



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.36
MSC 2010: 70F40

**О движении тяжелой точки по сфере,
вращающейся вокруг не проходящей через ее центр
вертикальной оси, при наличии сухого трения**

Е. С. Шалимова

Рассматривается движение тяжелой точки по поверхности сферы, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси, не совпадающей с ее диаметром. Предполагается, что взаимодействие точки и сферы происходит по закону сухого трения. Выписываются уравнения с множителями Лагранжа; в предельных случаях большой по величине угловой скорости и большого расстояния от центра сферы до оси вращения находятся множества неизолированных положений относительного равновесия точки на сфере, исследуется их зависимость от параметров задачи. Результаты представлены графически в виде разверток на цилиндре. Для общего случая также построены серии аналогичных рисунков, иллюстрирующие возможные типы и перестройки областей относительного равновесия в зависимости от параметров.

Ключевые слова: движение точки по сфере, сухое трение, относительные равновесия

Получено 27 декабря 2015 года
После доработки 24 июля 2016 года

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-01-00625 а.

Шалимова Екатерина Сергеевна
ekateryna-shalimova@yandex.ru
НИИ механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119192, Россия, г. Москва, Мичуринский проспект, д. 1

Задачи о существовании и бифуркациях неизолированных относительных равновесий возникают при изучении динамики механических систем с вращающимися элементами, ориентированных на разные операции типа перемешивания, помола, сушки и т. д. различных веществ (см., например, [20, 25]), а также при изучении динамики автобалансируемых систем [31].

В одномерном случае исследование динамики подобных систем восходит, вероятно, к работам Мандельштама [11], где идет речь о разных версиях маятника Фруда. Как правило, при исследовании маятника Фруда предполагается, что сила сопротивления не зависит от нормальной реакции. Однако в случае, когда в рассматриваемой системе присутствует сухое трение, это, вообще говоря, не так. В работах [1, 16, 19] и др. были развиты методы исследования предельных циклов системы типа маятника Фруда при достаточно общих предположениях.

В теории установившихся движений различают так называемые относительные равновесия и установившиеся движения (см., например, [7]), находящиеся между собой в общем случае во взаимно однозначном соответствии и обладающие известной общностью свойств устойчивости [7, 8, 15]. Указанные соответствия и свойства исследовались, вообще говоря, для изолированных решений. В механике систем с сухим трением наблюдают как множества неизолированных относительных равновесий [2, 22, 23], так и множества неизолированных установившихся движений [9, 10, 17]. Для таких систем указанные выше соответствия, насколько известно автору, не изучались.

Систематическое развитие общей теории устойчивости равновесий в системах с сухим трением восходит, вероятно, к работе [14]. Методы исследования устойчивости таких равновесий, основанные, в частности, на общей теории систем с разрывными правыми частями, были предложены в [3–5, 12, 13, 21, 24, 28–30]. В [18, 26, 27] изучались бифуркации равновесий в системах с трением, а также бифуркации фазовых портретов таких систем. Общий подход к бифуркациям семейств неизолированных равновесий систем с трением изложен в [6].

В настоящей работе исследуется естественный трехмерный аналог задачи [2].

1. Постановка задачи и уравнения движения в избыточных координатах

Рассматривается движение тяжелой точки P массы m по сфере радиуса ℓ с центром в точке O . Сфера вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, которая находится на расстоянии a от ее вертикального диаметра. Будем считать, что между бусинкой и сферой действует сила сухого трения с коэффициентом трения μ .

Движение бусинки можно описать с помощью уравнений Лагранжа первого рода в связанной со сферой подвижной системе координат (ПСК). Пусть $Oxyz$ — такая система координат с началом в центре сферы, ось y которой вертикальна, а оси x и z образуют с y правую тройку. Ось вращения сферы определяется единичным вектором $\mathbf{e} = (0, 1, 0)^T$ и проходит через точку A : $\mathbf{OA} = (-a, 0, 0)^T$ (рис. 1).

В ПСК положение точки P задается координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а связь, стесняющая ее движение, определяется соотношением

$$f = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2) = 0. \quad (1.1)$$

Пусть $\mathbf{v}_r = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ и $\mathbf{v}_e = (\omega z, 0, -\omega(x + a))$ — соответственно, скорость точки относительно ПСК и ее переносная скорость; $v_r = (\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_r)^{1/2}$, $v_e = (\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_e)^{1/2}$. Тогда кинетическая

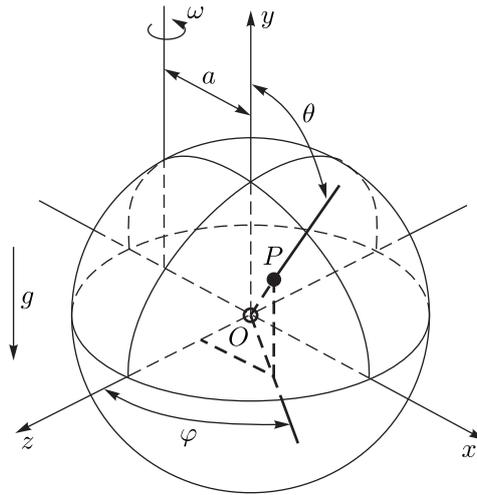


Рис. 1. Точка на окружности, вращающейся вокруг оси с постоянной угловой скоростью.

и потенциальная энергия системы, освобожденной от связи, примут вид

$$T = \frac{m}{2} ((\dot{x} + \omega z)^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - \omega(x + a))^2), \quad U = mgy,$$

где g — величина ускорения свободного падения. Если $F = (F_x, F_y, F_z)^T$ — сила трения, то уравнения Лагранжа записываются как

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} + F_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} + F_y, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial z} + F_z, \quad (1.2)$$

$$L_\lambda = L + \lambda f, \quad L = T - U. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) можно представить в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_N + \mathbf{N} + \mathbf{F},$$

где \mathbf{a} — ускорение точки в ПСК, \mathbf{F}_C и \mathbf{F}_c — кориолисова и центробежная силы, \mathbf{F}_N — сила тяжести, \mathbf{N} — нормальная реакция сферы, \mathbf{F} — сила трения, причем в случае скольжения ($\mathbf{v}_r \neq 0$)

$$\mathbf{F} = -\mu \frac{\mathbf{v}_r}{v_r} N, \quad N = (\mathbf{N}, \mathbf{N})^{1/2}. \quad (1.4)$$

