Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 3. С. 413–552.
Полнотекстовая версия в свободном доступе http://nd.ics.org.ru
DOI: 10.20537/nd1603008

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

УДК: 517.93+514.745.82
MSC 2010: 37J35, 58K10

Монодромия слоя с осцилляторной особой точкой типа $1 : (-2)^*$

Н. Н. Нехорошев

В статье доказано наличие дробной монодромии для обширного класса компактных лагранжевых расслоений 4-мерных симплектических многообразий. Эти расслоения рассматриваются в окрестности особого слоя Λ^0, характеризуемого тем, что этот слой имеет единственную особую точку, и эта точка отвечает нелинейному осциллятору с резонансным соотношением частот $1 : (-2)$. Посчитаны матрицы монодромии, задаваемой обходом вокруг слоя Λ^0, и для всех расслоений класса эти матрицы при подходящем выборе базиса в одномерной группе гомологий стартового слоя-тора совпадают. Коэффициенты матрицы монодромии рациональны и среди них имеется нецелое число. Данная работа является продолжением исследований, проведенных в [20, 21, 39], в которых матрица дробной монодромии вычислена для отдельных наиболее простых расслоений упомянутого класса.

Содержание

*Рукопись предоставлена Д. А. Садовским, И. Васильевой

§ 0. Введение

0.1. Целочисленность матрицы монодромии для регулярных торических расслоений. Монодромия, которая изучается в данной статье, возникает при исследовании расслоений симплектических многообразий M на компактные лагранжевы слои. Известно (см., например, [28, 40]), что в окрестности каждого слоя такое расслоение задается n функциями $(F_1, \ldots, F_n) = F$, которые находятся попарно в инволюции и дифференциалы которых во всех точках линейно независимы ($2n$ — размерность многообразия $M = M^{2n}$).

Наоборот (см. [28, 40]), пусть на M^{2n} задан набор функций $F = (F_1, \ldots, F_n)$, обладающих этими свойствами. Тогда прообразы $\Lambda = F^{-1}(b)$ точек $b \in \mathbf{R}^n$ при отображении $F\colon M^{2n} \to \mathbf{R}^n$, задаваемом набором F, будут гладкими лагранжевыми подмногообразиями, расслаивающими M. Напомним, что лагранжевость поверхности $\Lambda \subset M^{2n}$ означает, что она n-мерна и что сужение на нее симплектической структуры ω^2 равно нулю: $\omega^2|_\Lambda = 0$. Если поверхности $\Lambda_b = F^{-1}(b)$ компактны и связны, то разбиение M^{2n} на эти поверхности является локально тривиальным расслоением с компактными лагранжевыми слоями.

Известно, что все слои любого такого расслоения являются n-мерными торами (см. [40, 43]). Исследуемую монодромию можно определить для любого локально тривиального расслоения на торы любого не обязательно симплектического многообразия M. Определение состоит в следующем. Рассмотрим петлю δ в M, то есть замкнутый ориентированный путь с выделенной точкой $\xi^s \in \delta$, являющейся одновременно стартовой и финишной. Двигаясь по этой петле согласно заданной ориентации, будем следить за циклами на слоях-торах Λ, пересекающих петлю δ. На финише мы получим тор, совпадающий со стартовым тором $\Lambda^s \ni \xi^s$. Однако циклы, лежащие на торах $\Lambda^\xi \ni \xi$ и непрерывно меняющиеся при рассмотренном движении точки ξ по петле δ, на финише могут получиться не эквивалентными своим стартовым положениям. Это означает, что два цикла, стартовый и финишный, представляют разные элементы в группе $H_1(\Lambda^s)$ одномерных гомологий с целыми коэффициентами стартового слоя Λ^s. Таким образом, возникает отображение $\mu\colon H_1(\Lambda^s) \to H_1(\Lambda^s)$, которое, как легко видеть, задает групповой изоморфизм и которое названо отображением монодромии (см. [10]). Если это отображение отлично от тождественного, то есть $\mu \neq \mathrm{id}$, то монодромию называют нетривиальной.

Группа гомологий $H_1(\mathbf{T}^k)$ k-мерного тора $\mathbf{T}^k$ изоморфна решетке $\mathbf{Z}^k$ целочисленных k-мерных векторов арифметического пространства $\mathbf{R}^k$. Если фиксировать любой базис в $H_1(\Lambda^s) \sim \mathbf{Z}^n$, то изоморфизм μ в этом базисе будет задаваться матрицей $\mathcal{A}$ с целыми коэффициентами и с определителем ± 1. Ясно, что эта конструкция действительно годится для любых локально тривиальных расслоений на торы.

Отметим, что торические расслоения под названием «угловые расслоения» в интересующем нас случае компактных лагранжевых расслоений симплектического многообразия изучались в § 2, 3 работы [40]. По сути, в § 3 этой статьи исследовались препятствия к глобальному существованию переменных действие – угол $(I, \phi \bmod 2\pi)$. Эти препятствия являются естественной базой для более общих понятий монодромии, связанных с глобальным распространением всех переменных действие – угол. Наиболее простое и важное из этих препятствий лежит в основе рассмотренной выше монодромии: нетривиальность этой монодромии является одним из препятствий к глобальному определению набора I переменных действия. И упомянутые целочисленные унимодулярные матрицы $\mathcal{A}$ в этом контексте использовались в § 3 из [40].

0.2. Монодромия, получаемая при обходе особого слоя. В изучаемой в работе ситуации нетривиальная монодромия является локальной, то есть появляется в результате обхода по петле δ особого слоя Λ^0 лагранжева расслоения. Принято под расслоением понимать локально тривиальное расслоение. Представляется, однако, что целесообразно нарушить эту традицию и термин «расслоение» понимать в более широком смысле, что позволяет изучать и случаи с особенностями.

А именно, предлагается под расслоением понимать разбиение многообразия M на связные компоненты Λ прообразов $F^{-1}(b)$ точек $b \in B$ некоторого отображения $F\colon M \to B$. Здесь $\dim B < \dim M$, и отображение F не обязательно везде регулярно, но подмножество $\mathcal{T}$ прообразов критических значений отображения F и сами эти прообразы являются в некотором смысле «тонкими» в M (точное определение см. в § 1.1). Для лагранжевых расслоений симплектического многообразия M^{2n} требуется дополнительно, чтобы в окрестности каждого слоя Λ это расслоение задавалось n функциями, находящимися попарно в инволюции (см. определение 1.1.Б). Отметим, что в простейшем случае $n = 2$ отображение F, задаваемое таким набором из двух функций (F_1, F_2), в многочисленных конкретных случаях называют отображением *энергии – момента* (см. [4–9, 11–15, 20, 21, 24, 24, 27, 39] и другие работы на эту тему).

0.3. Обобщенная монодромия, возникающая при пересечении петлей $\boldsymbol{\delta}$ полупроницаемых поверхностей $\boldsymbol{\mathcal{T}}$. Примеры расслоений с осцилляторной особой точкой. Обозначим через $M_R \subseteq M$ максимальную область многообразия M, в которой рассматриваемое компактное лагранжево расслоение, задаваемое отображением F, является регулярным, то есть локально тривиальным расслоением на торы. В предыдущем пункте, фактически, предполагалось, что некоторая окрестность особого слоя Λ^0 без самого этого слоя лежит в M_R. Однако потребности приложений вынуждают рассматривать ситуации, когда такая окрестность содержит некоторые особые для расслоения гиперповерхности $\mathcal{T}$, то есть $\mathcal{T} \subseteq M \setminus M_R$, и при обходе вокруг слоя Λ^0 эти гиперповерхности неминуемо придется пересекать.

Простейшим примером является расслоение 4-мерного линейного симплектического пространства $\mathbf{R}^4 \ni (p, q) = (p_1, p_2, q_1, q_2)$ со стандартной симплектической структурой $\omega^2 = dp \wedge dq$, которое имеет следующий вид. Это расслоение задается набором функций $F = (F_1, F_2)$, где

$$F_1 = \frac{m_1}{2}\left(p_1^2 + q_1^2\right) - \frac{m_2}{2}\left(p_2^2 + q_2^2\right) + R_1, \tag{1}$$

$$F_2 = \operatorname{Im}\left[(q_1 + ip_1)^{m_2}(q_2 + ip_2)^{m_1}\right] + R_2. \tag{2}$$

Здесь $R_1 = 0$, $R_2 = \left(\frac{m_1}{2}\left(p_1^2 + q_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(p_2^2 + q_2^2\right)\right)^s$, $i = \sqrt{-1}$, $\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z, $s > \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$, а m_1 и m_2 — натуральные взаимно простые числа.

Особым слоем, обход вокруг которого приводит к нетривиальной монодромии, является поверхность $\Lambda^0 = F^{-1}(0)$. Эта поверхность содержит точку $0 \in \mathbf{R}^4$, являющуюся ее единственной особой точкой, то есть ни одна из точек $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ не будет критической для отображения F. Точка $0 \in \mathbf{R}^4$ является существенно особой в том смысле, что в этой точке $\operatorname{rang} \partial F = 0$, то есть ранг ∂F падает сразу на две единицы. Если $m_i \geqslant 2$ при некотором $i = 1, 2$, то двумерная координатная плоскость L_i, трансверсальная плоскости $\{p_i = q_i = 0\} \subset \mathbf{R}^4$, целиком состоит из критических точек отображения F. В этом случае в каждой точке такой плоскости $\operatorname{rang} \partial F = 1$, то есть падает лишь на единицу.

Обозначим через $\mathcal{T}_i$ поверхность, состоящую из слоев Λ, пересекающих плоскость L_i, $i = 1, 2$, но отличных от Λ^0. Нетрудно показать, что при обходе существенно особого слоя Λ^0, то есть слоя, содержащего существенно особую точку, при любых значениях m_1 и m_2 обязательно придется пересекать 3-мерные поверхности $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. При $m_i = 1$ гиперповерхность $\mathcal{T}_i$ не является особой, а при любом $m_i \geqslant 2$ она особая, то есть $\mathcal{T}_i \subset M \setminus M_R$. Таким образом, при любых взаимно простых m_1 и m_2 (кроме случая $m_1 = m_2 = 1$) монодромия $\mu\colon H_1(\Lambda^s) \to H_1(\Lambda^s)$, определяемая описанным выше способом, становится невозможной.

Однако в случае $m_i = 2$ часть элементов из группы $H_1(\Lambda^s)$ можно «протащить» и через гиперповерхность $\mathcal{T}_i$, причем эта часть достаточно большая, а именно: она составляет подгруппу индекса 2 в $H_1(\Lambda^s)$, которую обозначим ζ. Это позволяет определить отображение $\mu\colon \zeta \to H_1(\Lambda^s)$. Легко проверить, что оно задает изоморфизм подгруппы ζ на ее образ $\mu(\zeta)$. Отображение μ можно рассматривать как обобщенное отображение монодромии. Вложим $H_1(\Lambda^s) \sim \mathbf{Z}^2$ как подгруппу в $\mathbf{R}^2$. Тогда отображение μ индуцирует линейный оператор A, действующий в $\mathbf{R}^2$. Фиксируем базис в группе $H_1(\Lambda^s)$ и возьмем его в качестве линейного базиса в $\mathbf{R}^2$. Матрицу $\mathcal{A}$, задающую оператор A в этом базисе, будем считать матрицей обобщенной монодромии. Нетрудно видеть, что все коэффициенты матрицы $\mathcal{A}$ обязаны быть рациональными числами.

Возможность рассмотрения такой монодромии можно прокомментировать следующим образом. Гиперповерхность $\mathcal{T}_i$ при $m_i = 2$, где $i = 1, 2$, имеет лишь слабые особенности ($\operatorname{rang} \partial F = 1$), поэтому сквозь нее можно протянуть достаточное для определения обобщенной монодромии число элементов группы гомологий $H_1(\Lambda^s)$. Такого типа гиперповерхности, в связи с этим, в тексте названы «полупроницаемыми стенками».

0.4. Выделенность случаев $\mathbf{1:(-1)}$ и $\mathbf{1:(-2)}$. Случай $m_1 = m_2 = 1$ хорошо исследован, и известно, что в этом случае имеет место обычная монодромия, так что все коэффициенты матрицы монодромии будут целыми числами. В последнее время начато исследование простейшего «нетривиального» случая $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и показано, что для расслоения (1), (2) матрица монодромии действительно будет дробной, то есть не все ее коэффициенты являются целыми числами (см. [20, 21, 39]).

Действительно, в работе [39] расслоение (1), (2) исследовано при произвольных значениях взаимно простых чисел m_1 и m_2. Но случай $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ выделяется своей простотой среди всех случаев с нецелой монодромией, то есть случаев $m_1 + m_2 \geqslant 3$, и предложенное в [20, 21] и в данной статье понятие монодромии, годное при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, не работает при $m_1 + m_2 \geqslant 4$. В последнем случае ситуация существенно сложнее, и пришлось сконструировать еще более общее определение монодромии (см. [39]). В данной статье мы ограничимся простейшим дробным случаем $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ с точностью до нумерации частот m_i, $i = 1, 2$, которая несущественна.

0.5. Классы $\boldsymbol{\mathcal{P}^{1:(-1)}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{P}^{1:(-2)}}$ расслоений, заданных в окрестности особого слоя $\boldsymbol{\Lambda^0}$, имеющего единственную особую точку, и эта точка осцилляторного типа. В данной работе в отличие от предшествующих работ [20, 21, 39] дробная монодромия посчитана для обширного класса $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{1:(-2)}$ компактных лагранжевых расслоений с особенностями. В этот класс входит и расслоение (1), (2) при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, изученное в работах [20, 21] и исследованное в [39] несколько иными методами. Расслоения класса $\mathcal{P}$ могут быть заданы на любом 4-мерном симплектическом многообразии $M = M^4$ и характеризуются следующими свойствами.

Каждое из этих расслоений задано в окрестности особого слоя Λ^0, имеющего единственную особую точку ξ^0. В окрестности этой точки в некоторых локальных канонических координатах (p, q) расслоение задается функциями в инволюции F_1, F_2 (то есть $\{F_1, F_2\} = 0$), имеющими вид (1), (2) при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. При этом R_1 не обязательно равно нулю, а R_2 не обязательно равно указанному там полиному, но обе функции R_1 и R_2 в малой окрестности точки ξ^0 пренебрежимо малы по сравнению с предшествующими им в формулах (1), (2) «главными частями» функций F_1 и F_2. Точнее, $|R_i| \leqslant C|(p,q)|^{a_i}$, $i = 1, 2$, при всех достаточно малых

$$|(p,q)| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2}, \quad \text{где} \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 4, \quad C > 0.$$

Слой Λ^0 в этом случае назван в тексте слоем «резонансного типа» $1 : (-2)$. При данных значениях $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ имеется только одна полупроницаемая стенка — особая гиперповерхность $\mathcal{T}_2$ (см. п. 0.3).

Аналогичный класс, который будем обозначать через $\mathcal{P}^{1:(-1)}$, можно рассмотреть и в случае $m_1 = m_2 = 1$. Этот класс тоже исследован в данной работе (см. теорему 2.4). В самом деле, вид матрицы монодромии для существенно более просто устроенных расслоений этого класса является известным фактом (см. [6]). Но доказательство этого факта приведено здесь потому, что оно тривиально следует из доказательства основного случая, то есть $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, и к тому же является новым, а главное, одновременное исследование обоих этих случаев позволяет лучше понять их сходство и различие.

Помимо монодромии, для расслоений обоих рассматриваемых классов, доказывая основные результаты, мы изучим структуру этих расслоений, достаточно запутанную в окрестности существенно особой точки ξ^0, особенно в случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Изучен также топологический тип особых слоев (см. теоремы 2.4.В и 2.5.Д).

0.6. Совпадение монодромии у всех расслоений каждого из классов $\mathcal{P}^{1:(-1)}$ и $\mathcal{P}^{1:(-2)}$. В обоих случаях при обходе существенно особого слоя $\Lambda^0 \ni \xi^0$ имеет место нетривиальная монодромия. При подходящем выборе базиса в группе $H_1(\Lambda^s)$ в каждом из расслоений класса $\mathcal{P}^{1:(-2)}$ матрицы монодромии для всех этих расслоений будут совпадать (см. теорему 2.5). Хорошо известно, что аналогичное утверждение верно и для расслоений класса $\mathcal{P}^{1:(-1)}$ (см. [6], а также теорему 2.4).

Таким образом, наблюдается следующий любопытный факт. Для расслоений каждого из двух исследованных к настоящему моменту классов монодромия, фактически, одна и та же; то есть монодромия зависит только от типа единственной особой точки ξ^0 слоя Λ^0, а этот тип определяется параметрами m_1 и m_2. При этом монодромия совершенно не зависит от поведения слоев Λ вне сколь угодно малой окрестности этой точки. Кстати, в каком-то смысле это верно и для вполне регулярного случая: обходу вокруг неособого слоя всегда соответствует тривиальная монодромия. Думается, что зависимость монодромии при обходе слоя Λ^0 лишь от типов особых точек, лежащих на этом слое, является общим фактом.

0.7. Основные отличия доказательства от использованных в предшествующих работах по дробной монодромии. Выделим два существенных отличия доказательства основных результатов статьи от доказательств, приведенных в [21, 39]. Вычисление монодромии во всех этих работах, включая и данную, опирается на протягивание вдоль петли δ некоторых двух элементов γ_1 и γ_2, образующих базис в группе гомологий $H_1(\Lambda^s)$, и упомянутые два отличия связаны с этими двумя элементами.

0.7.А. ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТ γ_1. В предшествующих работах исследовалось расслоение стандартного линейного симплектического пространства $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^4_{pq}$; это расслоение задается функциями F_1, F_2 вида (1), (2) при $m_1 = 1$, $m_2 = 1, 2$. В качестве γ_1 был взят элемент группы $H_1(\Lambda^s)$, представляемый ориентированными траекториями линейного фазового потока системы с гамильтонианом F_1.

Все траектории этого потока являются замкнутыми кривыми, что является следствием 2π-периодичности потока, а каждая траектория лежит на одном из слоев Λ расслоения. Поэтому протягивание элемента γ_1 тривиально, так как любая непрерывная деформация цикла, представляющего этот элемент на слоях Λ, приводит к циклу, эквивалентному траектории потока. В частности, элемент γ_1 как бы «вморожен» в расслоение и не зависит ни от каких обходов.

Но в нашей ситуации исходно никакого периодического потока нет, и его приходится строить, что потребовало некоторых усилий. Одна из трудностей построения такого потока G состояла в том, что канонические координаты (p, q), которыми можно было бы воспользоваться, определены, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности существенно особой точки ξ^0. Поэтому вначале строилась некоторая функция, и фазовый поток системы с гамильтонианом, равным этой функции, мы брали за G. В окрестности $\mathcal{O}$ точки ξ^0 эта функция строилась как круговая функция действия, то есть как интеграл 1-формы pdq по лежащим на слоях Λ циклам некоторого непрерывного семейства. Затем построенная функция продолжалась на окрестность всего особого слоя Λ^0.

Для построения этих лежащих в $\mathcal{O}$ циклов использовались векторные поля систем с гамильтонианами, постоянными на слоях Λ расслоения. Такие векторные поля касательные к слоям Λ и глобально задают на них каноническую аффинную структуру. Построение опиралось на геодезические этой плоской структуры, то есть траектории упомянутых систем. Эти геодезические широко использовались во всем доказательстве основных результатов.

0.7.Б. СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ ПРОТЯГИВАНИЯ ЭЛЕМЕНТА $2\gamma_2$. Второе существенное отличие состоит в способе протягивания второго базисного элемента $\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$, а точнее, его удвоения $2\gamma_2$. При любом способе это протягивание является наиболее сложной и трудоемкой частью доказательства утверждений о монодромии. Протягивание осуществляется на основе рассмотрения цикла C_ξ, $\xi \in \delta$, который лежит на слое $\Lambda_\xi \ni \xi$ и который в стартовом положении $\xi = \xi^s$ представляет элемент $2\gamma_2$. В [21] и [39] цикл C_ξ строится как набор ориентированных кривых, объединение которых является пересечением $\lambda_\xi = \Lambda_\xi \cap \sigma$ слоя $\Lambda_\xi \ni \xi$ с некоторой гиперплоскостью $\sigma \subset \mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^4_{pq}$. В [21] в качестве σ было взято 3-мерное пространство, выделяемое в $\mathbf{R}^4_{pq}$ в случае $m_1 = m_2 = 1$ уравнением $p_1 - q_2 = 0$, а в случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ — уравнением $p_1 - \sqrt{2}q_2 = 0$.

В [39] такая гиперплоскость выделялась уравнением $p_2 = 0$. В этом случае за пересечениями λ_ξ при движении точки ξ по δ следить существенно удобнее по следующим причинам. Кривые λ_ξ лежат на 2-мерных поверхностях (см. (1), (2))

$$\{F_1(p, q) = m, \quad p_2 = 0\}, \tag{3}$$

являющихся стандартными двуполостными гиперболоидами при $m < 0$ и однополостными при $m > 0$, а при $m = 0$ эта поверхность является конусом. Кривые λ_ξ достаточно просто расслаивают эти поверхности. Аналогичные кривые и поверхности в [21] устроены гораздо более запутанно; использование поверхности $\{p_2 = 0\}$ существенно упрощает и проясняет доказательство. Более прост случай $m \leqslant 0$ двуполостных гиперболоидов и конуса, так как расслоение этих поверхностей кривыми λ_ξ устроено достаточно просто. Однако петля δ пересекает и область $m > 0$, где вид и динамика кривых λ_ξ на однополостных гиперболоидах (3) являются более сложными. Нетривиальность монодромии при таком методе протягивания связана с областью $m > 0$ и возникает по следующей причине.

Образ петли δ при отображении F является обходящей нуль ($0 \in \mathbf{R}^2$) петлей на плоскости $\mathbf{R}^2$ с координатами (m, h), где $m = F_1(\xi)$, $h = F_2(\xi)$. Реализующий протягивание элемента $2\gamma_2$ цикл C_ξ лежит на слое $\Lambda_\xi \ni \xi$ и непрерывно деформируется вслед за движением точки ξ по петле δ. Но при прохождении точкой ξ некоторого положения ξ', лежащего в области $m > 0$, к этому циклу добавляется нетривиальный цикл, представляющий элемент $\gamma_1 \in H_1(\Lambda_{\xi'})$, где $\Lambda_{\xi'} \ni \xi'$. Далее опять происходит непрерывная гомотопия полученного суммарного цикла. Точнее, непрерывность деформации «слабо нарушается» в лежащей в области $m < 0$ точке пересечения петли δ с полупроницаемой гиперповерхностью $\mathcal{T}$ (см. п. 0.3). На финише мы получаем цикл, эквивалентный стартовому. Это, в частности, и означает, что если бы цикл в положении ξ' не добавлялся, а все время при движении по петле δ происходила бы только непрерывная деформация стартового цикла, то финишный цикл был бы ему не эквивалентен; таким образом, имеет место нетривиальная монодромия.

