Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 3. С. 385–411.
Полнотекстовая версия в свободном доступе http://nd.ics.org.ru
DOI: 10.20537/nd1603007

ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.925
MSC 2010: 37J60, 01A05

Историко-критический обзор развития неголономной механики: классический период*

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, И. А. Бизяев

В данном историческом обзоре подробно описаны основные этапы развития неголономной механики начиная с работ Ирншоу, Феррерса и заканчивая монографией Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева. В приложении к данному обзору обсуждаются принцип Даламбера–Лагранжа в неголономной механике и перестановочные соотношения.

Ключевые слова: неголономная механика, неголономная связь, принцип Даламбера–Лагранжа, перестановочные соотношения

*Перевод статьи “Historical and Critical Review of the Development of Nonholonomic Mechanics: the Classical Period”, опубликованной в журнале Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 4, pp. 455–476.

Получено 05 мая 2016 года
После доработки 22 июня 2016 года

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания вузам, а также поддержана грантами РФФИ № 15-08-09261-а и № 15-38-20879 мол_а_вед.

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Московский физико-технический институт (государственный университет)
141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Бизяев Иван Алексеевич
bizaev_90@mail.ru
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

1. Введение

В данном обзоре мы постараемся описать наиболее важные, по нашему мнению, аспекты развития теории неголономных систем. Отметим, что в последнее время неголономная механика получила существенное развитие в связи с внедрением новых геометрических и топологических методов, а также методов качественного анализа и высокоэффективных компьютерных вычислений. Ранее в обзоре [12] уже были освещены некоторые основные направления развития неголономной механики.

В этой работе мы не претендуем на полный обзор литературы, как, например, сделано в недавней книге [102]; вместо этого мы критически разберем наиболее важные и интересные работы в данной области. Такой подход особенно важен в последнее время в связи с возросшим числом новых журналов и лавинообразным ростом количества публикаций по динамике неголономных систем. С нашей точки зрения, некритическое цитирование литературы не позволяет отделить основные результаты от второстепенных и даже ошибочных[1]. Мы будем уделять особое внимание работам, представляющим интерес с точки зрения нашего понимания концепции (см. [95]) конструктивного подхода к анализу динамических систем.

Одним из стимулов, побудивших нас к написанию данного обзора, является очерк [57], который посвящен не столько анализу исторического развития неголономной механики, сколько пропаганде одного подхода, развиваемого в основном в «Journal of Geometric Mechanics». Это направление геометрической механики (общие принципы которой представлены в [46]) является более абстрактным продолжением идей школы Дж. Марсдена, которые изложены в [8]. Некоторый синтез обоих подходов имеется в книге [67][2].

С нашей точки зрения, на начальном этапе своего развития геометрическая механика позволяла описать некоторые теоремы динамики в геометрически более ясном виде (как известно, Лагранж в своей «Аналитической механике» [55] полностью игнорировал чертежи и рисунки). Тем не менее, в дальнейшем развитие сосредоточилось не на решении сложных и интересных задач (хотя здесь и существуют исключения), а на развитии особого геометрического языка, используя для этого в основном старые задачи, решенные еще классиками.

Для иллюстрации подхода геометрической механики укажем работу Дёйстермата [33], в которой на языке геометрической механики изложена известная работа Чаплыгина [119] о качении шара. При этом объем работы [33] превышает объем [119] в несколько раз (101 с. и 31 с. соответственно). Тем не менее, не решенные Чаплыгиным проблемы остались открытыми в работе [33]. Еще одним примером является глобальный геометрический подход к редукции динамических систем, который критикуется в [14]. Оказывается, в подавляющем большинстве случаев такой глобальный взгляд конструктивно ни к чему новому не приводит, а предлагаемые обобщения классических результатов, как правило, не работают на практике. Такой формальный подход, на наш взгляд, существенно отдаляет механику от практических приложений.

Укажем, что как абстрактный, так и конструктивный подход имеет своих приверженцев. Одним из ярких примеров являются списки открытых проблем математики 20 века,

[1] Современные библиографические системы цитирования даже не различают ошибочные и действительно важные работы.

[2] Несмотря на то, что мы много лет связаны с Дж. Марсденом общим интересом, направленным на развитие журнала «Regular and Chaotic Dynamics» (и не раз находили у него поддержку по различным моментам технического и «маркетингового» характера), наши позиции по науке существенно различны, за что наш обзор [12] был указан в работе [36] как антиредукционистский.

сформулированные Д. Гильбертом и А. Пуанкаре. Впоследствии абстрактный подход был поддержан бурбакистами (и частично А. Эйнштейном и П. Дираком), которые связывали ценность физической теории с ее красотой. В своем крайнем выражении такой подход приводит к отрыву математики от приложений и реальных задач и превращает ее в раздел лингвистики или схоластики. К сожалению, число сторонников этой точки зрения в последнее время существенно возросло в связи с оценкой деятельности научного сообщества не по качеству научного результата, а количеству опубликованных и процитированных работ. Действительно, «лингвистические» тексты существенно быстрее написать и опубликовать, чем по-настоящему содержательные (или хотя бы не ошибочные) исследования. Несмотря на многочисленную критику, формальный подход в математике продолжает развиваться. Появляется множество публикаций, в которых известные классические результаты, изложенные на новом языке, выдаются за новые.

Конструктивный подход (которого придерживался А. Пуанкаре) состоит в том, что развитие наук (и в том числе математики) в первую очередь стимулирует решение конкретных задач, а не создание абстрактных теорий. Приведем здесь несколько высказываний, которые исчерпывающе характеризуют этот подход в математике.

Якоби [122] (см. также [109]) относительно работ Эйлера:

«Работы Эйлера имеют вообще ту большую заслугу, что им везде приведены по возможности все случаи, в которых задачи могут быть решены полностью с помощью данных способов и средств… Поэтому его примеры дают всегда полное содержание его метода согласно тогдашнему состоянию науки и, как правило, когда удается к примерам Эйлера присоединить какой-нибудь новый пример, то это является обогащением науки, так как от него редко ускользал случай, разрешимый при помощи его способов…»

П. Халмош [117]:

«Сердце математики состоит из конкретных примеров и конкретных проблем. Большие общие теории появляются обычно после обдумывания маленьких, но глубоких суждений; сами же суждения начинаются с проникновения в конкретные частные случаи…»

Э. Цендер [110] относительно Ю. Мозера:

«Можно сказать, что эти заметки появились благодаря глубокому пониманию динамических систем Юргеном Мозером и его широкому взгляду на математику. В данных заметках отражен особый подход Мозера к математике: он отмечал вдохновляющие его характерные явления, а не создавал абстрактных теорий…»

Отметим, что в отличие от гамильтоновой механики динамика неголономных систем обладает существенно более многообразными свойствами, что проявляется в необычных движениях (типа кельтского камня и пр.), многие из которых можно наблюдать экспериментально. Эти необычные и, на первый взгляд, загадочные свойства стимулируют дальнейший процесс изучения неголономных систем.

На современном уровне для решения неголономных задач используются многие разделы математики — теория групп и алгебр Ли, топология, качественные методы и теория условно-периодических функций, а также теория общих пуассоновых структур и методы эффективного компьютерного анализа. Кроме того, требуется нетривиальная интуиция и хорошее владение техникой аналитических вычислений. Эти качества были присущи С. А. Чаплыгину, который после работы Герца вывел неголономную механику на совершенно новый уровень. Большинство современных методов анализа неголономных систем (методы интегрирования, гамильтонизации и пр.) восходят именно к работам Чаплыгина.

При решении более сложных задач неголономной механики абстрактный уровень математического языка часто создает много дополнительных препятствий. Этим и объясняется, что авторы «общих теорий» часто далеко не продвигаются в решений новых задач, а их работы либо используют одни и те же элементарные системы, для которых и так все ясно, либо вводят новые абстрактные системы, которые абсолютно бесполезны. Так, введение вейнстейновских группоидов и алгеброидов в круг задач неголономной механики, предпринятое в [57], вряд ли вызовет оптимизм у инженеров и физиков.

Замечание. Отметим, кстати, что в недавно вышедшей замечательной книге [56] по пуассоновым структурам практически не рассматриваются примеры, а изложение сосредоточено на доказательстве общих результатов. Более того, в [56] не были отмечены более глубокие свойства пуассоновых многообразий, связанные с хаотическим вложением симплектических листов. Различные примеры такого сорта обнаружены недавно в неголономной механике [6].

Эта работа представляет собой лишь первую часть подготовленного нами обзора; во второй части будут рассмотрены недавние результаты (начиная с 1985 года) и сформулирован ряд нерешенных проблем. Чтобы не загружать основной исторический материал формулами, мы вывели их в отдельный раздел, в котором обсуждаются различные формы уравнений неголономных систем и принципиальные отличия этих уравнений от гамильтоновых (в частности, рассматривается вопрос о невозможности их получения из вариационного принципа).

2. Первый период: до работы Герца 1894 года и создания общей концепции неголономных систем

В этот период были рассмотрены различные постановки задачи о качении без проскальзывания твердого тела (восходящей к Л. Эйлеру и С. Пуассону). В качестве примера укажем трактат С. Ирншоу [34] (1844), в котором рассмотрено движение однородного шара на вращающейся плоскости (исследуемое до сих пор в современной литературе [16]).

Уравнения движения твердого тела, катящегося по плоскости (диска, обруча или монеты), были получены Г. Слессерем [82] (1861) из общих принципов динамики и явного исключения сил реакции связей[3].

Н. Ферререс [38] (1872) явно указал, что уравнения движения системы со связями, заданными в дифференциальной форме, не могут быть представлены в форме уравнений

Рис. 1. Самуэль Ирншоу (1805–1888)

Рис. 2. Эдвард Джон Раус (1831–1907)

[3]В настоящее время таким образом поступает большинство инженеров и механиков.