Единичный вектор

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} / \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right| = \begin{pmatrix} -x/\ell \\ -y/\ell \\ -z/\ell \end{pmatrix}$$

определяет внутреннюю нормаль к сфере в точке P . Тогда выражения для сил имеют вид

$$\mathbf{F}_C = \begin{pmatrix} -2m\omega\dot{z} \\ 0 \\ 2m\omega\dot{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} m\omega^2(x + a) \\ 0 \\ m\omega^2 z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N} = -\lambda \ell \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.$$

Введем безразмерные параметры при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x \mapsto x\ell, \quad y \mapsto y\ell, \quad z \mapsto z\ell, \quad t \mapsto t\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad \omega \mapsto \omega\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad a \mapsto a\ell, \\ \lambda \mapsto \lambda m \frac{g}{\ell}, \quad L \mapsto Lmg\ell, \quad F_x \mapsto mgF_x, \quad F_y \mapsto mgF_y, \quad F_z \mapsto mgF_z. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Сохраняя точку над символом как обозначение производной по новому времени и учитывая выражения (1.5), уравнения связей (1.1) и функцию Лагранжа (1.3) можно записать как

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \\ L_\lambda &= \frac{1}{2} ((\dot{x} + \omega z)^2 + \dot{y}^2 + (\dot{z} - \omega(x + a))^2) - y + \lambda f. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для определения множителя Лагранжа λ вычисляют первые и вторые производные по времени от тождества (1.1), задающего связь. Они имеют вид

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \quad (1.7)$$

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0. \quad (1.8)$$

Кроме того, так как вектор силы трения касается сферы в точке P , то

$$xF_x + yF_y + zF_z = 0$$

и подстановка в тождества (1.7) и (1.8) выражений для вторых производных из уравнений (1.2) позволяет представить множитель λ и уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \lambda &= -\omega^2(x + a)x - \omega^2 z^2 + \omega \dot{z}x^2 - \omega \dot{x}z^2 + y, \quad \ddot{x} = \omega^2(x + a) - \omega \dot{z} + \lambda x + F_x, \\ \ddot{y} &= -1 + \lambda y + F_y, \quad \ddot{z} = \omega \dot{x} + \omega^2 z + \lambda z + F_z. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Согласно закону Амонтона–Кулона, для величины силы трения выполнено соотношение

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \leq \mu^2 \lambda^2. \quad (1.10)$$

Подстановка выражения (1.9) для λ в неравенство (1.10) дает условие

$$F^2 \leq \mu^2 (-\omega^2(x + a)x - \omega^2 z^2 + \omega \dot{z}x^2 - \omega \dot{x}z^2 + y)^2,$$

обращающееся в равенство в случае скольжения. При этом, согласно соотношению (1.4),

$$F_x = -F \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad F_y = -F \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad F_z = -F \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}},$$

так как направление силы трения противоположно направлению скольжения. Здесь

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{z}) = \mu |\omega^2(x + a)x + \omega^2 z^2 - 2\omega x \dot{z} + 2\omega \dot{x} z - y|$$

— величина силы трения. В случае равновесия сила трения уравнивает касательную составляющую суммы силы тяжести и центробежной силы. Она противоположна по направлению этой касательной составляющей и удовлетворяет неравенству

$$F(x, y, z, 0, 0) \leq \mu |\omega^2(x + a)x + \omega^2 z^2 - y|. \quad (1.11)$$

2. Существование относительных равновесий и их свойства

Уравнения относительных равновесий

Если точка находится в равновесии относительно сферы, то ее относительная скорость, а вместе с ней — и кориолисова сила, равны нулю. Обозначим

$$\begin{aligned}\xi(x, y, z) &= ((x+a)^2 + z^2 - (x(x+a) + z^2)^2)\omega^4 + 2y(x(x+a) + z^2)\omega^2 + 1 - y^2, \\ \eta(x, y, z) &= \omega^2(x(x+a) + z^2) - y.\end{aligned}$$

Тогда с учетом (1.9) и того, что $F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$, система для определения относительных равновесий принимает вид

$$\xi(x, y, z) \leq \mu^2 \eta^2(x, y, z), \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (2.1)$$

Эта система составит предмет дальнейшего изучения.

Пусть

$$\Phi = \xi(x, y, z) - \mu^2 \eta^2(x, y, z).$$

Введем для удобства угол трения $\beta \in [0, \pi/4]$, такой, что $\operatorname{tg} \beta = \mu$. Тогда выражение для функции Φ представимо в виде

$$\Phi = -\frac{(\omega^2 x^2 + \omega^2 z^2 - y + \omega^2 xa)^2}{\cos^2 \beta} + ((x+a)^2 + z^2)\omega^4 + 1.$$

Исключая из этого соотношения z^2 с помощью уравнения сферы, имеем

$$\Phi = -\frac{(\omega^2(1-y^2) - y + \omega^2 xa)^2}{\cos^2 \beta} + ((x+a)^2 + (1-x^2-y^2))\omega^4 + 1. \quad (2.2)$$

Выражение для Φ — многочлен второй степени по x . Его дискриминант по этой переменной имеет вид

$$D_x = 4\frac{\omega^4 a^2}{\cos^2 \beta} \left((a^2 + y^2 - \sin^2 \beta)\omega^4 + 2\omega^2 y + 1 \right). \quad (2.3)$$

Он обращается в нуль, если

$$y_{\pm} = \frac{-1 \pm \omega^2(\sin^2 \beta - a^2)^{1/2}}{\omega^2}. \quad (2.4)$$

При этом

$$x_{\pm} = a - \frac{(\sin^2 \beta - a^2)^{1/2}}{\omega^2 a}. \quad (2.5)$$

В точках (x_{\pm}, y_{\pm}) , существующих при выполнении условия

$$\sin^2 \beta - a^2 \geq 0, \quad (2.6)$$

кривая на плоскости (x, y) , задаваемая соотношением $\Phi = 0$, имеет горизонтальные касательные (рис. 2). Если соотношение (2.6) обращается в равенство, то эти точки совпадают (рис. 3).

