  $-D$  при  $r = 0$ ),  $b$  характеризует жесткость потенциальных сил,  $q_i = b(x_i - i\sigma)$  — безразмерное отклонение  $i$ -й частицы от ее равновесного положения в невозмущенной цепочке  $x_{i0} = i\sigma$  (то есть



безразмерная «координата»),  $\sigma$  определяет равновесное расстояние между соседними частицами, точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = \omega_M t$ ,  $\omega_M = \sqrt{\frac{2Db^2}{m}}$  — частота линейных колебаний частиц цепочки за счет связи вблизи положений равновесия,  $v = v_0 b / \omega_M$ ,  $\mu = \gamma_0 / m \omega_M$ . Предполагается, что уравнения удовлетворяют периодическим граничным условиям:  $q_{N+1} = q_1$ ,  $v_{N+1} = v_1$ , где  $v_i = \frac{dq_i}{d\tau}$ . В качестве начальных условий используется либо заданный набор начальных значений скоростей частиц  $v_i(t=0) = v_{i0}$  при  $q_i(t=0) = 0$ , чтобы возбудить необходимую стационарную моду, либо значения  $v_i(t=0)$  задаются случайным образом, чтобы имитировать старт со случайных начальных условий. Без потери общности при моделировании полагается  $v_0 = 1$ . Уравнения решаются численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка с тщательным контролем точности расчетов и выполнения законов сохранения.

### 3. Механизм возникновения диссипативных солитонов

Исследуем механизм возникновения диссипативных солитонов в равновесной цепочке, которая в начальный момент времени каким-либо образом возмущена. Для этого зададим скорости всех элементов ансамбля равными  $v_{i0} = 1$  (условно назовем это движением вправо), кроме одной частицы с индексом  $k$ , которая получает начальный импульс той же величины, но противоположный по направлению (влево). Если потенциальное взаимодействие между частицами достаточно сильное, то в следующий момент времени произойдет обмен импульсами между  $k$ -ой и  $(k-1)$ -ой частицами, после чего  $k$ -ая частица будет двигаться со скоростью  $v \approx 1$ , а  $(k-1)$ -ая, соответственно, со скоростью  $v \approx -1$ . Таким образом, возмущение будет передаваться от частицы к частице и распространяться влево. Такое локализованное возмущение (условно можно считать, что оно локализовано на трех частицах — той, которая в данный момент движется в направлении, противоположном направлению движения ее соседей, и двух соседних) будем классифицировать как диссипативный солитон.

В цепочке с большим количеством частиц могут формироваться несколько солитонов. Так, на рисунке 2а показан случай, когда из случайных начальных условий зарождаются два солитона. Однако с течением времени они ведут себя как заряженные частицы с одинаковым знаком, то есть стремятся удалиться друг от друга. Поэтому в цепочке с периодическими граничными условиями они со временем формируют стационарное состояние с равномерным распределением солитонов по длине цепочки. На рисунке 2б изображена та же система спустя 500 единиц безразмерного времени. Видно, что солитоны равномерно распределились по ансамблю.

Механизм возникновения солитонов из случайных начальных условий требует более подробного изучения. Очевидно, что солитоны зарождаются на частицах, получивших больший начальный импульс. В таком случае при старте со случайных начальных условий можно ожидать, что солитоны распределятся по цепочке в определенной степени равномерно. Однако численные исследования показывают, что солитоны зарождаются группами. Чтобы понять, почему так происходит, проведем моделирование элементарного события, имитирующего зарождение солитона.

Для этого зададим начальные условия следующим образом. Пусть все смещения  $q_i$  и все начальные скорости  $v_i$ , за исключением одной, равны нулю. Скорость одной частицы зададим отличной от нуля,  $v_k = v_0$ ; направление скорости значения не имеет (рис. 3а,  $v_{16} = -1$ ).