Метод протягивания элемента $2\gamma_2$, использованный в данной статье, является модификацией этого «гиперболоидного» метода, примененного в [39]. В нем используются, фактически, только двуполостные гиперболоиды, а также конусы. Достигается это тем, что в области $m \geqslant 0$ в качестве секущей гиперплоскости берется $\{p_1 = 0\}$, а в области $m \leqslant 0$ — $\{p_2 = 0\}$. Отметим, что как в [39], так и в данной статье используются не сами пространства $\{p_i = 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$, а их «верхние» полупространства $\{p_i = 0,\ q_i > 0\}$, $i = 1, 2$.

0.7.В. ПРИЧИНА ПОЯВЛЕНИЯ НЕТРИВИАЛЬНОЙ МОНОДРОМИИ ПРИ МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ ПРОТЯГИВАНИЯ ЭЛЕМЕНТА $2\gamma_2$. Отказ от существенного использования однополостных гиперболоидов делает причину появления нетривиальной монодромии более прозрачной. Проиллюстрируем это в случае конкретного отображения (1), (2). Причина в том, что при переходе из области $m > 0$ в область $m < 0$ гиперплоскость $\{p_1 = 0\}$ меняется на гиперплоскость $\{p_2 = 0\}$ и, соответственно, пересечение со слоем Λ первой гиперплоскости меняется на пересечение со второй гиперплоскостью. Но соответствующие циклы с носителем на этих двух пересечениях не всегда эквивалентны. При $h < 0$ циклы на этих двух пересечениях гомотопны друг другу, а вот при $h > 0$ они будут отличаться в точности на один цикл, представляющий элемент γ_1, что и приводит к нетривиальной монодромии.

Пересечения λ слоя Λ с двумя гиперплоскостями $\{p_i = 0\}$, $i = 1, 2$, получаются друг из друга «проектированием, параллельным орбитам группы G». Напомним, что эта группа диффеоморфна окружности. В результате такого проектирования и появляется лишний цикл, представляющий элемент γ_1.

0.7.Г. ТРУДНОСТИ ПРОТЯГИВАНИЯ ЦИКЛА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТ $2\gamma_2$. Такая модификация несколько упрощает доказательство, но все же оно получилось довольно объемным. Основная его часть посвящена протягиванию элемента $2\gamma_2$. Дело в том, что в отличие от [20, 21, 39] в данной статье рассматриваются расслоения весьма общего вида и, как при построении группы G, мы не можем использовать глобальные канонические координаты (p, q). Поэтому вместо глобального пересечения слоя Λ_ξ с гиперплоскостями $\{p_i = 0\}$, $i = 1, 2$, рассмотренными в [39], такое пересечение приходится рассматривать лишь в той окрестности точки ξ^0, в которой определены локальные координаты (p, q). Это пересечение необходимо дополнить одной или двумя упомянутыми в пп. 0.7.А геодезическими. Такая составная и не обязательно связная линия, ориентированная должным образом, берется за цикл C_ξ, $\xi \in \delta$, используемый для протягивания элемента $2\gamma_2$.

Кроме того, определенные в окрестности точки ξ^0 поверхности (3) не будут стандартными гиперболоидами и конусом, как в [39], а являются их малыми деформациями. Пересечения $\Lambda \cap \{p_i = 0\}$, $i = 1, 2$, тоже являются малыми деформациями более простых аналогичных кривых, задаваемых функциями F_1, F_2, имеющими вид (1), (2). Все это создает дополнительные трудности для четкого доказательства.

0.8. Связь с приложениями. Мотивировкой исследования рассмотренных в статье лагранжевых расслоений является не только любопытная геометрия, но и тесные связи с приложениями. В последние десятилетия выявлена связь между рассмотренной выше классической монодромией и квантовой физикой. Полученные в данной статье результаты расширяют рамки этой весьма полезной для приложений связи.

Например, по спектроскопическим данным исследования молекул вещества можно определить спектральную решетку, а по дефектам этой решетки выяснить классическую монодромию. И если эта монодромия совпадает с одной из двух рассмотренных в данной статье, то можно сделать вывод, что тип резонанса квантового ангармонического осциллятора, описывающего поведение молекул, будет либо $1:(-1)$, либо $1:(-2)$ в зависимости от вида матрицы монодромии $\mathcal{A}$. (Подробнее о связи классической монодромии с квантовой физикой см., например, [21, 39].) Некоторые дополнительные соображения о мотивировке исследования расслоений с особой точкой осцилляторного типа приведены в § 2.3 данной статьи. Эти соображения связаны с пуассоновым действием группы, диффеоморфной окружности, а также с усреднением, и в конечном счете тоже имеют отношение к приложениям.

Подчеркнем, что исследуемая монодромия возникает при наличии резонансов между частотами осциллятора. Вообще, проявления резонансов в квантовых системах весьма многообразны. Думается, что это связано с их особой устойчивостью, так что резонансы обеспечивают устойчивость в широком спектре природных феноменов от квантовой до небесной механики. (О роли резонансов для устойчивости см. [2, 41], где рассматривается существенно более сложная, чем в данной статье, ситуация — гамильтоновы уравнения в частных производных.)

0.9. Гипотеза о виде матрицы монодромии при наличии на слое Λ^0 нескольких существенно особых точек. В статье исследовалась монодромия, получаемая при обходе слоя Λ^0, имеющего единственную особую точку, причем эта точка «осцилляторного» типа и с резонансным соотношением $1:(-1)$ либо $1:(-2)$. Какой будет монодромия, если слой Λ^0 содержит несколько точек этих двух видов, причем точки не обязательно имеют одно и то же резонансное соотношение?

Думается, что матрица монодромии будет произведением матриц монодромии, отвечающих каждой из этих точек, как это имеет место в случае, когда все точки имеют простейший резонанс $1:(-1)$ (см. [6]). При этом в рассматриваемом случае лагранжева расслоения матрицы не могут компенсировать друг друга, а только аккумулируются. Имеется в виду, что перемножаемые матрицы имеют вид (15) и (16), а точнее, они не перемешаны с обратными к ним матрицами. Более того, по-видимому, это правило перемножения матриц монодромии останется верным при наличии на Λ^0 точек с более сложными особенностями.

0.10. Структура статьи. Статья организована следующим образом. Кроме введения, она состоит из восьми параграфов. § 1 посвящен основным понятиям. В нем, в частности, даны четкие определения протягивания вдоль петли δ с выделенной точкой ξ^s элемента γ группы гомологий $H_1(\Lambda^s)$ и цикла C, лежащего на стартовом торе $\Lambda^s \ni \xi^s$. Приведены также определения полупроницаемой стенки $\mathcal{T}$ и матрицы монодромии $\mathcal{A}$. В § 2 содержится описание рассматриваемых классов расслоений $\mathcal{P}$ и подробно исследованы примеры (1), (2) таких расслоений, а также ситуации, в которых появляются расслоения классов $\mathcal{P}$. Во второй половине этого параграфа сформулированы два основных утверждения статьи — теоремы 2.4 и 2.5, а также некоторые следствия из них. В этих утверждениях подведен итог проведенных исследований расслоений, отвечающих резонансам $1:(-1)$ и $1:(-2)$. Отметим, что в этом параграфе в отличие от § 1 в основу рассмотрений преимущественно положено не понятие лагранжева расслоения, а более общее понятие псевдоинтегрируемого отображения, то есть отображения, полуглобально задаваемого на симплектическом $2n$-мерном многообразии n функциями, которые находятся попарно в инволюции (см. определение 1.1.Б). Помимо большей общности, это понятие более удобное для проверки в конкретных ситуациях, хотя оно и менее геометричное.

Остальные §§ 3–8 посвящены доказательству этих теорем. § 3 состоит из двух частей. В первой части исследуются расслоения, определяемые на полупространстве $\{p_2 = 0,\ q_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$ сужениями функций F_1^0, F_2^0, и отображения $F^0 = (F_1^0, F_2^0)$ на это полупространство. Здесь F_1^0, F_2^0 — функции, задаваемые формулами (1), (2), в которых положено $R_i = 0$, $i = 1, 2$, то есть главные части в малой окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ функций F_1 и F_2. Исследуются также расслоения всего линейного пространства $\mathbf{R}^4_{pq}$, определяемые F_1^0, F_2^0 и F^0. Кроме того, изучены векторное поле $X_{F_1^0}$ системы с гамильтонианом F_1^0 и задаваемый им 2π-периодический фазовый поток. Эти расслоения, векторное поле и поток рассматриваются как «невозмущенные». Во второй половине § 3 в исходной «возмущенной» ситуации доказаны аналоги утверждений из первой части, которые относятся к расслоению полупространства $\{p_2 = 0,\ q_2 > 0\}$. Возмущенные расслоения рассматриваются только в той окрестности существенно особой точки ξ^0, в которой определены локальные координаты (p, q), и, более того, эта окрестность предполагается малой.

В § 4 в полной окрестности особого слоя Λ^0 построено гамильтоново поле, векторы которого касаются слоев Λ рассматриваемого лагранжева расслоения, а фазовый поток G которого 2π-периодичен. В малой окрестности существенно особой точки $\xi^0 \in \Lambda^0$ это поле мало отличается от полей $X_{F_1^0}$ и X_{F_1}. Элемент γ_1, представляемый ориентированными траекториями этого поля, лежащими на Λ^s, берется в качестве одного из двух базисных элементов группы $H_1(\Lambda^s)$, протягиваемых вдоль петли δ (ср. пп. 0.7.А). Кроме того, в конце § 4 доказано большинство оставшихся нерассмотренными во второй части § 3 возмущенных аналогов утверждений из первой части § 3. На описания расслоений, векторных полей и отвечающих им потоков, которые приведены в § 3 и § 4, опирается протягивание удвоения $2\gamma_2$ второго базисного цикла γ_2. Это протягивание строится в §§ 5–8.

В § 5 построены носители λ_ξ упомянутых в пп. 0.7.Г циклов C_ξ, с помощью которых задается деформация элемента $2\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$. Эти носители состоят из двух частей, одна из которых локализована в окрестности точки ξ^0 и лежит на пересечении слоя Λ с полупространством $\{p_2 = 0,\ q_2 > 0\}$, а другая состоит из геодезических. Рассматриваются 2-параметрические семейства λ_{mh} таких линий $\lambda_\xi = \lambda_{mh}$, где $(m, h) = F(\xi)$, параметром в которых служат либо h либо m.

В § 6 мы отвлекаемся от изучения лагранжева расслоения. Здесь исследуется следующий общий вопрос. Рассмотрим проекцию замкнутой кривой, лежащей вблизи точки ξ^0 на конусе

$$F_1^{-1}(0) \cap \{p_2 = 0,\ q_2 > 0\}, \tag{4}$$

на другое полупространство $\{p_1 = 0,\ q_1 > 0\}$. Проведем проектирование параллельно орбитам потока G. Какие условия нужно наложить на исходную кривую, чтобы эта ее проекция была бы замкнутой кривой, и как эта проекция получается из исходной кривой?

Оказывается, что проекция будет лежать на конусе того же вида (4), где (p_2, q_2) нужно заменить на (p_1, q_1). И, например, в случае $m_2 = 1$, $m_1 = 2$, если исходная кривая два раза обходит вокруг вершины $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ (она же точка ξ^0) исходного конуса, то ее проекция имеет следующий вид. Она тоже будет замкнутой кривой, обходящей вершину альтернативного конуса, которая тоже совпадает с точкой $0 \in \mathbf{R}^4$, но обходить ее проекция будет только один раз. При этом исходная кривая и ее проекция не будут эквивалентны по отношению к потоку G в следующем смысле. Фиксируем произвольную точку на исходной кривой и рассмотрим путь с началом и концом в этой точке, дважды обходящий по этой кривой вершину конуса. Рассмотрим непрерывное семейство дуг орбит группы G, выходящих из точек исходной кривой при таком обходе и соединяющих точки на исходной кривой с их проекциями. Тогда две дуги, отвечающие начальной и конечной точке такого обхода, будут отличаться ровно на одну орбиту группы G.

Если же исходная кривая не обходит вершину конуса, то ее проекция тоже будет замкнутой кривой, не обходящей вершину своего конуса. Кроме того, проекция будет эквивалентна исходной кривой в описанном выше смысле, то есть в рассмотренной конструкции начальная и конечная дуги орбит группы G будут совпадать. Эти факты о виде проекций кривых с двойным и нулевым обходом используются в оставшихся §7 и §8 в критические моменты протягивания цикла, представляющего элемент $2\gamma_2$, а именно: в момент, отвечающий, грубо говоря, переходу из полупространства $\{p_2 = 0, q_2 > 0\}$ в полупространство $\{p_1 = 0, q_1 > 0\}$, и в момент, отвечающий обратному переходу. Именно эти факты лежат в основе нетривиальности монодромии при таком методе протягивания элемента $2\gamma_2$ и определяют вид матрицы монодромии (ср. пп. 0.7.B). Отметим, что если кривая, лежащая на конусе (4), лишь один раз обходит его вершину, то в рассмотренном случае $m_2 = 1$, $m_1 = 2$ проекция этой кривой не будет замкнутой. Этот факт можно использовать для объяснения непротягиваемости части элементов группы $H_1(\Lambda^s)$.

В §7 рассматривается семейство циклов, построенное в §5, и по нему строится аналогичное семейство, отвечающее альтернативному полупространству $\{p_1 = 0, q_1 > 0\}$. Оно строится с использованием результатов §6 согласованным в определенном смысле с исходным семейством, отвечающим полупространству $\{p_2 = 0, q_2 > 0\}$. Далее в §8, опираясь на эту конструкцию, осуществлено протягивание цикла $2\gamma_2$ и проведено завершение доказательства теорем 2.4 и 2.5.

Автор благодарен Б. И. Жилинскому и Д. А. Садовскому за полезные замечания.

§1. Обобщенное определение монодромии

В данном параграфе приведены базисные понятия, используемые в формулировках основных утверждений статьи (о содержании параграфа см. п. 0.10 введения). Все функции, отображения и многообразия во всей статье, если это не оговорено специально, предполагаются гладкими, то есть бесконечно дифференцируемыми. Под подмногообразием $N \subset M$ многообразия M будем понимать вложенное подмногообразие, то есть такое, что у каждой точки $\xi \in N$ найдется окрестность U во всем M, пересечение $U \cap N$ которой с N в некоторых координатах задается как часть координатного подпространства. Таким образом, исключаются как «восьмерки», так и иррациональные обмотки торов.

§1.1. Тонкие поверхности. Интегрируемые отображения и лагранжевы расслоения

Пусть $\mathcal{N} \subset M$ — подмножество n-мерного многообразия M, являющееся объединением попарно не пересекающихся гладких подмногообразий размерности, меньшей n, причем выполнены следующие условия. Для каждого открытого подмножества $U \subset M$, замыкание $\overline{U}$ которого является компактом, число таких подмногообразий, пересекающих U, будет конечным. Конечным должно быть и число связных компонент дополнения $M \setminus \mathcal{N}$, пересекающих U.

Определение 1.1.А. Подмножество $\mathcal{N} \subset M$ с этими свойствами будем называть *тонкой поверхностью* в M или, короче, *тонким* в M.

Пусть тонкая поверхность $\mathcal{N}$ содержится в замыкании объединения k-мерных подмногообразий, каждое из которых входит в набор подмногообразий, составляющих $\mathcal{N}$. Тогда $\mathcal{N}$ будем называть *k-мерной тонкой поверхностью.* Объединение самих этих k-мерных подмногообразий будем называть *внутренностью* такой поверхности $\mathcal{N}$.

Пусть M^{2n} — сиплектическое многообразие размерности $2n$, а ω^2 — его симплектическая структура. Пусть $F\colon M^{2n} \to B^n$ — отображение M^{2n} в некоторое n-мерное многообразие B^n. Предположим, что для каждой точки $b \in \operatorname{Im} F = F(B)$ найдется ее окрестность W в B^n, такая, что сужение $F|_{F^{-1}(W)}$ функции F на прообраз $F^{-1}(W)$ этой окрестности обладает следующим свойством. В некоторых (и тогда в любых) локальных координатах y на W это сужение задается набором $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_n)$ из n функций, находящихся попарно в инволюции и определенных на $F^{-1}(W)$, то есть оно задается в виде $\xi \mapsto y = \widetilde{F}(\xi)$, где $\xi \in F^{-1}(W) \subseteq M$ и $\{\widetilde{F}_i, \widetilde{F}_j\} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Определение 1.1.Б. В этом случае отображение F назовем *псевдоинтегрируемым.* Пусть дополнительно подмножество $M^{2n} \setminus \Sigma_F$ всех некритических точек отображения F является всюду плотным в $M = M^{2n}$, тогда отображение F назовем *интегрируемым* или *обобщенным отображением энергии – момента.* Отметим, что из всюду плотности $M^{2n} \setminus \Sigma_F$ и из теоремы Сарда о том, что множество критических значений имеет меру нуль, следует, что подмножество $M^{2n} \setminus F^{-1}(F(\Sigma_F))$ прообразов всех некритических значений отображения F тоже будет всюду плотным в $M = M^{2n}$. Отметим также, что в аналитической ситуации проверка условий всюду плотности $M \setminus \Sigma_F$ весьма проста: достаточно, чтобы $M \setminus \Sigma_F$ было не пусто, то есть чтобы F имело хотя бы одну некритическую точку.

Пусть псевдоинтегрируемое отображение F вообще не имеет критических точек. Тогда разбиение многообразия M на связные компоненты Λ прообразов $F^{-1}(b)$ точек $b \in B = B^n$ будем называть *регулярным лагранжевым расслоением.* В этом случае связные компоненты Λ прообразов $F^{-1}(b)$ являются гладкими лагранжевыми подмногообразиями в M. Если к тому же все слои компактны, то такое расслоение назовем *торическим лагранжевым* или просто *торическим.* Все такого типа расслоения будем называть *задаваемыми отображением* $F\colon M \to B$ и далее будем обозначать их той же буквой F.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию разбиения многообразия M на связные компоненты Λ прообразов $F^{-1}(b)$ точек $b \in B = B^n$, среди которых имеются особые компоненты. Обозначим через M_R максимальное открытое подмножество многообразия M, состоящее из тех связных компонент Λ прообразов $F^{-1}(b)$ точек $b \in B$, которые не содержат критических точек псевдоинтегрируемого отображения F. Такое подмножество, очевидно, всегда существует, в частности, оно может быть пустым, и мы будем называть его *областью регулярности* рассматриваемого разбиения. Пусть дополнение $M \setminus M_R$ является тонким в M, и пусть каждая компонента $\Lambda \subset M \setminus M_R$ тоже является тонкой поверхностью в M. Тогда разбиение многообразия M на компоненты Λ будем называть просто *лагранжевым расслоением*, а сами Λ — слоями этого расслоения. Подмножество M_R будем называть в этом случае *областью регулярности* расслоения F. Слои Λ, лежащие в $M \setminus M_R$, будем называть *особыми*, а лежащие в M_R — *регулярными.* Критическую точку отображения F назовем *особой точкой* расслоения F. Если к тому же все слои расслоения F на M, а значит, и на M_R, компактны, то будем добавлять, что расслоение F *компактно.* Ясно, что в случае компактности расслоения F любой его особый слой пересекается с множеством Σ_F всех критических точек отображения F. Как известно, регулярное компактное лагранжево расслоение является локально тривиальным расслоением на лагранжевы торы (см., например, [40, 43]), что и мотивирует употребление термина «торическое» для таких расслоений. Напомним, что лагранжевым называется n-мерное подмногообразие $N \subseteq M$, такое, что $\omega^2|_N = 0$. Отметим, что все приведенные выше определения расслоения и связанные с ними определения очевидным образом обобщаются на общий случай — нужно лишь рассматривать отображения общего вида, а не обязательно псевдоинтегрируемые.

§1.2. Допустимая деформация цикла. Протягивание цикла вдоль пути δ сквозь проницаемые для него особые стенки расслоения

Определение 1.2.A. *Элементарным циклом* на тонкой поверхности Σ, лежащей в многообразии M, будем называть любой замкнутый путь на Σ. Под *путем* везде в статье понимается ориентированная связная кривая с обоими концами.

Пусть дано некоторое лагранжево компактное расслоение $F\colon M^{2n} \to B^n$ симплектического многообразия $M = M^{2n}$. Рассмотрим кусочно-гладкий путь δ, пересекающий дополнение $M \setminus M_R$ ровно в одной точке ξ_0, то есть $\{\xi_0\} = \delta \cap (M \setminus M_R)$ и $\delta \setminus \{\xi_0\} \subset M_R$. Во всей статье будем предполагать, что в любой своей внутренней точке негладкости любая кусочно-гладкая кривая δ является гладкой отдельно с каждой из двух сторон от этой точки. Аналогично, кривая δ является односторонне гладкой в каждой из своих концевых точек.

Точка ξ_0 делит кривую δ на две части δ^- и δ^+, где знаки $\pm$ расставлены согласно заданной на δ ориентации. Эти две части условно будем называть, соответственно, *левой* и *правой*. Таким образом, $\delta^- \cup \delta^+ = \delta$ и $\delta^- \cap \delta^+ = \{\xi_0\}$. Пусть имеется семейство циклов C_ξ^-, $\xi \in \delta^-$, обладающее следующими свойствами. При каждом $\xi \in \delta^-$ цикл C_ξ^- имеет вид конечной суммы $C_\xi^- = \sum_{i=1}^p A_\xi^i$, где $A_\xi^1, \ldots, A_\xi^p$ — некоторый набор элементарных циклов, лежащих на слое $\Lambda_\xi \ni \xi$, причем при любом $\xi \in \delta^- \setminus \{\xi_0\}$ эти циклы будут гладкими. Каждый из этих циклов непрерывно зависит от точки $\xi \in \delta$ и гладко зависит от точки ξ, пробегающей любой участок гладкости кривой $\delta^- \setminus \{\xi_0\}$.

Пусть аналогичное семейство циклов $C_\times^+ i = \sum_{j=1}^q B_\xi^j$, $\xi \in \delta^+$, имеется и для правой части δ^+ пути δ, то есть предполагается, что циклы B_ξ^j элементарные и при $\xi \in \delta^+ \setminus \{\xi_0\}$ лежат на торах $\Lambda_\xi \ni \xi$ и что они зависят от точки $\xi \in \delta^+$ точно так же, как циклы A_ξ^i от $\xi \in \delta^-$. Предположим также, что выполнено приведенное ниже условие согласования между этими двумя семействами. Согласование состоит в том, что эти циклы при прохождении точки ξ_0 должны перестраиваться так, как перестраиваются ориентированные линии уровня функции достаточно общего вида, заданные на двумерной ориентированной поверхности, при прохождении критического значения, а именно: разрезав все циклы A_ξ^i и B_ξ^j в конечном числе точек, мы должны получить набор «открытых цепей», каждая из которых гладко зависит от точки ξ, пробегающей по пути δ всю полную окрестность точки ξ_0, то есть включая левую и правую ее полуокрестности и саму эту точку ξ_0.

