Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 3. С. 355–367.
Полнотекстовая версия в свободном доступе http://nd.ics.org.ru
DOI: 10.20537/nd1603005

ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9
MSC 2010: 37K35, 53D22, 70H06

Об одной интегрируемой системе на плоскости с потенциалом, зависящим от скорости

Ю. А. Григорьев, А. П. Созонов, А. В. Цыганов

Обсуждается алгоритм построения преобразований Бэклунда уравнений Гамильтона–Якоби и применение этих преобразований для построения новых интегрируемых систем с интегралами движения старших степеней по импульсам. Приведены явные выражения для преобразований Бэклунда для систем на плоскости, допускающих интегрирование в абелевых квадратурах с использованием стандартных параболических и эллиптических координат.

Ключевые слова: интегрируемые системы, разделение переменных, зависящий от скоростей потенциал

Получено 06 июня 2016 года
После доработки 25 июня 2016 года

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-31-00090 мол_а (Ю. А. Григорьев, А. П. Созонов, разделы 2 и 3). Работа А. В. Цыганова над первым разделом данной статьи поддержана грантом РНФ №15-11-30007.

Григорьев Юрий Александрович
yury.grigoryev@gmail.com
Созонов Алексей Петрович
sozonov.alexey@yandex.ru
Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7-9

1. Введение

В работах [9, 11, 12] построены новые интегрируемые системы с двумя степенями свободы и интегралами движения второй и четвертой степени по импульсам, для которых потенциал, входящий в гамильтониан, линейно зависит от скорости. Для построения этих систем использовались преобразования Бэклунда [10] уравнений Гамильтона–Якоби, которые допускают разделение переменных в параболических координатах на плоскости и эллиптических координатах на сфере. Целью данной работы является построение новой интегрируемой системы, координаты разделения для которой могут быть построены из эллиптических координат на плоскости с помощью преобразования Бэклунда.

Рассмотрим гамильтонову систему на плоскости, которая задается функцией Гамильтона натурального вида

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - V(q_1, q_2) \tag{1.1}$$

и канонической скобкой Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Согласно теореме Бертрана–Дарбу, соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби $H = E$ интегрируется в квадратурах, если потенциал имеет специальный вид в декартовых, полярных, параболических или эллиптических координатах на плоскости. Например, если потенциал имеет вид

$$V = \frac{U(u_1) - U(u_2)}{u_1 - u_2},$$

где $u_{1,2}$ — эллиптические координаты на плоскости, то функции $u_{1,2}(t)$ находятся из уравнений

$$\int^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \int^{u_2} \frac{du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = t + \beta_1, \qquad \int^{u_2} \frac{u_1 du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \int^{u_2} \frac{u_2 du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = \beta_2. \tag{1.2}$$

Входящая в эти квадратуры функция $f(u)$ определяется по функции $U(u)$, входящей в определение потенциала V. Явные решения этих уравнений были получены Якоби и Вейерштрассом в частном случае

$$f(u) = a_6 u^6 + a_5 u^5 + a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

В этом же случае мы можем явно построить автопреобразование Бэклунда, сохраняющее не только гамильтонову форму уравнений движения, но и форму уравнения Гамильтона–Якоби. Кроме того, именно в этом случае можно явно построить гетеропреобразование Бэклунда, связывающее различные уравнения Гамильтона–Якоби.

В данной работе используется алгоритм построения преобразований Бэклунда, описанный в работе [14]. В отличие от работ [9, 11, 12], для построения искомых переменных разделения мы вместо матриц Лакса будем использовать дифференциальные уравнения Абеля и их свойства.

В первом разделе на примере систем с двумя степенями свободы, допускающими разделение переменных в методе Якоби, описана связь между преобразованием Бэклунда и дифференциальными уравнениями Абеля. Рассмотрено общее преобразование Бэклунда и его частный случай для гамильтоновых систем, интегрирование которых сводится к абелевым квадратурам на гиперэллиптических кривых второго рода.

Во втором разделе мы воспроизведем один из результатов работ [9, 12], используя рассмотренный в первом разделе алгоритм построения преобразований Бэклунда. В работах [9, 12] частный случай общего преобразования Бэклунда был получен с помощью

(2×2)-матрицы Лакса и некоторого дополнительного условия на калибровочное преобразование этой матрицы. В данной работе в качестве примера мы ограничимся рассмотрением интегрируемой системы на плоскости, допускающей разделение переменных в параболической системе координат, построим соответствующее автопреобразование Бэклунда и применим его для построения интегрируемой системы на плоскости с интегралами движения второй и четвертой степени по импульсам.

В третьей части работы мы применим ту же самую процедуру к интегрируемой системе на плоскости, допускающей разделение переменных в эллиптической системе координат. В результате мы получим новую интегрируемую систему на плоскости с интегралами движения второй и четвертой степени по импульсам, в которой потенциал линейно зависит от скорости.

Напомним, что обобщенный потенциал может быть только линейной функцией от обобщенных скоростей. Соответствующие силы называются гироскопическими силами, например сила Кориолиса или Лоренца (см. обсуждение и ссылки в работах [2, 5–8]).