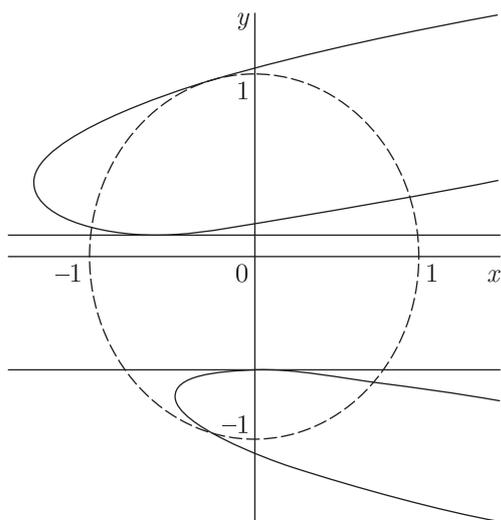


Рис. 2. Горизонтальные касательные к области равновесия при $\beta = \pi/6$, $\omega = 2$, $a = 1/3$.

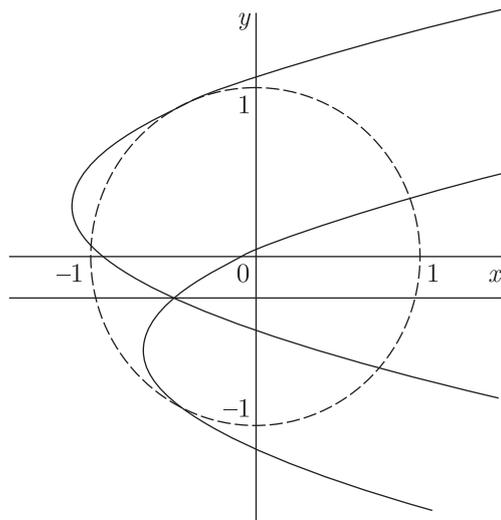


Рис. 3. Совпадающие горизонтальные касательные к области равновесия при $\beta = \pi/6$, $\omega = 2$, $a = 1/2$.

Множества относительных равновесий, определяемые системой (2.1), зависят от трех параметров (a, ω, β) . Аналогичная задача для движения точки по окружности изучалась в работе [2].

Конфигурационное многообразие рассматриваемой механической системы с двумя степенями свободы — сфера. Введем на ней две угловые координаты θ и φ . Координату θ будем отсчитывать от восходящей вертикали, φ задает угол между проекцией OP на плоскость Oxz и осью z (рис. 1). Тогда

$$x = \sin \theta \sin \varphi, \quad y = \cos \theta, \quad z = \sin \theta \cos \varphi,$$

и условие существования относительных равновесий запишется в виде неравенства

$$P(\theta, \varphi, \Omega, a, \beta) = \Omega^2 a^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta + \Omega^2 \cos^2 \theta (a \sin \varphi + \sin \theta)^2 + 2\Omega \sin \theta \cos \theta (a \sin \varphi + \sin \theta) - \operatorname{tg}^2 \beta (\Omega \sin \theta (a \sin \varphi + \sin \theta) - \cos \theta)^2 \leq 0, \quad \Omega = \omega^2. \quad (2.7)$$

Исследуем зависимость решений неравенства (2.7) от значений параметров (a, Ω, β) .

Относительные равновесия и бифуркационные диаграммы

Будем рассматривать области, задаваемые неравенством (2.7), на развертке цилиндра (φ, θ) , $\{0 \leq \varphi < 2\pi\} \times \{0 \leq \theta < \pi/2\}$, причем прямые $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ отождествлены. Прежде всего рассмотрим два предельных случая: а) $a \gg 1$, б) $\Omega \gg 1$.

а) В этом случае сфера находится достаточно далеко от оси вращения. При $\Omega \neq 0$ условие (2.7) примет вид

$$\cos^2 \beta \leq \sin^2 \theta \sin^2 \varphi.$$

Область относительных равновесий в этом случае состоит из двух компонент, симметричных относительно прямой $\varphi = \pi$, и не зависит от угловой скорости вращения ω

(см. рис. 4). На этом и дальнейших рисунках точечным пунктиром обозначена граница, на которой меняет знак нормальная реакция $N = \cos \theta + \Omega \sin \theta (a \sin \varphi + \sin \theta)$, угол трения β для всех рисунков полагается равным $\operatorname{arctg}(0.7)$. В случае $a \gg 1$ она определяется знаком выражения $\sin \theta \sin \varphi$, то есть нормальная реакция положительна на полусфере, расположенной дальше от оси вращения, и отрицательна на ближней.

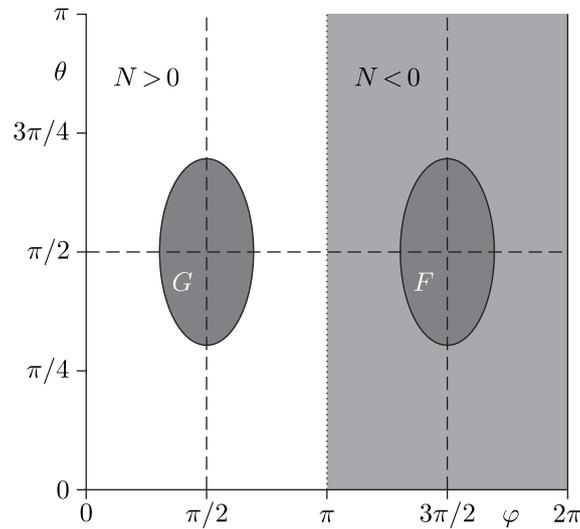


Рис. 4. Области относительных равновесий при больших значениях параметра a .

Аналитическое исследование устойчивости полученных компонент семейств неизолированных относительных равновесий путем построения функций Ляпунова достаточно сложно (см. [3–6, 24, 28–30]). Устойчивость по Ляпунову внутренних точек этих областей следует из результатов Г. К. Пожарицкого [14]. Здесь мы ограничимся рассмотрением вопроса об устойчивости граничных точек изучаемых областей в следующем «статическом» смысле: пусть в начальный момент времени точка P располагается в некоторой точке Q границы области, заполненной неизолированными равновесиями. «Отпустим» точку P без начальной скорости, одновременно «освободив» систему от трения, то есть предположив, что коэффициент трения обратился в нуль. Если точка P начнет движение внутрь (или вдоль границы) области, заполненной неизолированными равновесиями, то скажем, что располагавшаяся в точке Q точка P притягивается (не отталкивается) областью, заполненной неизолированными равновесиями. Если же точка P начнет движение вовне по отношению к области, заполненной неизолированными равновесиями, то скажем, что располагавшаяся в точке Q точка P отталкивается областью, заполненной неизолированными равновесиями. Если граница изолированной компоненты области, заполненной неизолированными положениями равновесия, заполнена точками, в которых эта компонента притягивает точку P , то будем говорить, что данная компонента притягивающая. Если же на границе изучаемой компоненты найдется хоть одна точка, в которой точка P отталкивается, будем говорить, что компонента отталкивающая.