Лагранжа. Тем не менее, при выполнении определенных условий, для отдельных переменных такая запись оказывается возможной. В качестве примера Ферререс приводит задачу о качении обруча, в которой угол между нормалью к плоскости диска и вертикалью (угол нутации) эволюционирует согласно обычным уравнениям Лагранжа (второго рода).[4] Отметим, что до общего формализма динамики неголономных систем в работах [38, 82] было еще далеко.

Э. Раус [77] (1884) рассмотрел задачу о качении однородного шара на вращающейся осесимметричной поверхности. Именно Раусом была отмечена возможность использования уравнений Лагранжа с неопределенными множителями (первого рода) для описания движения неголономных систем.

В более общей форме, особенно приспособленной для описания динамики твердых тел, уравнения движения были получены А. Фиркандтом [86] (1892). В этой работе автор уже хорошо понимает специфику неголономных связей и то, что эти связи возникают при качении. Все его результаты вполне согласуются с современным анализом проблемы, предпринятым, например, в статье [17]. Особое внимание в работе Фиркандта уделяется движению однородного (круглого) диска, для которого отмечено, что движение приведенной системы, как правило, носит периодический характер. Он в целом описал картину движения и динамику точки контакта указал стационарные движения, при которых точка контакта движется по окружности.

3. Второй период (1894–1912): интенсивное развитие общей концепции неголономных систем и работы Чаплыгина

Общее понимание неприменимости уравнений Лагранжа и вариационных принципов в неголономной механике принадлежит Г. Герцу, который обсуждает эти вопросы в своем фундаментальном труде «Принципы механики, изложенные в новой связи» [45] (1894). Заметим, что этот труд в основном посвящен концепции скрытых циклических параметров (координат, масс), которую Герц противопоставлял обычному представлению о взаимодействии как результате действия сил. Для понимания его взглядов приведем некоторые фрагменты из этого труда.

«Применение принципа Гамильтона к какой-либо материальной системе не исключает того, чтобы между выбранными координатами этой системы существовали жесткие связи, но оно требует все же, чтобы эти связи могли быть выражены математически при помощи конечных уравнений между координатами. Появление таких связей, которые могут быть выражены математически только посредством дифференциальных уравнений, недопустимо. Но сама природа, по-видимому, не исключает связей последнего вида, и они появляются, например, тогда, когда трехмерные тела перекатываются без скольжения одно по поверхности другого. Благодаря этой связи, которую мы часто встречаем вокруг нас, положение тел относительно друг друга ограничено только постольку, поскольку они постоянно должны иметь одну общую точку поверхности, но свобода движений тел ограничена еще на одну степень. Следовательно, из этой связи может быть выведено больше уравнений между изменениями координат, чем между самими координатами, и должно существовать по крайней мере одно неинтегрируемое дифференциальное уравнение. К таким случаям принцип Гамильтона неприменим или, выражаясь точнее, математически возможное применение принципа приводит к физически ложным результатам.

[4]В дальнейшем это было отражено в вопросах гамильтонизации приведенной системы, указанной в работе [11]. Здесь также стоит отметить, что для решения подавляющего большинства конкретных задач собственно теоретического развития неголономной механики не нужно и все уравнения можно получить с помощью общих принципов динамики.

Ограничим наши рассуждения простым случаем шара, который, следуя только инерции, катится без скольжения по твердой горизонтальной плоскости; в данном случае можно путем простого рассмотрения, без всяких математических вычислений, охватить не только движения, которые шар действительно может выполнить, но и движения, которые соответствовали бы принципу Гамильтона, согласно которому при постоянной живой силе шар должен достичь заданных положений в кратчайшее время. Можно также без вычисления убедиться в том, что оба вида движений имеют весьма различные особенности. Если мы выберем произвольно начальное и конечное положение шара, то, по-видимому, всегда имеется некоторый переход из одного положения в другое, где время перехода, т. е. интеграл Гамильтона, становится минимумом. В действительности же естественный переход из одного положения в другое невозможен без воздействия сил, если даже выбор начальной скорости совершенно свободен. Но даже в том случае, когда мы выбираем начальное и конечное положение так, что между обоими положениями возможно естественное свободное движение, то оно все же не будет таким движением, которое соответствовало бы минимуму времени. При определенных начальных и конечных положениях разница может быть поразительной. В этом случае шар, который двигается в соответствии с упомянутым принципом, был бы чрезвычайно похож на живое существо, которое целеустремленно двигается к определенному положению, в то время как рядом с ним шар, подчиняющийся закону природы, произвел бы впечатление мертвой, равномерно перекатывающейся массы<...>

Эти доводы в защиту отстаиваемых положений не являются, правда, убедительными, ибо качение без скольжения не противоречит ни принципу энергии, ни какому-либо из законов, известных физике...»

В этих несколько туманных и философских соображениях Герца явно указывается на неприменимость принципа Гамильтона для неголономных систем. Кроме того, указана возможность реализации неголономных связей посредством качения без проскальзывания твердых тел друг по другу и справедливость закона сохранения энергии для таких систем (в отличие от систем с трением). Даже образные рассуждения Герца о шаре, как о живом существе, можно трактовать как отсутствие детерминированности при описании, с помощью принципа Гамильтона, систем с неголономными связями[5]. Замечания Герца развил А. Пуанкаре [72] в своей широкоизвестной работе «Идеи Герца в механике» (1897). В частности, он дал элементарное доказательство неголономности связей в задаче о качении шара по плоскости и отметил, что принцип Гамильтона (принцип наименьшего действия) неприменим для описания неголономных систем.

Замечание. Отметим, что Герцем и Пуанкаре сделан правильный вывод о неприменимости принципа Гамильтона для общих неголономных систем. Однако указанный ими пример однородного шара, катящегося по плоскости, является не совсем корректным (так как допускает представление в гамильтоновой форме), что позже было отмечено Капоном в [26].

Напомним кратко, в чем состоит отличие неголономных связей от голономных. Пусть $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ — обобщенные координаты на конфигурационном пространстве системы. Рассматриваемые в неголономной механике связи, как правило, являются линейными и однородными по обобщенным скоростям и явно не зависят от времени:

$$f_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{q}) \frac{dq_j}{dt} = 0, \quad i = 1, \ldots, m < n. \tag{3.1}$$

Неголономные связи, в отличие от голономных, не могут быть представлены в конечном интегральном виде

$$F_i(\boldsymbol{q}, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, m < n. \tag{3.2}$$

[5]Это существенно позднее отмечалось в рамках вакономной механики [95] (которая, кстати, неприменима для систем с качением; неинтегрируемые связи предлагается реализовать гидродинамическим образом).

Исследование приводимости связей (3.1) к виду (3.2) тесно связано с интегрируемостью системы пфаффовых уравнений. Действительно, после умножения на dt уравнения связей (3.1) представятся в форме уравнений Пфаффа.

Следовательно, критерий, позволяющий проверить неголономность связей, может быть получен при помощи теоремы Фробениуса [39] (1877) (см. подробнее например, [13]).

Замечание. Относительно теоремы Фробениуса мы рекомендуем интересный обзор [44], в котором эта теорема освещена с различных точек зрения и связывается с исследованиями Дарбу, Картана, Клебша. С современной точки зрения эти проблемы обозначены Арнольдом как контактная геометрия (см., например, [94]). Отметим, что хоть обзор [44] и является достаточно полным, но он не упоминает, например, фундаментальных книг С. Ли [58–60], в которых формулируется теорема Фробениуса и дается ее прозрачное доказательство. Однако, что интересно, Ли [60] при обсуждении вклада различных математиков в создание теорий групп и, в частности, проблему Пфаффа, вообще не упоминает Фробениуса, хотя многие математики того времени в какой-то мере и даже весьма критически были упомянуты.

В этой связи выделим работу Ж. Адамара (выполненную еще под руководством Аппеля), подробно изучившего вопрос о приводимости связей (3.1) к виду (3.2) [41] (1895). Особо отметим, что им была сформулирована модель качения, в которой между твердым телом и поверхностью реализуется неголономная связь, которая задается условиями равенства нулю скорости точки контакта и проекции угловой скорости твердого тела на нормаль к неподвижной поверхности. Далее эта модель также развивалась А. Бегеном [4] (1929) и в последнее время широко используется в робототехнике. Работа [41] существенно затрагивает различные вопросы динамики неголономных систем и развитием изложенных в ней идей является недавняя статья [15].

С другой стороны, негамильтоновость в общем случае уравнений неголономной механики следует из соображений качественного характера (к сожалению, это было понято существенно позднее [54]). Так, было показано, что при исследовании устойчивости различных частных решений (как правило, стационарных или перманентных вращений) для конкретных неголономных систем может проявляться *асимптотическая устойчивость*, невозможная для гамильтоновых систем.

Наиболее интересными являются исследования, связанные с устойчивостью вращений вокруг вертикальной оси так называемого *кельтского камня*, который демонстрирует удивительную зависимость устойчивости от направления вращения. Исторически первым эту зависимость, нетипичную для гамильтоновых систем, установил Уолкер в 1895 году [89]. Как известно, характерной особенностью кельтского камня является несовпадение динамических и геометрических осей в точке контакта.[6]

Выделим работы Э. Карвалло [28] (1899), Ж. Бусинеска [22, 23] (1899), Р. Рауса [78] (1899), С. Бурле [21] (1899) по теории велосипеда, в результате которых было получено некоторое описание его движения, в том числе объяснена его уникальная устойчивость[7].