2. Преобразование Бэклунда для систем Якоби с двумя степенями свободы

Рассмотрим два гамильтоновых потока

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt_1} &= \{x_1, H_1\} = \frac{y_1}{x_1 - x_2}, \qquad & \frac{dx_2}{dt_1} &= \{x_2, H_1\} = -\frac{y_2}{x_1 - x_2}, \\ \frac{dx_1}{dt_2} &= \{x_1, H_2\} = -\frac{x_2 y_1}{x_1 - x_2}, \qquad & \frac{dx_2}{dt_2} &= \{x_2, H_2\} = \frac{x_1 y_2}{x_1 - x_2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

на фазовом пространстве M, $\dim M = 4$, с координатами $x_{1,2}$ и $y_{1,2}$. Входящие в это определение гамильтонианы $H_{1,2}$ находятся в инволюции

$$\{H_1, H_2\} = 0$$

относительно скобки Пуассона $\{.,.\}$. В этом случае переменные $x_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} = dt_1, \qquad \frac{x_1 dx_1}{y_1} + \frac{x_2 dx_2}{y_1} = dt_2, \tag{2.2}$$

где $y_{1,2}$ находятся из уравнений Гамильтона–Якоби

$$H_{1,2}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \alpha_{1,2}. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.2) сводятся к квадратурам (1.2), если мы предположим, что уравнения Гамильтона–Якоби (2.3) обладают общим полным интегралом вида

$$W(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(x_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(x_2, \alpha_1, \alpha_2), \qquad \alpha_{1,2} \in \mathbb{R},$$

таким, что уравнения Якоби имеют вид

$$y_i = \frac{\partial W_i(x_1, \alpha_1, \alpha_2)}{\partial x_i} \equiv \sqrt{f_i(x_i)}.$$

Далее мы ограничимся случаем, когда $f(x)$ является неприводимым полиномом шестой степени

$$f(x) = a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{2.4}$$

коэффициенты которого a_i зависят от гамильтонианов $H_{1,2}$ и других постоянных параметров, определяющих динамику системы.

Уравнения (2.1) и (2.2) с $y_i^2 = f(x_i)$ (2.4) были получены Якоби при исследовании движения в задаче двух центров и движения по геодезическим на эллипсоиде. Эти же уравнения возникают при разделении переменных для систем Неймана, Гарнье, Росохатиуса, Эно – Хейлеса, Клебша, Стеклова, волчков Ковалевской и Горячева – Чаплыгина и многих других интегрируемых систем [2, 3].

Определение. Автопреобразованием Бэклунда уравнений Гамильтона – Якоби $H_i = E_i$ называется преобразование переменных, которое сохраняет форму уравнений Гамильтона и форму уравнений Гамильтона – Якоби.

Напомним, что преобразование переменных называется *каноническим*, если это преобразование сохраняет форму уравнений Гамильтона. Преобразования Бэклунда — это канонические преобразования специального вида, которые дополнительно сохраняют форму уравнений Гамильтона – Якоби.

Предположим, что замена переменных

$$B\colon (x_1, y_1, x_2, y_2) \to (x_3, y_3, x_4, y_4) \tag{2.5}$$

является автопреобразованием Бэклунда. В этом случае координаты $x_{3,4}$ удовлетворяют уравнениям (2.2)

$$\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2} = dt_1 = \frac{dx_3}{y_3} + \frac{dx_4}{y_4}\,,$$
$$\frac{x_1dx_1}{y_1} + \frac{x_2dx_2}{y_1} = dt_2 = \frac{x_3dx_3}{y_3} + \frac{x_4dx_4}{y_4}\,,$$

или

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \frac{dx_3}{-\sqrt{f(x_3)}} + \frac{dx_4}{-\sqrt{f(x_4)}} = 0,\\ \frac{x_1dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} + \frac{x_3dx_3}{-\sqrt{f(x_3)}} + \frac{x_4dx_4}{-\sqrt{f(x_4)}} = 0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Эти уравнения совпадают с дифференциальными уравнениями Абеля на гиперэллиптической кривой второго рода

$$\mathcal{C}\colon y^2 = f(x) \tag{2.7}$$

благодаря существованию стандартной гиперэллиптической инволюции $\sigma\colon (y, x) \to (-y, x)$, которая не меняет уравнения (2.7).

Решения уравнения Абеля являются точками пересечения постоянной гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$ (2.7) с семейством кривых, задаваемых кубическим по x уравнением

$$g(x, y) = y - P(x), \qquad P(x) = \sqrt{a_6}x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0. \tag{2.8}$$

Подставляя $y = P(x)$ в уравнение $f(x) - y^2 = 0$ (2.7), получим полином Абеля пятой степени

$$\psi(x) = f(x) - P(x)^2 = \Big(a_5 - 2\sqrt{a_6}b_2\Big)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - \lambda), \tag{2.9}$$

который связывает абсциссы пяти точек пересечения кривых $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$

$$p_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}), \qquad p_{3,4} = (x_{3,4}, -y_{3,4}) \quad \text{и} \quad p_5 = (\lambda, \mu).$$

Шестая точка пересечения находится на бесконечности.

В этом полиноме пятой степени по x четыре корня $x_1, \ldots, x_4$, входящие в уравнения (2.6), зависят от времени, а пятый корень λ не зависит от времени. Соответствующая ордината неподвижной точки пересечения

$$\mu = P(\lambda), \qquad \text{или} \qquad \mu = \sqrt{f(\lambda)} \equiv \sqrt{a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0} \quad (2.10)$$

является интегралом движения, то есть функцией на фазовом пространстве, в отличие от абсциссы λ, которая является произвольным параметром.