Точнее, существует окрестность $\mathcal{O}$ точки ξ_0 в M, такая, что на каждом цикле A_ξ^i, $\xi \in \delta^- \cap \mathcal{O}$, $i = 1, \ldots, p$, можно выделить конечное число точек $\zeta_{\alpha,\xi}^i$, $\alpha = 1, \ldots, s_i$, $s_i \geqslant 1$, непрерывно зависящих от точки $\xi \in \delta^- \cap \mathcal{O}$ и гладко от $\xi \in (\delta^- \setminus \{\xi_0\}) \cap \mathcal{O}$, а также обладающих следующими свойствами. Рассмотрим набор $\Delta_\xi^{1-}, \ldots, \Delta_\xi^{r-}$ из всех связных компонент всех дополнений

$$A^i_\xi \setminus \left(\cup_{\alpha=1}^{s_i} \left\{\zeta^i_{\alpha,\xi}\right\}\right), \quad i = 1, \ldots, p,$$

так что $r = s_1 + \ldots + s_p$. Каждая такая связная компонента Δ^{l-}_ξ при любом $\xi \in \delta^- \cap \mathcal{O}$ является кривой без обоих концов, и мы будем считать эту кривую ориентированной в соответствии с ориентацией элементарного цикла, частью которого она является.

То же самое можно сделать и с «правыми» элементарными циклами $B^1_\xi, \ldots, B^q_\xi$ и получить такой же набор $\Delta^{1+}_\xi, \ldots, \Delta^{r+}_\xi$, $\xi \in \delta^+ \cap \mathcal{O}$, связных «интервалоподобных» ориентированных кривых. При этом число r кривых в наборе предполагается тем же самым, что и для левой части δ^- кривой δ. Более того, потребуем, чтобы $\Delta^{l+}_\xi = \Delta^{l-}_\xi$ при $\xi = \xi_0$ для каждого $l = 1, \ldots, r$, где под равенством понимается и совпадение ориентации. Рассмотрим набор семейств $\Delta^1_\xi, \ldots, \Delta^r_\xi$, $\xi \in \delta \cap \mathcal{O}$, положив

$$\Delta^l_\xi = \Delta^{l-}_\xi \quad \text{при} \quad \xi \in \delta^- \quad \text{и} \quad \Delta^l_\xi = \Delta^{l-}_\xi \quad \text{при} \quad \xi \in \delta^+.$$

Предположим, что каждая кривая Δ^l_ξ, $l = 1, \ldots, r$, гладко зависит от параметра $\xi \in \delta \cap \mathcal{O}$.

Определение 1.2.Б. При выполнении этих условий цикл C^-_ξ при любом $\xi \in \delta^- \setminus \{\xi_0\}$ назовем *протягиваемым* вдоль пути δ, а цикл C^+_ξ при любом $\xi \in \delta^+ \setminus \{\xi_0\}$ — *результатом* этого протягивания. Пару семейств $(C^-_\xi,\ \xi \in \delta^-)$, $(C^+_\xi,\ \xi \in \delta^+)$ назовем *допустимой деформацией циклов* вдоль пути δ. Дополнение $M \setminus M_R$ будем называть *проницаемым* вдоль пути δ для цикла C^-_ξ, где ξ — любая точка из $\delta^- \setminus \{\xi_0\}$. В рассмотренной конструкции нигде не использовался тот факт, что $\xi_0 \in M \setminus M_R$, так что определения протягивания и допустимой деформации переносятся и на случай $\xi_0 \in M_R$, но в этом случае будем говорить о *неособом протягивании*.

Замечание 1.2.В. Циклы C^-_ξ и C^+_ξ при $\xi = \xi_0$, вообще говоря, не совпадают, но в некотором смысле эквивалентны, а именно: их можно «составить» из одних и тех же цепей. Тем не менее, зависимость от ξ цикла C_ξ, $\xi \in \delta$, где

$$C_\xi := C^-_\xi \quad \text{при} \quad \xi \in \delta^- \quad \text{и} \quad C_\xi := C^+_\xi \quad \text{при} \quad \xi \in \delta^+ \setminus \{\xi_0\},$$

вообще говоря, не является непрерывной, так как в точке $\xi = \xi_0$ возможен разрыв в обычном понимании этого термина. Перестройка этих циклов происходит на уровне их носителей за счет того, что разные точки $\zeta^i_{\alpha,\xi}$ в момент $\xi = \xi_0$ как бы сталкиваются и при дальнейшем движении по пути δ расходятся в других направлениях, чем перед столкновением, то есть при $\xi \in \delta^-$.

§1.3. Циклы и элементы группы гомологий стартового слоя, протягиваемые вдоль петли

Пусть теперь δ — петля в $M = M^{2n}$, то есть замкнутая кусочно-гладкая ориентированная кривая с выделенной точкой, которую обозначим через ξ^s. Будем предполагать, что $\xi^s \in M_R$, а сама петля δ удовлетворяет следующим условиям. На δ имеется конечное число точек $\xi_1, \ldots, \xi_q$, $q \geqslant 1$, лежащих в $M \setminus M_R$, а вся остальная часть этой петли лежит в области регулярности: $\delta \setminus \cup_{i=1}^q \{\xi_i\} \subset M_R$. Помимо ξ^s в M_R лежат и все точки негладкости петли δ. Предположим также, что δ разбивается q лежащими в M_R точками $\eta_1, \ldots, \eta_q$, в число которых входит и выделенная точка $\xi^s = \eta_q = \eta_0$, на q путей

$$[\eta_0, \eta_1],\ [\eta_1, \eta_2], \ldots, [\eta_{q-1}, \eta_q],$$

обладающих следующими свойствами.

Во-первых, при каждом $i = 1, \ldots, q$ точка ξ_i принадлежит внутренности сегмента $[\eta_{i-1}, \eta_i]$, то есть $\xi_i \in (\eta_{i-1}, \eta_i)$. Во-вторых, обозначим $\delta_i := [\eta_{i-1}, \eta_i]$ и через δ_i^- и δ_i^+ обозначим, соответственно, левую и правую части пути δ_i, на которые делит этот путь точка ξ_i. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, q$ имеется пара семейств $(C^-_{i,\xi}, \xi \in \delta^-{}_i)$, $(C^+_{i,\xi}, \xi \in \delta^+{}_i)$, являющаяся некоторой допустимой деформацией циклов вдоль пути δ_i. И в-третьих, при любом $i \neq q$, то есть при $i = 1, \ldots, q-1$, циклы $C^+_{i,\xi}$ и $C^-_{i+1,\xi}$ при $\xi = \eta_i$, принадлежащие разным, но соседним парам семейств, будут согласованы в следующем смысле: на торе Λ_ξ при $\xi = \eta_i$ они представляют один и тот же элемент группы 1-мерных гомологий $H_1(\Lambda_{\eta_i})$ этого тора.

Рассмотрим набор

$$(C^-_{1,\xi}, \xi \in \delta^-{}_1),\ (C^+_{1,\xi}, \xi \in \delta^+{}_1), \ldots, (C^-_{q,\xi}, \xi \in \delta^-{}_q),\ (C^+_{q,\xi}, \xi \in \delta^+{}_q) \tag{5}$$

из $2q$ семейств циклов. Этот набор для краткости обозначим C_ξ, $\xi \in \delta$. Но будем иметь в виду, что на петле δ имеется $2q$ точек $\eta_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \ldots, \eta_{q-1}, \xi_q$, каждой из которых, в действительности, сопоставлены два цикла, отвечающие левой и правой полуокрестностям на петле δ данной точки. Эти два значения, учитывая ориентацию петли δ, обозначим, соответственно, C^-_ξ и C^+_ξ, где $\xi = \eta_i$ либо $\xi = \xi_i$, $i = 1, \ldots, q$. Каждой из остальных точек $\xi \in \delta$ соответствует ровно один цикл C_ξ.

Определение 1.3.A. При выполнении этих условий цикл $C^+_{\xi^s}$, равно как и представляемый им элемент γ^+ одномерной группы гомологий $H_1(\Lambda^s)$ тора $\Lambda^s \ni \xi^s$, назовем *протягиваемым* вдоль петли δ. Цикл $C^-_{\xi^s}$ (представляемый им элемент $\gamma^- \in H_1(\Lambda^s)$) будем называть *результатом* протягивания цикла $C^+_{\xi^s}$ (элемента γ^+). Цикл $C^+_{\xi^s}$, элемент γ^+ и тор Λ^s будем также называть *стартовыми*, а $C^-_{\xi^s}$, γ^-, Λ^s — *финишными*, так что слой Λ^s одновременно и стартовый, и финишный. Семейство циклов C_ξ, $\xi \in \delta$, назовем *допустимой деформацией* цикла $C^+_{\xi^s}$. В случае, когда петля δ целиком лежит в M_R, то есть при $q = 0$, *протягивание* вдоль δ определяется в соответствии с определением 1.2.Б неособого протягивания вдоль пути δ.

Замечание 1.3.Б. В каждой из $2q$ точек ξ_i и η_i циклы C^-_ξ и C^+_ξ, отвечающие, соответственно, левой и правой полуокрестностям этой точки, берутся в том или ином смысле эквивалентными за исключением точки $\eta_q = \eta_0 = \xi^s$. В точке ξ^s эти два цикла специально никак не согласуются, и их неэквивалентность, то есть то, что они представляют разные элементы в группе $H_1(\Lambda^s)$, означает нетривиальную монодромию, задаваемую обходом по петле δ.

§1.4. Отображение дробной монодромии и ее матрица, отвечающие обходу по данной петле

Группа 1-мерных гомологий $H_1(\mathbf{T}^n)$ n-мерного тора $\mathbf{T}^n$ изоморфна группе $\mathbf{Z}^n$ целочисленных векторов арифметического пространства $\mathbf{R}^n$.

Определение 1.4.A. Число n называется *рангом* группы $\mathbf{Z}^n$. Любая подгруппа ζ группы $\mathbf{Z}^n$ изоморфна $\mathbf{Z}^k$ при некотором $k = 1, \ldots, n$. Если $k = n$, то подгруппу ζ будем называть *полной*.

Пусть, как и выше, δ — кусочно-гладкая петля в M. Предположим, что подмножество в $H_1(\Lambda^s)$ всех элементов γ, протягиваемых вдоль петли δ (см. определение 1.3.A), является полной подгруппой ζ группы $H_1(\Lambda^s)$. Рассмотрим отображение μ из ζ в $H_1(\Lambda^s)$, сопоставляющее каждому элементу $\gamma^+ \in \zeta$ результат γ^- его протягивания. Предположим, что подгруппа ζ и отображение $\mu\colon \gamma^+ \mapsto \gamma^-$ определены корректно, то есть независимо от способа протягивания элементов из $H_1(\Lambda^s)$ вдоль данной петли: от выбора точек $\eta_1, \ldots, \eta_{q-1}$, набора семейств циклов (5) и прочего. Предположим также, что отображение μ задает изоморфизм подгруппы ζ на некоторую подгруппу $\zeta' \subseteq H_1(\Lambda^s)$, которая тогда автоматически будет полной.

Определение 1.4.Б. В этом случае $\mu\colon \zeta \to \zeta'$ назовем *отображением* (*классической*) *дробной монодромии*, задаваемой петлей δ. Саму петлю назовем ζ-*допустимой* или просто *допустимой*.

Вложим группу $H_1(\Lambda^s)$ в линейное пространство $\mathbf{R}^n$ как его подгруппу. Тогда отображение $\mu\colon \zeta \to \zeta'$ индуцирует линейный оператор в $\mathbf{R}^n$, который обозначим через A. Фиксируем какой-либо базис $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ в $H_1(\Lambda^s)$ и возьмем его в качестве базиса в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{A}$ матрицу, задающую оператор A в этом базисе.

Определение 1.4.В. Оператор A будем называть *оператором дробной монодромии*, а $\mathcal{A}$ — *матрицей дробной монодромии* в базисе $\overline{\gamma}$, отвечающими обходу по петле δ.

Ясно, что $\mathcal{A} \in GL(2, \mathbf{Q})$, то есть коэффициенты матрицы $\mathcal{A}$ принадлежат полю $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. Это мотивирует употребление термина «дробная монодромия».

§1.5. Расслоения с полупроницаемыми особенностями. Дробная монодромия для произвольных петель, не меняющаяся при их деформации

Пусть γ_1 и γ_2 — две кусочно-гладкие кривые, лежащие в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$.

Определение 1.5.А. *Расстоянием от кривой* γ_1 *до кривой* γ_2 *в метрике* C^k, $k = 0, 1$, назовем число $\rho_k(\gamma_1, \gamma_2)$, задаваемое следующим образом. Положим

$$\rho_k(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{x\in\gamma_1} \inf_{y\in\gamma_2} \rho_k(x, y), \quad k = 0, 1, \tag{6}$$

где $\rho_0(x, y) = |x - y|$ — обычное евклидово расстояние между точками x и y. При $k = 1$ возьмем $\rho_1(x, y) = |x - y| + \widehat{x', y'}$, где x' — касательная к кривой γ_1 в точке x, прямая y' — касательная к γ_2 в точке y, а $\widehat{x', y'}$ — угол между этими двумя касательными. Если точка x является точкой негладкости, то в качестве x' берем касательную в точке x к любому из гладких участков кривой γ_1, содержащих точку x. То же самое делаем и в случае негладкости кривой γ_2 в точке y. Легко видеть, что от выбора таких участков число $\rho_1(\gamma_1, \gamma_2)$ не зависит. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ можно заменить на произвольное риманово многообразие M, тогда определение расстояния $\rho_k(\gamma_1, \gamma_2)$, $k = 0, 1$, в виде (6) останется в силе. В качестве $\rho_0(x, y)$ в (6) нужно взять расстояние между точками x и y в данной римановой метрике. Если $k = 1$, то положим $\rho_1(x, y) = \rho_0(x, y) + \inf_{\delta\in\Gamma_{xy}} \widehat{\widetilde{x}'_\delta, y'}$, где Γ_{xy} — множество всех геодезических в данной римановой метрике, соединяющих точки x и y, а $\widehat{\widetilde{x}'_\delta, y'}$ — угол между прямыми $\widetilde{x}'_\delta$ и y', лежащими в касательном пространстве T_yM к M в точке y и определяемыми следующим образом. Прямая $y' \subset T_yM$ является касательной к γ_2 в точке y, а $\widetilde{x}'_\delta$ — прямая, полученная параллельным переносом вдоль геодезической δ касательной к γ_1 в точке x прямой $x' \subset T_xM$. Здесь перенос задается данной римановой метрикой.

Определение 1.5.Б. Число $\rho_k(\gamma_1, \gamma_2)$, $k = 0, 1$, будем называть *расстоянием в метрике* C^k *от кривой* γ_1 *до кривой* γ_2. Под малым расстоянием в метрике C^k между кривыми γ_1 и γ_2 будем понимать, что малы оба расстояния $\rho_k(\gamma_1, \gamma_2)$ и $\rho_k(\gamma_2, \gamma_1)$, $k = 0, 1$. Ясно, что определение 1.5.А является частным случаем определения 1.5.Б.

Фиксируем произвольное компактное лагранжево расслоение $F\colon M^{2n} \to B^n$. Обозначим через Σ множество всех критических точек отображения F. Обозначим через $\mathcal{K} = \mathcal{K}(M^{2n} \setminus \Sigma)$ множество всех кусочно-гладких петель в $M^{2n} \setminus \Sigma$ и обозначим через $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_0(F) = \mathcal{K}_0(F, M^{2n} \setminus \Sigma)$ множество всех петель $\delta \in \mathcal{K}(M^{2n} \setminus \Sigma)$, пересекающих дополнение $M \setminus M_R$ не более чем в конечном числе точек. Пусть расслоение F обладает следующими свойствами.

а) Для каждой петли $\delta \in \mathcal{K}$ сколь угодно близко от нее в метрике C^1 найдется петля $\delta' \in \mathcal{K}_0$ с той же выделенной точкой ξ^s, что и петля δ. Точнее, для любого $\varepsilon > 0$ найдется петля $\delta' \in \mathcal{K}_0$, такая, что $\rho_1(\delta, \delta') + \rho_1(\delta', \delta) < \varepsilon$.

б) Если некоторая петля $\delta \in \mathcal{K}_0$ гомотопна точке во всем классе $\mathcal{K}$ петель, то она допустима и отображение монодромии $\mu\colon \zeta \to \zeta'$ для этой петли будет тождественным: $\zeta' = \zeta$ и $\mu = \mathrm{id}$, где $\zeta = \zeta(\delta)$ (см. определение 1.4.Б).

Определение 1.5.В. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда расслоение F будем называть *компактным лагранжевым расслоением с полупроницаемыми особенностями.* В число таких расслоений формально входят и регулярные расслоения, то есть локально тривиальные расслоения на торы многообразия $M = M_R$. Связную тонкую гиперповерхность $\mathcal{T}$, целиком лежащую в дополнении $M \setminus (M_R \cup \Sigma)$, будем называть *полупроницаемой стенкой.*

Пусть $\delta' \subset M \setminus \Sigma$ — любая допустимая петля, в частности, $\delta' \in \mathcal{K}_0$. Тогда, согласно определению 1.4.Б, корректно определены оператор монодромии $A(\delta')$ и матрица $\mathcal{A}(\delta')$, соответствующие обходу вдоль петли δ'. Пусть $\delta \in \mathcal{K} = \mathcal{K}(M \setminus \Sigma)$ — любая петля, гомотопная в $M^{2n} \setminus \Sigma$ петле δ'. Тогда для δ однозначно определяются *оператор монодромии* $A(\delta)$ и *матрица монодромии* $\mathcal{A}(\delta)$, отвечающие обходу вдоль δ.

Теперь нужно взять какую-нибудь петлю $\widetilde{\delta} \in \mathcal{K}_0$, гомотопную петле δ' в классе $\mathcal{K}$ и имеющую общую с δ выделенную точку ξ^s. Тогда из условия б) легко следует, что $\widetilde{\delta}$ тоже допустима, и мы полагаем $A(\delta) := A(\widetilde{\delta})$ и $\mathcal{A}(\delta) := \mathcal{A}(\widetilde{\delta})$, где матрицы $\mathcal{A}(\delta)$, $\mathcal{A}(\widetilde{\delta})$ и $\mathcal{A}(\delta')$ соответствуют одному и тому же базису $\overline{\gamma}$ группы $H_1(\Lambda^s)$, $\Lambda^s \ni \xi^s$.

Предложение 1.5.Г. *Если выполнены условия а) и б), то приведенные определения оператора $A(\delta)$ и матрицы $\mathcal{A}(\delta)$, $\delta \in \mathcal{K}$, действительно корректны, то есть найдется петля $\widetilde{\delta} \in \mathcal{K}_0$ с нужными свойствами и от ее выбора ничего не меняется.*

Доказательство. Используя условие а), нетрудно получить существование такой петли $\widetilde{\delta} \in \mathcal{K}_0$, а из условия б) легко следует, что как $A(\widetilde{\delta})$, так и $\mathcal{A}(\widetilde{\delta})$ не зависят от выбора петли $\widetilde{\delta}$. Очевидно также следующее утверждение.

Предложение 1.5.Д. *С точностью до сопряжений оператор монодромии $A(\delta)$, определенный таким способом, зависит только от гомотопического типа петли $\delta \in \mathcal{K}$ в многообразии $M \setminus \Sigma$.*

§1.6. Локальная дробная монодромия

Пусть имеется лагранжево расслоение $F\colon M^{2n} \to B^n$ некоторого $2n$-мерного симплектического многообразия $M = M^{2n}$. Пусть Λ^0 — некоторый особый слой этого расслоения, имеющий окрестность U в M, обладающую следующими свойствами. Обозначим $U_0 := U \setminus \Lambda^0$, тогда сужение отображения F на U_0 определяет компактное лагранжево расслоение на U_0, которое будем обозначать той же буквой F. Более того, будем предполагать, что расслоение $F\colon U_0 \to B = B^2$ является лагранжевым компактным расслоением с полупроницаемыми особенностями (см. определение 1.5.В).

Пусть Σ — множество критических точек отображения F, и пусть дана петля $\delta \in \mathcal{K}(U_0 \setminus \Sigma)$, обходящая особый слой Λ^0. Предположим, что имеется непрерывная деформации этой петли в некоторую точку η, лежащую на особом слое Λ^0, причем, кроме финишного момента, вся деформация происходит в $U_0 \setminus \Sigma$.

Определение 1.6.А. В этом случае дробную монодромию, задаваемую петлей δ, будем называть *локальной дробной монодромией*, отвечающей петле δ, обходящей особый слой Λ^0. Точку $\eta \in \Lambda^0$ назовем *центральной точкой* этой локальной монодромии.

Замечание 1.6.Б. Локальная монодромия не определяется лишь расположением центральной точки $\eta \in \Lambda^0$. В самом деле, если взять петлю $\delta \subset U_0 \setminus \Sigma$ стягивающейся по $U_0 \setminus \Sigma$ к неособой точке η слоя Λ^0, но не обходящей этот слой, то δ будет гомотопна точке, лежащей в самом $U_0 \setminus \Sigma$. Отсюда и из определений 1.6.А и 1.5.В следует, что монодромия, отвечающая петле δ, будет тривиальной. Действительно, локальная дробная монодромия зависит лишь от гомотопического типа петли δ в $U_0 \setminus \Sigma$ (см. предложение 1.5.Д), то есть от того, как она обходит слой Λ^0.

§ 1.7. Торические расслоения общего вида с полупроницаемыми особенностями

В приведенных в §§ 1.2–1.6 рассуждениях лагранжевость слоев и симплектичность многообразия расслоения M нигде не используются. Используются лишь следующие свойства расслоения многообразия M на связные компоненты Λ прообразов $F^{-1}(b)$ точек $b \in B$ некоторого отображения $F\colon M \to B$:

а) Каждый слой Λ является тонкой поверхностью и компактом.

б) Объединение всех особых слоев Λ, то есть слоев, пересекающихся с множеством $\Sigma = \Sigma_F$ критических точек отображения F, является тонкой поверхностью в M.

в) Каждый неособый слой Λ, то есть $\Lambda \subset M \setminus \Sigma$, диффеоморфен тору $\mathbf{T}^k$ одной и той же для всех этих слоев размерности k.

Определение 1.7.А. Любое расслоение произвольного, не обязательно симплектического многообразия M на связные компоненты Λ прообразов $F^{-1}(b)$, $b \in B$, удовлетворяющее этим трем условиям, будем называть *торическим расслоением общего вида с особенностями.*

На расслоения такого типа при наложении условий, абсолютно аналогичных приведенным в §§ 1.2–1.6, очевидным образом переносятся следующие определения: определение 1.3.А *протягиваемых вдоль петли* $\delta \subset M$ цикла и элемента группы 1-мерных гомологий, определение 1.4.Б *отображения дробной монодромии* и *ζ-допустимой петли*, определение 1.4.В *оператора и матрицы дробной монодромии*, определение 1.5.В *расслоений с полупроницаемыми особенностями*, *полупроницаемых стенок* $\mathcal{T}$, *отображения дробной монодромии* и ее *матрицы*, которые отвечают произвольной петле $\delta \in \mathcal{K}(M \setminus \Sigma)$, а также определение 1.6.А *локальной дробной монодромии*, соответствующей петле, обходящей существенно особый слой Λ^0.