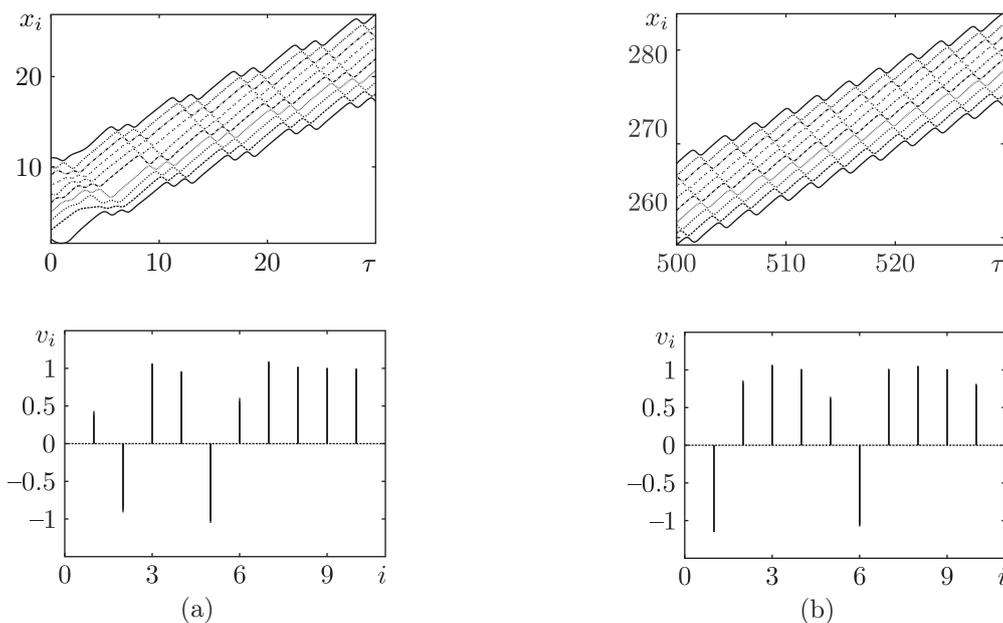


Рис. 2. Верхний ряд: траектории частиц, иллюстрирующие пару солитонов. На фрагменте (а) показана пара солитонов в начальный момент времени (солитоны находятся рядом друг с другом). На фрагменте (б) изображено состояние, когда солитоны равномерно распределены по цепочке. Нижний ряд: соответствующие распределения скорости частиц в момент времени  $\tau = 30$  (а) и  $\tau = 530$  (б).

Рассмотрим поведение ансамбля при сильной связи ( $b = 5$ ) и относительно слабом трении ( $\mu = 1$ ).

В исследуемой модели состояние каждой частицы  $v_i = 0$  является неустойчивым. Любое возмущение выводит частицу из этого состояния. Под влиянием нелинейного трения скорость частицы стремится достичь значения  $v_i = \pm 1$ . За счет потенциального взаимодействия частицы, ближайšie к возмущенной, также выходят из состояния равновесия. На рисунке 3б показано распределение скорости частиц при  $\tau = 0.1$ . Видно, что скорость двух ближайших к первоначально возмущенной частиц теперь также заметно отличается от нуля; при этом скорость пятнадцатой частицы больше, чем семнадцатой, поскольку упругость потенциала Морзе «на сжатие» сильнее, чем «на растяжение».

Далее шестнадцатая частица «отталкивается» от пятнадцатой и меняет направление скорости на противоположное (рис. 3с). При этом возмущение продолжает распространяться по цепочке. За счет упругих соударений частицы отталкиваются друг от друга, и направления их скоростей чередуются (рис. 3д).

Частицы с чередующимися направлениями скорости формируют кластер, по структуре похожий на фрагмент оптической моды (рис. 3д–е). По истечении некоторого времени переходные процессы заканчиваются, «фрагменты оптической моды» распадаются на отдельные солитоны и устанавливается распределение, показанное на рисунке 3ф.

В зависимости от жесткости потенциала  $b$  и коэффициента трения  $\mu$  из описанных выше начальных условий возбуждается различное количество солитонов. Идентифицировать количество солитонов можно по средней скорости ансамбля, руководствуясь приближенной формулой  $\langle v \rangle \approx \pm \frac{N - 2k}{N}$ , где  $N$  — количество частиц в ансамбле,  $k$  — количество солитонов.



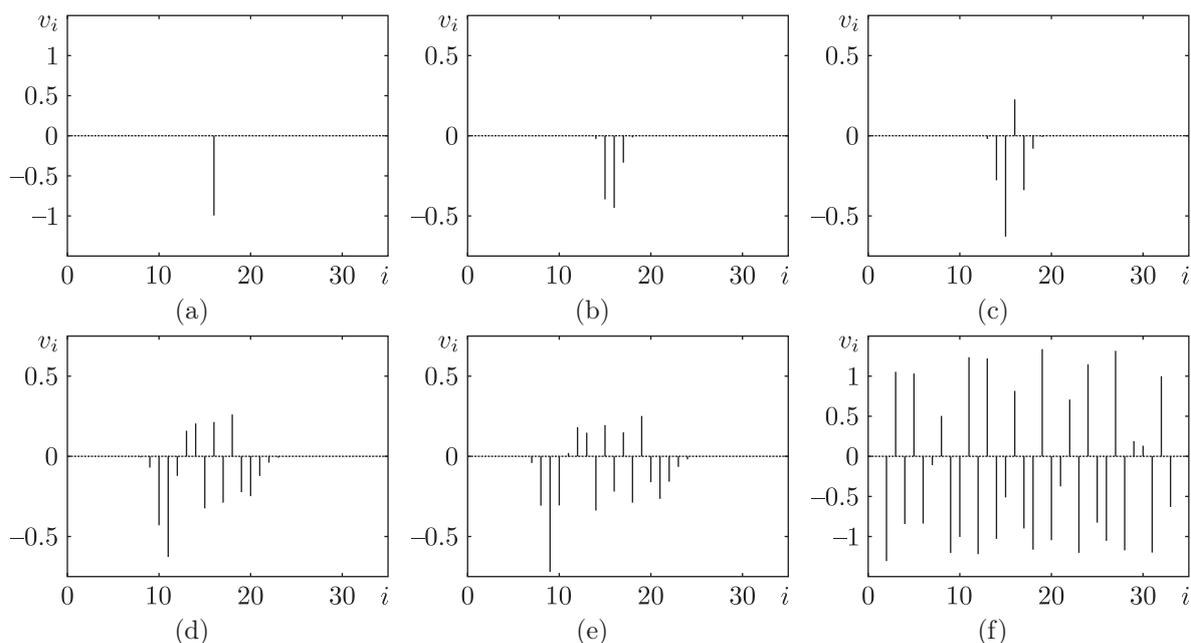


Рис. 3. Распределения скорости частиц в цепочке в различные моменты времени: (а)  $\tau = 0$ , (б)  $\tau = 0.1$ , (с)  $\tau = 0.2$ , (д)  $\tau = 0.7$ , (е)  $\tau = 0.9$ , (ф)  $\tau = 10$ ;  $N = 32$ ,  $b = 5$ ,  $\mu = 1$ .