[6]Отметим, что в последние годы обнаружен ряд новых неголономных систем, в которых наблюдается реверс (см., например, [5, 9]).

[7]В современный период вопрос устойчивости велосипеда был проанализирован А. Руиной и соавторами, которые исправили опечатки и ошибки в упомянутых работах и в результате получили противоположные выводы, «поколебовав» классическую теорию велосипеда, которая связывала устойчивость с гироскопическим эффектом [49, 65]. Объяснение оказалось связано с нетривиальными эффектами неголономных систем, как, например, асимптотическая устойчивость в динамике кельтского камня.

В этот период особое внимание привлекла ошибка Линделёфа [61] (1895) в задаче о качении тела вращения, связанная с применением уравнений Лагранжа при наличии неинтегрируемых связей и подстановкой неголономных связей в кинетическую энергию. Позже эта ошибка оказалась в первом изданий трактата П. Аппеля [2] (1896). Отметим, что ошибку (связанную с применением принципа Гамильтона) допустил К. Нейман [68] (1886); позже он исправил ее в [69] (1899).

Допущенные ошибки послужили стимулом для их нахождения и поспособствовали развитию неголономной механики и оформлению ее в отдельный раздел динамики. Например, С. А. Чаплыгин [118] (1897) подробно проанализировав ошибку Линделёфа, получает правильную форму уравнений движения, а также подробно изучает движение тела вращения (в частности, диска) по плоскости. В результате Чаплыгиным была показана интегрируемость в квадратурах произвольного тела вращения, а также указана возможность добавления уравновешенного и равномерно вращающегося ротора вдоль оси вращения (без потери интегрируемости). Кроме того, Чаплыгиным получена первая общая форма уравнений неголономной механики, в которой исключены неопределенные множители и явно выделены члены неголономности.

Ошибку, аналогичную ошибке Линделёфа, совершил также Кресчини [30] (1889), проинтегрировав с помощью метода Гамильтона – Якоби уравнения качения тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости.[8]

Несколько позднее ошибочные результаты (включая результаты Линделёфа), полученные при описании тела вращения, катящегося по плоскости, подробно разбирает Д. Кортевег [50] (1899), иллюстрируя невозможность исключения неголономных связей в свободном лагранжиане на модельном примере (среди ошибочных работ упоминаются также работы П. Моленбрука [66] (1890) и Г. Схоутена [80] (1899)). Особо Кортевег выделяет уже упомянутую ранее работу А. Фиркантда [86], в которой используется правильный метод получения уравнений движения. Сам Кортевег [51] сводит задачу о круговом тяжелом диске на плоскости к гипергеометрическому уравнению, отмечая при этом[9], что в случае однородного диска задача была решена Фиркандтом[10].

Указанную ранее ошибку в своем трактате П. Аппель исправляет в более поздних изданиях, получая при этом компактную (и универсальную) форму уравнений (как голономной, так и неголономной механики), содержащую энергию ускорений (до Аппеля эта форма уравнений была исследована Гиббсом [40], однако без явного рассмотрения неголономных связей). По отношению к уравнениям Аппеля следует согласится с точкой зрения Г. Гамеля [42] (1904):

«Вторая попытка Аппеля, когда он заменяет живую силу T на новую функцию S от ускорений, тоже не слишком хороша методически, несмотря на свои эстетические достоинства. Сначала приходится выполнять преобразование вторых производных от координат, из-за чего живая сила T

[8] Вито Вольтерра, представлявший работу Кресчини, также допустил ошибки при выводе уравнений неголономной механики.

[9] С современной точки зрения, качественный анализ, проделанный Фиркандтом, существенно важнее, чем сведение задачи к гипергеометрическому уравнению.

[10] Здесь мы сталкиваемся с действительно интересным историческим фактом: исследования о качении диска были выполнены в течение короткого промежутка времени в Германии (Фиркандт), в Голландии (Кортевег), в России (Чаплыгин), во Франции (Аппель), в Англии (Гэллоп). Исследования Фиркандта были опубликованы в популярном журнале, а исследования Линделёфа и Чаплыгина опубликованы в малоизвестных журналах, но, тем не менее, имея ряд отмеченных преимуществ, работа Фиркандта осталась практически незамеченной.

полностью утрачивает свою центральную роль, так что системы с неголономными и с голономными условными уравнениями разделяет глубокая пропасть, а это совершенно не соответствует разнице между обеими задачами. Ведь, в сущности, голономные условные уравнения — это всего лишь особый случай неголономных. . . »

Отметим, что при составлении уравнений движения для конкретных задач (связанных, например, с качением) обычно используют уравнения с неопределенными множителями или в квазискоростях, которые в общей форме получены Гамелем [42] (1904) (продолжившим исследования Л. Больцмана). Сам Гамель полученную форму уравнений предложил называть уравнениями Эйлера – Лагранжа, что часто делается в различных учебниках.

В качестве интересного исторического факта отметим, что Гамель при написании обширной работы [42] достаточно хорошо изучил теорию Ли и овладел техникой получения уравнений движения в очень современной на тот период форме. Так, в упомянутой работе Гамель приводит общую форму уравнений динамики для неголономных систем, которая в случае интегрируемых связей переходит в уравнения Пуанкаре на группе Ли, которые применимы только для голономных систем и были получены Пуанкаре [73] (1901) (всего за три года до Гамеля).

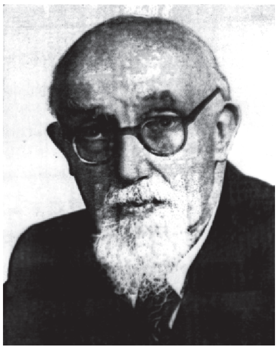

Рис. 3. Георг Карл Вильгельм Гамель (1877–1954)

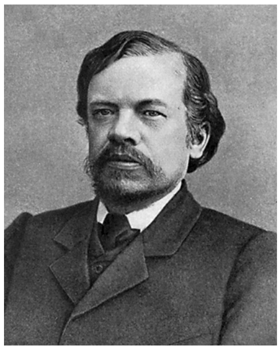

Рис. 4. Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869–1942)

Различные формы уравнений, отличающиеся способом исключения неопределенных множителей, получили В. Вольтерра [87] (1897) и П. В. Воронец [100] (1901) (при этом они, в отличие от Гамеля, не пользовались формализмом теории Ли и не владели ее аппаратом). Более того, оказалось, что уравнения Вольтерры содержат некоторые ошибки (аналогичные ошибкам Линделёфа), связанные с подстановкой уравнений связи в кинетическую энергию, а, следовательно, применимы только для голономных систем (относительно такой подстановки в неголономной механике см. подробнее [10]). В литературе еще имеются уравнения в форме Г. Маджи [63] (1901), И. Ценова [47] (1920), Татаринова и др., которые также периодически используются в зависимости от рассматриваемых задач и предпочтений исследователей.

Замечание. Позже Г. Гамель в своем учебнике по теоретической механике [43] (1940) сравнивает различные формы уравнений движения Воронца, Ценова, Вольтерры и показывает, что все они могут быть получены из его общего подхода.

Уже в этот период решение удачных задач, проясняющих (качественные) отличия движения неголономных систем от движения голономных систем, в основном стимулирует развитие неголономной механики. Здесь, конечно, в первую очередь следует упомянуть о работах С. А. Чаплыгина [119, 120] (1903, 1912), в которых рассмотрены неголономные связи специфической природы, которые часто встречаются в приложениях — *связи Чаплыгина*:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_k)$ и $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ — обобщенные координаты на конфигурационном пространстве (размерности $n = k + m$).

В случае, когда задача сводится к системе с двумя степенями свободы ($k = 2$) и лагранжиан свободной системы явно не зависит от координат $\boldsymbol{x}$, Чаплыгин разработал метод приводящего множителя, с помощью которого после замены времени уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме. Отметим, что Чаплыгин в качестве примера, иллюстрирующего метод приводящего множителя, рассмотрел движение саней[11].

Замечание. Оказалось, что метод приводящего множителя позволяет представить уравнения движения в гамильтоновой форме после замены времени [13] в другой известной задаче Чаплыгина о качений динамически несимметричного шара на горизонтальной плоскости.

Замечание. В качестве исторического замечания отметим, что хотя сани традиционно связывают с работами Чаплыгина [120] (1912) и Каратеодори [27] (1933), однако немного раньше они были рассмотрены А. Бриллом [25] (1909) как пример механизма неголономного планиметра.

В качестве интересного факта отметим, что при составлении уравнений движения для конкретных неголономных задач Чаплыгин использует принципы динамики, а не различные общие формы уравнений неголономной механики.

Отличительной чертой работ Чаплыгина является применение для анализа уравнений различных геометрических методов и прояснение геометрической природы движения с помощью имеющихся на тот период методов (ярким примером служит его работа о движении динамически несимметричного шара).

Выделим также задачу Суслова о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в присутствии неголономной связи, которая была рассмотрена в его известном трактате по теоретической механике [115] (1900), несколько раз переиздававшемся и до сих пор имеющего популярность среди российских механиков [116]. Украинский математик и механик

Рис. 5. Гавриил Константинович Суслов (1857–1935)

Рис. 6. Петр Васильевич Воронец (1871–1923)

[11]Его рассуждения, примененные к саням, существенно используют введенную им квазикоординату, что породило дискуссию о корректности метода [103].

П. В. Воронец (будучи учеником Суслова) указал не только новую форму уравнений неголономной механики, но еще и рассмотрел ряд примеров (в частности, задачу о качении тела с плоским основанием по сфере [93] (1911) и качение тела произвольной формы по поверхности сферы [101] (1909)).