Замечание 1.7.Б. Условия тонкости а) и б) достаточно естественны в том смысле, что, по-видимому, не выполняются только в сильно вырожденных случаях. Существенным, фактически, является лишь условие в), обеспечивающее локальную тривиальность расслоения области регулярности M_R на торы Λ. Но можно рассмотреть еще более общее понятие особого расслоения с регулярными слоями, диффеоморфными произвольному фиксированному компактному многообразию N. Для этого в условии в) нужно заменить тор $\mathbf{T}^k$ на такое многообразие N. При этом часть приведенных выше определений, связанных с монодромией, очевидным образом переносятся (некоторые с оговорками) на этот более общий случай. Однако такие общие понятия нам далее не понадобятся.

Описанные ниже расслоения лепесткового типа являются простейшим, но полезным примером торического расслоения общего вида с полупроницаемыми особенностями. Расслоения, исследуемые в теореме 2.5, содержащей основной результат статьи, в окрестности полупроницаемой стенки, но вне существенно особого слоя Λ^0, будут именно расслоениями лепесткового типа.

§ 1.8. Лепестковое расслоение

Рассмотрим евклидово 3-мерное пространство $\mathbf{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z), где координатную ось z будем представлять себе вертикальной. Пусть p, q — произвольные натуральные взаимно простые числа, такие, что $p \leqslant q$, и, таким образом, если $p = q$, то $p = q = 1$. Рассмотрим вертикальную плоскость $\{x = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ и на ней функцию $\Phi(y, z)$, которая в полярных координатах (r, ϕ), где

$$r^2 = y^2 + z^2, \quad y = r\cos\phi, \quad z = r\sin\phi,$$

имеет вид

$$\Phi(r, \phi) = -r^q \cos q\phi + r^a, \quad a = 2\left(\left[\frac{q}{2}\right] + 1\right);$$

здесь $[q/2]$ — целая часть числа $q/2$.

Нетрудно показать, что функция $\Phi(y, z)$ — гладкая, а ее линии уровня $\Phi^{-1}(h) \subset \{x = 0\}$ при малых $|h|$ имеют следующий вид. Для значений $q \geqslant 2$ линия $\Phi^{-1}(0)$ имеет единственную особую точку, которая находится в начале координат $\{y = z = 0\}$ плоскости $\{x = 0\}$. При этом линия $\Phi^{-1}(0)$ имеет вид «ромашки с лепестками», то есть состоит из q симметричных и симметрично расположенных по отношению друг к другу «каплеобразных петелек», сходящихся своими остриями к нулевой точке $\{y = z = 0\}$. В случае $q = 0$ линия $\Phi^{-1}(0)$ будет полностью гладкой замкнутой кривой без самопересечений. Кривую такого типа далее будем называть *кольцом*. Линия $\Phi^{-1}(0)$, $q = 1$, тоже проходит через нулевую точку $\{y = z = 0\} = 0 \in \mathbf{R}^3$, и ее тоже будем называть «петелькой».

При $h < 0$ и любом $q \in \mathbf{N}$ линия уровня $\Phi^{-1}(h)$ состоит из q гладких связных компонент, имеющих вид колец, каждое из которых содержится в своей петельке. При $h > 0$ и любом $q \in \mathbf{N}$ линия $\Phi^{-1}(h)$ является одним кольцом, охватывающем объединение $\Phi^{-1}(0)$ этих петелек. В случае $-\varepsilon < h < 0$ линии $\Phi^{-1}(h)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ тривиально расслаивают «внутреннюю» полуокрестность $\{(y, z) \in \mathbf{R}^2 | -\varepsilon < \Phi(y, z) < 0\}$ кривой $\Phi^{-1}(0)$. В случае $h \in (0, \varepsilon)$ эти линии тривиально расслаивают «внешнюю» полуокрестность $\{(y, z) \in \mathbf{R}^2 | 0 < \Phi(y, z) < \varepsilon\}$ при малом $\varepsilon > 0$. При $q \geqslant 2$ при значении $h = 0$ происходит перестройка линий уровня $\Phi^{-1}(h)$, а при $q = 1$ линии $\Phi^{-1}(h)$, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, тривиально расслаивают всю окрестность гладкой кривой $\Phi^{-1}(0)$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ кривые $\Phi^{-1}(h)$, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, содержатся в круге радиуса 1.5 с центром в нуле, то есть в круге $\{r < 1.5\} \subset \{x = 0\}$. Рассмотрим на вертикальной плоскости $\{x = 0\} \subset \mathbf{R}^3$ горизонтальную прямую $\{x = 0, z = -5\}$. Рассмотрим плоскость L, занимающую первоначально положение $\{x = 0\}$, а затем двигающуюся в $\mathbf{R}^3$ следующим образом. Будем поворачивать эту плоскость вокруг прямой $\{x = z + 5 = 0\}$ с угловой скоростью 1, одновременно вращая плоскость L по себе вокруг точки $\{r = 0\}$ с угловой скоростью p/q. Предполагается, что эта точка жестко скреплена с L и поворачивается вместе с L вокруг горизонтальной прямой $\{x = z + 5 = 0\}$.

В результате через время $t = 2\pi$ плоскость L совместится со своим стартовым положением $\{x = 0\}$, повернувшись при этом вокруг точки $\{r = 0\}$ на угол $\frac{2\pi p}{q}$. Линии уровня $\Phi^{-1}(h) \subset \{x = 0\}$, очевидно, инвариантны относительно поворотов плоскости $\{x = 0\}$ вокруг линии $\{r = 0\}$ на угол $\frac{2\pi k}{q}$, где $k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, эти линии тоже совместятся сами с собой после описанного выше перемещения плоскости L за время 2π.

Кривая $\Phi^{-1}(h) \subset \{x = 0\}$ при каждом $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ при таком перемещении плоскости L прочертит за время 2π двумерную компактную поверхность, которую обозначим через $\Lambda = \Lambda_h$. Ясно, что при $h \neq 0$ и малом $|h|$ поверхность Λ_h будет гладким двумерным тором. Если при этом $q \geqslant 2$, то при $h < 0$ тор будет «длинным и худым», а при $h > 0$ — «толстым и коротким». (При $h > 0$ этот тор имеет вид внутренней поверхности нарезного ствола, скрученного в окружность.) При значении $h = 0$ поверхность Λ_h в случае $q \geqslant 2$ имеет особенности на окружности

$$\{y = 0,\, x^2 + (z + 5)^2 = 25\} \subset \mathbf{R}^3, \tag{7}$$

а вне ее является гладкой. (Эта окружность прочерчивается точкой $\{r = 0\}$ при описанном выше движении плоскости L.) Рассмотрим расслоение окрестности $U \subset \mathbf{R}^3$ поверхности Λ_0 на двумерные поверхности Λ_h, $|h| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ мало. Это расслоение задается функцией

$$f\colon U \to (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \text{где} \quad f(\xi) := h, \quad \text{а} \quad \Lambda_h \ni \xi, \quad \xi = (x, y, z).$$

Легко видеть, что функция $f(x, y, z)$ является гладкой. Ясно также, что торы $\Lambda_h = f^{-1}(h)$ тривиально расслаивают каждую из двух открытых полуокрестностей слоя Λ_0, на которые этот слой делит область U. При $q = 1$ слои Λ_h, $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, тривиально расслаивают всю окрестность U.

Определение 1.8.A. Построенное расслоение $f\colon U \to \mathbf{R}$ будем называть *стандартным элементарным расслоением* (p, q)*-лепесткового типа* или, короче, q*-лепесткового типа*. Просто *элементарным расслоением* (p, q)*-лепесткового типа* будем называть любое расслоение f', задаваемое гладкой функцией $f'\colon U' \to \mathbf{R}$ на многообразии U', если будут выполнены следующие условия.

Существует отображение $\phi\colon U \to U'$, задающее гомеоморфизм между U и U' и между слоем $\Lambda_h \subset U$ стандартного элементарного (p, q)-лепесткового расслоения f и слоем $\Lambda'_h = \phi(\Lambda_h)$ данного расслоения f' при каждом $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\Lambda_h = f^{-1}(h)$, $\Lambda'_h = (f')^{-1}(h)$. Предполагается также, что при $q \geqslant 2$ лежащая на Λ_0 окружность (7) критических точек отображения f переходит при гомеомерфизме ϕ в гладкую без самопересечений кривую, целиком состоящую из всех критических точек отображения f'; таким образом, Λ'_0 является особым слоем расслоения f'. При $q = 1$ предполагаем, что f' не имеет критических точек.

Пусть имеется расслоение $\mathcal{F}$ $(3 + l)$-мерного многообразия M, где $l \geqslant 0$, на двумерные компактные слои, и пусть оно обладает следующим свойством. Это расслоение задается гладким отображением $\mathcal{F}\colon M \to \mathbf{R}^{l+1}$, имеющим вид $\mathcal{F} = (A, f)$, где $f\colon M \to \mathbf{R}$ — функция на M, а отображение $A\colon M \to D^l$ не имеет критических точек и отображает M на открытое связное подмножество $D^l \subseteq \mathbf{R}^l$ линейного пространства $\mathbf{R}^l$, а также выполнены следующие условия.

При каждом $u \in D^l$ сужение $f_u := \mathcal{F}|_{A^{-1}(u)}$ задает на $A^{-1}(u)$ элементарное (p, q)-лепестковое расслоение. Кроме того, множество $\Sigma_{\mathcal{F}}$ критических точек отображения $\mathcal{F}$ содержится в $f^{-1}(0)$ и совпадает с объединением $\cup_{u \in D^l} \Sigma_{f_u}$ критических множеств Σ_{f_u} функций f_u.

При $q \geqslant 2$ множество $\Sigma_{\mathcal{F}}$ является $(l+1)$-мерным гладким цилиндром в M, а при $q = 1$ оно пусто.

Определение 1.8.Б. В этом случае $\mathcal{F}$ будем называть *расслоением* (p, q)*-лепесткового типа.*

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 1.8.В. *При $l = 0$ множество лепестковых расслоений совпадает с множеством элементарных лепестковых расслоений. Слой Λ лепесткового расслоения $\mathcal{F}$ является особым тогда и только тогда, когда $\Lambda \subset f^{-1}(0)$, то есть когда Λ является особым слоем элементарного лепесткового расслоения f_u: $\Lambda = f_u^{-1}(0)$, где $u = A(\Lambda)$. Слои-торы Λ лепесткового расслоения тривиально расслаивают каждую из двух связных частей дополнения $M \setminus f^{-1}(0)$, а при $q = 1$ тривиально расслаивают все многообразие M.*

§ 1.9. Перекрученный тор и пинчтор[1]

Вернемся к рассмотренному ранее особому слою Λ_0 стандартного элементарного (p, q)-лепесткового расслоения (см. определение 1.8.А). Напомним, что поверхность Λ_0 прочерчивает кривая $\Phi^{-1}(0)$, лежащая на плоскости L при описанном выше движении этой плоскости.

Определение 1.9.А. При $q \geqslant 2$ поверхность Λ_0 будем называть (p, q)*-перекрученным тором.* Так будем называть и любую гомеоморфную Λ_0 тонкую поверхность Λ', если она двумерная и удовлетворяет следующим условиям. Поверхность Λ' гладкая везде, кроме точек образа Σ' окружности (7) при отображении $\Lambda_0 \to \Lambda'$, устанавливающем гомеоморфизм этих двух поверхностей, причем кривая Σ' является кольцом, то есть гладким подмногообразием в M.

Отметим, что такая поверхность Λ' в каждой точке замкнутой кривой Σ' имеет особенность в том смысле, что в окрестности этой точки Λ' не является многообразием даже класса C^0 непрерывных многообразий. Из приведенных в данном пункте определений, очевидно, вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.9.Б. *Особый слой любого (p, q)-лепесткового расслоения при $q \geqslant 2$ является (p, q)-перекрученным тором.*

Определим теперь пинчтор. Рассмотрим в 3-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z) поверхность Π, задаваемую уравнением $z^2 - (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 = 0$. Она является поверхностью вращения, получаемой вращением вокруг оси z «заостренной петельки», острие которой находится на оси вращения. Эта петелька лежит в полуплоскости $\{y = 0,\ x \geqslant 0\} \subset \mathbf{R}^3$ плоскости $\mathbf{R}^2_{x,z}$ и задается в этой плоскости системой $z^2 - x^2 + x^4 = 0$, $x \geqslant 0$.

Определение 1.9.В. Построенную поверхность Π называют *пинчтором* (см., например, [21]). Гомеоморфную Π тонкую поверхность, гладкую во всех точках кроме одной, тоже будем называть *пинчтором.*

Пинчтор, очевидно, можно следующим образом получить из обычного тора, вложенного в $\mathbf{R}^3$, например, из тора $\mathbf{T}^2$, выделяемого в $\mathbf{R}^3$ уравнением $z^2 + (x^2 + y^2 - 2)^2 = 1$. Нужно стянуть в точку его параллель или меридиан: например, в торе $\mathbf{T}^2$ стянуть в точку минимальную параллель $\{z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3$.

[1] От англ. pinched torus — стянутый тор.

§ 2. Монодромия, определяемая обходом вокруг поверхности с резонансной осцилляторной особой точкой типа 1 : (−1) либо 1 : (−2)

В первой части данного параграфа приведены определения и даны описания классов псевдоинтегрируемых отображений с осцилляторной особой точкой и задаваемых ими лагранжевых расслоений, для которых во второй части параграфа сформулированы утверждения о виде дробной монодромии.

§ 2.1. Точка и поверхность резонансного типа $m_1 : (-m_2)$ псевдоинтегрируемого отображения и лагранжева расслоения

Пусть $\Phi : M^4 \to B^2$ — псевдоинтегрируемое отображение, такое, что имеется точка $\xi^0 \in M^4$, обладающая следующими свойствами. В некоторой окрестности $\mathcal{O}$ этой точки найдутся локальные канонические координаты (p, q), такие, что в этих координатах отображение Φ задается в $\mathcal{O}$ парой функций $F = (F_1, F_2)$, имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} F_1 = F_1^0 + R_1, \\ F_2 = F_2^0 + R_2; \end{cases} \tag{8}$$

здесь

$$\begin{cases} F_1^0 = \dfrac{m_1}{2}\left(p_1^2 + q_1^2\right) - \dfrac{m_2}{2}\left(p_2^2 + q_2^2\right), \\ F_2^0 = \operatorname{Im} X, \quad X = (q_1 + ip_1)^{m_2}(q_2 + ip_2)^{m_1}, \end{cases} \tag{9}$$

где $\operatorname{Im} X$ — мнимая часть комплексного числа X, $i = \sqrt{-1}$, m_1, m_2 — произвольные натуральные взаимно простые числа: $(m_1,\, m_2) = 1$. Предполагается также

$$\deg R_1 \geqslant 3 \quad \text{и} \quad \deg R_2 \geqslant m_1 + m_2 + 1, \tag{10}$$

где через $\deg R_i$ обозначена наименьшая среди степеней ненулевых мономов в разложении функции $R_j = R_j(p, q)$ в ряд Тейлора в нулевой точке $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$.

Определение 2.1.А. Точку ξ^0 в этом случае назовем *особой (осцилляторной) резонансной точкой типа* $m_1 : (-m_2)$ *псевдоинтегрируемого отображения* Φ. Если такое расслоение задает лагранжево расслоение, то точку ξ^0 будем называть *особой (осцилляторной) резонансной точкой типа* $m_1 : (-m_2)$ *этого расслоения.*

Замечание 2.1.Б. Условие на функцию F_2 можно формально ослабить, предположив, что $F_2^0 = \operatorname{Im} X \cdot \cos\theta + \operatorname{Re} X \cdot \sin\theta$, где функция $X = X(p, q)$ та же, что и выше, $\operatorname{Re} X$ — действительная часть числа X, а θ принимает произвольные вещественные значения. Действительно, сделаем линейную каноническую замену переменных

$$\begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_i \\ Q_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\theta}{m_1 + m_2}.$$

Тогда функция F_1^0 не изменится, а функция F_2^0 в новых координатах (P, Q) примет тот же самый вид, что и в (9): $F_2^0 = \operatorname{Im} X(P, Q)$.

Пусть псевдоинтегрируемое отображение F имеет особую точку ξ^0 резонансного типа $m_1 : (-m_2)$, и пусть $\Lambda^0 \ni \xi^0$ — связная компонента прообраза $F^{-1}(b_0)$ точки $b_0 = F(\xi^0)$

этого отображения. Предположим, что Λ^0 является компактом и не содержит других критических точек отображения F кроме ξ^0.

Определение 2.1.В. В этом случае F назовем *псевдоинтегрируемым отображением класса* $\mathcal{I}^{m_1:(-m_2)}$ *с особой резонансной поверхностью* Λ^0 *и особой точкой* $\xi^0 \in \Lambda^0$.

Пусть $F\colon M^4 \to B^2$ — псевдоинтегрируемое отображение класса $\mathcal{I}^{m_1:(-m_2)}$ с особой резонансной поверхностью Λ^0 и особой точкой $\xi^0 \in \Lambda^0$. Пусть F задает компактное лагранжево расслоение на M^4 (см. определение 1.1.Б), причем для каждой точки $b \in B$ прообраз $F^{-1}(b)$ либо пуст, либо состоит лишь из одной связной компоненты, то есть этот прообраз совпадает со слоем расслоения F.

Определение 2.1.Г. При этих предположениях F будем называть *лагранжевым расслоением с особым резонансным слоем* Λ^0 *типа* $m_1 : (-m_2)$ и особой точкой $\xi^0 \in \Lambda^0$ либо *лагранжевым расслоением класса* $\mathcal{P}^{m_1:(-m_2)}$ *с особым резонансным слоем* Λ^0.

Замечание 2.1.Д. В теоремах 2.4 и 2.5 утверждается, что классы $\mathcal{I}^{m_1:(-m_2)}$ и $\mathcal{P}^{m_1:(-m_2)}$ совпадают. Более точно, любое псевдоинтегрируемое отображение F класса $\mathcal{I}^{m_1:(-m_2)}$ с особой резонансной поверхностью Λ^0 и особой точкой $\xi^0 \in \Lambda^0$ задает в некоторой окрестности этой поверхности лагранжево расслоение класса $\mathcal{P}^{m_1:(-m_2)}$ с особым резонансным слоем Λ^0 и особой точкой ξ^0 (см. утверждения 2.4.А и 2.5.А этих теорем). Кроме того, в этих двух теоремах приведены утверждения о виде матрицы монодромии для расслоений классов $\mathcal{P}^{m_1:(-m_2)}$ в случаях $m_1 = m_2 = 1$ и $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и о структуре расслоений этих двух классов.

Замечание 2.1.Е. Рассмотрим класс всех 2-мерных расслоений общего вида произвольного 4-мерного многообразия, то есть вообще всех расслоений, а не только лагранжевых симплектического многообразия (см. определение 1.7.А). И рассмотрим в нем расслоения с особой осцилляторной резонансной точкой типа $m_1 : (-m_2)$, то есть для этой точки определяющие ее функции (F_1, F_2), удовлетворяющие условиям (8) и (10), одновременно задают расслоение в окрестности этой точки. По-видимому, в этом широком классе такие расслоения являются весьма вырожденными. Тем не менее, лагранжевы расслоения с такими особыми точками в неявном виде весьма часто встречаются в приложениях. Объяснить это с формально математических позиций можно следующим образом. В гамильтоновой ситуации такие особые точки ξ^0, видимо, не являются сильно вырожденными. Напротив, расслоения с резонансной осцилляторной точкой будут среди наиболее типичных в классе лагранжевых расслоений $F : M \to B$ с точкой ξ^0, в которой $\operatorname{rang} \partial F = 0$.

§ 2.2. Проверка условий резонансного слоя лагранжева расслоения

Таким образом, согласно теоремам 2.4 и 2.5, для того чтобы показать, что отображение $F\colon M^4 \to B^2$ задает в некоторой окрестности U связной компоненты Λ^0 прообраза $F^{-1}(b_0)$ лагранжево расслоение класса $\mathcal{P}^{m_1:(-m_2)}$ при $m_1 = m_2 = 1$ и $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, достаточно проверить следующие четыре условия. Это вид (8) и (10) функций (F_1, F_2), задающих отображение F в окрестности некоторой точки ξ^0, инволютивность $\{F_1, F_2\} = 0$ в окрестности всей поверхности Λ^0, компактность этой поверхности и, наконец, отсутствие критических точек отображения F на $\Lambda^0 \setminus \{\xi^0\}$.

В данном параграфе на примере линейного симплектического пространства $\mathbf{R}^4_{pq}$ с глобальными каноническими координатами (p, q), на котором задана пара функций $(F_1, F_2) = F$, мы покажем, как можно проверить или обеспечить выполнение по отдельности каждого из этих четырех условий при любых m_1 и m_2, то есть покажем принадлежность отображения F в окрестности поверхности Λ^0 классу $\mathcal{I}^{m_1:(-m_2)}$. В следующем § 2.3 обсуждаются общие ситуации, в которых появляются отображения таких классов. Эти два параграфа можно пропустить без ущерба для дальнейшего чтения.

Проверка условий (8) и (10) достаточно стандартная. Предположим, что вместо (10) функции R_1 и R_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = \Phi(\rho_1, \rho_2, \pi_1, \pi_2), \tag{11}$$

где Φ — произвольная гладкая функция от четырех переменных и

$$\rho_i = \frac{1}{2}\left(p_i^2 + q_i^2\right), \quad i = 1, 2, \quad \pi_1 = \operatorname{Re} X, \quad \pi_2 = \operatorname{Im} X. \tag{12}$$

Предложение 2.2. *При этих предположениях функции F_1 и F_2 находятся в инволюции: $\{F_1, F_2\} = 0$. Наоборот, если $F_1 = F_1^0$ и $\{F_1, F_2\} = 0$, то F_2 зависит только от ρ_1, ρ_2, π_1, π_2, то есть $F_2 = \Psi(\rho_1, \rho_2, \pi_1, \pi_2)$.*

Доказательство. Непосредственным вычислением легко показать, что

$$\{m_1\rho_1 - m_2\rho_2,\, \rho_i\} = 0, \quad \{m_1\rho_1 - m_2\rho_2,\, \pi_i\} = 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда следует прямое утверждение. Из невырожденности симплектической структуры ω^2 следует, что функция на M с ненулевым дифференциалом не может находиться в инволюции с более чем тремя функционально независимыми функциями. Но среди четырех функций ρ_1, ρ_2, π_1, π_2 имеются три функционально независимые, что и доказывает утверждение в обратную сторону.