Направление движения точки определяется знаком скалярного произведения касательной проекции активных сил при нулевой начальной скорости на внешнюю нормаль к границе области. Обозначим

$$C = p_3 \Omega^3 + p_2 \Omega^2 + p_1 \Omega + p_0, \tag{2.8}$$



где

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 2 \sin^2 \theta \cos \theta, \quad p_1 = 2a \sin \theta \sin \varphi (3 \cos^2 \theta - 1) - 8 \cos^4 \theta + 10 \cos^2 \theta - 2, \\
 p_2 &= 2a^2 \cos \theta (1 - 3 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) + 16a \sin \theta \sin \varphi \cos^3 \theta - 10 \cos^5 \theta + \\
 &\quad + 2 \cos^2 \beta \sin \theta \cos \theta (a \sin \varphi + \sin \theta), \\
 p_3 &= -2a^3 \sin \theta \sin \varphi (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi) + 8a^2 \cos^4 \theta \sin^2 \varphi + 10a \sin \varphi \sin \theta \cos^4 \theta - \\
 &\quad - 4 \cos^6 \theta + \cos^2 \beta (2a^2 (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi) + 4a \sin \varphi \sin \theta \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta).
 \end{aligned}$$

Тогда, если выполнено условие $C > 0$, точка движется от области, в случае противоположного знака — к области.

В случае $a \gg 1$ направление движения определяет знак коэффициента при максимальной степени параметра a . В данном случае это коэффициент при a^3 , входящем в выражение для p_3 , то есть $-2 \sin \varphi \sin \theta (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi)$.

На рисунке 4 компонента G , находящаяся на дальней от оси полусфере — притягивающая, а компонента F на ближней полусфере — отталкивающая. Светло-серым цветом выделены области, в которых точка, запущенная без начальной скорости, движется по направлению внешней нормали границы области, в белых областях она движется в противоположную сторону.

б) В этом случае, когда угловая скорость вращения сферы ω велика, условие (2.7) принимает вид

$$a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \beta \leq (\sin^2 \theta - \cos^2 \beta)(a \sin \varphi + \sin \theta)^2. \quad (2.9)$$

В силу (2.9) относительные равновесия существуют только при $\sin^2 \theta - \cos^2 \beta \geq 0$, то есть для $\theta \in \left[\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} + \beta \right]$. Пусть это условие выполнено.

Рассмотрим изменение области относительных равновесий на периоде при возрастании параметра a и $\Omega \gg 1$ (рис. 5). На всех рисунках горизонтальные пунктирные линии обозначают «долготы» $\theta_* = \arcsin a$ и $\pi - \theta_*$ точек пересечения оси вращения со сферой. Эти точки всегда являются положениями относительного равновесия.

При $a = 0$ область относительных равновесий одинакова для любого значения φ и таким образом на плоскости (θ, φ) представляет собой «пояс» G , заключенный между прямыми $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$ и $\theta = \frac{\pi}{2} + \beta$ (рис. 5а). При $a \in (0, a_*)$, $a_* = \sin \beta$ этот «пояс» деформируется (рис. 5б), затем при $a = a_*$ на нем появляются две перемычки в точках $P_1(\pi + \beta, \pi/2)$ и $P_2(2\pi - \beta, \pi/2)$ (рис. 5с), а при $a > a_*$ он распадается на две подобласти G_1 и G_2 (область G_2 изображена на рис. 5д). Далее, подобласть G_2 , находящаяся ближе к оси вращения, сужается, и при $a \in (\cos \beta, 1)$, в точках пересечения оси вращения и сферы образуются перемычки (случай совпадающих горизонтальных касательных, рис. 5е). При $a = 1$ эти перемычки сходятся в единственной точке пересечения оси и сферы (рис. 5ф), а с дальнейшим ростом a компонента G_2 снова расширяется (рис. 5г). Подобласть G_1 , находящаяся дальше от оси вращения, при этом топологических изменений не претерпевает. В пределе при больших a область относительных равновесий принимает вид, изображенный на рисунке 4.

Направление движения точки, запущенной без начальной скорости с границы области равновесия, определяется знаком коэффициента p_3 выражения (2.8).

Компонента G до разделения является притягивающей, после разделения компонента G_1 остается притягивающей, а компонента G_2 становится отталкивающей.