Так как

$$y_1 - P(x_1) = 0, \qquad y_2 - P(x_2) = 0 \quad \text{и} \quad \mu - P(\lambda) = 0,$$

то полином третьей степени $P(x)$ можно найти с помощью интерполяции по Лагранжу

$$P(x) = \sqrt{a_6}x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sqrt{a_6}(x - x_1)(x - x_2)(x - \lambda) + \\ + \frac{y_1(x - x_2)(x - \lambda)}{(x_1 - x_2)(x_1 - \lambda)} + \frac{y_2(x - x_1)(x - \lambda)}{(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda)} + \frac{\mu(x - x_1)(x - x_2)}{(\lambda - x_1)(\lambda - x_2)}.$$

В силу этого коэффициент в правой части определения полинома Абеля (2.9) равен

$$b_2 = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - \lambda)} + y_2(x_2 - x_1)(x_2 - \lambda) + \frac{\mu}{(\lambda - x_1)(\lambda - x_2)} - \sqrt{a_6}(x_1 + x_2 + \lambda).$$

Таким образом, абсциссы x_3 и x_4 третьей и четвертой точек пересечения являются корнями следующего полинома второй степени:

$$(x - x_3)(x - x_4) = \frac{f(x) - P(x)^2}{\left(a_5 - 2\sqrt{a_6}\, b_2\right)(x - x_1)(x - x_2)(x - \lambda)}. \qquad (2.11)$$

Ординаты $-y_3$ и $-y_4$ третьей и четвертой точек пересечения также являются функциями от $(x_{1,2}, y_{1,2})$ и (λ, μ), поскольку

$$-y_i = P(x_i), \qquad i = 3, 4, \qquad (2.12)$$

где мы учли знак минус в уравнениях (2.6).

Теорема. *Уравнения* (2.11) *и* (2.12) *определяют преобразование Бэклунда* (2.5) *для систем Якоби с двумя степенями свободы.*

С точки зрения современной криптографии, на гиперэллиптических кривых пара точек с координатами $(x_{1,2}, y_{1,2})$ являются «сообщением», точки с координатами $(x_{3,4}, y_{3,4})$ являются «криптограммой», а неподвижная точка с координатами (λ, μ) является открытым «ключом», с помощью которого мы шифруем или дешифруем сообщения [4]. Основное отличие в том, что в криптографии мы изучаем преобразования (2.11) и (2.12) над полем целых чисел или более сложным полем.

Рассмотрим частный случай преобразований (2.11) и (2.12), который мы будем использовать в следующих разделах. Используя сдвиг $x \to x + \alpha$, мы всегда можем положить

$$a_0 = 0$$

и поместить фиксированную точку в начало координат

$$\lambda = 0, \qquad \mu = \sqrt{f(0)} = \sqrt{a_0} = 0.$$

В этом случае

$$b_2 = \frac{y_1}{x_1(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{x_2(x_2 - x_1)} - \sqrt{a_6}(x_1 + x_2)$$

и выражения для определения координат $(x_{3,4}, -y_{3,4})$ имеют вид

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= \frac{1}{(x_1 - x_2)^2(a_5 - 2\sqrt{a_6}\, b_2)}\Big(2a_6 x_1 x_2 (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) + \\ &\quad + a_5 x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2a_4 x_1 x_2 + a_3(x_1 + x_2) + 2a_2 + \\ &\quad + \frac{a_1(x_1 + x_2) - 2\sqrt{a_6}(x_1 - x_2)(y_1 x_2^2 - y_2 x_1^2) - 2y_1 y_2}{x_1 x_2}\Big), \\ x_3 x_4 &= \frac{a_1}{x_1 x_2 (a_5 - 2\sqrt{a_6}\, b_2)}, \\ y_k &= -\sqrt{a_6}(x_k - x_1)(x_k - x_2)x_k - \frac{y_1(x_k - x_2)x_k}{(x_1 - x_2)x_1} - \frac{y_2(x_k - x_1)x_k}{(x_2 - x_1)x_2}, \quad k = 3, 4. \end{aligned} \tag{2.13}$$

3. Параболические координаты на плоскости

Пусть q_1 и q_2 — декартовы координаты на плоскости. Определим параболические координаты $u_{1,2}$ на плоскости соотношением

$$u - 2q_2 - \frac{q_1^2}{u} = \frac{(u - u_1)(u - u_2)}{u}.$$

Эти координаты образуют локальную ортогональную систему координат в области

$$u_1 < 0 < u_2,$$

в которой координатные линии являются конфокальными параболами.