Полезно провести еще одно доказательство, объясняющее, в частности, откуда взялись эти четыре полинома. Фазовый поток $G = G_{F_1}$ системы с гамильтонианом $F_1 = F_1^0 = m_1\rho_1 - m_2\rho_2$ является периодическим с периодом 2π. При этом G является группой линейных преобразований пространства $\mathbf{R}^4$. Из теории инвариантов таких групп следует, что имеется базис из четырех линейно независимых полиномиальных инвариантов действия группы G — это как раз ρ_1, ρ_2, π_1 и π_2, а все остальные инварианты являются функциями от них (см., например, [18]).

Так как ρ_i и π_i являются инвариантами, то $\{F_1, \rho_i\} = -d\rho_i(X_{F_1}) = 0$, $i = 1, 2$, где X_{F_1} — векторное поле системы с гамильтонианом F_1, и то же самое верно для функций π_1 и π_2. Из этой же выкладки следует, что если функция находится в инволюции с F_1, то она является инвариантом группы G и, следовательно, функционально зависит от этих четырех полиномов. Предложение 2.2 доказано.

Итак, в случае $R_1 = 0$ инволютивность $\{F_1, F_2\} = 0$ эквивалентна условию $F_2 = \Psi(\rho_1, \rho_2, \pi_1, \pi_2)$, где Ψ — произвольная гладкая функция. Что касается компактности поверхности $\Lambda^0 \ni 0$ при условии, что F имеет вид (8), то при любых R_1 и R_2 ее можно обеспечить следующим образом. Нужно взять функцию R_2 стремящейся на бесконечности $|(p, q)| \to \infty$ к одной из двух бесконечностей $\pm\infty$, причем быстрее, чем $|F_2^0|$:

$$\min_{|(p,q)|=r} |R_2| > \max_{|(p,q)|=r} |F_2^0| \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

В этом случае поверхности уровня $F_2^{-1}(h)$ будут ограничены, а следовательно, будут ограничены и будут компактами все связные компоненты $\Lambda \subseteq F^{-1}(m, h)$ всех поверхностей $F^{-1}(m, h)$.

Для того чтобы были компактами поверхность Λ^0 и близлежащие к ней связные компоненты прообразов $F^{-1}(b)$, достаточно лишь, чтобы при некотором $r_0 > 0$

$$\min_{|(p,q)|=r_0} |R_2| > \max_{|(p,q)|=r_0} |F_2^0|.$$

Это обеспечит строгую знакоопределенность функции $F_2 = F_2^0 + R_2$ на сфере $\{|(p,q)| = r_0\} \subset \mathbf{R}^4$, а значит, компактность компонент $\Lambda^0 \subseteq F^{-1}(0) \subset F_2^{-1}(0)$, лежащих в шаре $\{|(p,q)| < r_0\}$. В действительности же строгую знакоопределенность функции F_2 достаточно проверить на пересечении $\{|(p,q)| = r_0\} \cap F_1^{-1}(0)$ одной из таких сфер с нулевой поверхностью уровня $F_1^{-1}(0)$ функции F_1. В случае $R_1 = 0$ поверхность $F_1^{-1}(0)$ имеет вид стандартного трехмерного конуса в четырехмерном пространстве. А если выполнены оба условия (11), то строгую знакоопределенность F_2 достаточно установить на еще меньшем множестве — окружности

$$\{|(p,q)| = r_0\} \cap (F_1^0)^{-1}(0) \cap \{p_2 = 0, q_2 > 0\}$$

при каком-либо $r_0 > 0$. (Этот факт несложно установить, используя вид фазового потока векторного поля $X_{F_1^0}$ (см. лемму 3.3.A), а еще проще получить, сославшись на лемму 3.3.B.)

Осталось выяснить, верно ли, что F не имеет критических точек на $\Lambda^0 \setminus \{\xi^0\}$. Если выполнены условия $\{F_1, F_2\} = 0$ и $F_1 = F_1^0$ (см. (9)), то это можно сделать следующим образом. Предположим для простоты, что прообраз $F^{-1}(0)$ нуля $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$ связен, то есть $\Lambda_0 = F^{-1}(0)$. Обозначим

$$\mathcal{F}_i = F_i|_{V_+}, \quad i = 1, 2, \quad \text{где} \quad V_+ := \{p_2 = 0,\, q_2 > 0\}. \tag{13}$$

Проверим, имеются ли критические точки отображения $\mathcal{F}\colon V_+ \to \mathbf{R}^2_{mh}$ на кривой $\Lambda^0 \cap V_+$, где $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Иначе говоря, нужно выяснить, имеет ли решение система

$$\operatorname{rang} J \leqslant 1, \quad \mathcal{F} = 0, \quad \text{где} \quad J = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial(p_1, q_1, q_2)}.$$

Здесь $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \mathcal{F}(p_1, q_1, q_2)$ — вектор-функция, задающая отображение $\mathcal{F}$ в переменных (p_1, q_1, q_2), индуцированных на полупространстве $V_+ = \{p_2 = 0,\, q_2 > 0\}$ координатами (p,q) в $\mathbf{R}^4_{pq}$, а J — матрица Якоби для этой вектор-функции.

Если эта система не имеет решений, то нужно проверить аналогичную систему, в которой индексы 1 и 2 при переменных (p,q) поменялись местами. Иными словами, полупространство $V_+ = \{p_2 = 0, q_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$, на которое были сужены функции F_1 и F_2, нужно заменить на $\{p_1 = 0, q_1 > 0\}$. Если обе эти системы не имеют решений, то легко показать, что поверхность Λ^0 не содержит критических точек отображения F за исключением нулевой точки $p = q = 0$. И тогда при выполнении условий (8), (9) и (10) на функцию R_2, гарантирующих, что в малой окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ она мала по сравнению с функцией F_2^0, задаваемой формулой (9), эта единственная на Λ^0 критическая для F точка будет резонансной осцилляторной точкой типа $m_1 : (-m_2)$ отображения F.

Достаточность проверки некритичности лишь на полуплоскостях $\{p_i = 0,\, q_i > 0\}$, $i = 1, 2$, связана со следующими обстоятельствами. Пусть, как и выше, $G = G_{F_1}$ — фазовый поток системы с гамильтонианом $F_1 = F_1^0$. При каждом $i = 1, 2$ траектории ν группы G трансверсально пересекают гиперплоскость $\{p_i = 0\}$ везде за исключением точек плоскости $\{p_i = q_i = 0\}$. При этом любая траектория ν кроме неподвижной точки $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ трансверсально пересекает по меньшей мере одно из двух полупространств $\{p_i = 0,\, q_i > 0\}$,

$i = 1, 2$. С другой стороны, если траектория ν группы G трансверсально пересекает одну из гиперплоскостей $\{p_i = 0\}$, $i = 1, 2$, то любая точка их пересечения $\nu \cap \{p_i = 0\}$ будет критической для сужения $F|_{\{p_i=0\}}$ тогда и только тогда, когда отображение F имеет на ν критические точки. В последнем случае вся траектория ν будет состоять из критических точек отображения F. Похожие соображения можно использовать для того, чтобы установить достаточность проверки компактности пересечений поверхностей Λ с V_+ для доказательства компактности самих поверхностей Λ, о чем шла речь чуть выше.

§ 2.3. Связь интегрируемых отображений, имеющих резонансный слой, с действием периодической группы симметрий и с усреднением

В приведенных в предыдущем параграфе примерах при $R_1 = 0$ имелась изоморфная окружности S^1 группа Ли G преобразований симплектического многообразия $M^4 = \mathbf{R}^4_{pq}$, обладающая следующими свойствами. Она являлась фазовым потоком гамильтоновой системы и сохраняла данное псевдоинтегрируемое отображение $F = (F_1, F_2)$. (Гамильтониан системы равен F_1.) Если F задает лагранжево расслоение, то последнее означает, что G сохраняет каждый из слоев этого расслоения, то есть каждая ее орбита ν целиком лежит на одном из слоев расслоения. Такая пуассоново действующая группа G имела неподвижную точку $0 \in \mathbf{R}^4$, в окрестности которой кроме тривиального случая $m_1 = m_2 = 1$ были и другие нерегулярные орбиты ν, но уже слабо нерегулярные. Более точно, там имелись орбиты, отличные от точки, но в окрестности которых расслоение на орбиты группы G не будет тривиальным. Эти орбиты являются концентрическими окружностями, расслаивающими проколотую нулем координатную плоскость L_i, трансверсальную плоскости $\{p_i = q_i = 0\} \subset \mathbf{R}^4$, при каждом $i = 1, 2$, таком, что $m_i \geqslant 2$. Нетрудно видеть, что множество всех таких нерегулярных орбит содержится в множестве Σ_F всех критических точек отображения F (ср. п. 0.3).

Как будет видно из доказательств теорем 2.4 и 2.5, группа G с такими свойствами имеется не только в случае $R_1 = 0$, но и в общем случае любого псевдоинтегрируемого отображения $F = (F_1, F_2)$ класса $\mathcal{I}^{m_1:(-m_2)}$ при $m_1 = m_2 = 1$ и $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. При этом функция Гамильтона, отвечающая потоку G, будет иметь вид $I = f(F_1, F_2)$, где f — гладкая функция от двух переменных, а слабо нерегулярные орбиты потока G лежат на некоторых двумерных поверхностях. Думается, что это верно для любых m_1 и m_2. И по всей видимости, наоборот, наличие изолированной неподвижной точки ξ^0 у периодической пуассоново действующей группы симметрий произвольного псевдоинтегрируемого отображения F, то есть группы, сохраняющей это отображение, является в типичном случае достаточным для того, чтобы эта точка была осцилляторной резонансной (см. определения 2.1.B и 2.1.A и ср. замечание 2.1.E). Но это верно только в том случае, если однопараметрическая пуассонова группа симметрий единственна. Если отображение имеет две такие существенно разные группы симметрий с общей неподвижной точкой, то оно устроено относительно просто и задает расслоение, которое разлагается в прямую сумму двух 1-мерных расслоений, подобных расслоению плоскости $\mathbf{R}^2_{xy}$ на концентрические окружности $x^2 + y^2 = h$, $h \geqslant 0$. В нашем контексте этот случай неинтересен, так как неподвижная точка ξ^0 не будет осцилляторной резонансной и отображение монодромии, отвечающей обходу вокруг слоя $\Lambda^0 \ni \xi^0$, будет тождественным.

Гамильтоновы системы с явной пуассоново действующей группой симметрий G, изоморфной окружности S^1, появляются в приложениях весьма часто. В случае систем с двумя степенями свободы, то есть при $n = 2$, это приводит к интегрируемости системы. Из интегрируемости, по крайней мере в аналитической ситуации, следует наличие в фазовом пространстве M^4 системы лагранжева расслоения, слои которого будут инвариантны относительно действия группы Ли G.

Но нередко такая группа $G \sim S^1$, причем с неподвижной точкой, естественным образом возникает при исследовании неинтегрируемых систем в окрестности особой точки, а именно: она появляется при усреднении систем, описывающих нелинейные колебания с максимальным числом резонансных соотношений между частотами $(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega$ системы, то есть в случае $\omega = ck$, где $c \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, а $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — целочисленный вектор. В интересующем нас случае $n = 2$ функция Гамильтона такой системы имеет вид

$$H = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) + R(p, q).$$

Здесь $\deg R(p, q) \geqslant 3$, а соотношение частот имеет вид $\omega_1 : \omega_2 = m_1 : m_2$ либо $\omega_1 : \omega_2 = m_1 : (-m_2)$, где m_1 и m_2 — произвольные натуральные взаимно простые числа.

Такого сорта колебания чрезвычайно широко представлены в приложениях. Монодромия появляется в незнакоопределенном случае $\omega_1 \cdot \omega_2 < 0$, но для дальнейших рассуждений знак $\omega_1 \cdot \omega_2$ не существенен. Не существенно и значение $n \geqslant 2$; главное, чтобы $\omega = ck$, $k \in \mathbf{Z}^n$, и $\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \ldots \cdot \omega_n \neq 0$. Для приближенного исследования системы с таким гамильтонианом $H = F_0^1 + R$, где

$$F_0^1 = \omega_1\rho_1 + \ldots + \omega_n\rho_n, \tag{14}$$

часто используется весьма простой и эффективный метод усреднения. В исследуемом случае полного резонанса $\omega = ck$, $k \in \mathbf{Z}^n$, этот метод имеет следующий вид. Функция Гамильтона $H = F_0^1 + R$ заменяется на ее усреднение $\overline{H} = F_0^1 + \overline{R}$, задаваемое фазовым потоком G системы с функцией Гамильтона F_0^1, который, очевидно, является периодическим. Усредненная функция $\overline{H}$ будет постоянной на траекториях этого потока, поэтому $\{\overline{H}, F_0^1\} = 0$.

Обоснование метода усреднения состоит в том, что некоторой канонической и близкой к тождественной заменой переменных функция H приводится к виду $H = \overline{H} + \mathcal{R}_4$, где $\deg \mathcal{R}_4 \geqslant 4$. Это простейшее «полунормализующее» преобразование Пуанкаре – Густавсона. В общем случае для любого $s \geqslant 4$, сделав достаточное число таких преобразований, функцию H можно нормализовать с точностью до функции $\mathcal{R}_s$ степени не меньшей s.

Более точно, функцию H такого типа заменой переменных можно привести к виду $H = \overline{H}^s + \mathcal{R}_s$, где $\deg \mathcal{R}_s \geqslant s$, а система с гамильтонианом $\overline{H}^s$ устроена проще исходной. Обычно имеется оптимальное значение s, так как помимо трудностей вычисления $\overline{H}^s$ при больших s окрестность нулевой точки, в которой справедливы такие нормализующие замены, быстро сужается с ростом s, и получаемые приближения перестают иметь смысл. В приложениях обычно используют одно либо два преобразования, нормализующие H с точностью до функций порядка $s = 4$ либо $s = 5$ соответственно. При любом s нормализованная часть $\overline{H}^s$ обладает следующими свойствами: $\{\overline{H}^s, F_0^1\} = 0$ и $\overline{H}^s = F_0^1 + \overline{R}_3^s$, где $\deg \overline{R}_3^s \geqslant 3$, а F_0^1 — квадратичная часть функции $\overline{H}^s$, имеющая в нормализующих координатах тот же самый вид (14), что и квадратичная часть гамильтониана H в исходных координатах.

Таким образом, система с весьма просто строящимся по H гамильтонианом $\overline{H} = \overline{H}^4$ достаточно хорошо приближает исходную систему. Еще лучше ее приближают системы с гамильтонианом $\overline{H}^s$ при $s > 4$. С другой стороны, каждая из этих приближенных систем имеет интеграл F_0^1, такой, что фазовый поток $G = G_{F_0^1}$ задаваемой им гамильтоновой системы будет периодическим. Особая точка $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ исходной системы будет неподвижной точкой этого потока. Ясно, что при $n = 2$ пара функций $\overline{H}^s$ и F_0^1 задает псевдоинтегрируемое отображение, инвариантное относительно действия группы G. Из теории нормальных форм Пуанкаре–Густавсона следует, что при $\omega_1 \cdot \omega_2 < 0$ и $s > m_1 + m_2$ функции $\overline{H}^s$ имеют вид $\overline{H}^s = F_0^1 + c_1\pi_1 + c_2\pi_2 + \ldots$, где F_0^1 отличается от функции, задаваемой первой из формул (9), лишь ненулевым сомножителем. Отсюда и из замечания 2.1.Б следует, что в невырожденном случае, то есть при $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, точка $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ является резонансной особой точкой типа $m_1 : (-m_2)$ этого отображения.

Отметим, кстати, что эти факты наряду с видом (2), (9) и (14) функции F_1 мотивируют употребление термина «резонансная осцилляторная особая точка», который использовался в определении 2.1.А. Отметим также, что случай $\omega_1 \cdot \omega_2 > 0$ встречается в приложениях чаще, чем $\omega_1 \cdot \omega_2 < 0$, потому что описывает существенно более устойчивые системы, да и он более прост. Но так как монодромия возникает лишь в случае $\omega_1 \cdot \omega_2 < 0$, то далее в статье рассматривается только этот случай.

По всей видимости, значение для приложений полных резонансов быстро падает с ростом «порядка» резонанса $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$; это касается и проявлений, в том числе квантовых, которые связаны с монодромией. Действительно, в случае $n = 2$ «резонансные» полиномы типа $c_1\pi_1 + c_2\pi_2$ при любом знаке $\omega_1 \cdot \omega_2$ начинают входить в главную часть функции $\overline{H}^s$ только при $s > m_1 + m_2$. Это, видимо, означает, что нормализованная часть $\overline{H}^s$ существенным образом определяет поведение системы только в чрезвычайно малой при больших $m_1 + m_2$ окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$.

§2.4. Целая монодромия в случае простейшего резонанса $\mathbf{1:(-1)}$

Пусть $F \in \mathcal{I}^{1:(-1)}$ — произвольное заданное на симплектическом многообразии $M = M^4$ псевдоинтегрируемое отображение с особой поверхностью Λ^0 и особой точкой $\xi^0 \in \Lambda^0$ (см. определения 2.1.В и 2.1.А). Это, в частности, означает, что Λ^0 — компакт и поверхность гладкая везде, кроме точки ξ^0, являющейся осцилляторной точкой резонансного типа $1:(-1)$.

Теорема 2.4. *При этих предположениях существует окрестность $U \subseteq M^4$ слоя Λ^0, для которой будут выполнены следующие три утверждения.*

А. Сужение на U отображения F задает компактное лагранжево расслоение F класса $\mathcal{P}^{1:(-1)}$ с особым слоем Λ^0 и особой точкой ξ^0 (см. определение 2.1.Г). *При этом сужение F на $U \setminus \Lambda^0$ будет торическим локально тривиальным; таким образом, $U \setminus \Lambda^0 = U_R$, где U_R — область регулярности расслоения $F|_U$.*

Б. Имеется петля δ, обходящая в $U \setminus \Lambda^0$ особый слой Λ^0, и найдется базис $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ в группе 1-мерных гомологий $H_1(\Lambda^s)$ слоя Λ^s, содержащего выделенную точку ξ^s петли δ, которые обладают следующим свойством. Петля δ определяет локальную монодромию (см. определения 1.6.А и 1.5.В), *причем оператор этой монодромии задается в базисе $\overline{\gamma}$ матрицей*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В. Особый слой Λ^0 является пинчтором (см. определение 1.9.В).

§2.5. Дробная монодромия в случае резонанса 1 : (−2)

Пусть теперь $F\colon M^4 \to B^2$ — произвольное псевдоинтегрируемое отображение класса $F \in \mathcal{I}^{1:(-2)}$ с особой поверхностью Λ^0 и особой точкой $\xi^0 \in \Lambda^0$ (см. определения 2.1.В и 2.1.А). Это, в частности, означает, как и в теореме 2.4, что поверхность Λ^0 является компактом и связной компонентой прообраза точки отображения F и будет гладкой везде, кроме точки ξ^0, являющейся в этом случае осцилляторной точкой резонансного типа $1 : (-2)$.

Теорема 2.5. *При этих предположениях существует окрестность $U \subseteq M^4$ слоя Λ^0, такая, что будут выполнены следующие пять утверждений.*

А. Сужение на U отображения F задает компактное лагранжево расслоение F класса $\mathcal{P}^{1:(-2)}$ с особым слоем Λ^0 и особой резонансной осцилляторной точкой $\xi^0 \in \Lambda^0$ (см. определение 2.1.Г). *В частности, для любой точки $\xi \in U$ прообраз $(F|_U)^{-1}(F(\xi))$ совпадает со слоем расслоения F.*

Далее под F будем понимать, если иное не оговорено специально, сужение отображения F на U либо задаваемое этим сужением расслоение множества U. Через Σ обозначим множество всех критических точек отображения F.

Б. Сужение расслоения F на $U \setminus \Lambda^0$ является расслоением с полупроницаемыми особенностями (см. определение 1.5.В). *При этом найдется петля δ, обходящая слой Λ^0 в $U \setminus (\Lambda^0 \cup \Sigma)$ и стягиваемая по $U \setminus (\Lambda^0 \cup \Sigma)$ к точке на Λ^0, а также найдется базис $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ в группе 1-мерных гомологий $H_1(\Lambda^s)$ слоя Λ^s, где $\Lambda^s \ni \xi^s$, а ξ^s — выделенная точка петли δ, которые обладают следующим свойством. В базисе $\overline{\gamma}$ оператор локальной дробной монодромии, отвечающей обходу по петле δ, задается матрицей*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В. Пусть (F_1, F_2) — пара функций, определенных в окрестности U в M^4 слоя Λ^0 и задающих сужение на U отображения F. Предполагаем также, что в некоторых локальных канонических координатах (p, q), определенных в окрестности $\mathcal{O}$ особой точки $\xi^0 \in \Lambda^0$, эти функции имеют вид (8) *при условии* (10), *где $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Существование такой пары функций гарантирует определение 2.1.А $(1 : (-2))$-резонансной осцилляторной особой точки. Утверждается, что множество критических точек Σ отображения F в U имеет вид двумерного диска, содержащего точку ξ^0 и лежащего в малой окрестности $\mathcal{O}$ этой точки. Этот диск гладкий везде, кроме самой точки ξ^0, в которой он, тем не менее, имеет касательную плоскость. В упомянутых локальных канонических координатах (p, q) эта плоскость совпадает с координатной плоскостью $\{p_1 = q_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$.*

Утверждается также, что множество $\tau := F(\Sigma)$ критических значений отображения F является непрерывной кривой, лежащей в малой окрестности точки $F(\xi^0) \in B^2$ и имеющей вид криволинейного луча, выходящего из этой точки, но не содержащего второй конец. Пусть (m, h) — локальные координаты, задаваемые в окрестности точки $F(\xi^0) \in B^2$ парой функций $F = (F_1, F_2)$, то есть $m = F_1$ и $h = F_2$. Тогда в этих координатах кривая τ выходит из точки $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$ и лежит в левой полуплоскости $m \leqslant 0$ плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$, а также является гладкой за исключением точки $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$, но в этой точке $m = h = 0$ кривая τ имеет касательную, совпадающую с координатной осью m в $\mathbf{R}^2_{mh}$.

Кривая τ обладает также следующим свойством. Обозначим $\breve{\tau} := \tau\setminus\{0\}$, $\mathcal{T} := F^{-1}(\tau)$, $\breve{\mathcal{T}} := F^{-1}(\breve{\tau})$, $\mathcal{T}' := \breve{\mathcal{T}} \setminus \Sigma$. Через U_R обозначим область регулярности расслоения F на U.

Тогда $\mathcal{T} := \check{\mathcal{T}} \cup \Lambda_0$ *и* $U_R = U \setminus F^{-1}(\tau) = U \setminus (\check{\mathcal{T}} \cup \Lambda_0)$, *а замыкание поверхности* $\mathcal{T} \setminus \Lambda_0$ *совпадает с* $\mathcal{T} = U \setminus U_R$. *Поверхность* $\mathcal{T}'$ *является полупроницаемой стенкой, то есть будет связной тонкой гиперповерхностью в* U, *содержащейся в дополнении* $(U \setminus \Lambda_0) \setminus (U_R \cup \Sigma)$ (см. определение 1.5.В). *Помимо того,* $\mathcal{T}'$ *будет единственной такой стенкой, то есть будет совпадать в этим дополнением:* $\mathcal{T}' = (U \setminus \Lambda_0) \setminus (U_R \cup \Sigma)$.