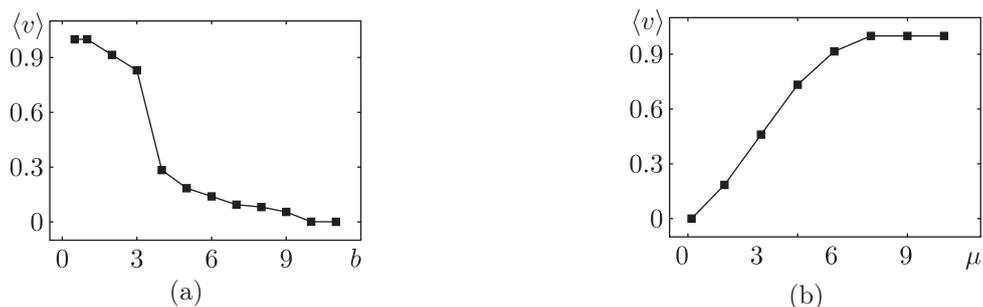


Рис. 4. (а) Зависимость модуля средней скорости от параметра  $b$  при  $\mu = 1$ ,  $N = 32$ . (б) Зависимость модуля средней скорости от параметра  $\mu$  при  $b = 5$ ,  $N = 32$ .

На рисунке 4а–б показаны зависимости средней скорости от управляющих параметров. Видно (рис. 4а), что при малой «жесткости» потенциала  $b$  средняя скорость близка к единице. Это означает, что либо образуется мало солитонов ( $|\langle v \rangle| \approx 1$ ), либо скорости всех частиц ансамбля следуют скорости первоначально возмущенной частицы ( $|\langle v \rangle| = 1$ , то есть солитонов нет). При слабом потенциальном взаимодействии частицы отталкиваются недостаточно сильно для того, чтобы «отразиться» и изменить направление скорости на противоположное, и большая часть частиц движется в одном направлении. С ростом жесткости потенциала все больше частиц меняют направление скорости при взаимодействии и, соответственно, возникает множество солитонов.

Зависимость средней скорости от параметра  $\mu$  (рис. 4б) имеет противоположный характер. С ростом  $\mu$  средняя скорость увеличивается, так как влияние потенциального взаимодействия становится слабым по сравнению с трением, поэтому большинство частиц не изменяют свою скорость при взаимодействии с соседями и почти все частицы движутся в одном направлении, определяемом скоростью первоначально возмущенной частицы.

### 4. Формирование солитонных кластеров

Важной проблемой динамики цепочки активных частиц является определение статистики возбуждения кластеров различной длины при старте цепочки из случайных начальных условий, в определенной степени имитирующих реальное состояние цепочки при ненулевой температуре. Под случайными начальными условиями подразумевается состояние, при котором, для простоты, частицы находятся в положении равновесия  $q_i(t = 0) = 0$ , а их скорости являются случайными величинами с нормальным гауссовым распределением  $v_{i0} = v_{s0}\xi_i(t)$ . Здесь параметр  $v_{s0}$  характеризует величину начального возмущения. При некоторых реализациях случайных начальных условий в ансамбле формируются солитоны и солитонные кластеры. Принципиальным является вопрос о количестве солитонов, формирующих кластер. Статистика формирования кластеров изучалась следующим образом: по 1024 различным реализациям случайных начальных условий строилось распределение вероятностей формирования кластеров  $P_K$ , где  $K$  — количество солитонов, образующих кластер, а величина  $3K$  может быть названа длиной солитонного кластера (рис. 5).

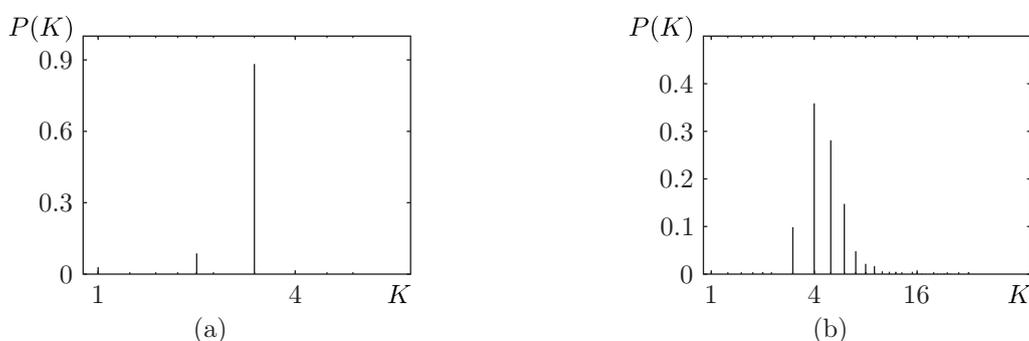


Рис. 5. Функция распределения вероятности возбуждения кластеров различной длины  $K$  в цепочке с  $N = 10$  (a) и  $N = 80$  (b). Значения параметров:  $b = 5, \mu = 1, v_{s0} = 10$ .