Подставляя соответствующие выражения для декартовых координат и соответствующих им импульсов

$$q_1 = \sqrt{-u_1 u_2}, \quad q_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad p_1 = \frac{2\sqrt{-u_1 u_2}(p_{u_1} - p_{u_2})}{u_1 - u_2}, \quad p_2 = \frac{2(p_{u_1} u_1 - p_{u_2} u_2)}{u_1 - u_2} \tag{3.1}$$

в функцию Гамильтона (1.1), мы получим

$$H_1 = \frac{2(p_{u_1}^2 u_1 - p_{u_2}^2 u_2)}{u_1 - u_2} - V(u_1, u_2).$$

Согласно теореме Бертрана – Дарбу, соответствующая гамильтонова система интегрируема, если потенциал имеет вид

$$V(u_1, u_2) = \frac{u_1 U_1(u_1) - u_2 U_2(u_2)}{u_1 - u_2}.$$

В этом случае гамильтонов поток сохраняет еще один интеграл движения

$$H_2 = \frac{2u_1 u_2 (p_{u_1} - p_{u_2})}{u_2 - u_1} - \frac{u_1 u_2 \Big(U_1(u_1) - U_2(u_2)\Big)}{u_2 - u_1},$$

а разделенные уравнения имеют вид

$$p_{u_i}^2 = \left(\frac{\partial W_i(q_i,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial u_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(U_i(u_i) + H_1 + \frac{H_2}{u_i}\right), \qquad i=1,2. \tag{3.2}$$

Полагая

$$H_{1,2} = 2\alpha_{1,2} \qquad \text{и} \qquad U = 2u(au^3+bu^2+cu+d),$$

получим уравнения (2.2)

$$\frac{du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 4dt_1, \qquad \frac{u_1du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{u_2du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 4dt_2,$$

где $f(x)$ является полиномом шестой степени с нулевым младшим коэффициентом

$$f(u) = u(au^5+bu^4+cu^3+du^2+\alpha_1u+\alpha_2).$$

В исходных переменных соответствующий потенциал имеет вид

$$V = 2a(q_1^4+12q_1^2q_2^2+16q_2^4) + 8bq_2(q_1^2+2q_2^2)b + 2(q_1^2+4q_2^2)c + 4dq_2.$$

3.1. Преобразование Бэклунда

Построим теперь преобразование Бэклунда

$$B\colon (u_1,p_{u_1},u_2,p_{u_2}) \to (\widetilde{u}_1,\widetilde{p}_{u_1},\widetilde{u}_2,\widetilde{p}_{u_2}),$$

используя полученные ранее результаты. Для этого достаточно подставить

$$x_{1,2} = u_{1,2}, \quad y_{1,2} = u_{1,2}p_{u_{1,2}} \qquad \text{и} \qquad x_{3,4} = \widetilde{u}_{1,2}, \quad y_{3,4} = \widetilde{u}_{1,2}\widetilde{p}_{u_{1,2}}$$

в выражения (2.11) и (2.12) и разрешить их относительно $\widetilde{u}_{1,2}$ и $\widetilde{p}_{u_{1,2}}$. Например, в частном случае $\lambda=0$ (2.13) можно определить координаты $\widetilde{u}_{1,2}$

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_1+\widetilde{u}_2 &= \frac{(u_1-u_2)^2\big(a(u_1^2+u_2^2)+b(u_1+u_2)\big)+(u_1-u_2)\big(2\sqrt{a}(p_{u_1}u_2-p_{u_2}u_1)+c\big)-(p_{u_1}-p_{u_2})^2}{(u_2-u_1)\big(2a(u_1^2-u_2^2)-2\sqrt{a}(p_{u_1}-p_{u_2})+b(u_1-u_2)\big)},\\ \widetilde{u}_1\widetilde{u}_2 &= \frac{a(u_1^4-u_2^4)+b(u_1^3-u_2^3)+c(u_1^2-u_2^2)+d(u_1-u_2)-p_{u_1}^2+p_{u_2}^2}{2a(u_1^2-u_2^2)-2\sqrt{a}(p_{u_1}-p_{u_2})+b(u_1-u_2)}\end{aligned} \tag{3.3}$$

и импульсы $\widetilde{p}_{u_{1,2}}$

$$\widetilde{p}_i = \frac{p_{u_1}(u_2-\widetilde{u}_i)-p_{u_2}(u_1-\widetilde{u}_i)}{u_1-u_2} - \sqrt{a}(u_2-\widetilde{u}_i)(u_1-\widetilde{u}_i),$$

используя выражения (2.13). Подставляя переменные разделения в определение исходных физических переменных (3.1), можно явно описать данное преобразование Бэклунда в терминах исходных переменных:

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_1^2 &= \frac{8q_1^2q_2(q_1^2+2q_2^2)a+2bq_1^2(q_1^2+4q_2^2)+4cq_1^2q_2+2dq_1^2+p_1(p_1q_2-p_2q_1)}{2q_1(p_1\sqrt{a}-4aq_1q_2-bq_1)},\\ \widetilde{q}_2 &= \frac{8q_1^2(q_1^2+2q_2^2)a+4q_1(2p_1q_2-p_2q_1)\sqrt{a}+8bq_1^2q_2+4cq_1^2-p_1^2}{8q_1(p_1\sqrt{a}-4aq_1q_2-bq_1)},\\ \widetilde{p}_1 &= \widetilde{q}_1\,\frac{8q_1^2(q_1^2+6q_2^2)a^{3/2}-4q_1(p_1q_2+p_2q_1)a+(16bq_1^2q_2+4cq_1^2+p_1^2)\sqrt{a}-2bp_1q_1}{2q_1(p_1\sqrt{a}-4aq_1q_2-bq_1)},\\ \widetilde{p}_2 &= -\frac{A}{8q_1^2(p_1\sqrt{a}-4aq_1q_2-bq_1)},\end{aligned}$$