Кроме того, несомненная заслуга Воронца состоит в применений соображений неголономной механики (в том числе неголономного базиса) к гамильтоновым системам. Это позволило существенно продвинуться в вопросах редукции и нахождения частных решений в задаче n тел на плоскости с различными потенциалами [92]. Отметим, что некоторые исторические вопросы, связанные с редукцией как в неголономной механике, так и в различных динамических системах, собраны в обзоре [14].

В этот период исследовались вопросы представления в гамильтоновой форме общих неголономных систем, которые не привели к каким-либо существенным продвижениям. В работах Дотевилля [31] (1909), Куанжеля [76] (1906), по существу, используется преобразование Лежандра для свободной системы, с помощью которого после перехода к импульсам в уравнениях движения возникают дополнительные (неголономные) члены[12].

4. Третий период (1913–1966): начала неголономной геометрии

К сожалению, в этот период, в связи с созданием квантовой механики и общей теории относительности, классическая механика ушла на второй план. В основном развивалась *неголономная геометрия*. Основными лидерами в этом направлении были Ж. А. Схоутен [81] (1928), Г. Врачнеану [88] (1936), Э. Картан [105] (1940) и В. Вагнер [98] (1941). Отметим, что методы неголономной геометрии до сих пор не нашли своего воплощения в неголономной механике.[13] Отметим, что развитие геометрических методов поспособствовало возникновению теоремы Рашевского – Чжоу, которая была независимо сформулирована в работах П. К. Рашевского (1938 г.) [112] и В. Л. Чжоу (1939 г.) [29] и оказала огромное влияние на развитие теории управления.

По-видимому, из теоретических работ по неголономной геометрии только работа В. Вагнера представляет интерес для динамики: в ней приведена корректная реализация связи в задаче Суслова, в отличие от ошибочной реализации, данной самим Сусловым [116].

В работе А. Д. Биллимовича [96] (1914) рассмотрены нестационарные связи. Отметим, что вообще говоря нестационарные связи с помощью увеличения размерности фазового пространства могут быть сведены к стационарным связям, но их можно рассматривать отдельно. Весьма содержательным примером, который встречается и в современной литературе, является неголономный маятник Биллимовича.

[12]Относительно работы Пёшля [75], представленной в *Comp. Rend. Acad. Sci.* Аппелем, отметим, что она относится не к неголономным системам, а к выбору неголономного базиса в гамильтоновых системах (то есть эти уравнения представляют собой уравнения Пуанкаре [73], преобразованные к гамильтоновой форме; это преобразование, как известно, выполнено Н. Г. Четаевым). В отличие от Пуанкаре и Четаева, автор [75] не владел групповым формализмом Ли; как и Вольтерра [100], он получил сходные уравнения, неприменимые в общем случае для неголономных связей, используя, по выражению Гамеля, запрещенную операцию подстановки связей в лагранжиан свободной системы.

[13]Тем не менее, существуют современные работы (см. например Койлер [48]), авторы которых верят в возможности дальнейшего применения методов неголономной геометрии.

Формально вопрос о наличии инвариантной меры исследовался С. Ж. Блэколлом [7] (1941). В частности, им был указан простейший модельный пример неголономной системы, в которой отсутствует гладкая инвариантная мера.

Отметим, что в этот период обсуждалась корректность вариационного принципа и принципа Гамильтона — принципы Гельдера, Суслова, Фосса (см. например, работу Капона [26]).[14] Все эти попытки не приводят более чем к формальной записи гамильтоновых аналогов уравнений движения, лишенных, однако, динамического содержания. В связи с этим отметим работу Эдена [35] (1951), представленную Дираком (до создания им общей гамильтоновой механики): работа является ошибочной, хотя вычисления в [35] достаточно трудно проверить явно.

Замечание. В более поздние периоды формалистическими работами, обобщающими гамильтоновы методы в неголономной механике, являются [37, 71, 85, 90]. Интересно, что общим фактом этих работ является отсутствие примеров, а изучение конкретной задачи, аналогично классической задаче о качении монеты по плоскости, предпринятое в [85], приводит к тому, что с помощью метода Гамильтона – Якоби возможно найти только стационарные движения. Аналогичная точка зрения высказывается в [79].

Несмотря на большое количество формальных работ, отметим, что в этот период стали рассматриваться различные постановки задач о динамике колесного экипажа. Так, в работах Б. Штюклера [83, 84] (1952, 1955) рассмотрены две модели автомобиля с закрепленной задней осью. В первой модели передняя ось свободно вращается вокруг нормали к плоскости, а во второй, вследствие механизма трапеции (механизма Жанто), колеса всегда параллельны друг другу, но не нормальны к оси моста. Особенностью этих работ является анализ реакций и применение уравнений Гамеля.

Исследования простейшей схемы колесного экипажа, состоящего из двух двухколесников (получившей позже название roller-racer), проведено с точки зрения устойчивости И. Рокаром (1959) в известной книге [113]. Автором обнаружена асимптотическая неустойчивость прямолинейного движения, являющаяся характерной для неголономных систем. В 1964 году У. Боттемой [20] были проанализированы траектории экипажа с закрепленной задней осью и приведены особо замечательные решения.

Замечание. Современные работы по динамике колесных экипажей инициированы в основном роботехническими разработками (см. например [18, 24]).

Замечание. Остановимся подробнее на нелинейных по скоростям связях. Наиболее известный пример предложен Аппелем [3] (1911) и впоследствии рассмотрен Гамелем в [43]. Однако этот пример Аппеля – Гамеля является не совсем убедительным, так как возникает в результате предельного перехода из линейных связей. Подробно реализация нелинейных связей обсуждается в работе Делассю [32] (1911), в которой сделан не совсем убедительный вывод, что нелинейные связи всегда могут реализовываться с помощью линейных связей.

Позже Н. Г. Четаевым [121] (1932) был поставлен вопрос о согласований принципа Гаусса и общего формализма неголономной механики для систем с нелинейными связями. Дело в том, что в этом случае принципы Даламбера – Лагранжа и Гаусса приводят к различным результатам. Четаевым было введено понятие возможного перемещения, чтобы одновременно согласовать оба принципа.

Отметим, что нелинейные по скоростям связи возникают формальным образом, при постулировании принципа Гаусса в механике Нозе – Гувера (см., например, [74]), являющейся одним из разделов молекулярной динамики.

[14]Отметим, что до сих пор делаются попытки обобщения различных фактов гамильтоновой механики на неголономные системы (теория Гамильтона – Якоби) [70].

5. Четвертый период (1967–1984): книга Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева

Следующая ступень в развитии теории неголономных систем тесно связана с книгой Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева [111] (1967), которая была инициирована различными приложениями неголономной механики (например, явлением шимми, наблюдаемым при движении шасси самолетов). Авторы упомянутой книги несколько лет вели семинары по неголономным системам в Нижнем Новгороде, в известной школе академика Андронова по нелинейным колебаниям и теории бифуркаций. Разрабатываемые андроновской школой методы качественного анализа были собраны в этой книге, которая фактически сразу (русское и американское издания) обрела большую популярность. В книге [111] кроме анализа элементарных задач выделены новые направления исследований и поставлены вопросы о корректности перестановочных соотношений, о реализации связей (разбор ошибки Каратеодори о невозможности реализации связей с помощью сил вязкого трения), а также поставлен вопрос о специфических равновесиях неголономных систем (второго рода по Боттеме).

Рис. 7. Юрий Исаакович Неймарк (1920–2011)

Рис. 8. Николай Алексеевич Фуфаев (1920–1996)

Наверное, единственный недостаток книги [111] заключен в том, что она написана механиками: с точки зрения математического формализма, некоторые проблемы, рассматриваемые авторами, связаны с неточностью математических определений. В частности, обсуждают вопрос о перестановочных соотношениях, который связан с отсутствием строгих определений. В этом смысле некорректна их критика работы Вольтерры — работа эта хотя и ошибочна (его уравнения неприменимы для неголономных систем), но совсем по другой причине. Уравнения Вольтерры справедливы для гамильтоновых систем, записанных в квазискоростях, но при отсутствии неголономных связей.

Подход авторов к перестановочным соотношениям изложен подробнее в разделе 6.2. Этот подход фактически является более современным изложением точки зрения Неймарка и Фуфаева. С другой стороны, выделим работы [62, 64, 97], в которых изложение перестановочных соотношений чересчур усложнено избыточным формализмом.

Замечание. Отметим, что в обзоре [57] особо выделена работа А. М. Вершика и Л. Д. Фадеева [99] (1972). По нашему мнению, это совершенно не справедливо: кроме хорошо известного еще классикам (например, Герцу) замечания о том, что в случае однородных связей сохраняется интеграл энергии, эта статья не содержит ничего нового, и ее влияние было, скорее всего, решающим для развития формальных работ, но никак не для методов неголономной механики.

Исторический комментарий об устойчивости в неголономных системах

Известно, что критические точки потенциальной энергии являются положениями равновесия как голономных, так и неголономных систем. Такие точки называются положениями равновесия первого рода. В 1899 году Кортевегом [50] было показано, что анализ линейной устойчивости неголономных систем фактически сводится к исследованию устойчивости голономных систем, полученных при линеаризации связей. В качестве иллюстрации рассмотрена задача Керкховен-Витгоф, в которой полусфера (выпуклой стороной) лежит на плоскости, при этом на верхней полуплоскости полусферы покоится вторая полусфера. В дальнейшем этот пример перешел в учебник Э. Уиттекера [91].

В. В. Румянцевым [104, 114] и его учениками для положений равновесия первого рода развивалась идея Четаева о создании теории устойчивости неголономных систем. Получены результаты общего характера относительно обобщений теорем Ляпунова и Рауса на неголономные системы. Однако существенной специфики неголономных систем такие исследования не охватывают. В связи с этим выделим работу Козлова [107], в которой сформулированы основные результаты относительно обращений теоремы Лежандра – Дирихле, а также отмечена роль положений равновесия второго рода в неголономной механике.