Г. Для любой точки $(m_c, h_c) \in \check{\tau}$ *сужение расслоения* F *на гиперповерхность* $F_1^{-1}(m_c) \subset \subset U$ *при* h, *близких к* h_c, *обладает следующим свойством. Оно является элементарным* $(1,2)$*-лепестковым расслоением* (см. определение 1.8.А). *Более того, в некоторой окрестности тонкой гиперповерхности* $\check{\mathcal{T}} = F^{-1}(\tau) \setminus \Lambda^0$ *расслоение на слои* $\Lambda_{mh} := F^{-1}(m,h)$, $F = (F_1, F_2)$, *будет* $(1,2)$*-лепестковым* (см. определение 1.8.Б). *Все особые слои этого расслоения составляют поверхность* $\check{\mathcal{T}}$. *Кроме того, слои* Λ_{mh}, *лежащие в* $U \setminus \mathcal{T}$, *являются лагранжевыми торами и являются слоями тривиального расслоения дополнения* $U \setminus \mathcal{T}$ *с базой* $F(U) \setminus \tau$.

Д. Прообраз $F^{-1}(m_c, h_c)$ *любой точки* $(m_c, h_c) \in \check{\tau}$, *являющийся, согласно утверждения 2.5.А, слоем расслоения* F *на* U, *будет* $(1,2)$*-перекрученным тором* (см. определение 1.9.А). *Существенно особый слой* $\Lambda^0 = \Lambda_{00}$ *является пинчтором с особой точкой* ξ^0 (см. определение 1.9.В).

§ 2.6. Частный случай $M^4 = \mathbf{R}^4_{pq}$

Посмотрим, как выглядят условия теорем 2.4 и 2.5 в важном частном случае наличия на M^4 глобальных канонических координат, и сравним их с условиями гипотезы, выдвинутой в [21].

Следствие 2.6.А. *Пусть* $D \subset \mathbf{R}^4_{pq}$ — *некоторое открытое множество линейного симплектического пространства* $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^4_{pq}$ *с каноническими координатами* (p, q), *и пусть оно содержит нулевую точку* $0 \in \mathbf{R}^4$, *то есть* $D \ni 0$. *Предположим, что на* D *заданы две функции* $F_i(p, q)$, $i = 1, 2$, *находящиеся в инволюции, то есть* $\{F_1, F_2\} = 0$, *и имеющие вид* (8) *при условии* (10). *Предположим также, что связная компонента* Λ^0 *прообраза* $F^{-1}(0)$, *содержащая точку* $0 \in \mathbf{R}^4$, *является компактом в* $\mathbf{R}^4$ *и за исключением точки* $0 \in \mathbf{R}^4$ *не имеет критических точек отображения* $F\colon D \to \mathbf{R}^2$, *где* $F = (F_1, F_2)$. *Тогда* F *является отображением класса* $\mathcal{I}^{m_1:(-m_2)}$ *с особой резонансной поверхностью* Λ^0 *и особой точкой* $0 \in \mathbf{R}^4$ *и будут выполнены следующие два утверждения.*

А. В случае $m_1 = m_2 = 1$ *(см. (9)) для отображения* F *будут верны все утверждения теоремы 2.4.*

Б. В случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ *для отображения* F *будут верны все утверждения теоремы 2.5.*

В частности, в обоих случаях F *задает в некоторой окрестности* U *поверхности* $\Lambda^0 \subset D$ *компактное лагранжево расслоение, причем* Λ^0 *будет его особым слоем.*

Утверждение 2.6.А является очевидным следствием определений 2.1.А и 2.1.В и теорем 2.4 и 2.5. Проверка условий следствия 2.6.А обсуждалась в § 2.2.

Замечание 2.6.В. Утверждение А можно считать переформулировкой известных фактов (см. в конце п. 4.1 статьи [21] замечание 4.1, ссылающееся на работу [6], и там же гипотезу 1). Следствие 2.6.Б показывает, что справедлива гипотеза 2, приведенная в конце § 4.2 в [21]. Утверждение этой гипотезы состоит в том, что вид (16) матрицы дробной монодромии, вычисленной в [21] для отдельного отображения, задаваемого формулами (1), (2) при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, сохранится для широкого класса псевдоинтегрируемых отображений F линейного симплектического пространства $\mathbf{R}^4_{pq}$.

Условия, накладываемые в этой гипотезе на пару функций $F = (F_1, F_2)$, фактически совпадают с условиями следствия 2.6.Б. Однако в [21] имелось дополнительное условие: должна существовать непрерывная деформация, связывающая исследуемое отображение с достаточно просто устроенным отображением (1), (2) при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, для которого в [21] была посчитана (несколько иными, чем здесь, методами) матрица монодромии. Предполагается, что деформация происходит в наших терминах в классе $\mathcal{I}^{1:(-2)}$ псевдоинтегрируемых отображений областей пространства $\mathbf{R}^4_{pq}$, имеющих в нуле осцилляторную резонансную точку. Но следствие 2.6.Б показывает, что это достаточно существенное условие гомотопности отображения «стандартному» является лишним.

§ 2.7. Неизменность монодромии при отображении, сохраняющем слои расслоений

Следствие 2.7.А. *Пусть дано расслоение общего вида произвольного не обязательно симплектического 4-мерного многообразия M^4, задаваемое некоторым отображением $F\colon M^4 \to B^2$, $\dim B^2 = 2$, и пусть Σ — множество критических точек этого отображения. Предположим, что найдется лагранжево расслоение симплектического 4-мерного многообразия M^4_0, задаваемое некоторым отображением $F_0\colon M^4_0 \to B^2$, и это расслоение класса $\mathcal{P}^{1:(-1)}$ либо $\mathcal{P}^{1:(-2)}$ с особой точкой ξ^0* (см. определение 2.1.Г). *Предположим также, что существует отображение $\phi\colon M^4_0 \to M^4$, задающее диффеоморфизм этих двух многообразий и переводящее F в F_0, то есть $F \circ \phi = F_0$, а значит, переводящее слои расслоения F_0 в слои расслоения F. Обозначим через $\Lambda^0_0 \ni \xi^0$ особый слой расслоения F_0.*

Тогда существует окрестность U слоя $\Lambda^0 := \phi(\Lambda^0_0)$, в которой расслоение F будет торическим с полупроницаемыми особенностями (см. определение 1.7.А). *Помимо того, для любой петли δ, обходящей в $U \setminus (\Lambda^0 \cup \Sigma)$ слой Λ^0, при соответствующей ориентации этой петли найдется базис в группе гомологий $H_1(\Lambda^s)$ слоя Λ^s, содержащего выделенную точку ξ^s петли δ, который обладает следующим свойством. Матрица монодромии, отвечающая обходу вдоль петли δ и этому базису, в случае $m_1 = m_2 = 1$ имеет вид* (15), *а в случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ — вид* (16).

Это утверждение легко вытекает из следующего (более общего, но очевидного) факта.

Предложение 2.7.Б. *Пусть на двух не обязательно симплектических многообразиях M_1 и M_2 заданы произвольные торические расслоения с особенностями, и пусть $F_i\colon M_i \to B$, $i = 1, 2$, — отображения, задающие эти два расслоения* (см. определение 1.7.А). *Предположим, что существует отображение $\phi\colon M_1 \to M_2$, устанавливающее диффеоморфизм этих двух многообразий и переводящее F_2 в F_1, то есть $F_2 \circ \phi = F_1$, и, следовательно, переводящее слои расслоения F_1 в слои расслоения F_2. Предположим, что на M_1 можно геометрически, инвариантным образом, то есть не используя локальные координаты, корректно определить монодромию, задаваемую обходом вдоль некоторой петли δ_1.*

Тогда того же типа монодромию, отвечающую обходу вдоль петли $\delta_2 := \phi(\delta_1)$ с выделенной точкой $\xi^s_2 := \phi(\xi^s_1)$, можно определить и для расслоения F_2 многообразия M_2, где ξ^s_1 — выделенная точка петли δ_1. При согласованном с помощью отображения ϕ выборе базисов $\overline{\gamma}_i$ в группах $H_1(\Lambda^s_i)$, $i = 1, 2$, матрица $\mathcal{A}_2$ этой монодромии будет совпадать с матрицей $\mathcal{A}_1$, отвечающей обходу по петле δ_1: $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$. Здесь $\Lambda^s_1 \ni \xi^s_1$, а $\Lambda^s_2 := \phi(\Lambda^s_1)$ — стартовые слои расслоений F_1 и F_2 соответственно.

§ 3. Структуры некоторых расслоений и векторного поля, связанных с отображением $\boldsymbol{F}$ в окрестности существенно особой точки $\boldsymbol{\xi^0}$

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теорем 2.4 и 2.5, причем основные рассуждения будут проводиться одновременно для обеих теорем. Далее в §§ 3–8 будем рассматривать, если иное не оговорено специально, сразу три случая: $m_1 = m_2 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_1 = 2$, $m_2 = 1$.

Данный § 3 является базисным для доказательства теорем 2.4 и 2.5. В нем определены расслоения и векторное поле, тем или иным образом связанные с отображением F в окрестности $\mathcal{O}$ существенно особой точки ξ^0. Приведены также геометрические описания этих расслоений и поля вместе с описанием соответствующего ему фазового потока. Эта геометрия опирается на анализ, который почти весь сосредоточен в § 3. Основные события происходят как раз в $\mathcal{O}$, и доказательства теорем 2.4 и 2.5 будут опираться, прежде всего, на эти описания.

В окрестности $\mathcal{O}$ точки ξ^0 заданы канонические координаты (p, q), в которых F имеет вид $F = (F_1, F_2)$, где F_1 и F_2 приведены в условиях теорем 2.4 и 2.5 (см. (8), (9) и (10)). И в данном параграфе под $F = (F_1, F_2)$ будет везде пониматься эта пара функций, определенных в $\mathcal{O}$. Рассмотрение начинается с исследования в §§ 3.1–3.3 невозмущенного случая, то есть отображения $F^0 = (F_1^0, F_2^0)$, $F^0\colon \mathbf{R}^4_{pq} \to \mathbf{R}^2$, являющегося главной частью отображения F в окрестности точки ξ^0 (см. (9)). В этих пунктах перечислены основные свойства невозмущенных расслоений, то есть расслоений, отвечающих функциям F_1^0 и F_2^0, а также свойства гамильтонова векторного поля, задаваемого функцией F_1^0. Далее в § 3 показано, что в исходном, «возмущенном» случае в достаточно малой окрестности $\mathcal{O}$ точки ξ^0 многие принципиальные геометрические свойства рассматриваемых расслоений и векторного поля сохранятся, а сами эти объекты при наложении возмущения лишь подвергнутся малой деформации.

§ 3.1. Основные свойства расслоений на гиперплоскости $\{p_2 = 0\} \subset \mathrm{R}^4_{pq}$

Обозначим

$$\psi_i := F_i^0|_{\{p_2=0\}}, \quad i = 1, 2, \quad \text{и} \quad \psi = (\psi_1, \psi_2).$$

Рассмотрим два расслоения 3-мерного линейного пространства $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2} = \{p_2 = 0\}$ поверхностями $\psi_1^{-1}(m)$, $m \in \mathbf{R}$, и поверхностями $\psi_2^{-1}(h)$, $h \in \mathbf{R}$, а также расслоение на кривые $\psi^{-1}(m, h)$, $(m, h) \in \mathbf{R}^2$.

Лемма 3.1.A. *Все три расслоения пространства* $\mathbf{R}^3$ *сохраняются при гомотетиях*

$$\mathcal{H}_\mu\colon (p_1, q_1, q_2) \mapsto (\mu p_1, \mu q_1, \mu q_2), \quad \mu \neq 0. \tag{17}$$

Лемма 3.1.A является очевидным следствием однородности обоих полиномов $\psi_i(p_1, q_1, q_2)$, $i = 1, 2$. Из вида квадратичной формы

$$\psi_1 = \frac{m_1}{2}\left(p_1^2 + q_1^2\right) - \frac{m_2}{2}\, q_2^2 \tag{18}$$

получаем следующее утверждение.

Лемма 3.1.Б. *Поверхности $\psi_1^{-1}(m)$ при $m>0$ являются однополостными гиперболоидами, при $m<0$ — двуполостными, а при $m=0$ — разделяющим их конусом. Все они являются поверхностями вращения вокруг оси q_2 евклидова пространства $\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$.*

Эту ось далее будем представлять себе вертикальной.

Лемма 3.1.В. *Поверхность $\psi_2^{-1}(0)\subset\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ при $m_2=1$ является объединением двух плоскостей $\{q_2=0\}$ и $\{p_1=0\}$, а при $m_2=2$ — трех плоскостей, две из которых те же, что и выше, и к ним добавляется плоскость $\{q_1=0\}$, то есть $\psi_2^{-1}(0)$ в этом случае является объединением всех трех координатных плоскостей в $\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$.*

При $m_2=1$ и $h\neq0$ поверхности $\psi_2^{-1}(h)$ являются «двуполостными цилиндрами», а при $m_2=2$, $h\neq0$ — «четырехполостными гиперболоидами». В последнем случае полости гиперболоидов $\psi_2^{-1}(h)$, $h\neq0$, тривиально расслаивают каждую из 8 связных компонент дополнения $\mathbf{R}^3\setminus\psi_2^{-1}(0)$. В каждом из этих двух случаев поверхности $\psi_2^{-1}(h)$ при $h\to0$ стремятся к $\psi_2^{-1}(0)$, являющейся объединением m_2+1 плоскости.

Доказательство леммы 3.1.В. Из (9) следует, что

$$\begin{aligned}&\psi_2=p_1q_2^{m_1} && \text{при}\quad m_2=1,\\ &\psi_2=2p_1q_1q_2 && \text{при}\quad m_1=1,\quad m_2=2,\end{aligned}\tag{19}$$

откуда получаем утверждение леммы о виде поверхности уровня $\psi_2^{-1}(0)$. Пересечение этой поверхности со сферой $S:=\{p_1^2+q_1^2+q_2^2=1\}$ делит эту сферу на $4m_2$ открытых связных частей. Связные компоненты линий $\psi_2^{-1}(h)\cap S$ являются, очевидно, замкнутыми кривыми, тривиально расслаивающими каждую такую связную часть везде, кроме единственной точки нерегулярности, к которой эти кривые концентрически стягиваются. Отсюда и из инвариантности поверхностей $\psi_2^{-1}(h)$ относительно гомотетий (17), а также используя отсутствие критических точек на этих поверхностях при $h\neq0$ (см. (19)), получаем остальные утверждения леммы 3.1.В.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}V_+:=\{(p,q)\in\mathbf{R}^4|p_2=0,\,q_2>0\},\quad \mathcal{F}^0:=\psi|_{\{q_2>0\}}=F^0|_{V_+},\\ \mathcal{F}^0_i:=\psi_i|_{\{q_2>0\}},\quad i=1,2,\quad \chi^0_{mh}:=(\mathcal{F}^0)^{-1}(m,h),\end{gathered}\tag{20}$$

$$\tau_-:=\{(m,h)\in\mathbf{R}^2|h=0,m<0\},\quad \tau_+:=\{(m,h)\in\mathbf{R}^2|h=0,m>0\},$$

$$\theta^0:=(\mathcal{F}^0)^{-1}(\tau_-\cup\{0\}),\tag{21}$$

$$k:=\{(p_1,q_1,q_2)\in\mathbf{R}^3|m_1(p_1^2+q_1^2)<m_2q_2^2,\,q_2>0\},\tag{22}$$

$$c:=(\mathcal{F}^0_1)^{-1}(0).$$

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3.1.Г. *Множество k имеет вид «полного» открытого конуса, лежащего в полупространстве V_+. Границей этого конуса в V_+ является обычный 2-мерный конус без вершины $c=\partial k$. Множество θ^0 имеет вид пересечения $\overline{k}\cap(\mathcal{F}^0_2)^{-1}(0)$ замыкания $\overline{k}$ в V_+ полного конуса k с нулевой поверхностью уровня $(\mathcal{F}^0_2)^{-1}(0)$, то есть в случае $m_2=1$ с полуплоскостью $\{p_1=0,\,q_2>0\}\subset\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$, а в случае $m_2=2$ — с объединением полуплоскостей $\{p_1=0,\,q_2>0\}$ и $\{q_1=0,\,q_2>0\}$. В обоих случаях θ^0 делит $\overline{k}$ на $2m_2$ частей. Границей множества θ^0 на поверхности $(\mathcal{F}^0_2)^{-1}(0)$ является линия $\chi^0_{00}:=c\cap(\mathcal{F}^0_2)^{-1}(0)$. Эта линия имеет вид $2m_2$ «открытых» прямолинейных лучей, симметрично лежащих на конусе $c\cup\{0\}$ и выходящих из вершины $\{0\}$ этого замыкания в $\{p_2=0\}$ конуса c, но не содержащих эту вершину.*

Лемма 3.1.Д. *При всех рассматриваемых m_1 и m_2 функция $\mathcal{F}_1^0$ регулярная, то есть не имеет критических точек на всей своей области определения V_+. При $m_2 = 1$ функция $\mathcal{F}_2^0$ и отображение $\mathcal{F}^0$ также регулярны во всем V_+. При $m_2 = 2$ $\mathcal{F}_2^0$ и $\mathcal{F}^0$ регулярны везде кроме вертикального луча $\{p_1 = p_2 = q_1 = 0,\ q_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$, который обозначим через l^0, $l^0 \subset V_+$. Каждая точка координатной полуоси l^0 является критической для $\mathcal{F}_2^0$ и $\mathcal{F}^0$ при $m_2 = 2$.*

Как следствие теоремы о неявной функции получаем, что все три расслоения со слоями $(\mathcal{F}_1^0)^{-1}(m)$, $(\mathcal{F}_2^0)^{-1}(h)$ и $(\mathcal{F}^0)^{-1}(m, h)$ регулярны в области V_j при $j = m_2$, где $V_1 := V_+$ и $V_2 := V_+ \setminus l^0$, а расслоение на поверхности $(\mathcal{F}_1^0)^{-1}(m)$ регулярно при любом $m_2 = 1, 2$ во всем V_+ (ср. с леммой 3.1.Б). *Под регулярностью расслоения здесь понимается, что его слои тривиально расслаивают достаточно малую окрестность любой точки, то есть определяют по меньшей мере регулярное слоение.*

Доказательство леммы 3.1.Д. Рассмотрим матрицу Якоби

$$J := \frac{\partial(\mathcal{F}_1^0, \mathcal{F}_2^0)}{\partial(p_1, q_1, q_2)}.$$

При $m_2 = 1$ имеем

$$J_1 = \begin{pmatrix} m_1 p_1 & m_1 q_1 & -q_2 \\ q_2^{m_1} & 0 & m_1 p_1 q_2^{m_1 - 1} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

При $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ имеем

$$J_2 = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & -2q_2 \\ 2q_1 q_2 & 2q_2 p_1 & 2q_1 p_1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Критичность точки (p_1, q_1, q_2) означает, что в этой точке $\operatorname{rang} J_j < 2$, то есть все миноры второго порядка матрицы J_j равны нулю. В случае $m_2 = 1$ один из этих миноров равен $(m_1^2 p_1^2 + q_2^2) q_2^{m_1 - 1}$ (см. (23)). Так как $q_2 > 0$ на V_+, то этот минор не обращается в нуль, и, следовательно, во всем V_+ отображение $\mathcal{F}^0$ и функции $\mathcal{F}_i^0$, $i = 1, 2$, критических точек не имеют.

Если $m_2 = 2$, $m_1 = 1$, то из условия критичности следует $q_2(p_1^2 - q_1^2) = q_1(p_1^2 + 2q_2^2) = 0$. Так как $q_2 > 0$, то эта система эквивалентна системе $p_1 = q_1 = 0$. И все точки, лежащие на луче $\{p_1 = q_1 = 0,\ q_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2}$, являются критическими для $\mathcal{F}^0$ и $\mathcal{F}_2^0$, так как нижняя строка матрицы J_2 в этих точках будет нулевой. Таким образом, получаем локальную регулярность в V_j, $j = m_2$, всех трех рассматриваемых расслоений. Отсутствие критических точек у функции $\mathcal{F}_1^0$ при любом $m_2 = 1, 2$ очевидно. Лемма 3.1.Д доказана.

§ 3.2. Вид расслоений поверхностей $(\mathcal{F}_1^0)^{-1}(m)$ линиями χ^0_{mh}. Тривиальность расслоения этими линиями некоторых подмножеств полупространства $V_+ \subset \mathrm{R}^3_{p_1 q_1 q_2}$

Нам будет удобно использовать еще более общее понятие расслоения.

Определение 3.2.0. Пусть $F\colon M \to B$ — некоторое отображение из одного произвольного многообразия в другое. Тогда разбиение M на прообразы $F^{-1}(b)$ точек $b \in B$ либо на связные компоненты этих прообразов будем называть *расслоением в слабом смысле*, или еще *разбиением*, задаваемым отображением F, и будем обозначать той же буквой F. Элементы Λ этого разбиения будем называть его *поверхностями* или *слоями*.

Обозначим $\widehat{\Phi}^0_m := \mathcal{F}^0_2|_{\mathcal{P}_m}$, где $\mathcal{P}_m := (\mathcal{F}^0_1)^{-1}(m)$. Сужения функций p_1 и q_1 на поверхность $\mathcal{P}_m$ определяют координаты на этой поверхности (см. лемму 3.1.Б), которые будем обозначать тоже через (p_1, q_1). Функцию $\widehat{\Phi}^0_m$, выраженную через эти переменные, обозначим через $\Phi^0_m = \Phi^0_m(p_1, q_1)$.

Лемма 3.2.А. *Функции $\Phi^0_m(p_1, q_1)$ при любом $m \in \mathbf{R}$ определены корректно и гладко зависят от (m, p_1, q_1). Линии χ^0_{mh} совпадают с линиями уровня функции $\widehat{\Phi}^0_m$: $\chi^0_{mh} = (\widehat{\Phi}^0_m)^{-1}(h)$. Иными словами, эти линии выделяются на поверхности $(\mathcal{F}^0_1)^{-1}(m)$ уравнениями*

$$\Phi^0_m(p_1, q_1) = h. \tag{25}$$

Кроме того, любая точка $(p_1, q_1, q_2) \in V_+$ является критической точкой отображения $\mathcal{F}^0\colon V_+ \to \mathbf{R}^2_{mh}$ в том и только том случае, когда точка $(p_1, q_1) \in \mathbf{R}^2$ будет критической точкой функции $\Phi^0_m(p_1, q_1)$, где $m = \mathcal{F}^0_1(p_1, q_1, q_2)$.