где

$$A = 64q_1^4(q_1^4 + 4q_2^4)a^{5/2} + 64q_1^3\big(q_2(3q_1^2 + 2q_2^2)p_1 - q_1(q_1^2 + 2q_2^2)p_2\big)a^2 -$$
$$- 16q_1^3\Big(\big(q_1p_1^2 + 2q_2p_1p_2 - q_1p_2^2\big) + 4q_1\big(q_2(q_1^2 - 4q_2^2)b - (q_1^2 + 2q_2^2)c + dq_2\big)\Big)a^{3/2} +$$
$$+ 8q_1\Big(q_2p_1^3 + 2q_1^2\big(2b(q_1^2 - q_2^2) + 2cq_2 + d\big)p_1 - 4q_1^3(bq_2 + c)p_2\Big)a -$$
$$-\Big(p_1^4 + 16q_1^4\big(2b^2(q_1^2 - 2q_2^2) - 4bcq_2 + bd - c^2\big)\Big)a^{1/2} - 2bq_1\Big(4bq_1^2(4q_2p_1 - q_1p_2) + 4cp_1q_1^2 - p_1^3\Big).$$

Мы приводим эти явные выражения для того, чтобы можно было непосредственно проверить сохранение формы уравнений движения, формы интегралов движения и скобки Пуассона.

Перейдем теперь к построению уравнений Гамильтона – Якоби, которые допускают разделение переменных в новых координатах $\widetilde{u}_{1,2}$, $\widetilde{p}_{u_{1,2}}$ и при этом имеют физический смысл в исходных переменных $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$. Переменные $\widetilde{u}_{1,2}$ и $\widetilde{p}_{u_{1,2}}$ удовлетворяют тем же самым разделенным уравнениям (3.2), которые мы, следуя [9, 12], перепишем в виде

$$\widetilde{p}_{u_i}^2 - u_i\left(au_i^3 + bu_i^2 + cu_i + d\right) = \frac{H_1}{2} + \frac{H_2}{2\widetilde{u}_i}, \qquad i = 1, 2.$$

Складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим пару новых интегралов движения в инволюции относительно исходных канонических скобок Пуассона

$$\widetilde{H}_1 = \sum_{i=1}^{2}\widetilde{p}_{u_i}^2 - u_i\left(au_i^3 + bu_i^2 + cu_i + d\right) = H_1 + \frac{H_2}{2}\frac{\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1\widetilde{u}_2}$$

и

$$\sqrt{\widetilde{H}_2} = \sum_{i=1}^{2}(-1)^i\Big(\widetilde{p}_{u_i}^2 - u_i\left(au_i^3 + bu_i^2 + cu_i + d\right)\Big) = H_2\frac{\widetilde{u}_2 - \widetilde{u}_1}{\widetilde{u}_1\widetilde{u}_2}.$$

В исходных переменных, после дополнительного масштабирующего преобразования

$$p_1 \to \sqrt{2}p_1, \qquad q_1 \to \frac{q_1}{\sqrt{2}},$$

новый гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_1 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - 2aq_2^2(16q_2^2 + 5q_1^2) + 2\sqrt{a}q_1\left(p_1q_2 - \frac{p_2q_1}{4}\right) - \\ - bq_2(16q_2^2 + 3q_1^2) - 2c\left(\frac{q_1^2}{4} - 4q_2^2\right) - 4dq_2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Второй интеграл движения

$$\widetilde{H}_2 = H_2^2\frac{(\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2)^2 - 4\widetilde{u}_1\widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1^2\widetilde{u}_2^2}$$

является полиномом четвертой степени по импульсам

$$\widetilde{H}_2 = \frac{p_1^4}{4} + 2\sqrt{a}p_1^3q_1q_2 - \frac{p_1^2q_1^2}{2}\Big(aq_1^2 + 12aq_2^2 + 3p_2\sqrt{a} + 6bq_2 + c\Big) + q_1^3(2aq_2 + b)p_1p_2 + \frac{ap_2^2q_1^4}{4} +$$
$$+ \sqrt{a}q_1^3\Big(6aq_2(q_1^2 + 4q_2^2) + b(q_1^2 + 12q_2^2) + 6cq_2 + 2d\Big)p_1 - \frac{\sqrt{a}q_1^4(aq_1^2 + 4aq_2^2 + 2bq_2 + c)p_2}{2} +$$
$$+ \frac{q_1^4}{4}\Big((q_1^2 + 4q_2^2)(q_1^2 - 28q_2^2)a^2 - 2\big(2q_2(3q_1^2 + 20q_2^2)b - (q_1^2 - 12q_2^2)c + 8dq_2\big)a -$$
$$- 2(q_1^2 - 6q_2^2)b^2 - 4(cq_2 + d)b + c^2\Big).$$

Эта гамильтонова система и ее интегрируемые деформации обсуждаются в работах [9, 12]. В данной работе мы воспроизвели выражения для преобразования Бэклунда (3.3), используя новый алгоритм, и описали это преобразование в терминах исходных физических переменных.

4. Эллиптические координаты

Если q_1 и q_2 — декартовы координаты на плоскости, то эллиптические координаты u_1 и u_2 определяются стандартным соотношением

$$1+\frac{q_1^2}{u-\xi_1}+\frac{q_2^2}{u-\xi_2}=\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{(u-\xi_1)(u-\xi_2)},\qquad \xi_i\in\mathbb{R},$$

где $\xi_{1,2}$ — параметры, задающие область определения координат

$$u_1<\xi_1<u_2<\xi_2.$$

Это двумерная ортогональная система координат, в которой координатными линиями являются конфокальные эллипсы и гиперболы, фокусы которых расположены в точках $\xi_{1,2}$ на оси Ox.