Отметим, что положения равновесия первого рода, как правило, являются изолированными и характерными для гамильтоновых систем. Специфика неголономных систем проявляется в положениях равновесия второго рода, отмеченных впервые Боттемой [19]. Они не зависят от минимума потенциальной энергии, а их происхождение тесно связанно с неинтегрируемостью связей. Отметим, что положения равновесия второго рода, как правило, являются асимптотически устойчивыми (либо неустойчивыми).

Положения равновесия второго рода были проанализированы Козловым [106], но без примеров. Геометрия этих положений равновесия до сих пор остается слабо изученной как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения содержательных примеров.

6. Принцип Даламбера – Лагранжа и перестановочные соотношения

В литературе, посвященной неголономной механике, значительное место уделяется различным «теоретическим обоснованиям» уравнений движения. При этом, как правило, все рассуждения опираются на принцип Даламбера – Лагранжа (условие идеальности связей). Здесь мы кратко напомним, каким образом этот принцип возникает в системах с неголономными связями, поскольку именно он является естественным обобщением (аксиоматизацией) модели качения без проскальзывания недеформированных тел друг по другу.

Кроме того, мы обсудим так называемую проблему «правильного» выбора перестановочных соотношений в неголономной механике, которая в некоторых работах играет едва ли не центральную роль. Оказывается, что в данном случае проблема не в том, какие перестановочные соотношения «правильны», а в том, как правильно трактовать обозначения, входящие в них. В зависимости от интерпретации обозначений изменяется смысл и область применения самих перестановочных соотношений. Здесь мы остановимся на современном описании исторически первой интерпретации, предложенной Г. Гамелем (обсуждения иных интерпретаций см. в [111]).

6.1. Замена связей силами реакции при качении без проскальзывания

1. Прежде всего напомним, каким образом в динамике материальной точки, положение которой задается радиус-вектором $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$, учитывается влияние некоторой геометрической связи

$$f(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{6.1}$$

Как известно, в этом случае вместо движения со связью рассматривается задача о свободной частице, на которую действует сила реакции $\boldsymbol{N}$, ортогональная поверхности (6.1). При этом уравнение Ньютона записывается в форме

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}, \tag{6.2}$$

где m — масса точки, $\boldsymbol{F}$ — заданные внешние силы.

Ускорение частицы $\ddot{\boldsymbol{r}}$ и величина силы реакции $|\boldsymbol{N}|$ находятся из уравнения (6.2) и второй производной связи

$$\ddot{f}(\boldsymbol{r}) = \left(\ddot{\boldsymbol{r}}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j = 0. \tag{6.3}$$

При таком подходе реакция $\boldsymbol{N}$ зависит только от $\boldsymbol{r}$, $\dot{\boldsymbol{r}}$ и связь (6.1) выступает в роли инвариантного соотношения получившихся уравнений движения.

При наличии внешних сил выбор направления реакции связи, вообще говоря, неоднозначен: так, в работе [1], например, используется определение сил реакции, направленных вдоль прямой, соединенной с некоторым проективным центром. Требование ортогональности реакции является естественным обобщением ситуации, когда частица закреплена на нерастяжимой нити (сферический маятник) так, что в этом случае реакция направлена вдоль нити. Вообще говоря, выбор сил реакции может существенным образом зависеть от реализации связей [52, 53, 108].

В форме (6.2), (6.3) крайне неудобно выводить уравнения движения для систем многих частиц и при наличии множества связей. В таких случаях для записи уравнений движения пользуются, как правило, принципом Даламбера–Лагранжа. В случае одной частицы уравнения (6.2) представляются в форме

$$(m\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\tau}) = 0,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — произвольный вектор, касательный к поверхности (6.1). Отсюда, в частности, следует, что *работа сил реакции вдоль возможных перемещений равна нулю.*

В общем случае, когда рассматривается движение N точек при наличии геометрических связей, возможные конфигурации определяются некоторым многообразием $\mathcal{M}$ (конфигурационным пространством), вложенным в пространство положений свободной системы $\mathbb{R}^{3N}$.

Обозначим локальные координаты на $\mathcal{M}$ стандартным образом $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, так что радиус-векторы точек ими определены однозначно $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q})$, $i = 1, \ldots, N$, а их скорости задаются соотношением

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k.$$

Кинетическая энергия определяется как функция на $T\mathcal{M}$ соотношением

$$T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i).$$

Обобщенные силы $\boldsymbol{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)$ находятся из соотношения

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i, d\boldsymbol{r}_i) = \sum_{k=1}^{n} Q_k dq_k,$$

где $\boldsymbol{F}_i$ — сила, действующая на i-ую массу. Тогда условие равенства нулю работы сил реакции для возможных перемещений приводит к уравнениям

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0, \quad i = 1\ldots n.$$

2. Перейдем теперь к случаю, когда в системе накладываются такие ограничения на скорости (различных частей системы), которые не могут быть сведены к набору геометрических связей (то есть связи неголономные). Примером, на котором основываются всевозможные обобщения, является качение одного тела по другому. В этом случае аксиома о замене неголономных связей силами реакции основана на модели качения твердого тела по поверхности, в предположении, что соприкосновение происходит в одной точке (площадь контакта равна нулю). В этой точке на тело действует сила реакции, которая в общем случае неортогональна опорной поверхности.

Рассмотрим задачу о качении тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Соответствующая неинтегрируемая (неголономная) связь заключается в том, что скорость точки контакта тела с плоскостью равна нулю. Это условие можно записать в виде

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 0, \tag{6.4}$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий центр масс G с точкой контакта P, а $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно (рис. 9). В дальнейшем все векторы мы предполагаем спроецированными на оси, жестко связанные с твердым телом.

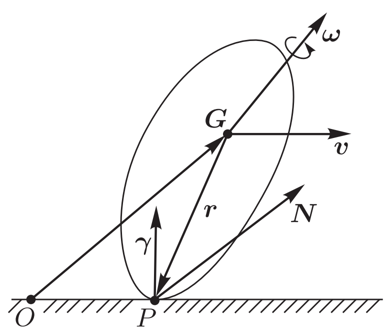

Рис. 9. Твердое тело на плоскости.

Запишем уравнения для изменения импульса тела и момента импульса относительно центра масс G в системе координат, связанной с телом следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} + mg\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{N},\\
&\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{N},
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

где $\boldsymbol{N}$ — сила реакции в точке касания P, m — масса тела, g — ускорение свободного падения, $\mathbf{I}$ — тензор моментов инерции тела относительно центра масс, $\boldsymbol{\gamma}$ — нормаль к плоскости.

Проблема заключается в том, что при записи уравнений движения (6.5), описывающих качение твердого тела по абсолютно шероховатой поверхности, одновременно используются две независимые идеи.

1. Представление уравнений движения в квазискоростях, которые представляют собой компоненты скорости системы в неголономном базисе векторных полей (факт неголономности базиса не имеет прямого отношения к неголономности связей; в частности, такой базис широко используется в гамильтоновой механике).

2. Замена связей силами реакции так, что при этом выполняется (локальный) принцип Даламбера–Лагранжа, то есть работа сил реакции обращается в нуль.

Рассмотрим подробно каждую из этих идей. Для этого сначала выведем уравнения движения твердого тела в квазискоростях без учета связей, а затем с помощью них рассмотрим, какими при качении могут быть силы реакции.

Замечание. Отметим, что аксиома замены связей силами реакции — не единственная возможная: так, в теории управления при исключении связей возникают неопределенные множители, которые являются не силами, а импульсами (либо можно сказать, что силы реакции в этом случае зависят от ускорений).

6.2. Уравнения движения в квазискоростях и перестановочные соотношения

Как хорошо известно, для механической системы, на которую наложены только геометрические связи, уравнения движения представляются в форме равенства нулю вариационной (лагранжевой) производной функции Лагранжа

$$
\left(\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial \dot q_i}\right)^{\displaystyle\cdot} - \frac{\partial L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,\ldots,n,
$$

где $\boldsymbol{q} = (q_1 \ldots q_n)$ — обобщенные координаты системы, однозначно параметризующие всевозможные ее конфигурации (с учетом всех связей), $\dot{\boldsymbol{q}} = (\dot q_1,\ldots,\dot q_n)$ — соответствующие им обобщенные скорости. Таким образом, $\boldsymbol{q}$ — локальные координаты конфигурационного пространства $\mathcal{M}$.

Такая форма уравнений приводит к тому, что траектории механической системы $\boldsymbol{q}(t)$ совпадают с экстремалями вариационной задачи

$$
\delta\int\limits_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})dt = 0.
$$

Выясним теперь, каким образом записывается вариационная производная функции Лагранжа, если обобщенные скорости системы мы будем параметризовать посредством квазискоростей $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$, которые связаны с исходными скоростями линейным преобразованием

$$\dot{q}_i = \sum_\alpha \Omega_\alpha E_{\alpha i}(\boldsymbol{q}).$$

В общем случае векторные поля $\boldsymbol{E}_\alpha(\boldsymbol{q}) = \big(E_{\alpha 1}(\boldsymbol{q}), \ldots, E_{\alpha n}(\boldsymbol{q})\big)$ не коммутируют относительно скобки Ли:

$$[\boldsymbol{E}_\alpha, \boldsymbol{E}_\beta] = \sum_\sigma c^\sigma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}_\sigma.$$

Такие векторные поля называют *неголономным базисом* касательного расслоения $T\mathcal{M}$.