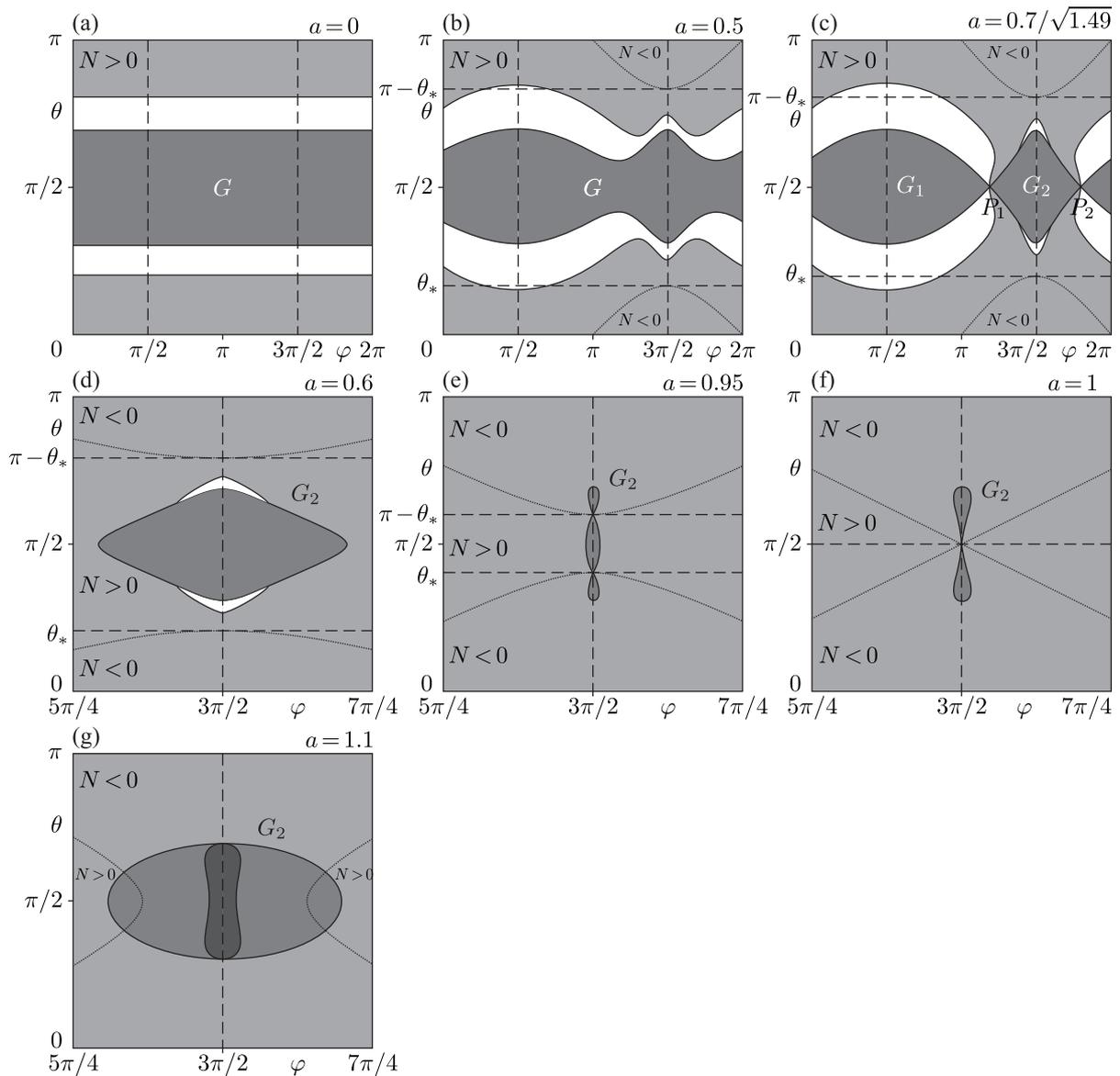
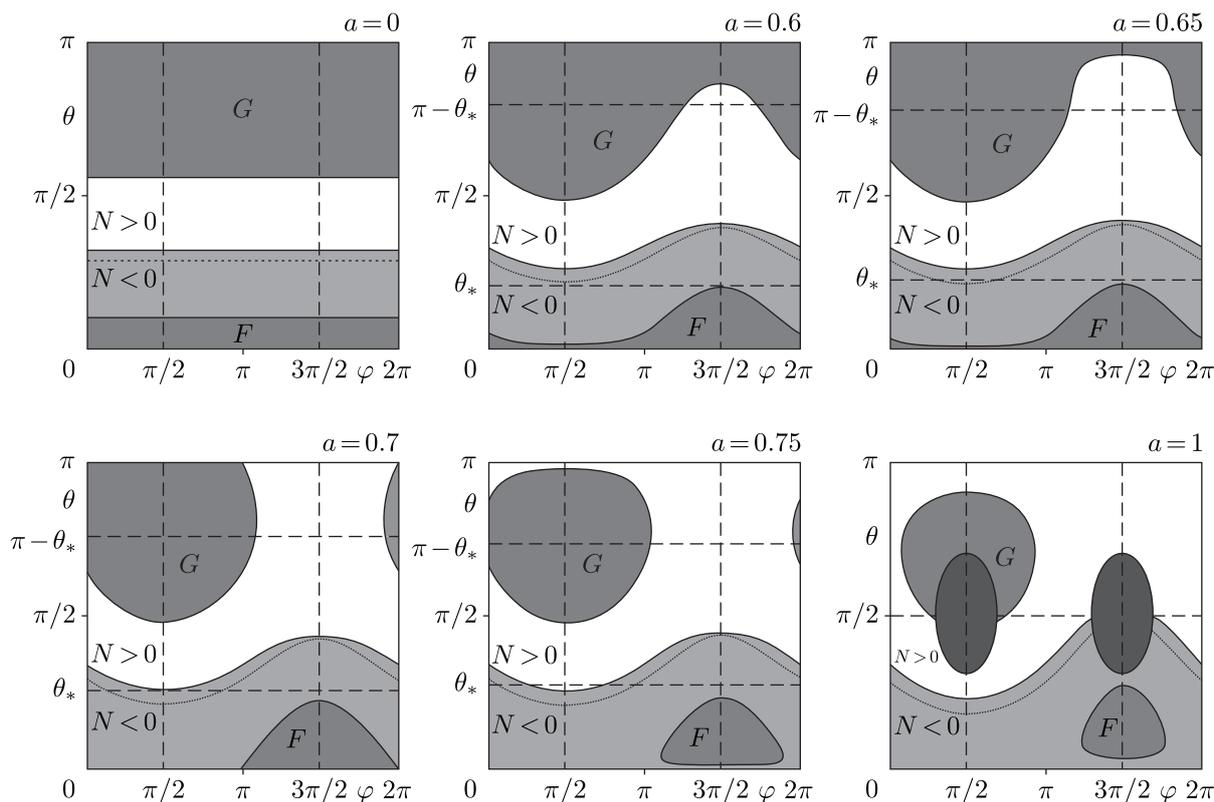


Рис. 5. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega \gg 1$.

На этой же серии рисунков можно отследить изменение области, на которой нормальная реакция положительна. В случае $\Omega \gg 1$ ее знак определяется знаком выражения $\sin \theta(a \sin \varphi + \sin \theta)$, то есть при $a = 0$ она положительна для всей сферы, а при увеличении значения a на полусфере, которую пересекает ось вращения, появляются две области отрицательной реакции, которые объединяются при $a = 1$ и в пределе заполняют полусферу полностью.

В работах [2, 22] на основании численных построений были сделаны выводы о качественном поведении системы. Однако в рассматриваемом случае размерность системы выше, что не позволяет построить фазовые портреты и тем самым затрудняет исследования. В этом случае можно представить изменение области относительного равновесия графически в виде серии рисунков для разных значений a при фиксированном Ω . На рисунках 6–9 изображены такие серии для $\Omega = 1, 2.25, 9, 64$.

Рис. 6. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 1$.