Подставляя соответствующие выражения для декартовых координат

$$q_1=\sqrt{\frac{(u_2-\xi_1)(\xi_1-u_1)}{\xi_2-\xi_1}},\qquad q_2=\sqrt{\frac{(\xi_2-u_1)(\xi_2-u_2)}{\xi_2-\xi_1}}\tag{4.1}$$

и соответствующих им импульсов

$$p_1=\frac{2\big(p_{u_1}(\xi_2-u_1)-p_{u_2}(\xi_2-u_2)\big)\sqrt{u_2-\xi_1}\sqrt{\xi_1-u_1}}{(u_1-u_2)\sqrt{\xi_2-\xi_1}},$$
$$p_2=\frac{2\big(p_{u_1}(\xi_1-u_1)-p_{u_2}(\xi_1-u_2)\big)\sqrt{\xi_2-u_2}\sqrt{\xi_2-u_1}}{(u_1-u_2)\sqrt{\xi_2-\xi_1}}$$

в функцию Гамильтона (1.1) с потенциалом

$$V=2a(q_1^2+q_2^2-\xi_1-\xi_2)\Big((q_1^2+q_2^2)^2-2\xi_1q_1^2-2\xi_2q_2^2+\xi_1^2+\xi_2^2\Big)-$$
$$-2b\Big((q_1^2+q_2^2)^2-(2\xi_1+\xi_2)q_1^2-(\xi_1+2\xi_2)q_2^2+\xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_2^2\Big)+2c(q_1^2+q_2^2-\xi_1-\xi_2),$$

получим

$$H_1=\frac{2(\xi_2-u_1)(\xi_1-u_1)p_{u_1}^2+2(\xi_2-u_2)(u_2-\xi_1)p_{u_2}^2}{u_2-u_1}+\frac{U(u_1)-U(u_2)}{u_1-u_2},$$

где

$$U=2u^2(au^2+bu+c).$$

Соответствующий второй интеграл движения имеет вид

$$H_2=\frac{2u_2(\xi_2-u_1)(\xi_1-u_1)p_{u_1}^2+2u_1(\xi_2-u_2)(u_2-\xi_1)p_{u_2}^2}{u_2-u_1}+\frac{u_2U(u_1)-u_1U(u_2)}{u_2-u_1},$$

так что разделенные уравнения можно переписать в виде

$$(\xi_2-u_i)(\xi_1-u_i)p_{u_i}^2=au_i^4+bu_i^3+cu_i^2+\alpha_1u_i+\alpha_2,\qquad i=1,2,\tag{4.2}$$

обозначив $H_{1,2} = -2\alpha_{1,2}$. Соответствующие квадратуры в дифференциальной форме (2.2) имеют вид

$$\frac{du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 4dt_1, \qquad \frac{u_1du_1}{\sqrt{f(u_1)}} + \frac{u_2du_2}{\sqrt{f(u_2)}} = 4dt_2,$$

где $f(x)$ является полиномом шестой степени

$$f(u) = (u-\xi_1)(u-\xi_2)(au^4 + bu^3 + cu^2 + \alpha_1 u + \alpha_2). \tag{4.3}$$

4.1. Преобразование Бэклунда

Для построения автопреобразования Бэклунда

$$B\colon (u_1, p_{u_1}, u_2, p_{u_2}) \to (\widetilde{u}_1, \widetilde{p}_{u_1}, \widetilde{u}_2, \widetilde{p}_{u_2})$$

достаточно подставить

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= u_{1,2}, \qquad y_{1,2} = (u_{1,2}-\xi_1)(u_{1,2}-\xi_2)p_{u_{1,2}},\\ x_{3,4} &= \widetilde{u}_{1,2}, \qquad y_{3,4} = (\widetilde{u}_{1,2}-\xi_1)(\widetilde{u}_{1,2}-\xi_2)\widetilde{p}_{u_{1,2}} \end{aligned}$$

в выражения (2.11) и (2.12) и разрешить их относительно $\widetilde{u}_{1,2}$ и $\widetilde{p}_{u_{1,2}}$.

В общем случае коэффициент a_0 (2.4) в полиноме (4.3) не равен нулю:

$$a_0 = \xi_1\xi_2\alpha_2.$$

Используя сдвиг по оси Ox, мы всегда можем положить один из параметров $\xi_{1,2}$ равным нулю. В этом случае $a_0 = 0$, и в частном случае $\lambda = 0$ можно определить новые переменные с помощью выражений (2.13).