Пусть для некоторой кривой $\boldsymbol{q}_0(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, задано (однопараметрическое) гладкое семейство вариаций $\boldsymbol{q}_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, с закрепленными концами

$$\boldsymbol{q}_\varepsilon(t_1) = \boldsymbol{q}_0(t_1), \quad \boldsymbol{q}_\varepsilon(t_2) = \boldsymbol{q}_0(t_2)$$

при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Обозначим векторное поле, отвечающее дифференцированию вдоль параметра t как $\boldsymbol{v}$, а векторное поле, соответствующее дифференцированию вдоль ε — как $\boldsymbol{u}$ (оно также называется векторным полем вариации):

$$\boldsymbol{v}\Big(f\big(\boldsymbol{q}_\varepsilon(t)\big)\Big) = \frac{d}{dt}f\big(q_\varepsilon(t)\big), \quad \boldsymbol{u}\Big(f\big(\boldsymbol{q}_\varepsilon(t)\big)\Big) = \frac{d}{d\varepsilon}f\big(q_\varepsilon(t)\big).$$

По своему построению эти векторные поля коммутируют (вследствие перестановочности дифференцирований по t и ε):

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = 0. \tag{6.6}$$

Если эти векторные поля записать в координатном базисе

$$\boldsymbol{v} = \sum_i v_i(\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial q_i}, \quad \boldsymbol{u} = \sum_i u_i(\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial q_i},$$

то из соотношения (6.6) получим

$$\boldsymbol{u}(v_i) - \boldsymbol{v}(u_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

В стандартной физической и механической терминологии компоненты этих полей обозначаются как

$$dq_i = v_i dt, \quad \delta q_i = u_i d\varepsilon,$$

поэтому равенства (6.7) представляются в виде

$$\delta dq_i - d\delta q_i = 0, \quad i = 1 \ldots n. \tag{6.8}$$

Если теперь эти же поля записать в неголономном базисе

$$\boldsymbol{v} = \sum_\alpha \Omega_\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}_\alpha, \quad \boldsymbol{u} = \sum_\alpha u_\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{E}_\alpha,$$

то соотношение (6.6) приводит к равенствам

$$u(\Omega_\alpha) - v(u_\alpha) + \sum_{\beta,\gamma} u_\beta \Omega_\gamma c^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \quad \alpha = 1 \ldots n. \tag{6.9}$$

В механике вслед за Гамелем [42] используют для соответствующих компонент векторных полей обозначения

$$d\theta_\alpha = \Omega_\alpha dt, \quad \delta\theta_\alpha = u_\alpha d\varepsilon.$$

В этом случае получаем известные перестановочные соотношения в стандартной форме

$$d\delta\theta_\alpha - \delta d\theta_\alpha = \sum_{\beta,\gamma} c^\alpha_{\beta\gamma}\delta\theta_\beta d\theta_\gamma. \tag{6.10}$$

Здесь важно иметь в виду, что в уравнениях (6.8) величины q_i имеют самостоятельный физический смысл (как обобщенные координаты), поэтому d и δ могут рассматриваться как операции взятия дифференциала и варьирования. В уравнениях (6.10) обозначения θ_α *не могут рассматриваться как функции вообще*, смысл имеют лишь величины $d\theta_\alpha$ и $\delta\theta_\alpha$, поэтому нельзя говорить о перестановочности операций дифференцирования и варьирования.

Выразим теперь функцию Лагранжа через обобщенные координаты $\boldsymbol{q}$ и квазискорости:

$$\hat{L}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega}) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\Big|_{\dot{\boldsymbol{q}}=\sum \Omega_\alpha E_\alpha}.$$

Для соответствующих частных производных справедливы соотношения

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{k,\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\Omega_\alpha \frac{\partial E_{\alpha k}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial\hat{L}}{\partial\Omega_\alpha} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}E_{\alpha k}.$$

Пользуясь ими, находим формулу вариации лагранжиана:

$$\delta\hat{L} = \varepsilon\left[\sum_\alpha\left(\boldsymbol{E}_\alpha(\hat{L}) + \sum_{\beta,\gamma} c^\gamma_{\beta\alpha}\Omega^\beta\frac{\partial\hat{L}}{\partial\Omega_\gamma} - \left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\Omega_\alpha}\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\right)u_\alpha + \left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\Omega_\alpha}u_\alpha\right)^{\boldsymbol{\cdot}}\right],$$

$$\boldsymbol{E}_\alpha(\hat{L}) = \sum_k \frac{\partial\hat{L}}{\partial q_k}E_{\alpha k}.$$

Отсюда получаем уравнения движения в неголономном (то есть некоординатном) базисе:

$$\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\Omega_\alpha}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \boldsymbol{E}_\alpha(\hat{L}) = \sum_{\beta,\gamma} c^\gamma_{\beta\alpha}\frac{\partial\hat{L}}{\partial\Omega_\gamma}. \tag{6.11}$$

Таким образом, мы видим, что перестановочные соотношения (6.9), (6.10) *не имеют прямого отношения к неголономным связям, а возникают при записи вариационной производной лагранжиана в некоординатном базисе векторных полей.*

Так, для движения твердого тела в потенциальном поле (без связей) выберем в качестве обобщенных координат декартовы координаты центра масс тела относительно неподвижных осей (x_1, x_2, x_3) и углы Эйлера (θ, φ, ψ), задающие поворот тела относительно центра масс. В качестве квазискоростей в уравнениях (6.5) выбраны проекции скорости центра масс и угловой скорости на оси, связанные с телом; $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ связаны с обобщенными скоростями соотношениями

$$\dot{x}_i = \sum_j Q_{ij}v_j,$$

$$\dot{\theta} = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi, \quad \dot{\psi} = \omega_1\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + \omega_2\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

$$\dot{\varphi} = -\omega_1\frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta} - \omega_2\frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta} + \omega_3,$$

$$||Q_{ij}|| = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & \cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия представляется в квазискоростях следующим образом:

$$T = \frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}),$$

где $\mathbf{I}$ — тензор инерции тела относительно центра масс. Кроме того, ограничимся случаем, когда потенциал внешних сил зависит только от x_3, θ, φ (то есть обладает осевой симметрией вокруг фиксированной в пространстве оси Ox_3). В этом случае, используя вектор

$$\boldsymbol{\gamma} = (\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, \cos\theta),$$

уравнения движения (6.11) можно представить в форме

$$\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{v}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial\hat{L}}{\partial x_3}\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{v},$$
$$\hat{L} = T - U(x_3, \boldsymbol{\gamma}). \tag{6.12}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (6.5) при $\boldsymbol{N} = 0$ и потенциале

$$U = mgx_3. \tag{6.13}$$

6.3. Принцип Даламбера – Лагранжа для систем с неголономными связями

Векторное уравнение связи (6.4) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$f_\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где f_μ — компоненты вектора $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{q} = (x_1, x_2, x_3, \theta, \varphi, \psi)$ — обобщенные координаты системы, через которые выражается вектор $\boldsymbol{r}$. Пользуясь результатами предыдущего раздела, мы можем переписать уравнения (6.5) в форме

$$\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{v}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial\hat{L}}{\partial x_3}\boldsymbol{\gamma} = \sum_{\mu=1}^{3} N_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial\boldsymbol{v}},$$

$$\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{\omega}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial\hat{L}}{\partial\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{\mu=1}^{3} N_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial\boldsymbol{\omega}},$$

где $\hat{L}$ определена соотношением (6.12) с потенциалом (6.13).

Отсюда мы можем сделать следующее заключение:

для рассматриваемой модели, описывающей качение без проскальзывания твердого тела по недеформируемой поверхности, естественным обобщением на случай произвольных связей вида

$$f_\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m < n,$$

являются общие уравнения движения (в случае потенциальных сил) в форме

$$\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \Omega_\alpha}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \boldsymbol{E}_\alpha(\hat{L}) = \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} c^{\gamma}_{\beta\alpha} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \Omega_\gamma} + \sum_{\mu=1}^{m} N_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial \Omega_\alpha}, \qquad (6.14)$$

$$\dot{q}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \Omega_\alpha E_{\alpha i}(\boldsymbol{q}).$$

Воспользуемся обозначением, предложенным в [95] для вариационной (лагранжевой) производной функции L:

$$[\hat{L}]_\alpha = \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \Omega_\alpha}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \boldsymbol{E}_\alpha(\hat{L}) - \sum c^{\gamma}_{\beta\alpha} \Omega^{\beta} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \Omega_\gamma}, \quad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Замечание. В координатном базисе, когда $\Omega_\alpha = \dot{q}_\alpha$, получим, соответственно,

$$[L]_\alpha = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}.$$

Для линейных по скоростям связей

$$\sum_\alpha \hat{a}_{\mu\alpha}(\boldsymbol{q})\Omega_\alpha = 0, \quad \mu = 1 \ldots m,$$

уравнения движения (6.14) могут быть получены из принципа Даламбера – Лагранжа:

вариационная производная функции Лагранжа обращается в нуль вдоль векторного поля вариаций $\boldsymbol{u} = \sum\limits_\alpha u_\alpha \boldsymbol{E}_\alpha$, *удовлетворяющих уравнению связей*

$$\sum_\alpha [\hat{L}]_\alpha u_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha \hat{a}_{\mu\alpha}(\boldsymbol{q}) u_\alpha = 0, \quad \mu = 1 \ldots m. \qquad (6.15)$$

При решении системы (6.15) методом неопределенных множителей получим уравнение (6.14), где силы реакции N_μ, $\mu = 1, \ldots, m$, совпадают с неопределенными множителями.