При $a = 0$ область равновесий может состоять из двух (рис. 6, 7) или трех (рис. 8, 9) компонент. При $\Omega \geq \frac{1}{\cos \beta}$ для значения параметра a_* на большей компоненте появляются две перемычки

$$P_1 \left(\pi + \arcsin \left(a_* \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} \right), \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\Omega} \right),$$

$$P_2 \left(2\pi - \arcsin \left(a_* \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}} \right), \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\Omega} \right)$$

(случай совпадающих касательных, ср. с критическим случаем в [2]), и далее эта компонента разделяется на две подкомпоненты G_1 и G_2 .

Темно-серым цветом на последних рисунках каждой серии показана форма, к которой стремится область при больших значениях a . Для случаев $\Omega = 9$ и $\Omega = 64$ на последних двух и, соответственно, четырех картинках серий показано изменение только части области, которая находится ближе к оси вращения. Компонента G_1 при этом топологически не изменяется.

Замечание. Компоненты F и I в изображенных случаях всегда являются отталкивающими. Компонента G при $a = 0$ — притягивающая; при увеличении параметра a она может оставаться притягивающей (рис. 6) или становиться отталкивающей (рис. 7). В случаях, когда при $a = 0$ существует еще и компонента I , она может стать отталкивающей после (рис. 8) или до (рис. 9) ее слияния с компонентой G или ее частями. Отделившаяся меньшая компонента — отталкивающая.

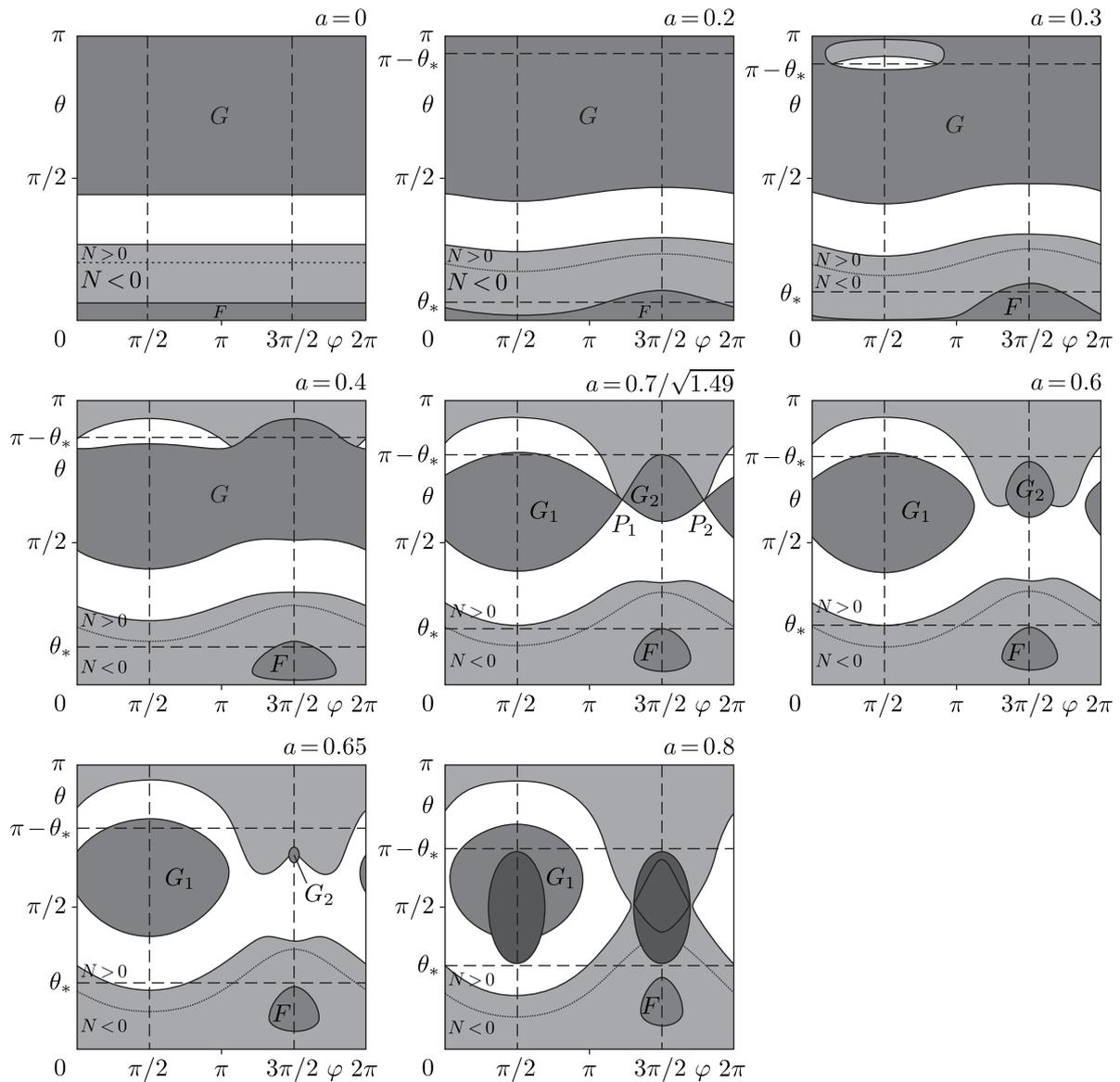


Рис. 7. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 2.25$.

В отличие от предельного случая $\Omega \gg 1$, в общем случае при $a = 0$ область, на которой нормальная реакция отрицательна, всегда существует, и при этом граница ее задается постоянным значением угла θ . При увеличении значения a область деформируется, и в пределе она, как и ранее, полностью занимает полусферу, находящуюся ближе к оси вращения.

Список литературы

- [1] Барбашин Е. А., Табуева В. А. О колебаниях маятника при наличии сухого трения // Изв. вузов. Матем., 1959, № 5, с. 48–57.
- [2] Буров А. А., Якушев И. А. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающемся обруче с сухим трением // ПММ, 2014, т. 78, № 5, с. 645–655.
- [3] Иванов А. П. О равновесии систем с сухим трением // ПММ, 2015, т. 79, № 3, с. 317–333.