Например, при $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 \equiv \xi$ координаты $\widetilde{u}_{1,2}$ удовлетворяют

$$\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2 = \frac{(u_1-u_2)^2\bigl(a(u_1^2+u_2^2-\xi u_1-\xi u_2) + b(u_1+u_2-\xi) + c\bigr) + A}{(u_1-u_2)B},$$

$$\widetilde{u}_1\widetilde{u}_2 = \frac{\xi\Bigl((u_1-u_2)\bigl(a(u_1^2+u_1u_2+u_2^2) + b(u_1+u_2) + c\bigr) + (\xi-u_1)p_{u_1}^2 - (\xi-u_2)p_{u_2}^2\Bigr)}{B},$$

где

$$A = 2\sqrt{a}(u_1-u_2)\bigl(u_2(\xi-u_1)p_{u_1} - u_1(\xi-u_2)p_{u_2}\bigr) - \bigl((\xi-u_1)p_{u_1} - (\xi-u_2)p_{u_2}\bigr)^2$$

и

$$B = a(u_1-u_2)(\xi-2u_1-2u_2) + 2\sqrt{a}\bigl((\xi-u_1)p_{u_1} - (\xi-u_2)p_{u_2}\bigr) - b(u_1-u_2).$$

Подставляя переменные разделения в определение исходных физических переменных (4.1), можно явно описать данное преобразование Бэклунда в терминах исходных переменных. Например,

$$\widetilde{q}_1^2 = -\frac{\xi(4\xi^2q_1^2 - 4\xi q_1^2(q_1^2+2q_2^2) + 4q_1^2(q_1^2+q_2^2)^2)a + 4\xi^2bq_1^2 - (4bq_1^2(q_1^2+q_2^2) - 4cq_1^2 + p_1^2)\xi + (p_1q_2-p_2q_1)^2}{4\xi q_1(aq_1(2q_1^2+2q_2^2-\xi) + \sqrt{a}p_1 - bq_1)},$$

$$\widetilde{q}_2^2 = \frac{4\xi^2q_1^2q_2^2a + 4\xi q_1q_2(p_1q_2-p_2q_1)\sqrt{a} + (p_1q_2-p_2q_1)^2}{4\xi q_1(aq_1(2q_1^2+2q_2^2-\xi) + p_1\sqrt{a} - q_1b)},$$

$$\widetilde{p}_1 = -\widetilde{q}_1\frac{C}{2q_1\bigl(p_1\sqrt{a} + q_1(2q_1^2+2q_2^2-\xi)a - bq_1\bigr)},$$

где

$$C=\Big(4\xi^2q_1^2-8\xi q_1^2(q_1^2+2q_2^2)+12q_1^2(q_1^2+q_2^2)^2\Big)a^{3/2}+2q_1\Big((4q_1^2+2q_2^2-\xi)p_1+2p_2q_1q_2\Big)a-\\
-\Big(4bq_1^2(2q_1^2+2q+2^2-\xi)-4cq_1^2-p_1^2\Big)\sqrt{a}-2bp_1q_1.$$

Явное выражение для второго импульса весьма громоздко, поэтому мы его приводить не будем.

Перейдем теперь к построению уравнений Гамильтона – Якоби, которые допускают разделение переменных в новых координатах $\widetilde{u}_{1,2}$, $\widetilde{p}_{u_{1,2}}$ и при этом имеют физический смысл в исходных переменных $q_{1,2}$ и $p_{1,2}$. Переменные $\widetilde{u}_{1,2}$ и $\widetilde{p}_{u_{1,2}}$ удовлетворяют тем же самым разделенным уравнениям (4.2), которые мы, следуя [9, 12], перепишем в виде

$$(\xi-\widetilde{u}_i)\widetilde{p}_{u_i}^2-a\widetilde{u}_i^3-b\widetilde{u}_i^2-c\widetilde{u}_i=-\frac{H_1}{2}-\frac{H_2}{2\widetilde{u}_i},\qquad i=1,2.$$

Складывая и вычитая эти разделенные уравнения, мы получим пару новых интегралов движения в инволюции относительно исходных канонических скобок Пуассона

$$\widetilde{H}_1=H_1+\frac{H_2}{2}\frac{\widetilde{u}_1+\widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1\widetilde{u}_2},\qquad \sqrt{\widetilde{H}_2}=H_2\frac{\widetilde{u}_2-\widetilde{u}_1}{\widetilde{u}_1\widetilde{u}_2}.$$

В исходных переменных, после дополнительного масштабирующего преобразования

$$p_1\to\sqrt{2}p_1,\qquad q_1\to\frac{q_1}{\sqrt{2}},$$

новый гамильтониан имеет вид

$$\widetilde{H}_1=\frac{p_1^2+p_2^2}{2}+a\left(2\xi^3-(q_1^2+6q_2^2)\xi^2+\left(\frac{3q_1^4}{4}+\frac{7q_1^2q_2^2}{2}+6q_2^4\right)\xi-\frac{(q_1^2+4q_2^2)(q_1^2+2q_2^2)^2}{8}\right)+\\
+\sqrt{a}q_1\left((\xi-q_2^2)p_1+\frac{p_2q_1q_2}{2}\right)+b\left(\frac{q_1^4}{4}+\frac{3q_1^2q_2^2}{2}+2q_2^4-\xi(q_1^2+4q_2^2)+2\xi^2\right)-\\
-c\left(\frac{q_1^2}{2}+2q_2^2-2\xi\right). \tag{4.4}$$