Доказательство этой и остальных лемм данного параграфа, кроме леммы 3.2.Ж, приведены в пп. 3.2.Е. Обозначим

$$\mathcal{M} := \sqrt{-\frac{8m}{m_2}} \quad \text{и} \quad B_r := \{p_1^2 + q_1^2 < r^2\} \subset \mathbf{R}^2_{p_1q_1}. \tag{26}$$

Лемма 3.2.Б. *Пусть $m_2 = 2$, тогда при достаточно малых $\alpha > 0$ и любых $m \in (-2, 0)$ линии $(\Phi^0_m)^{-1}(h)$ в круге B_r при $r^2 = -\alpha^2 m$ будут близки к линиям $\{\mathcal{M}p_1q_1 = h\} \subset \mathbf{R}^2_{p_1q_1}$. Более точно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$, такое, что расстояние в метрике C^1 между линиями*

$$(\Phi^0_m)^{-1}(h) \cap B_r \quad \textit{и} \quad \{\mathcal{M}p_1q_1 = h\} \cap B_r \tag{27}$$

при $r^2 = -\alpha^2 m$ будет не больше ε. А в метрике C^0 расстояние между этими линиями будет не больше $\varepsilon\sqrt{-\varepsilon m}$ (см. определение 1.5.А). *Здесь имеются в виду те значения h, при которых линия $(\Phi^0_m)^{-1}(h)$ пересекает круг $B_{r/2}$. Аналогичное утверждение верно и в случае $m_2 = 1$, а именно: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha > 0$, такое, что расстояние между кривыми*

$$(\Phi^0_m)^{-1}(h) \cap B_r \quad \textit{и} \quad \left\{p_1 = \left(\frac{2}{\mathcal{M}}\right)^{m_1} h\right\} \cap B_r$$

при $r^2 = -\alpha^2 m$ и любом $m \in (-2, 0)$ для тех же значений h будет в метрике C^1 не больше ε, а в метрике C^0 — не больше $\varepsilon\sqrt{-\varepsilon m}$.

Лемма 3.2.В. *При $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и любом $m < 0$ структура расслоения всей плоскости $\mathbf{R}^2_{p_1q_1}$ на линии $(\Phi^0_m)^{-1}(h)$, $h \in \mathbf{R}$, совпадает с «седлообразной» структурой расслоения на линии $\{\mathcal{M}p_1q_1 = h\}$* (ср. (27)). *Точнее, существует гомотопия $\Phi^0_{m\kappa}$, $\kappa \in [0, 1]$, функции $\mathcal{M}p_1q_1 = \Phi^0_{m\kappa}|_{\kappa=0}$, такая, что $\Phi^0_{m\kappa}|_{\kappa=1} = \Phi^0_m$, причем будут выполнены следующие условия. Линии $(\Phi^0_{m\kappa})^{-1}(h)$ при $h = 0$ не меняются при изменении $\kappa \in [0, 1]$ и совпадают с объединением $\{p_1 = 0\} \cap \{q_1 = 0\}$ координатных осей. При $h \neq 0$ эти линии состоят из двух связных гладких кривых, гладко зависящих от тройки (κ, m, h) и при фиксированных κ и m тривиально расслаивающих каждый из четырех открытых квадрантов, на которые координатный крест $\{p_1q_1 = 0\}$ делит плоскость $\mathbf{R}^2_{p_1q_1}$. В качестве такой деформации можно взять*

$$\Phi^0_{m\kappa} = 2p_1q_1\sqrt{-\frac{2m}{m_2} + \kappa\frac{m_1}{m_2}\left(p_1^2 + q_1^2\right)}. \tag{28}$$

При $\kappa = 1$ *получаем* Φ^0_m*:*

$$\Phi^0_m = \Phi^0_{m1} = 2p_1q_1\sqrt{-\frac{2m}{m_2} + \frac{m_1}{m_2}\left(p_1^2 + q_1^2\right)} = \mathcal{M}p_1q_1\sqrt{1 + \frac{4m_1}{\mathcal{M}^2 m_2}\left(p_1^2 + q_1^2\right)}; \qquad (29)$$

при $\kappa = 0$ *—*

$$\Phi^0_{m0} = 2\sqrt{-\frac{2m}{m_2}}\,p_1q_1 = \mathcal{M}p_1q_1.$$

Все то же самое верно и в случае $m_2 = 1$*, только предельное множество* $\{\mathcal{M}p_1q_1 = h\}$ *нужно заменить на* $\{\mathcal{M}'p_1 = h\}$*, где* $M' := (\frac{-2m}{m_2})^{\frac{m_1}{2}}$ (см. (18) и (19)). *В этом случае расслоение* $\mathbf{R}^2_{p_1q_1}$ *на кривые* $(\Phi^0_m)^{-1}(h)$*, равно как и расслоение на прямые* $\{\mathcal{M}'p_1 = h\}$ *не имеют особых слоев, и оба расслоения являются тривиальными.*

Обозначим

$$\mathcal{D} = \{(m, h, \kappa) \in \mathbf{R}^3 | m < 0, \quad h \in \mathbf{R},\, \kappa \in [0, 1]\}.$$

Лемма 3.2.Г. *При* $m_2 = 1$ *и любом* $(m, h, \kappa) \in \mathcal{D}$ *линия уровня* $(\Phi^0_{m\kappa})^{-1}(h)$ *функции* (28) *имеет вид графика четной функции вида* $p_1 = g_{mh\kappa}(q_1)$, $q_1 \in \mathbf{R}$*. Такой же вид графика функции того же типа, определенной на всей кривой* $\mathbf{R}_{q_1}$*, эти линии имеют и при* $m = 0$*, а точнее, при любом*

$$(m, h, \kappa) \in \partial\mathcal{D}, \quad \partial\mathcal{D} = \{m = 0,\, h \in \mathbf{R},\, \kappa \in [0, 1]\},$$

включая и линию $(\Phi^0_{0\kappa})^{-1}(0)$*, если ее дополнить нулевой точкой* $p_1 = q_1 = 0$*. Кроме того, функция* $g(q_1, m, h, \kappa) := g_{mh\kappa}(q_1)$ *является гладкой по совокупности всех своих аргументов* (q_1, m, h, κ) *в областях* $\mathbf{R}_{q_1} \times \mathcal{D}$ *и* $(\mathbf{R}_{q_1} \times \overline{\mathcal{D}}) \setminus \{h = 0\}$*, а также в* $\{q_1 \in \mathbf{R} | q_1 \neq 0\} \times \overline{\mathcal{D}}$*, где* $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$*.*

При $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ *и при любом* $(m, h, \kappa) \in \overline{\mathcal{D}}$ *линия* $((\Phi^0_{m\kappa})^{-1}(h)) \setminus \{(p_1, q_1) \in \mathbf{R}^2 | q_1 = 0\}$ *имеет вид графика нечетной функции вида* $p_1 = g_{mh\kappa}(q_1)$, $q_1 \neq 0$*. При этом функция* $g(q_1, m, h, \kappa)$*, определенная выше, является гладкой в прямом произведении* $\{q_1 > 0\} \times \overline{\mathcal{D}}$*. Последнее утверждение останется верным, если в нем луч* $\{q_1 > 0\}$ *заменить на луч* $\{q_1 < 0\}$*.*

Аналогичные утверждения при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ *будут верны, если переменные* p_1 *и* q_1 *поменять местами, то есть кривая* $(\Phi^0_{m\kappa})^{-1}(h) \cap \{p_1 \neq 0\}$*, где* $m \leqslant 0$ *и* $\kappa \in [0, 1]$*, является графиком нечетной функции вида* $q_1 = \widetilde{g}_{mh\kappa}(p_1)$*, определенной и гладкой вне точки* $p_1 = 0$*, и так далее. Для этих значений параметров* m *и* κ *обе функции* $g_{mh\kappa}$ *и* $\widetilde{g}_{mh\kappa}$ *при* $h > 0$ *— будут строго убывающими, при* $h < 0$ *— строго возрастающими, а при* $h = 0$ *будут тождественно равны нулю.*

Лемма 3.2.Д. *Аналогичное представленному в лемме 3.2.Г утверждение верно и в случае* $m > 0$*. Ситуация здесь немного сложнее, чем при* $m < 0$*, так как функция* $\Phi^0_{m\kappa}(p_1, q_1)$ *определена не на всей плоскости* $\mathbf{R}^2_{p_1q_1}$*, а в кольце* $\mathbf{R}^2_{p_1q_1} \setminus \overline{B}_s$*, то есть во внешности замкнутого круга* $\overline{B}_s$ *радиуса* s*, а* $s = \sqrt{\frac{2m}{\kappa m_1}}$ (см. (28)). *Но это единственное отличие; в целом, верны все утверждения леммы 3.2.Г с учетом разницы в виде области определения функции* $\Phi^0_{m\kappa}$*. В частности, это утверждение о том, что линия* $(\Phi^0_{m\kappa})^{-1}(0)$*, лежащая на координатном кресте* $\{p_1q_1 = 0\}$*, делит кольцо* $\mathbf{R}^2_{p_1q_1} \setminus \overline{B}_s$ *на* $2m_2$ *частей, а также утверждение о представимости линий* $(\Phi^0_{m\kappa})^{-1}(h)$ *при* $m_2 = 1$ *и линий*

$(\Phi^0_{m\kappa})^{-1}(h) \cap \{q_1 \neq 0\}$ *при* $m_2 = 2$ *в виде графиков гладких функций типа* $p_1 = \phi_{mh\kappa}(q_1)$, *гладко зависящих при* $h \neq 0$ *от* m, h, κ *и четных при* $m_2 = 1$, *а при* $m_2 = 2$ — *монотонных и нечетных, а кроме того, при* $m_2 = 2$ *аналогичное утверждение для функций, соответствующих координатной оси* p_1 *вместо* q_1.

3.2.Е. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 3.2.А–Д. В этих доказательствах опущен верхний индекс «0» у $\mathcal{F}^0_i$, $\widehat{\Phi}^0_m$, Φ^0_m и $\Phi^0_{m\kappa}$.

Доказательство леммы 3.2.А. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\,\mathcal{F}_1(p_1, q_1, q_2) \neq 0, \quad (p_1, q_1, q_2) \in V_+, \text{ то есть при } q_2 > 0. \tag{30}$$

Используя этот факт и теорему о неявной функции, легко получаем, что, во-первых, при любом $m \in \mathbf{R}$ поверхность уровня $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ имеет вид однозначной гладкой функции вида $q_2 = q_{2,m}(p_1, q_1)$ (см. также лемму 3.1.Б). Во-вторых, что координаты (p_1, q_1, q_2) можно заменить на (m, p_1, q_1), где $m = \mathcal{F}_1(p_1, q_1, q_2)$. Отсюда следует корректность определения и гладкость функций $\Phi_m = \Phi_m(p_1, q_1)$ и их гладкая зависимость от (m, p_1, q_1), а также следует, что критическая точка отображения $\mathcal{F}$ является критической точкой функции $\widehat{\Phi}_m$, а значит, и функции $\Phi_m(p_1, q_1) = \Phi^0_m(p_1, q_1)$; верно и обратное утверждение.

Доказательство леммы 3.2.Б. Исключив q_2 из уравнения $\mathcal{F}_1(p_1, q_1, q_2) = m$ (см. (18)), получаем

$$q_2 = \frac{\mathcal{M}}{2}\sqrt{1 - \frac{m_1}{2m}\left(p_1^2 + q_1^2\right)}, \quad \mathcal{M} = 2\sqrt{\frac{-2m}{m_2}} \tag{31}$$

(см. (26)). Подставляя полученное выражение $q_2(p_1, q_1) = q_{2,m}(p_1, q_1)$ вместо q_2 в $\mathcal{F}_2(p_1, q_1, q_2)$ (см. (19)), получаем

$$\begin{aligned} &\Phi_m = p_1 q_2^{m_1}(p_1, q_1) && \text{при} \quad m_2 = 1, \\ &\Phi_m = 2p_1 q_1 q_2(p_1, q_1) && \text{при} \quad m_1 = 1,\, m_2 = 2. \end{aligned} \tag{32}$$

Представим в случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ функцию Φ_m в виде

$$\Phi_m = \mathcal{M} p_1 q_1 + \mathcal{R}_m(p_1, q_1). \tag{33}$$

Сравним градиенты обоих слагаемых из правой части этого равенства. Из (31) и (32) следует, что функция Φ_m имеет вид (29). Отсюда легко получаем, что найдутся константы $C_1 > 0$ и $\alpha_0 > 0$, такие, что при любом $\alpha \in (0, \alpha_0)$ в круге $B_{\alpha\sqrt{-m}}$ верно неравенство $|\nabla R_m| \leqslant C_1\alpha^2 |\nabla(\mathcal{M} p_1 q_1)|$. Взяв $\alpha(\varepsilon) = \min\left[\frac{\alpha_0}{2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2C_1}}\right]$, получаем, что в каждой точке круга $B_{\alpha\sqrt{-m}}$ угол между линиями $(\Phi^0_m)^{-1}(h)$ и $\{\mathcal{M} p_1 q_1 = h'\}$, проходящими через эту точку, будет не больше $\varepsilon/2$. Отсюда и используя равенство $\Phi_m^{-1}(0) = \{p_1 q_1 = 0\}$, легко получить требуемые оценки для расстояний между линиями $\Phi_m^{-1}(h)$ и $\{\mathcal{M} p_1 q_1 = h\}$ в круге $B_{\alpha\sqrt{-m}}$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Аналогично рассматривается случай $m_2 = 1$. Лемма 3.2.Б доказана.

Доказательство леммы 3.2.В о виде расслоения кривыми $\Phi_m^{-1}(h)$ плоскости $\mathbf{R}^2_{p_1q_1}$, а также лемм 3.2.Г и 3.2.Д. Доказательство леммы 3.2.В можно провести геометрически, опираясь на следующие факты. Обозначим

$$\mathcal{F}_{1\kappa} := \kappa\frac{m_1}{2}(p_1^2+q_1^2) - \frac{m_2}{2}q_2^2, \quad \text{где} \quad q_2 > 0,$$
$$\widehat{\Phi}_{m\kappa} := \mathcal{F}_2^0|_{\mathcal{F}_{1\kappa}^{-1}(m)}.$$

Функция $\Phi_{m\kappa}$ (см. (28)) задает функцию $\widehat{\Phi}_{m\kappa}$ в координатах (p_1, q_1) на поверхности $\mathcal{F}_{1\kappa}^{-1}(m)$. Эта поверхность в V_+ при $\kappa = 0$ имеет вид горизонтальной плоскости $q_2 = \sqrt{-\frac{2m}{m_2}} = \frac{\mathcal{M}}{2}$. При изменении параметра κ от 0 до 1 точка пересечения этой плоскости с координатной осью q_2 покоится на месте, а остальная часть плоскости выгибается вверх и в каждый момент $\kappa \in (0, 1]$ деформации имеет вид полости двуполостного гиперболоида. Эта полость является поверхностью вращения вокруг оси q_2 и с ростом κ становится все менее плоской, принимая в момент $\kappa = 1$ положение $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$. Отсюда и из леммы 3.2.А, а также используя свойства поверхностей уровня функции F_2 (см. лемму 3.1.В), легко получаем все требуемые свойства кривых $\Phi_{m\kappa}^{-1}(h)$.

Утверждение 3.2.В можно доказать также, исходя из вида градиента

$$\nabla\Phi_{m\kappa} = \left(\frac{\partial\Phi_{m\kappa}}{\partial p_1}, \frac{\partial\Phi_{m\kappa}}{\partial q_1}\right)$$

функции $\Phi_{m\kappa}(p_1, q_1)$. Действительно, используя выражение для $q_2 = q_2(p_1, q_1)$ (см. формулу (31), в которой m_1 нужно заменить на κm_1), получаем, что при $m \leqslant 0$ функция $(q_2(p_1, q_1))^2$ имеет вид $\alpha + \kappa\beta(p_1^2 + q_1^2)$, где $\beta > 0$, $\alpha \geqslant 0$, причем $\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $m = 0$. Следовательно, $q_2\nabla q_2 = \kappa\beta[p_1, q_1] \in \mathbf{R}^2$. Отсюда и из (18) и (19) получаем, что

$$\begin{aligned}
&\nabla\Phi_{m\kappa} = \nabla(p_1 q_2^{m_1}(p_1, q_1)) = q_2^{m_1-2}[\alpha + \kappa\beta((1+m_1)p_1^2 + q_1^2),\ \kappa\beta m_1 p_1 q_1] \quad \text{при} \quad m_2 = 1,\\
&\nabla\Phi_{m\kappa} = \frac{1}{q_2}\left[q_1(\alpha + \kappa\beta(2p_1^2 + q_1^2)),\ p_1(\alpha + \kappa\beta(p_1^2 + 2q_1^2))\right] \quad \text{при} \quad m_1 = 1,\ m_2 = 2.
\end{aligned} \tag{34}$$

Исходя из этих формул для $\nabla\Phi_{m\kappa}$ и теоремы о неявной функции, нетрудно получить утверждение 3.2.В. Из тех же формул (34) при $\kappa = 1$ и любых $m \in \mathbf{R}$ получаем и леммы 3.2.Г и 3.2.Д. При этом утверждения о гладкости следуют из анализа подкоренного выражения в подкорректированной выше с учетом κ формуле (31) для $q_2 = q_2(p_1, q_1)$, а утверждения о монотонности следуют из соотношений между знаками компонент градиента $\nabla\Phi_{m\kappa}$ в квадрантах плоскости $\mathbf{R}^2_{p_1q_1}$. Итак, леммы 3.2.В, 3.2.Г и 3.2.Д доказаны.

Лемма 3.2.Ж. *Поверхности $(\mathcal{F}_1^0)^{-1}(m)$, $m \in \mathbf{R}$, гладкие и при $m \neq 0$ тривиально расслаивают обе части, на которые делит полупространство V_+ конус $c = (\mathcal{F}_1^0)^{-1}(0)$. При $m_2 = 1$ поверхности $(\mathcal{F}_2^0)^{-1}(h)$ при всех $h \in \mathbf{R}$ будут гладкими и связными и будут тривиально расслаивать все полупространство V_+. Кривые $\chi^0_{mh} = (\mathcal{F}^0)^{-1}(m, h)$ при $m_2 = 1$ и $(m, h) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\tau}_+$, где $\overline{\tau}_+ = \tau_+ \cup \{0\}$, тоже будут гладкими и связными и будут тривиально расслаивать дополнение $V_+ \setminus (\mathcal{F}^0)^{-1}(\overline{\tau}_+)$.*

При $m_2 = 2$ поверхности $(\mathcal{F}_2^0)^{-1}(h)$ и линии χ^0_{mh} при любых $h \neq 0$ и $m \in \mathbf{R}$ состоят из двух гладких связных компонент и тривиально расслаивают дополнение $V_+ \setminus (\mathcal{F}_2^0)^{-1}(0)$, состоящее из четырех связных компонент.

Лемма 3.2.Ж легко следует из доказанных выше в § 3.1 и § 3.2 лемм, прежде всего, из описания поверхностей $(\mathcal{F}_1^0)^{-1}(m)$ и $(\mathcal{F}_2^0)^{-1}(h)$ и множества критических точек отображения $\mathcal{F}^0$ (см. леммы 3.1.А, 3.1.Б и 3.1.Д).

§3.3. Свойства траекторий системы с гамильтонианом F_1^0 и фазового потока этой системы. Свойства расслоения пространства R^4_{pq} на слои Λ_{mh}

Обозначим через $G^0 = G_{F_1^0}$ фазовый поток системы с гамильтонианом F_1^0, а через β — траектории этого потока. В следующем утверждении рассматривается случай произвольного резонанса $m_1 : (-m_2)$ в такой системе, то есть предполагается, что параметры m_1, m_2, от которых зависит F_1^0, являются произвольными натуральными взаимно простыми числами: $(m_1, m_2) = 1$.

Лемма 3.3.А. *Фазовый поток G^0 линеен и имеет вид*

$$(G^0)^t \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(m_i t) & -(-1)^i \sin(m_i t) \\ (-1)^i \sin(m_i t) & \cos(m_i t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где $i = 1, 2$. Таким образом, он 2π-периодичен и его действие представимо в виде прямого произведения действий в плоскостях $\mathbf{R}^2_{p_i q_i}$, $i = 1, 2$, $\mathbf{R}^4_{pq} = \mathbf{R}^2_{p_1 q_1} \times \mathbf{R}^2_{p_2 q_2}$. Эти действия за время t заключаются в повороте на угол $-m_1 t$ в $\mathbf{R}^2_{p_1 q_1}$ и на угол $m_2 t$ в $\mathbf{R}^2_{p_2 q_2}$. Кроме того, все точки любой орбиты β потока G^0 равноудалены от $0 \in \mathbf{R}^4$: $|(G^0)^t \xi| = \mathrm{const}$ при всех $t \in \mathbf{R}$.

Лемма 3.3.А очевидна. Очевидно и следующее утверждение.

Лемма 3.3.Б. *При $m_1 = m_2 = 1$ траектории β потока G^0 локально тривиально расслаивают проколотое в нуле пространство $\mathbf{R}^4_{pq}$, то есть $\mathbf{R}^4_{pq} \setminus \{0\}$. В случае, когда одна из частот равна 1 ($m_i = 1$ при одном из значений $i = 1, 2$), а другая больше или равна 2, эти траектории будут локально тривиально расслаивать дополнение $\mathbf{R}^4_{pq} \setminus \{p_i = q_i = 0\}$. При этом в любой окрестности в $\mathbf{R}^4$ каждой из траекторий β, лежащих на такой плоскости $\{p_i = q_i = 0\}$, расслоение этими траекториями не будет тривиальным. Если же обе частоты больше 1 ($m_1 \geqslant 2$ и $m_2 \geqslant 2$), то орбиты β локально тривиально расслаивают дополнение $\mathbf{R}^4 \setminus (\{p_1 = q_1 = 0\} \cup \{p_2 = q_2 = 0\})$. В любой окрестности в $\mathbf{R}^4$ любой траектории β, лежащей на одной из этих двух инвариантных для потока G^0 плоскостей $\{p_i = q_i = 0\}$, $i = 1, 2$, расслоение на траектории потока G^0 не является тривиальным.*

Минимальный период, отвечающий любой регулярной траектории β, то есть в окрестности которой расслоение тривиально, в точности равен 2π. Если же траектория нерегулярная, то это будет тогда и только тогда, когда ее минимальный период меньше 2π. Если траектория β лежит на плоскости $\{p_i = q_i = 0\}$, то ее минимальный период дается формулой $T_{\min} = 2\pi/m_j$, где i и j принимают несовпадающие значения 1 и 2, $i \neq j$, а m_j — частота с номером j.

Вернемся к рассматриваемым трем случаям $m_1 = m_2 = 1$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_1 = 2$, $m_2 = 1$.