Напомним, что солитон в рассматриваемой системе локализован на трех частицах: одна частица представляет собой центр (или ядро) солитона, а две соседних оказываются в определенной степени возмущенными. В численном эксперименте размер кластера определяется из геометрических соображений. Солитоны считаются образовавшими кластер, если расстояние между их ядрами составляет две частицы. Таким образом, двухсолитонный кластер локализован на шести частицах. Этот факт накладывает некоторые ограничения на размеры ансамбля: в малых ансамблях существование крупных кластеров невозможно.

Численные эксперименты показали, что если количество частиц в ансамбле менее 30, форма распределения вероятностей кластеров зависит от размера ансамблей. Если же в ансамбль входит более 30 частиц, изменение количества частиц в ансамбле не влияет на статистику распределения кластеров (см. рис. 5b). Функции распределения для ансамблей из 50 и 80 частиц совпадают количественно, поэтому для дальнейших исследований был выбран ансамбль из 80 частиц, для которого функция распределения заведомо уже не зависит от количества частиц.

Помимо функции распределения, интерес представляет зависимость наиболее вероятного размера возбуждающихся кластеров от управляющих параметров. Эти зависимости от различных параметров приведены на рисунке 6.

Как следует из полученных результатов, в большинстве случаев наиболее вероятно возникновение кластера из 4–5 солитонов.



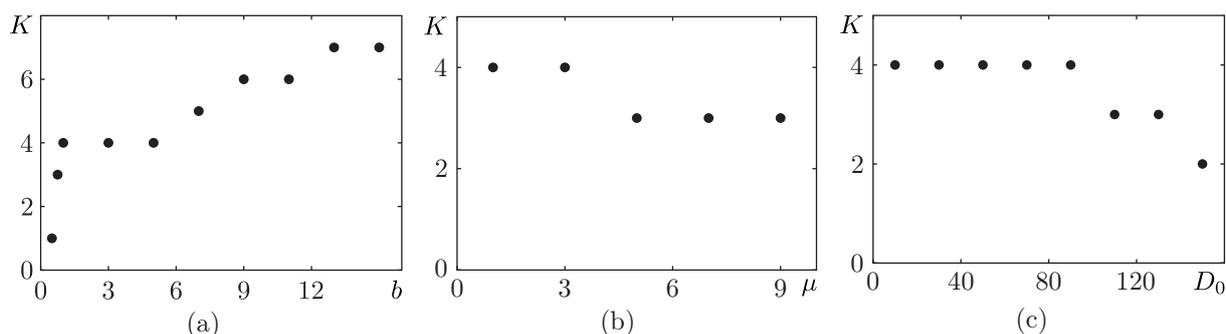


Рис. 6. Зависимость наиболее вероятного размера кластеров  $K$  от управляющих параметров: (а) от параметра  $b$  при  $\mu = 1$ ,  $v_{s0} = 10$ , (б) от параметра  $\mu$  при  $b = 5$ ,  $v_{s0} = 10$ , (с) от уровня  $v_{s0}$  при  $b = 5$ ,  $\mu = 1$ .

Увеличение «жесткости» потенциала  $b$  приводит к увеличению характерного размера кластера (рис. 6а). Предположим, что в некоторой реализации случайных начальных условий одна из частиц получает сильный «толчок». Поскольку она связана с соседними частицами, они также возмущаются. Очевидно, что чем больше жесткость потенциала, тем быстрее и на большее расстояние распространится возмущение. Таким образом, одна возмущенная частица формирует солитон и возбуждает в своей окрестности другие солитоны, причем их количество будет больше, если частицы сильнее взаимодействуют.

Влияние на размер кластера оказывает также величина отрицательного трения  $\mu$  (рис. 6б). Большое трение препятствует изменению скорости частицы, поэтому с ростом параметра  $\mu$  возбуждение солитонов становится все более затруднительным, вследствие чего наиболее вероятный размер кластера также уменьшается.

Еще один параметр, влияющий на размер кластера, — величина начальных возмущений скорости  $v_{s0}$  (рис. 6с). Из результатов моделирования следует, что с ростом величины начальных возмущений происходит снижение характерного размера кластеров. Напомним, что кластер возникает потому, что одна возмущенная частица формирует солитон, который возбуждает в своей окрестности другие солитоны. Большие начальные возмущения будут препятствовать возбуждению соседних солитонов, а следовательно, чем выше  $v_{s0}$ , тем меньше наиболее вероятный размер кластеров.

Однако наиболее вероятным событием при старте со случайных начальных условий является формирование фрагментов оптической моды. Для анализа их эволюции рассмотрим ансамбль из 100 частиц с параметрами  $b = 5$ ,  $\mu = 1$  и зададим начальные условия таким образом, чтобы частицы с номерами с 82 по 98 образовали фрагмент оптической моды.

На рисунке 7а представлена пространственно-временная диаграмма, на которой цветом<sup>а</sup> показана скорость частиц. Видно, что фрагмент оптической моды начинает распадаться практически сразу (на рис. 8 показаны распределения скорости частиц по ансамблю в различные моменты времени). В начальный момент времени  $\tau = 0$  в этом фрагменте скорости частиц по модулю близки к 1, а по направлению чередуются.