Второй интеграл движения $\widetilde{H}_2$ является полиномом четвертой степени по импульсам, который мы выпишем явно только в частном случае $b=c=0$:

$$\widetilde{H}_2=\frac{p_1^4}{4}-\frac{\sqrt{a}p_1q_1\big(2(q_2^2-\xi)p_1^2-3p_1p_2q_1q_2+p_2^2q_1^2\big)}{2}-\\
-\frac{aq_1^2}{8}\Big(\big(q_1^4+12q_1^2q_2^2+12q_2^4-6\xi(q_1^2-2q_2^2)\big)p_1^2-8q_1q_2(q_1^2+q_2^2)p_1p_2+2q_1^2(q_1^2+q_2^2-\xi)p_2^2\Big)-\\
-\frac{a^{3/2}q_1^3}{8}\Big(\big(16\xi^3+2(q_1^2+2q_2^2)(q_1^2q_2^2+2q_2^4-6\xi^2)+2q_1^2(q_1^2+6q_2^2)\xi\big)p_1-\\
-q_1q_2\big(q_1^4+4q_1^2q_2^2+4q_2^4+2\xi(q_1^2-2q_2^2)\big)p_2\Big)+\frac{a^2q_1^4}{64}\Big(64\xi^4-32(3q_1^2+8q_2^2)\xi^3+\\
+4(13q_1^4+60q_1^2q_2^2+84q_2^4)\xi^2-4(3q_1^2+10q_2^2)(q_1^2+2q_2^2)^2\xi+(q_1^2+2q_2^2)^4\Big).$$

Соответствующие разделенные уравнения имеют вид

$$\Phi_{\pm} = (\xi - \widetilde{u})\widetilde{p}_u^2 - a\widetilde{u}^3 - b\widetilde{u}^2 - c\widetilde{u} + \frac{\widetilde{H}_1}{2} \pm \frac{\sqrt{\widetilde{H}_2}}{2} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Следуя [11, 12], можно перейти к более сложным разделенным уравнениям вида

$$\Phi = (\Phi_+ + \rho\widetilde{p}_u)(\Phi_- + \rho\widetilde{p}_u) - \varrho u - \sigma = 0$$

и построить интегрируемое возмущение этого гамильтониана $\widetilde{H}_1$ (4.4), добавив в потенциал сингулярные слагаемые

$$\frac{\alpha}{q_1^2} + \frac{\beta}{q_2^2} + \frac{\gamma}{q_2^6}.$$

Алгебро-геометрическая природа построения таких возмущений пока неизвестна, поэтому мы не будем подробно обсуждать эти интегрируемые возмущения в рамках данной статьи.

Список литературы

[1] Abel N. H. Mémoire sure une propriété générale d'une class très éntendue des fonctions transcendantes // Oeuvres complétes: Vol. 1. Christiania: Grondahl, 1881. P. 145–211.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[4] Costello C., Lauter K. Group law computations on Jacobians of hyperelliptic curves // Selected areas in cryptography / A. Miri, S. Vaudenay (Eds.). (Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 7118.) Heidelberg: Springer, 2012. P. 92–117.

[5] Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials // J. Math. Phys., 1985, vol. 26, no. 12, pp. 3070–3079.

[6] Moreno G. A., Barrachina R. O. A velocity-dependent potential of a rigid body in a rotating frame // Amer. J. Phys., 2008, vol. 78, no. 12, pp. 1146–1149.

[7] Pucacco G. On integrable Hamiltonians with velocity dependent potentials // Celestial Mech. Dynam. Astronom., 2004, vol. 90, nos. 1–2, pp. 111–125.

[8] Roekaerts D., Yoshida H. Non-integrability of homogeneous two-dimensional Hamiltonians with velocity-dependent potential // J. Phys. A, 1988, vol. 21, no. 18, pp. 3547–3558.

[9] Созонов А. П., Цыганов А. В. О преобразованиях Беклунда, связывающих различные уравнения Гамильтона – Якоби // ТМФ, 2015, т. 183, № 3, с. 372–387.

[10] Tsiganov A. V. Simultaneous separation for the Neumann and Chaplygin systems // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 1, pp. 74–93.

[11] Tsiganov A. V. On the Chaplygin system on the sphere with velocity dependent potential // J. Geom. Phys., 2015, vol. 92, pp. 94–99.

[12] Tsiganov A. V. On auto and hetero Bäcklund transformations for the Hénon – Heiles systems // Phys. Lett. A, 2015, vol. 379, nos. 45–46, pp. 2903–2907.

[13] Цыганов А. В. Разделение переменных для одного обобщения системы Чаплыгина на сфере // Нелинейная динамика, 2015, vol. 11, № 1, с. 179–185.

[14] Цыганов А. В. Теорема Абеля и преобразования Бэклунда для уравнений Гамильтона – Якоби // Тр. МИАН, 2016 (в печати).

On an integrable system on the plane with velocity-dependent potential

Yuri A. Grigoryev[1], Alexey P. Sozonov[2], Andrey V. Tsiganov[3]

[1,2,3]Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7-9, St. Petersburg, 199034, Russia
[1]yury.grigoryev@gmail.com, [2]sozonov.alexey@yandex.ru, [3]andrey.tsiganov@gmail.com

We discuss an algorithmic construction of the auto Bäcklund transformations of Hamilton–Jacoby equations and possible applications of this algorithm to finding new integrable systems with integrals of motion of higher order in momenta. We explicitly present Bäcklund transformations for two Hamiltonian systems on the plane separable in parabolic and elliptic coordinates.

MSC 2010: 37K35, 53D22, 70H06
Keywords: integrable systems, separation of variables, velocity-dependent potentials

Received June 06, 2016, accepted June 25, 2016
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 355–367 (Russian)