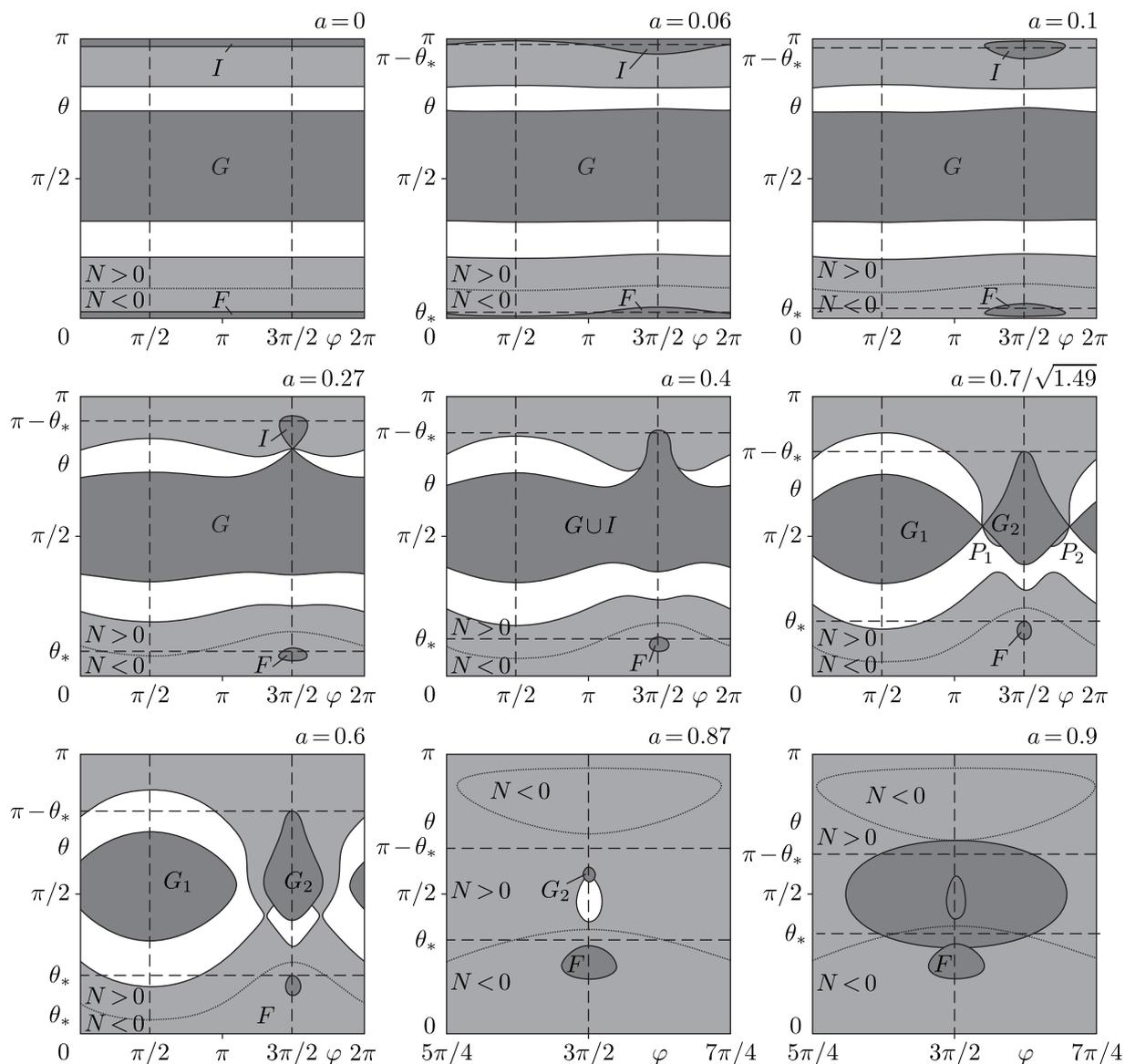


Рис. 8. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 9$.

- [4] Иванов А. П. Об устойчивости равновесия в системах с трением // ПММ, 2007, т. 71, № 3, с. 427–438.
- [5] Иванов А. П. Основы теории систем с трением. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 304 с.
- [6] Иванов А. П. Бифуркации в системах с трением: Основные модели и методы // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 479–498.
- [7] Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. Москва: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
- [8] Карапетян А. В., Степанов С. Я. О стационарных движениях и относительных равновесиях механических систем с симметрией // ПММ, 1996, т. 60, № 5, с. 736–743.
- [9] Крементуло В. В. Исследование устойчивости гироскопа с учетом сухого трения на оси внутреннего карданова кольца (кожуха) // ПММ, 1959, т. 23, № 5, с. 968–970.