По прошествии интервала времени порядка 0.1 от фрагмента отделяется солитон, находящийся в его «голове» (рис. 8б). Видно, что частица с отрицательной скоростью отделена от фрагмента оптической моды двумя частицами с положительной скоростью. Эта частица является ядром диссипативного солитона, который она образует вместе с двумя своими

<sup>а</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1603004/>

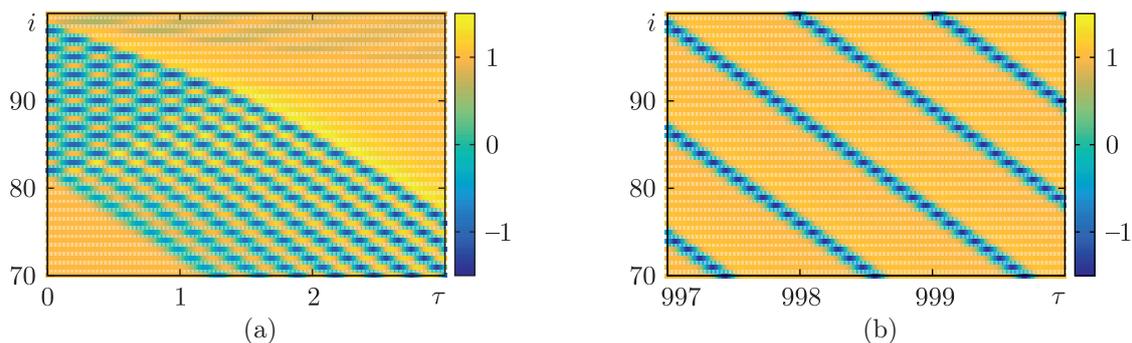


Рис. 7. Эволюция фрагмента оптической моды на диаграмме, представляющей «траектории» частиц в пространстве скоростей, то есть зависимости скоростей частиц от времени. По вертикальной оси отложен номер частицы, а цветом показано значение скорости: (а) фрагмент цепочки на этапе разрушения оптической моды, (б) тот же фрагмент по прошествии примерно 150 периодов Морзе-осцилляций.

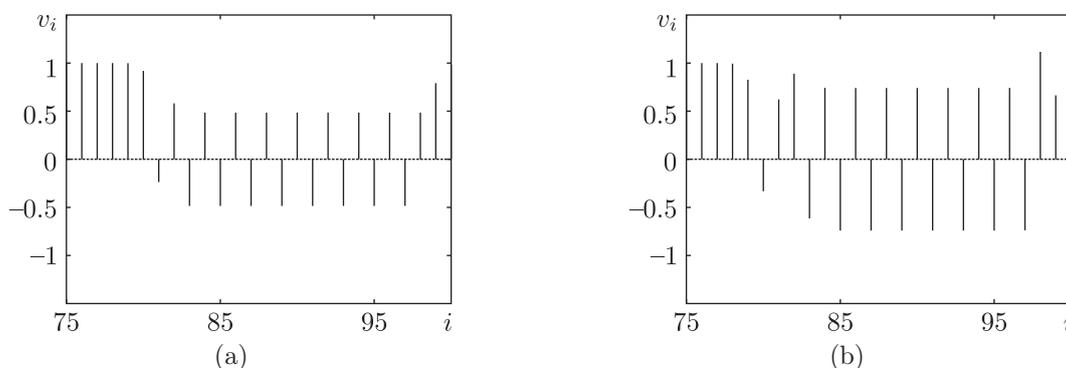


Рис. 8. Распределение скоростей частиц в фрагментах цепочки в моменты времени  $\tau = 0.13$  (а) и  $\tau = 0.26$  (б);  $N = 100$ ,  $b = 5$ ,  $\mu = 1$ .

соседями. Моментом рождения солитона условно можно считать момент, когда ядро и фрагмент оптической моды начинают разделять две частицы.

После этого от оставшейся части фрагмента опять отделяется солитон, и так далее до тех пор, пока фрагмент не превратится полностью в солитонный кластер, под которым мы будем понимать долгоживущий ансамбль близко расположенных диссипативных солитонов. Его время жизни значительно превосходит время жизни фрагмента оптической моды (рис. 10а) и зависит от параметров системы, в первую очередь от параметра жесткости связи  $b$  (рис. 10б). На рисунке 10б приведена зависимость характерного времени отделения первого и девятого солитона от оптической моды, локализованной на 18 частицах, от параметра  $b$ : видно, что характерные времена полного распада начального фрагмента оптической моды на отдельные солитоны не превышают 10 при малых значениях  $b$  и с увеличением параметра жесткости уменьшаются, достигая значений 1 и менее. Изменения других параметров слабо влияют на значения характерного времени. Отсюда следует, что фрагмент оптической моды в длинной цепочке является неустойчивым состоянием с коротким временем жизни, поэтому можно полагать, что такие состояния дают малый вклад в макроскопические характеристики цепочки.

Образовавшийся солитонный кластер также неустойчив, причем сценарий его разрушения аналогичен сценарию разрушения фрагмента оптической моды, однако характерные времена значительно больше.

## 5. Динамика солитонов в цепочке с периодическими граничными условиями

Как было показано ранее [15, 16, 19], в рассматриваемой цепочке с периодическими граничными условиями устойчивым является состояние, при котором солитоны на кольце распределены равномерно. Следовательно, состояние, в котором пара диссипативных солитонов находится на небольшом расстоянии друг от друга, является метастабильным. Процесс перехода к стационарному равномерному распределению солитонов занимает существенное время, зависящее от управляющих параметров.