Если в уравнениях (6.15) мы перейдем к координатному базису, полагая $\boldsymbol{u} = \sum\limits_i (\delta q_i) \dfrac{\partial}{\partial q_i}$, то получим неголономные связи и принцип Даламбера – Лагранжа в стандартной форме

$$\sum_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i = 0,$$
$$\sum_i \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] \delta q_i = 0, \quad \sum_i a_{\mu i}(\boldsymbol{q})\delta q_i = 0, \qquad (6.16)$$

где $a_{\mu i} = \sum\limits_\alpha \hat{a}_{\mu\alpha} E^{-1}_{\alpha i}$.

Замечание. В механике вектор $\delta\boldsymbol{q} = (\delta q_1, \ldots, \delta q_n)$ полагают (бесконечно) малым и называют виртуальным перемещением системы, тогда выражение

$$\delta A = \sum_i \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] \delta q_i$$

имеет смысл работы вдоль этого перемещения. Принцип Даламбера – Лагранжа зачастую формулируют так:

работа сил реакции вдоль виртуальных перемещений, удовлетворяющих условиям $\sum\limits_i a_{\mu i}\delta q_i = 0$, *обращается в нуль.*

Как хорошо известно, система уравнений (6.14) либо (6.15) (при некоторых естественных условиях невырожденности функции Лагранжа и связей) непротиворечива и определяет векторное поле на подмногообразии

$$\mathcal{M}^{n-m} = \{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega}) | f_\mu(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m\} \subset T\mathcal{M}.$$

Важно также иметь в виду, что если не налагать каких-либо дополнительных ограничений, то для рассматриваемых вариаций пути $\boldsymbol{q}_0(t)$ «деформированный» путь

$$\boldsymbol{q}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{q}_0(t) + \varepsilon \boldsymbol{u}(t) + \ldots$$

не удовлетворяет уравнениям связей. Следовательно, *в общем случае решения системы* (6.14) (*либо* (6.15)) *не являются экстремалями функционала*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Авторы выражают благодарность В. В. Козлову, А. В. Болсинову и А. А. Килину за плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] Albouy A. There is a projective dynamics // Eur. Math. Soc. Newsl., 2013, no. 89, pp. 37–43.

[2] Appell P. Traité de mécanique rationelle: Vol. 2: Dynamique des systèmes. Mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars, 1896. 538 pp.

[3] Appell P. Exemple de mouvement d'un assujetti, a une exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1911, vol. 32, pp. 48–50.

[4] Béghin H. Sur les conditions d'application des équations de Lagrange à un système non holonome // Bull. Soc. Math. France, 1929, vol. 57, pp. 118–124.

[5] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: Reversal and strange attractors // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 5, pp. 605–626.

[6] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Hojman construction and hamiltonization of nonholonomic systems // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 2016, vol. 12, Paper 012, 19 pp.

[7] Blackall C. J. On volume integral invariants of non-holonomic dynamical systems // Amer. J. Math., 1941, vol. 63, pp. 155–168.

[8] Bloch A. Nonholonomic mechanics and control. New York: Springer, 2003. 483 pp.

[9] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top // Regul. Chaotic Dyn., 2014, vol. 19, no. 6, pp. 718–733.

[10] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. On the Hadamard – Hamel problem and the dynamics of wheeled vehicles // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 6, pp. 752–766.

[11] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.

[12] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the history of the development of the nonholonomic dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 1, pp. 43–47.

[13] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

[14] Borisov A. V., Mamaev I. S. Symmetries and reduction in nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 5, pp. 553–604.

[15] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.

[16] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The Jacobi integral in nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 383–400.

[17] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Dynamics of rolling disk // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 2, pp. 201–212.

[18] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A., Bizyaev I. A. Qualitative analysis of the dynamics of a wheeled vehicle // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 6, pp. 739–751.

[19] Bottema O. On the small vibrations of nonholonomic systems // Indag. Math., 1949, vol. 11, pp. 296–298.

[20] Bottema O. Die Bewegung eines einfachen Wagenmodells // Z. Angew. Math. Mech., 1964, vol. 44, no. 12, pp. 585–593.

[21] Bourlet C. Étude théorique sur la bicyclette: 1 // Bull. Soc. Math. France, 1899, vol. 27, pp. 47–67.

[22] Boussinesq J. Aperçu sur la théorie de la bicyclette // J. Math. Pure Appl., 1899, vol. 5, pp. 117–135.

[23] Boussinesq J. Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette: influence, sur l'équilibre, des mouvements latéraux spontanés du cavalier // J. Math. Pure Appl., 1899, vol. 5, pp. 217–232.

[24] Bravo-Doddoli A., García-Naranjo L. C. The dynamics of an articulated n-trailer vehicle // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 5, pp. 497–517.

[25] Brill A. Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Leipzig: Teubner, 1909. 236 pp.

[26] Capon R. S. Hamilton's principle in relation to nonholonomic mechanical systems // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1952, vol. 5, no. 4, pp. 472–480.

[27] Carathéodory C. Der Schlitten // Z. Angew. Math. Mech., 1933, vol. 13, no. 2, pp. 71–76.

[28] Carvallo E. Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette. Paris: Gauthier-Villars, 1899. 193 pp.

[29] Chow W. L. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung // Math. Ann., 1940/1941, vol. 117, pp. 98–105.

[30] Crescini E. Sur moto di una sfera che rotola su di un plano fisso // Rendiconti Accad. dei Lincei, 1889, vol. 5, pp. 204–209.

[31] Dautheville S. Sur les systèmes non holonomes // Bull. Soc. Math. France, 1909, vol. 37, pp. 120–132.

[32] Delassus E. Sur la réalisation matérielle des liaisons // C. R. Acad. Sci. Paris, 1911, vol. 152, pp. 1739–1743.

[33] Duistermaat J. J. Chaplygin's sphere. arXiv:math/0409019v1 (2004).

[34] Earnshaw S. Dynamics, or An elementary treatise on motion. 3rd ed. Cambridge: Deighton, 1844. 396 pp.

[35] Eden R. J. The Hamiltonian dynamics of non-holonomic systems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1951, vol. 205, no. 1083, pp. 564–583.

[36] Ehlers K., Koiller J., Montgomery R., Rios P. M. Nonholonomic systems via moving frames: Cartan equivalence and Chaplygin hamiltonization // The breadth of symplectic and Poisson geometry: Festschrift in honor of Alan Weinstein / J. E. Marsden, T. S. Ratiu (Eds.). (Progr. Math., vol. 232.) Boston, Mass.: Birkhäuser, 2005. P. 75–120.

[37] Essén H. On the geometry of nonholonomic dynamics // Trans. ASME J. Appl. Mech., 1994, vol. 61, no. 3, pp. 689–694.

[38] Ferrers N. M. Extension of Lagrange's equations // Quart. J. Pure Appl. Math., 1872, vol. 12, no. 45, pp. 1–5.

[39] Frobenius G. Über das Pfaffsche Problem // J. Reine Angew. Math., 1877, vol. 1877, no. 82, pp. 230–315.

[40] Gibbs J. W. On the fundamental formulae of dynamics // Amer. J. Math., 1879, vol. 2, no. 1, pp. 49–64.

[41] Hadamard J. Sur les mouvements de roulement // Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, sér. 4, 1895, vol. 5, pp. 397–417.

[42] Hamel G. Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik // Z. Math. u. Phys., 1904, vol. 50, pp. 1–57.

[43] Hamel G. Theoretische Mechanik: Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik. 2nd ed. Berlin: Springer, 1978. 796 pp.

[44] Hawkins Th. Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff // Arch. Hist. Exact Sci., 2005, vol. 59, no. 4, pp. 381–436.

[45] Hertz H. Gesammelte Werke: Vol. 3: Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig: Barth, 1894. 312 pp.

[46] Holm D. D. Geometric mechanics: P. 1: Dynamics and symmetry. 2nd ed. London: Imperial College Press, 2011. 441 pp.
Holm D. D. Geometric mechanics: P. 2: Rotating, translating and rolling. 2nd ed. London: Imperial College Press, 2011. 390 pp.

[47] Isénoff I. Sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes // J. Math. Pures Appl., sér. 8, 1920, vol. 3, pp. 245–264.

[48] Koiller J. Reduction of some classical non-holonomic systems with symmetry // Arch. Rational Mech. Anal., 1992, vol. 118, no. 2, pp. 113–148.

[49] Kooijman J. D. G., Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., Ruina A., Schwab A. L. A bicycle can be self-stable without gyroscopic or Caster effects (Supplementary material available online) // Science, 2011, vol. 332, no. 6027, pp. 339–342.

[50] Korteweg D. Über eine ziemlich verbrietete unrichtige Behandlungswiese eines Problemes der rolleden Bewegung und insbesondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage // Nieuw Archief voor Wiskunde, 1899, vol. 4, pp. 130–155.

[51] Korteweg D. Extrait d'une lettre à M. Appel // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1900, vol. 14, pp. 7–8.

[52] Kozlov V. V. The dynamics of systems with servoconstaints: 1 // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 3, pp. 205–224.

[53] Kozlov V. V. The dynamics of systems with servoconstaints: 2 // Regul. Chaotic Dyn., 2015, vol. 20, no. 4, pp. 401–427.

[54] Kozlov V. V. On the theory of integration of the equations of nonholonomic mechanics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 191–176.

[55] Lagrange J. L. Méchanique analytique. Sceaux: Gabay, 1989. 530 pp.

[56] Laurent-Gengoux C., Pichereau A., Vanhaecke P. Poisson structures. (Grundlehren Math. Wiss., vol. 347.) Heidelberg: Springer, 2013. 461 pp.

[57] de León M. A historical review on nonholonomic mechanics // Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM, 2012, vol. 106, no. 1, pp. 191–224.

[58] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen: Vol. 1. Leipzig: Teubner, 1888. 658 pp.