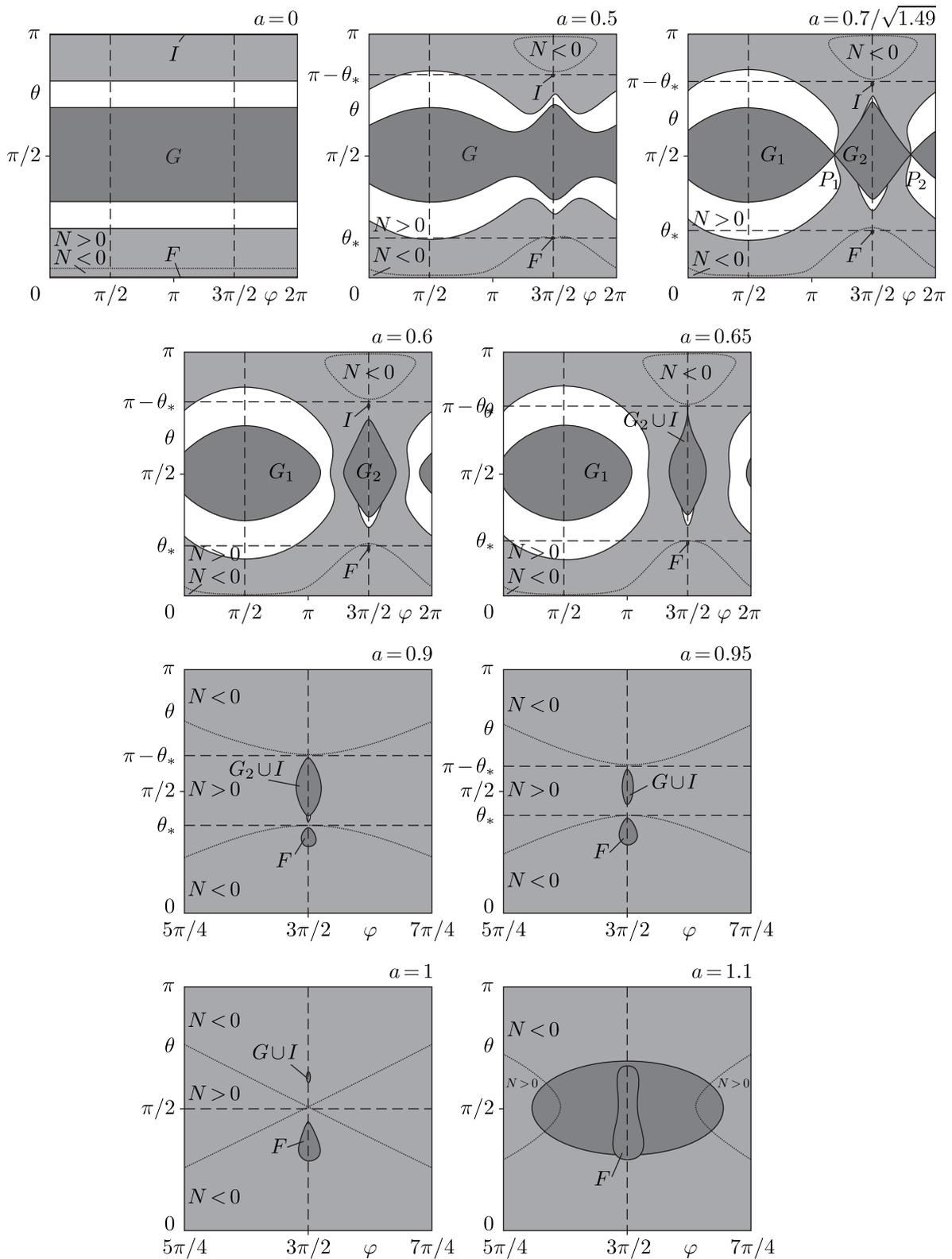


Рис. 9. Бифуркации области относительных равновесий при $\Omega = 64$.

- [10] Крементуло В. В. Устойчивость гироскопа, имеющего вертикальную ось внешнего кольца, при учете сухого трения в осях подвеса // ПММ, 1960, т. 24, № 3, с. 568–571.
- [11] Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов: Т. 4: Лекции по колебаниям (1930–1932 гг.) / под ред. акад. М. А. Леонтовича. Москва: АН СССР, 1955. 512 с.
- [12] Матросов В. М., Финогенко И. А. О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения // ПММ, 1998, т. 62, № 1, с. 100–109.
- [13] Матросов В. М., Финогенко И. А. Об устойчивости множества положений равновесия автономных механических систем с трением скольжения // ПММ, 1998, т. 62, № 6, с. 934–944.
- [14] Пожарицкий Г. К. Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением // ПММ, 1962, т. 26, № 1, с. 5–14.
- [15] Степанов С. Я. Симметризация критериев знакоопределенности симметричных квадратичных форм // ПММ, 2002, т. 66, № 6, с. 979–987.
- [16] Стрелков С. П. Маятник Фроуда // ЖТФ, 1933, т. 3, № 4, с. 563–573.
- [17] Сумбатов А. С. О маятнике Попехонова // ПММ, 1996, т. 60, № 3, с. 413–417.
- [18] Тейфель А., Штайндль А., Трогер Х. Классификация негладких бифуркаций для осциллятора с трением // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: Сборник статей, посвященный памяти академика Валентина Витальевича Румянцева / В. В. Козлов и др., ИПУ РАН. Москва: Физматлит, 2009. С. 161–175.
- [19] Табуева В. А. Условия существования круговых движений маятника Фроуда // Изв. вузов. Матем., 1961, № 5(24), с. 61–68.
- [20] Akpolat Z. H., Asher G. M., Clare J. C. Dynamic emulation of mechanical loads using a vector-controlled induction motor-generator set // IEEE Trans. Ind. Electron., 1999, vol. 46, no. 2, pp. 370–379.
- [21] Biemond J. J. B., van de Wouw N., Nijmeijer H. Bifurcations of equilibrium sets in mechanical systems with dry friction // Phys. D, 2012, vol. 241, no. 22, pp. 1882–1894.
- [22] Burov A. A. On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // Acta Mech., 2010, vol. 212, nos. 3–4, pp. 349–354.
- [23] Burov A. A., Shalimova E. S. On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 225–233.
- [24] Goeleven D., Brogliato B. Necessary conditions of asymptotic stability for unilateral dynamical systems // Nonlinear Anal., 2005, vol. 61, no. 6, pp. 961–1004.
- [25] Joshi P., Nigam K. D. P., Nauman E. B. The Kenics static mixer: New data and proposed correlations // Chem. Eng. J. Bioch. Eng., 1995, vol. 59, no. 3, pp. 265–271.
- [26] Leine R. I. Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // Phys. D, 2006, vol. 223, no. 1, pp. 121–137.
- [27] Leine R. I., van Campen D. H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // Eur. J. Mech. A Solids, 2006, vol. 25, no. 4, pp. 595–616.
- [28] Leine R. I., van de Wouw N. Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints. (Lect. Notes Appl. Comput. Mech., vol. 36.) Berlin: Springer, 2008. 236 pp.
- [29] Leine R. I., van de Wouw N. Stability properties of equilibrium sets of nonlinear mechanical systems with dry friction and impact // Nonlinear Dynam., 2008, vol. 51, no. 4, pp. 551–583.
- [30] van de Wouw N., Leine R. I. Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // Proc. of the 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC'2006, San Diego, USA, 2006). P. 3765–3770.
- [31] van de Wouw N., van den Heuvel M. N., Nijmeijer H., van Rooij J. A. Performance of an automatic ball balancer with dry friction // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, no. 1, pp. 65–82.

**On the motion of a material point on a rotating sphere with dry friction
(the case of the vertical axis)**

Ekaterina S. Shalimova

Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Michurinsky pr. 1, Moscow, Russia, 119192
ekateryna-shalimova@yandex.ru

The motion of a heavy point on the surface of a rotating sphere is considered. It is assumed that the rotation axis does not coincide with the vertical diameter of the sphere and the angular velocity of the sphere is constant. The Lagrange equations for this system are derived. Sets of relative equilibria are found and their dependence on the parameters of the system is studied in extreme cases when the magnitude of the angular velocity or the distance between the rotation axis and the center of the sphere is large. The results are represented in graphic form. The same graphic series are also numerically plotted in the general case.

MSC 2010: 70F40

Keywords: motion of a particle on a sphere, dry friction, relative equilibria

Received December 27, 2015, accepted July 24, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 369–383 (Russian)