Напомним, что диссипативный солитон дислоцируется на одной частице (ядро солитона), а две соседних с ней оказываются в разной степени возмущенными. Для определенности будем считать, что диссипативный солитон локализован на трех частицах, а состояние, в котором солитоны расположены рядом друг с другом, то есть когда центры солитонов разделены двумя частицами, имеющими другое направление скорости, будем рассматривать как солитонный кластер. На первый взгляд, при «старте» цепочки из стохастических начальных условий должны преимущественно возбуждаться произвольно расположенные в цепочке солитоны. Однако численные эксперименты показывают, что сначала формируются солитонные кластеры, которые затем медленно трансформируются в стационарные моды-аттракторы с равномерным распределением солитонов в цепочке. Поэтому солитонные кластеры можно рассматривать как метастабильные состояния с большим временем жизни, которые могут влиять на интегральные характеристики системы, особенно находящейся под внешним шумовым воздействием. Этим обусловлен интерес к изучению эволюции солитонных кластеров.

Из рисунка 9а видно, что начальное состояние в форме солитонного кластера сохраняется почти неизменным в течение длительного времени. Однако в результате маленьких деформаций по прошествии определенного времени от кластера отделяется солитон. Размер кластера уменьшается на один солитон (три частицы), и появляется уединенный солитон, ядро которого отделено от ближайшего солитона в кластере тремя частицами. Далее отделяется следующий солитон, и этот процесс повторяется, пока кластер не распадется на отдельные солитоны, которые стремятся равномерно распределиться по цепочке с периодическими граничными условиями.

Отделение первого (головного) солитона от кластера в цепочке с  $b = 5$ ,  $\mu = 1$  происходит через время  $\tau \approx 8$  (для фрагмента оптической моды аналогичное значение характери-

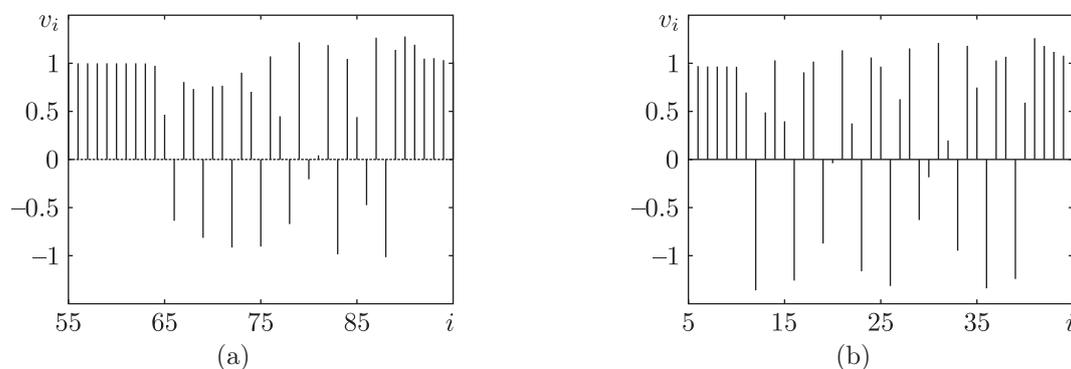


Рис. 9. Кластер из 9 солитонов при  $\tau \approx 2$  (а) и отделившийся солитон и кластер из 8 солитонов при  $\tau \approx 8$  (б);  $N = 100$ ,  $b = 5$ ,  $\mu = 1$ .

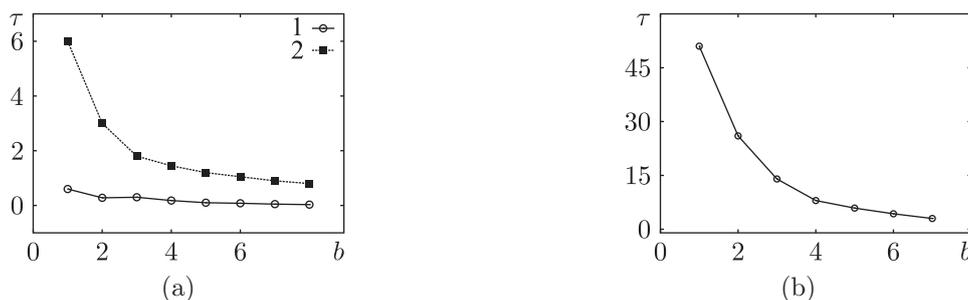


Рис. 10. (а) Характерное время для отделения от фрагмента оптической моды первого (кривая 1) и девятого (кривая 2) солитонов в зависимости от параметра жесткости потенциала  $b$ . (б) Зависимость времени, за которое солитон отделяется от кластера, от параметра  $b$ . Здесь  $N = 100$ ,  $\mu = 1$ .

стического времени составляло  $\tau \approx 0.5$ ). Скорость удаления солитонов друг от друга экспоненциально падает с ростом расстояния между ними. Поэтому расстояние «в три частицы» между ядрами отделившегося и ближайшего к нему солитонов сохраняется в течение длительного времени. При этом от кластера продолжают отделяться солитоны (рис. 10а).