[59] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen: Vol. 2. Leipzig: Teubner, 1890. 570 pp.

[60] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen: Vol. 3. Leipzig: Teubner, 1893. 831 pp.

[61] Lindelöf E. Sur le mouvement d'un corps de révolution roulant sur un plan horizontal // Acta Societ. Scient. Fennicae, 1895, vol. 20, no. 10, 18 pp.

[62] Llibre J., Ramirez R., Sadovskaia N. A new approach to the vakonomic mechanics // Nonlinear Dynam., 2014, vol. 78, no. 3, pp. 2219–2247.

[63] Maggi G. Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi // Atti della R. Acc. nazionale dei Lincei, 1901, vol. 5, pp. 287–292.

[64] Maruskin J. M., Bloch A. M., Marsden J. E., Zenkov D. V. A fiber bundle approach to the transpositional relations in nonholonomic mechanics // J. Nonlinear Sci., 2012, vol. 22, no. 4, pp. 431–461.

[65] Meijaard J. P., Papadopoulos J. M., Ruina A., Schwab A. L. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: A benchmark and review // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2007, vol. 463, no. 2084, pp. 1955–1982.

[66] Molenbrock P. Over de zuiver rollende beweging van een lichaam over een willekeurig oppervlak // Nieuw Archief voor Wiskunde, 1890, vol. 17, pp. 130–157.

[67] Monforte J. C. Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems. (Lecture Notes in Math., vol. 1793.) Berlin: Springer, 2002. 233 pp.

[68] Neumann C. Über die rollende Bewegung eines Körpers auf einer gegebenen Horizontalebene unter dem Einfluss der Schwere // Math. Ann., 1886, vol. 27, no. 4, pp. 478–501.

[69] Neumann C. G. Beiträge zur analytischen Mechanik: 1 // Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe, 1899, vol. 51, pp. 371–444.

[70] Ohsawa T., Fernandez O. E., Bloch A. M., Zenkov D. V. Nonholonomic Hamilton – Jacobi theory via Chaplygin hamiltonization // J. Geom. Phys., 2011, vol. 61, no. 8, pp. 1263–1291.

[71] Pavon M. Hamilton – Jacobi equations for nonholonomic dynamics // J. Math. Phys., 2005, vol. 46, no. 3, 032902, 8 pp.

[72] Poincaré H. Les idées de Hertz sur la mécanique // Revue Générale des Sciences, 1897, vol. 8, pp. 734–743.

[73] Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique // C. R. Acad. Sci. Paris, 1901, vol. 132, pp. 369–371.

[74] Posch H. A., Hoover W. G., Vesely F. J. Canonical dynamics of the Nosé oscillator: Stability, order, and chaos // Phys. Rev. A (3), 1986, vol. 33, no. 6, pp. 4253–4265.

[75] Pöschl Th. M. F. Sur les équations canoniques des systèmes non holonomes // C. R. Acad. Sci. Paris, 1913, vol. 156, pp. 1829–1831.

[76] Quanjel J. Les équations générales de la mécanique dans le cas des liaisons non-holonomes // Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1906, vol. 22, no. 1, pp. 263–273.

[77] Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being part II of a treatise on the whole subject. 6th ed. New York: Dover, 1955. 484 pp.

[78] Routh G. R. R. The motion of a bicycle // The Messenger of Mathematics, 1899, vol. 28, pp. 151–169.

[79] Rumyantsev V. V., Sumbatov A. S. On the problem of a generalization of the Hamilton – Jacobi method for nonholonomic systems // Z. Angew. Math. Mech., 1978, vol. 58, no. 11, pp. 477–481.

[80] Schouten G. Over de rollende beweging van een omwentelingalichaam op een vlak // Verlangen der Konikl. Akad. van Wet. Amsterdam. Proc., 1899, vol. 5, pp. 1–10.

[81] Schouten J. A. On non-holonomic connexions // Proc. Amsterdam, 1928, vol. 31, pp. 291–299.

[82] Slesser G. M. Notes on rigid dynamics // Quart. J. Math., 1861, vol. 4, pp. 65–77.

[83] Stückler B. Über die Differentialgleichungen für die Bewegung eines idealisierten Kraftwagens // Arch. Appl. Mech., 1952, vol. 20, no. 5, pp. 337–356.

[84] Stückler B. Über die Berechnung der an rollenden Fahrzeugen wirkenden Haftreibungen // Arch. Appl. Mech., 1955, vol. 23, no. 4, pp. 279–287.

[85] Van Dooren R. Second form of the generalized Hamilton – Jacobi method for nonholonomic dynamical systems // Z. Angew. Math. Phys., 1978, vol. 29, no. 5, pp. 828–834.

[86] Vierkandt A. Über gleitende und rollende Bewegung // Monatsh. Math. Phys., 1892, vol. 3, no. 1, pp. 31–38, 97–116.

[87] Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche // Atti della R. Accad. Sci. di Torino, 1898, vol. 33, pp. 471–475.

[88] Vrănceanu G. Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques // Mém. Sci. Math., 1936, vol. 76, pp. 1–70.

[89] Walker G. T. On a curious dynamical property of celts // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1895, vol. 8, pt. 5, pp. 305–306.

[90] Weber R. W. Hamiltonian systems with constraints and their meaning in mechanics // Arch. Rational Mech. Anal., 1986, vol. 91, no. 4, pp. 309–335.

[91] Whittaker E. T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. 4th ed. New York: Cambridge Univ. Press, 1989. 480 pp.

[92] Woronetz P. Über das Problem der Bewegung von vier Massenpunkten unter dem Einflusse von inneren Kräften // Math. Ann., 1907, vol. 63, no. 3, pp. 387–412.

[93] Woronetz P. Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt // Math. Ann., 1911, vol. 70, pp. 410–453.

[94] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Динамические системы 4 / В. И. Арнольд, С. П. Новиков (ред.). (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 4.) Москва: ВИНИТИ, 1985. С. 5–139.

[95] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: Едиториал УРСС, 2009. 416 с.

[96] Билимович А. Д. Неголономный маятник // Матем. сб., 1914, т. 29, № 2, с. 234–240.

[97] Бренделев В. Н. О коммутативных связях в неголономной механике // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1978, № 6, с. 47–54.

[98] Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. сем. по векторн. и тензорн. анализу, 1941, № 5, с. 301–327.

[99] Вершик А. М., Фаддеев Л. Д. Дифференциальная геометрия и лагранжева механика со связями // Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 3, с. 555–557.

[100] Воронец П. В. Об уравнениях движения для неголономных систем // Матем. сб., 1901, т. 22, № 4, с. 659–686.

[101] Воронец П. В. К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил. Киев: Тип. Имп. ун-та св. Владимира, 1909. 11 pp.

[102] Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления / П. Е. Товстик (ред.). Москва: Физматлит, 2005. 272 с.

[103] Ефимов М. И. К уравнениям Чаплыгина неголономных механических систем // ПММ, 1953, т. 17, № 6, с. 748–750.

[104] Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 6.) Москва: ВИНИТИ, 1983. 132 с.

[105] Картан Э. Интегральные инварианты. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1940. 216 с.

[106] Козлов В. В. О равновесиях неголономных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1994, № 3, с. 74–79.

[107] Козлов В. В. Об устойчивости равновесий неголономных систем // Докл. АН СССР, 1986, т. 288, № 2, с. 289–291.

[108] Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 550–554.

[109] Козлов В. В. Эйлер и математические методы механики (к 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера) // УМН, 2007, т. 62, № 4, с. 3–26.

[110] Мозер Ю., Цендер Э. Заметки о динамических системах. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 346 с.

[111] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва: Наука, 1967. 519 с.

[112] Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук, 1938, т. 3, № 2, с. 83–94.

[113] Рокар И. Неустойчивость в механике: Автомобили, самолеты, висячие мосты. Москва: ИЛ, 1959. 288 с.

[114] Румянцев В. В. Об устойчивости движения неголономных систем // ПММ, 1967, т. 31, № 2, с. 260–271.

[115] Суслов Г. К. Основы аналитической механики: Т. 1. Киев: Имп. ун-т, 1900. 559 с.

[116] Суслов Г. К. Теоретическая механика. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1946. 655 с.

[117] Халмош П. Р. Как писать математические тексты // УМН, 1971, т. 26, № 5, с. 243–269.

[118] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Исследования по динамике неголономных систем / С. А. Чаплыгин. Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1949. С. 9–27. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 57–75.)

[119] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.)

[120] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 15–25.)

[121] Четаев Н. Г. О принципе Гаусса // Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 3, 1932/1933, т. 6, с. 68–71.

[122] Якоби К. Лекции по динамике. Москва – Ленинград: ОНТИ, 1936. 272 с.

Historical and critical review of the development of nonholonomic mechanics: the classical period

Alexey V. Borisov[1], Ivan S. Mamaev[2], Ivan A. Bizyaev[3]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology
Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow, 141700, Russia
[2]Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS
ul. S. Kovalevskoi 16, Ekaterinburg, 620990, Russia
[2,3]Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia
[1]borisov@rcd.ru, [2]mamaev@rcd.ru, [3]bizaev_90@mail.ru

In this historical review we describe in detail the main stages of the development of nonholonomic mechanics starting from the work of Earnshaw and Ferrers to the monograph of Yu. I. Neimark and N. A. Fufaev. In the appendix to this review we discuss the d'Alembert – Lagrange principle in nonholonomic mechanics and permutation relations.

MSC 2010: 37J60, 01A05
Keywords: nonholonomic mechanics, nonholonomic constraint, d'Alembert – Lagrange principle, permutation relations

Received May 05, 2016, accepted June 22, 2016
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 385–411 (Russian)