Зависимость времени, за которое солитон отделяется от кластера, от параметра  $b$ , приведена на рисунке 10б. Из нее следует, что с ростом  $b$  значение характеристического времени падает, однако при  $b \approx 3, \dots, 5$  оно составляет примерно 10.

Существенное влияние на длительность переходного процесса оказывает нелинейное трение (значение параметра  $\mu$ ). Компьютерный эксперимент для доказательства этого факта осуществлялся следующим образом. Сначала выявлялся такой набор случайных начальных условий, при котором возбуждалась пара солитонов. Расстояние между их ядрами при этом составляло одну частицу. Переходный процесс считался завершенным, когда расстояние между ядрами солитонов увеличивалось до половины размера ансамбля. На рисунке 11 показано семейство зависимостей длительности переходного процесса от коэффициента трения  $\mu$  для различных размеров ансамбля и  $b = 1$ . Видно, что зависимости имеют экспоненциальный характер и довольно точно аппроксимируются функцией вида  $y = \alpha + \beta e^{\eta x}$ , то есть чем больше величина трения, тем длительнее переходный процесс.

Время установления зависит и от величины коэффициента  $b$ . Чем выше жесткость, тем быстрее устанавливается равномерное распределение солитонов в цепочке. Так, если при  $\mu = 1$  и  $b = 1$  длительность переходного процесса приблизительно 200, то при  $\mu = 1$  и  $b = 4$  стационарное распределение устанавливается примерно в 6 раз быстрее.

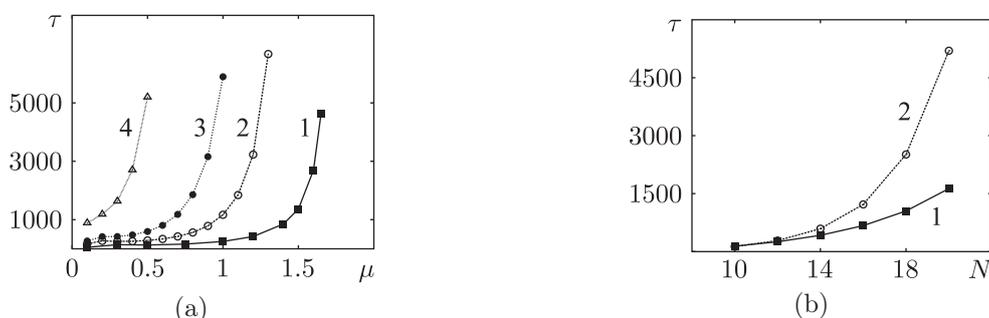


Рис. 11. (а) Семейство зависимостей длительности переходного процесса от параметра  $\mu$  при  $b = 1$  в цепочках различной длины: 1)  $N = 10$ , 2)  $N = 12$ , 3)  $N = 14$ , 4)  $N = 20$ . (б) Зависимость длительности переходного процесса от количества частиц  $N$  при  $\mu = 3$  (кривая 1) и  $\mu = 5$  (кривая 2),  $b = 1$ .

## 6. Заключение

Представлены результаты численного моделирования динамики одномерного ансамбля взаимодействующих активных частиц с нелинейным трением в форме Рэлея и связанных силами с потенциалом Морзе.

Показано, что в подобных цепочках возможно возбуждение мод с неравномерным распределением максимумов плотности частиц в цепочке. Такие моды являются метастабильными с достаточно длительным (сотни и более периодов Морзе-осцилляций) временем жизни. Время жизни этих состояний нарастает по экспоненте от количества частиц в ансамбле.

Исследован механизм возникновения метастабильных состояний из начальных условий. При достаточно жесткой связи одна возмущенная частица возбуждает в своей окрестности несколько диссипативных солитонов, которые спустя короткий период установления образуют солитонный кластер. Показано, как наиболее вероятный размер кластера зависит от управляющих параметров.

Авторы благодарны проф. В. Эбелингу и проф. М. Веларде за полезные обсуждения результатов работы.

## Список литературы

- [1] Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems: Los Alamos Report LA-1940, 1955. 22 pp.
- [2] Toda М. Теория нелинейных решеток. Москва: Мир, 1984. 262 с.
- [3] Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. Москва: Либроком, 2010. 552 с.
- [4] Молекулярная динамика ферментов / Ю. М. Романовский, В. Эбелинг (ред.). Москва: МГУ, 2000. 169 с.
- [5] Stochastic dynamics of reacting biomolecules / W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, Yu. M. Romanovsky (Eds.). Singapore: World Sci., 2002. 344 pp.
- [6] Nekorkin V. I., Velarde M. G. Synergetic phenomena in active lattices: Patterns, waves, solitons, chaos. (Springer Series in Synergetics.) Berlin: Springer, 2002. 357 pp.
- [7] Ebeling W., Schweitzer F., Tilch B. Active Brownian particles with energy depots modeling animal mobility // Biosystems, 1999, vol. 49, no. 1, pp. 17–29.
- [8] Schweitzer F., Ebeling W., Tilch B. Complex motion of Brownian particles with energy depots // Phys. Rev. Lett., 1998, vol. 80, no. 23, pp. 5044–5048.
- [9] Erdman U., Ebeling W., Schimansky-Geier L., Schweitzer F. Brownian particles far from equilibrium // Eur. Phys. J. B, 2000, vol. 15, no. 1, pp. 105–113.
- [10] Schweitzer F. Brownian agents and active particles: Collective dynamics in the natural and social sciences. Berlin: Springer, 2003. 421 pp.
- [11] Romanczuk P., Erdmann U. Collective motion of active Brownian particles in one dimension // Eur. Phys. J. Special Topics, 2010, vol. 187, no. 1, pp. 127–134.
- [12] Romanczuk P., Bär M., Ebeling W., Lindner B., Schimansky-Geier L. Active Brownian particles: From individual to collective stochastic dynamics // Eur. Phys. J. Special Topics, 2012, vol. 202, no. 1, pp. 1–162.
- [13] Ebeling W., Erdman U., Dunkel J., Jenssen M. Nonlinear dynamics and fluctuations of dissipative Toda chains // J. Stat. Phys., 2000, vol. 101, no. 1, pp. 443–457.
- [14] Dunkel J., Ebeling W., Erdman U. Thermodynamics and transport in an active Morse ring chain // Eur. Phys. J. B, 2001, vol. 24, no. 4, pp. 511–524.
- [15] Makarov V. A., del Río E., Ebeling W., Velarde M. G. Dissipative Toda–Rayleigh lattice and its oscillatory modes // Phys. Rev. E, 2001, vol. 64, no. 3, 036601, 14 pp.
- [16] Ebeling W., Landa P. S., Ushakov V. G. Self-oscillations in ring Toda chains with negative friction // Phys. Rev. E, 2001, vol. 63, no. 4, 046601, 8 pp.

- [17] Dunkel J., Ebeling W., Erdmann U., Makarov V. A. Coherent motions and clusters in a dissipative Morse ring chain: Spatio-temporal complexity // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2002, vol. 12, no. 11, pp. 2359–2377.
- [18] Chetverikov A. P., Dunkel J. Phase behavior and collective excitations of the Morse ring chain // *Eur. Phys. J. B*, 2003, vol. 35, no. 2, pp. 239–253.
- [19] del Río E., Makarov V. A., Velarde M. G., Ebeling W. Mode transitions and wave propagation in a driven-dissipative Toda–Rayleigh ring // *Phys. Rev. E*, 2003, vol. 67, no. 5, 056208, 9 pp.
- [20] Dunkel J., Ebeling W., Schmelzer J., Ropke G. A dissipative one-dimensional collision model with intermediate energy storage // *Phys. D*, 2003, vol. 185, nos. 3–4, pp. 158–174.
- [21] Chetverikov A. P., Ebeling W., Velarde M. G. Thermodynamic and phase transitions in dissipative and active Morse chain // *Eur. Phys. J. B*, 2005, vol. 44, no. 4, pp. 509–519.
- [22] Velarde M. G., Ebeling W., Chetverikov A. P. On the possibility of electric conduction mediated by dissipative solitons // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2005, vol. 15, no. 1, pp. 245–251.
- [23] Chetverikov A. P., Ebeling W., Velarde M. G. Nonlinear excitations and electric transport in dissipative Morse–Toda lattices // *Eur. Phys. J. B*, 2006, vol. 51, no. 1, pp. 87–99.
- [24] Chetverikov A. P., Ebeling W., Velarde M. G. Dissipative solitons and complex currents in active lattices // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2006, vol. 16, no. 6, pp. 1613–1632.
- [25] Makarov V. A., Velarde M. G., Chetverikov A. P., Ebeling W. Anharmonicity and its significance to non-Ohmic electric conduction // *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, no. 6, 066626, 12 pp.
- [26] Chetverikov A. P., Ebeling W., Velarde M. G. Dynamical clustering in chains of atoms with exponential repulsion // *Nucleation theory and applications* / J. W. P. Schmelzer, G. Röpke, V. B. Priezhev (Eds.). Dubna: Joint Inst. Nucl. Res., 2006. P. 62–81.
- [27] Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука: В 2-х тт.: Т. 1. 2-е изд. Москва: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
- [28] Velarde M. G. Solitons as dissipative structures // *Int. J. Quantum Chem.*, 2004, vol. 98, no. 2, pp. 272–280.
- [29] Кернер В. С., Осипов В. В. Автосолитоны. Москва: Наука, 1991. 200 с.

## Metastable states in the Morse – Rayleigh chain

Konstantin S. Sergeev<sup>1</sup>, Alexander P. Chetverikov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>National Research Saratov State University

Astrakhanskaya 83, Saratov, 410012, Russia

<sup>1</sup>kssergeev@mail.ru, <sup>2</sup>chetvap@rambler.ru

The dynamics of a dense ensemble of interacting active Brownian particles is studied. Nonlinear negative friction is described in the sense of Rayleigh; particles are interconnected via Morse potential forces. Such a chain can be considered as an ensemble of interconnected Rayleigh oscillators.

The stationary modes (attractors) of chains with periodic boundary conditions looks like cnoidal waves. They are characterized by a uniform distribution of the density maxima of particles in the chain. However, when the chain starts with random initial conditions, a state of nonuniformly distribution of density maxima arises first. This state is metastable and the transition to a stable mode corresponds to a long transition process.

Characteristics of metastable states, regularities and probability of their occurrence and their lifetimes are studied by methods of computer simulation.

MSC 2010: 90B10, 34D20, 37K40, 35Q51

Keywords: active particles, solitons, collective dynamics, ensembles

Received June 30, 2016, accepted July 19, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 341–353 (Russian)