Лемма 3.3.В. *Орбиты β группы G^0 расположены по отношению к гиперплоскости $\mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2} = \{p_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$ следующим образом. Горизонтальная плоскость $\{p_2 = q_2 = 0\}$ целиком состоит из этих орбит, а вне этой плоскости, то есть в $\mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2} \setminus \{q_2 = 0\}$, они пересекают пространство $\mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2}$ под ненулевым углом. При этом полупространство $V_+ = \{p_2 = 0,\ q_2 > 0\} = \mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2} \cap \{q_2 > 0\}$ каждая из орбит β пересекает ровно в m_2 точках или не пересекает совсем. В последнем случае β целиком лежит в плоскости $\{p_2 = q_2 = 0\}$.*

В случае $m_2 = 2$, если одна из точек пересечения $\beta \cap V_+$ имеет координаты (p_1, q_1, q_2), то другая — координаты $(-p_1, -q_1, q_2)$, то есть эти две точки центрально-симметричны в $\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ относительно вертикальной оси q_2. Кроме того, половинки орбит β с концами на V_+ соединяют обе связные компоненты χ'_{mh} и χ''_{mh}, из которых в случае $m_2 = 2$ состоит линия $\chi^0_{mh} = (\mathcal{F}^0)^{-1}(m, h)$ при $h \neq 0$ (см. лемму 3.2.Ж).

Лемма 3.3.В легко следует из вида (35) потока G^0 и вида $\mathcal{F}^0_1$ и $\mathcal{F}^0_2$ (см. (18) и (19) соответственно).

Лемма 3.3.Г. *Прообраз $\Lambda_{mh} := (F^0)^{-1}(m, h)$ любой точки $(m, h) \in \mathbf{R}^2$ при отображении $F^0 \colon \mathbf{R}^4_{pq} \to \mathbf{R}^2_{mh}$ является связным множеством и, значит, слоем расслоения, задаваемого отображением F^0. При любом $(m, h) \in \mathbf{R}^2 \setminus (\tau_+ \cup \{0\})$ слой Λ_{mh} получается разнесением группой G^0 кривой $\chi^0_{mh} = \Lambda_{m,h} \cap V_+$, которую можно заменить любой из ее связных компонент. Кроме того, дополнение $\Lambda_{00} \setminus \{0\}$ тоже получается разнесением группой G^0 линии χ^0_{00}.*

Напомним, что при $(m, h) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\tau}_+$ в случае $m_2 = 1$ линия χ^0_{mh} связна, а в случае $m_2 = 2$ число ее связных компонент не более двух и, как правило, а именно, при $h \neq 0$, их две (см. лемму 3.1.Ж).

Доказательство леммы 3.3.Г. Из равенства $\{F^0_1, F^0_2\} = 0$ следует, что множество $(F^0)^{-1}(m, h)$ при любом $(m, h) \in \mathbf{R}^2$ составлено из орбит группы G^0. Отсюда и из леммы 3.3.В следует, что прообраз $(F^0)^{-1}(m, h)$ любой точки (m, h) получается разнесением группой G^0 множества

$$\left(F^0|_{\{p_2=0,\, q_2 \geqslant 0\}}\right)^{-1}(m, h). \tag{36}$$

Используя леммы § 3.1, а также лемму 3.3.В, нетрудно получить, что это множество либо связно, либо обе его связные компоненты соединены участком орбиты β. Отсюда получаем связность каждого из множеств $(F^0)^{-1}(m, h)$, $(m, h) \in \mathbf{R}^2$.

Из лемм § 3.1 также следует, что множество (36) при $(m, h) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\tau}_+$ не пересекается с границей $\partial \overline{V}_+ = \{p_2 = q_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ замыкания $\overline{V}_+ = \{p_2 = q_2 \geqslant 0\}$ полупространства V_+. То же самое верно и для $\Lambda_{00} \setminus \{0\}$, то есть это дополнение тоже целиком лежит в V_+. Из приведенных фактов получаем утверждение леммы о виде Λ_{mh} при $(m, h) \in \mathbf{R}^2 \setminus \tau_+$ и о виде $\Lambda_{00} \setminus \{0\}$. Лемма 3.3.Г доказана.

Лемма 3.3.Д. *В случае $m_1 = m_2 = 1$ отображение F^0 имеет единственную критическую точку $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$. В случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ множество Σ_{F^0} всех критических точек этого отображения совпадает с плоскостью $\{p_1 = q_1 = 0\}$:*

$$\begin{aligned} &\Sigma_{F^0} = \{0\} && \text{при} \quad m_1 = m_2 = 1, \\ &\Sigma_{F^0} = \{p_1 = q_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq} && \text{при} \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2. \end{aligned} \tag{37}$$

При $m_1 = m_2 = 1$ расслоение на слои $\Lambda_{mh} = (F^0)^{-1}(m, h)$ будет локально тривиальным в $(F^0)^{-1}(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\tau}_+)$. При $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ расслоение на Λ_{mh} будет тривиальным в каждой из двух связных компонент дополнения

$$\mathbf{R}^4_{pq} \setminus (F^0_2)^{-1}(0) = (F^0)^{-1}(\mathbf{R}^2_{m,h} \setminus \{h = 0\}).$$

Для доказательства леммы 3.3.Д воспользуемся следующим общим фактом.

Лемма 3.3.Е. *Пусть $F = (F_1, F_2)$ — набор из двух функций в инволюции, заданных на 4-мерном симплектическом многообразии M^4, то есть $\{F_1, F_2\} = 0$. Пусть V —*

гладкое 3-мерное подмногообразие в M^4, такое, что векторы поля $X = X_{F_1}$, задаваемого гамильтонианом F_1, трансверсально пересекают эту поверхность во всех ее точках. Тогда точка $\xi \in V$ является критической для сужения $\mathcal{F} := F|_V$ в том и только в том случае, если она будет критической для отображения $F = (F_1, F_2) : M^4 \to \mathbf{R}^2$, то есть

$$(\Sigma_F)|_V = \Sigma_{\mathcal{F}}. \tag{38}$$

Кроме того, если хотя бы одна из точек произвольной траектории β поля X является критической для отображения F, то любая другая точка этой траектории тоже будет критической для F.

Доказательство леммы 3.3.Е. Фазовый поток $G = G_{F_1}$, задаваемый полем X_{F_1}, очевидно, сохраняет функции F_1 и F_2, а значит, и отображение F. Следовательно, поток G сохраняет и критические точки отображения F, откуда следует утверждение леммы об инвариантности множества Σ_F критических точек отображения F относительно действия группы G.

Для доказательства (38) фиксируем точку $\xi \in V$ и обозначим $\operatorname{Ker}\partial F := \{\zeta \in T_\xi M^4 | \partial F(\zeta) = 0\}$, где $T_\xi M^4$ — касательное пространство в точке ξ к M^4. Ясно, что $X(\xi) \in \operatorname{Ker}\partial F$ и что $\operatorname{Ker}\partial\mathcal{F} = \operatorname{Ker}(\partial F|_{T_\xi V})$. Так как $\dim M^4 - \dim V = 1$, то отсюда следует $\dim\operatorname{Ker}\partial F = \dim\operatorname{Ker}\partial\mathcal{F} + 1$. Имеем

$$\xi \notin \Sigma_F \Longleftrightarrow \dim\operatorname{Ker}\partial F = 2 \Longleftrightarrow \dim\operatorname{Ker}\partial\mathcal{F} = 1 \Longleftrightarrow \xi \notin \Sigma_{\mathcal{F}},$$

что и доказывает (38). Лемма 3.3.Е доказана.

Доказательство леммы 3.3.Д. Регулярность отображения F^0 в $\mathbf{R}^4_{pq}\setminus\{0\}$ в случае $m_1 = m_2 = 1$ и в $\mathbf{R}^4_{pq}\setminus\{p_1 = q_1 = 0\}$ в случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ можно проверить непосредственно, то есть рассмотрев матрицу Якоби

$$\frac{\partial(F_1^0, F_2^0)}{\partial(p_1, p_2, q_1, q_2)} = 0.$$

Эта регулярность также легко следует и из леммы 3.3.Е. Действительно, положим в этой лемме $F = F^0$, $V = V_+$, тогда все условия леммы 3.3.Е будут выполнены, в частности, трансверсальность векторов поля $X = X_{F_1^0}$ и полупространства V_+ следует из леммы 3.3.В. Из вида орбит группы G^0 (см. лемму 3.3.А) имеем, что плоскость $\{p_1 = q_1 = 0\}$ получается разнесением луча $l^0 \cup \{0\}$ группой G^0 (см. лемму 3.1.Д). Отсюда, из леммы 3.3.Е и из утверждения леммы 3.1.Д о виде $\Sigma_{\mathcal{F}^0}$ получаем (37).

Докажем теперь утверждения леммы 3.3.Д о тривиальности и локальной тривиальности расслоения на поверхности Λ_{mh}. Начнем со случая $m_1 = m_2 = 1$. Орбиты β группы G^0 локально тривиально расслаивают $\mathbf{R}^4_{pq} \setminus \{0\}$ (см. лемму 3.3.Б). Отсюда и из очевидной односвязности множества

$$V_+ \setminus (\mathcal{F}^0)^{-1}(\overline{\tau}_+) = (\mathcal{F}^0)^{-1}(\mathbf{R}^2_{mh} \setminus \overline{\tau}_+)$$

(см. леммы 3.1.В и Г), а также из леммы 3.3.Г получаем, что база расслоения множества

$$\mathbf{R}^4_{pq} \setminus (F^0)^{-1}(\overline{\tau}_+) = (F^0)^{-1}(\mathbf{R}^2_{mh} \setminus \overline{\tau}_+) \tag{39}$$

орбитами β тоже будет односвязной. Следовательно, орбиты β тривиально расслаивают это множество. Согласно лемме 3.2.Ж, линии χ^0_{mh}, $(m, h) \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\tau}_+$, связны и тривиально расслаивают дополнение $V_+\setminus((\mathcal{F}^0)^{-1}(\tau_+))\cup\chi^0_{00})$. Из этих двух фактов и из леммы 3.3.В, а также из леммы 3.3.Г о связи слоев Λ_{mh} и кривых χ^0_{mh} получаем, что слои Λ_{mh}, $(m,h)\in\mathbf{R}^2\setminus\overline{\tau}_+$, тривиально расслаивают (39).

Используя этот факт, легко показать, что слои Λ_{mh}, $(m,h)\in\mathbf{R}^2\setminus\overline{\tau}_-$, тривиально расслаивают множество

$$(\mathcal{F}^0)^{-1}(\mathbf{R}^2\setminus\overline{\tau}_-). \tag{40}$$

Действительно, рассмотрим инволюцию

$$(p_1,q_1,p_2,q_2)\mapsto(p_2,q_2,p_1,q_1), \tag{41}$$

отвечающую замене номеров координат (p_1,p_2,q_1,q_2) в $\mathbf{R}^4_{pq}$. При такой замене переменных расслоения на $(F^0_1)^{-1}(m)$, $(F^0_2)^{-1}(h)$ и $(F^0)^{-1}(m,h)$ не меняются, меняется лишь только знак функции F^0_1. Следовательно, инволюции (41) соответствует отражение $(m,h)\mapsto(-m,h)$ плоскости $\mathbf{R}^2$ относительно оси h. Отсюда получаем тривиальность расслоения множества (40) на слои Λ_{mh}. Из тривиальности расслоения множеств (39) и (40) получаем локальную тривиальность расслоения слоями Λ_{mh} объединения этих множеств, то есть $\mathbf{R}^4_{pq}\setminus\Lambda^0$, в рассматриваемом случае $m_1=m_2=1$.

Случай $m_1=1$, $m_2=2$ рассматривается аналогично. Линия χ^0_{mh} при $h\neq0$ в этом случае состоит из двух связных компонент, которые соединяются орбитами β через время π (см. лемму 3.3.В), что отлично от более простой ситуации при $m_1=m_2=1$. Остальные рассуждения вполне аналогичны этому случаю, и, учитывая те же факты, следующие из лемм 3.2.Ж, 3.3.Б, 3.3.В и 3.3.Г, получаем, что расслоение поверхностями Λ_{mh} каждой из двух связных компонент дополнения $\mathbf{R}^4_{pq}\setminus(F^0_2)^{-1}(0)$ является тривиальным. Лемма 3.3.Д доказана.

§ 3.4. Возмущенный случай. Исследование окрестности особой точки функции $\widehat{\Phi}_m$ при $m_2=2$

В оставшейся части § 3 будут исследованы расслоения, задаваемые функциями $\mathcal{F}_i:=F_i|_{V_+}$, $i=1,2$, и отображением $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ в пересечении полупространства $V_+=\{p_2=0,\ q_2>0\}\subset\mathbf{R}^4_{pq}$ с достаточно малой окрестностью $\mathcal{O}$ нуля $0\in\mathbf{R}^4_{pq}$, где F_1, F_2 — исходные функции (см. (8)). Будут доказаны аналоги большинства утверждений лемм из § 3.1 о свойствах расслоений всего полупространства V_+, задаваемых невозмущенными функциями $\mathcal{F}^0_i$, $i=1,2$, и отображением $\mathcal{F}^0=(\mathcal{F}^0_1,\mathcal{F}^0_2)$. Оказывается, что при надлежащей коррекции этих свойств ими обладают и возмущенные расслоения, то есть расслоения со слоями $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$, $\mathcal{F}_2^{-1}(h)$ и $\mathcal{F}^{-1}(m,h)$. Кроме того, в § 3.7 будут приведены утверждения о малости отличия друг от друга векторных полей $X_{F^0_1}$ и X_{F_1} систем с гамильтонианами F^0_1 и F_1 и о виде множества Σ критических точек отображения F, лежащих в $\mathcal{O}$. Формулировки всех лемм приведены в §§ 3.4–3.7, а §§ 3.8–3.10 посвящены доказательству этих лемм.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\widehat{\Phi}_m:=\mathcal{F}_2|_{\mathcal{F}_1^{-1}(m)},\\ k_{\alpha r}:=\{(p_1,q_1,q_2)\in\mathbf{R}^3|m_1(p_1^2+q_1^2)<\alpha^2m_2q_2^2,\ q_2>0,\ p_1^2+q_1^2+q_2^2<r^2\},\end{gathered} \tag{42}$$

$k_\alpha:=k_{ar}|_{r=\infty}$, и, таким образом, $k_{ar}=k_\alpha\cap B_r$, где $B_r=\{p_1^2+q_1^2+q_2^2<r^2\}$. Обозначим через $\Phi_m=\Phi_{m\alpha}=\Phi_{m\alpha}(p_1,q_1)$ сужение $\widehat{\Phi}_m|_{k_\alpha}$, выраженное через координаты (p_1,q_1), заданные на поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)\cap k_{ar}$. Невозмущенный аналог Φ^0_m функции Φ_m при $m_2=2$

и $m < 0$ имеет единственную критическую точку $p_1 = q_1 = 0$, в окрестности которой задает расслоение седлового типа (см. лемму 3.2.В). Далее сформулированы утверждения, показывающие, что оба эти расслоения Φ_m и Φ_m^0 близки друг к другу и Φ_m тоже имеет седловой тип. Везде в § 3.4 рассматривается случай $m_2 = 2$.

Лемма 3.4.А. *Существуют константы $\alpha > 0$, $\mu_0 > 0$ и $C > 0$, такие, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ функция $\Phi_{m\alpha}$ при $m = -\mu^2$ определена корректно и гладко зависит по совокупности от (μ, p_1, q_1), а также обладает следующими свойствами. Существуют гладкие функции $p_1 = a_\mu$ и $q_1 = b_\mu$ от переменной $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, которые удовлетворяют неравенству*

$$a_\mu^2 + b_\mu^2 \leqslant C\mu^4 \tag{43}$$

и являются такими, что функция $\Phi_{m\alpha}$ имеет единственную критическую точку $p_1 = a_\mu$, $q_1 = b_\mu$, $\mu \in (0, \mu_0)$, где $\mu = \sqrt{-m}$, причем эта точка будет невырожденной.

Обозначим

$$\begin{gathered} h_\mu := \Phi_m(p_1, q_1)|_{m=-\mu^2,\, p_1=a_\mu,\, q_1=b_\mu}, \\ \phi_\mu(p_1, q_1) := \Phi_{-\mu^2}(p_1, q_1) - h_\mu, \\ 9w = w_{\mu\alpha} := \left\{(p_1, q_1) \in \mathbf{R}^2 \big| p_1^2 + q_1^2 < \frac{1}{m_1}\,\alpha^2\mu^2\right\}. \end{gathered} \tag{44}$$

Лемма 3.4.Б. *Существуют константы $\alpha > 0$, $\mu_0 > 0$ и $C > 0$, такие, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ функция ϕ_μ определена во всем круге $w_{\mu\alpha}$, а ее нулевая линия уровня $\phi_\mu^{-1}(0)$ обладает следующими свойствами. Эта линия является объединением двух гладких кривых η_μ и ζ_μ, гладко зависящих от μ и пересекающихся в точке $p_1 = a_\mu$, $q_1 = b_\mu$, а также делящих круг $w_{\mu\alpha}$ на четыре части. При этом кривая η_μ близка к прямой $\{p_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^2_{p_1q_1}$, а кривая ζ_μ — к прямой $\{q_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^2_{p_1q_1}$. Точнее, расстояние от кривой η_μ (ζ_μ) до прямой $\{p_1 = 0\}$ (соответственно, до $\{q_1 = 0\}$) не больше $c\mu^2$ в метрике C^0 и не больше $c\mu$ в метрике C^1.*

Действительно, линии

$$\{\Phi_{-\mu^2}(p_1, q_1) = h + h_\mu\} = \phi_\mu^{-1}(h)$$

близки к невозмущенным линиям $(\Phi_m^0)^{-1}(h)$, $m = -\mu^2$, при любых h, а не только при $h = 0$. Линии $\phi_\mu^{-1}(h)$ тривиально расслаивают два «полукруга», на которые η_μ делит круг $w_{\mu\alpha}$, и расслаивают аналогичные два полукруга, разделенные кривой ζ_μ. Строгие формулировки этих утверждений следующие.

Лемма 3.4.В. *Существуют положительные константы α и μ_0, такие, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ линии $\phi_\mu^{-1}(h)$ будут иметь следующие свойства.*

i) *При $0 < |h| < \dfrac{\alpha^2}{100}\,\mu^3$ они будут гладкими и гладко зависящими от (μ, h) и будут состоять из двух связных компонент. Кроме того, линии $\phi_\mu^{-1}(h)$ близки к линиям $(\Phi_{-\mu^2}^0)^{-1}(h)$ в следующем смысле. Найдется $c > 0$, такое, что при любом $h \in \left(-\dfrac{\alpha^2}{100}\mu^3, \dfrac{\alpha^2}{100}\mu^3\right)$, включая $h = 0$, взаимное расстояние между кривыми $\phi_\mu^{-1}(h)$ и $(\Phi_{-\mu^2}^0)^{-1}(h)$ в метрике C^0 будет не больше $c\mu^2$, а в метрике C^1 — не больше $c\mu$.*

ii) *Обозначим*

$$\widetilde{w}_{\mu\alpha} = w_{\mu\alpha} \cap \left(\cup_{|h| < \frac{\alpha^2}{100}\,\mu^3} \phi_m^{-1}(h)\right).$$

Легко видеть, что $\widetilde{w}_{\mu\alpha}$ является окрестностью точки $0 \in \mathbf{R}^2_{p_1q_1}$ и дополнение $\widetilde{w}_{\mu\alpha} \setminus \eta_\mu$ состоит из двух связных компонент, которые обозначим $\widetilde{w}^1_{\mu\alpha}$ и $\widetilde{w}^2_{\mu\alpha}$. Аналогично, связные компоненты дополнения $\widetilde{w}_{\mu\alpha} \setminus \zeta_\mu$ обозначим через $\widetilde{w}^3_{\mu\alpha}$ и $\widetilde{w}^4_{\mu\alpha}$. Утверждается, что при каждом $i = 1, 2, 3, 4$ линии $\phi_\mu^{-1}(h) \cap \widetilde{w}^i_{\mu\alpha}$ являются гладкими связными кривыми, гладко зависящими от (μ, h) и тривиально расслаивающими область $\widetilde{w}^i_{\mu\alpha}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

§3.5. Вид кривой l_0 особых точек расслоения $\mathcal{F}$, вид кривой $\check{\tau} = \mathcal{F}(l_0)$ и поверхности $\theta = \mathcal{F}^{-1}(\tau)$. Вид особого слоя $\chi_{00} = \mathcal{F}^{-1}(0, 0)$

Пусть $m_2 = 2$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{m_1}{2}\left(a_\mu^2 + b_\mu^2\right) - \frac{m_2}{2}\gamma^2 + \mu^2 = 0 \tag{45}$$

относительно μ и γ. Из (43) следует, что главная часть стоящей слева функции от μ и γ является невырожденной квадратичной формой. Отсюда и из леммы Морса получаем, что уравнение (45) имеет два гладких решения, представимых в виде графиков функций $\mu \mapsto \gamma$, обладающих следующими свойствами. Эти функции определены в некоторой окрестности точки $\mu = 0$, отличаются знаками, равны нулю в точке $\mu = 0$ и имеют ненулевые производные в этой точке. Обозначим через $\gamma = \gamma_\mu$ решение с положительной производной в нуле: $\left.\frac{d}{d\mu}\right|_{\mu=0}\gamma_\mu > 0$. Обозначим

$$l_0 := \{(p_1, q_1, q_2) \in \mathbf{R}^3 | p_1 = a_\mu,\ q_1 = b_\mu,\ q_2 = \gamma_\mu,\ \mu \in (0, \mu_0)\}. \tag{46}$$

Лемма 3.5.А. *Существуют константы $C > 0$ и $K > 0$, такие, что кривая $l_0 \cup \{0\}$ связна, корректно определена и является графиком гладкого отображения $g\colon q_2 \mapsto (p_1, q_1)$, $q_2 \in [0, K)$, причем*

$$g_1^2(q_2) + g_2^2(q_2) \leqslant Cq_2^4. \tag{47}$$

Как следствие, кривая $l_0 \cup \{0\}$ имеет касательную в нуле, совпадающую с координатной осью q_2 в $\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$.

(Ниже будет показано, что l_0, фактически, является множеством критических точек отображения $\mathcal{F}$ (см. лемму 3.6.A.ii).) Обозначим

$$\tau := F(l_0) \cup \{0\} \quad \text{и} \quad \check{\tau} := F(l_0). \tag{48}$$

Лемма 3.5.Б. *Определенное при $m_2 = 2$ множество $\check{\tau} \subset \mathbf{R}^2_{mh}$ является гладкой кривой, лежащей в левой полуплоскости $m < 0$. Кривая $\tau = \check{\tau} \cup \{0\}$ связна и имеет касательную в нуле $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$, совпадающую с координатной осью m. Более того, найдутся константы $C > 0$ и $m_0 > 0$, такие, что τ является графиком функции вида $h = t(m)$, причем $|t(m)| \leqslant Cm^2$ при $m \in (-m_0, 0]$.*

Обозначим $\theta := \mathcal{F}^{-1}(\tau)$ и $\theta_r := \theta \cap B_r$, где B_r — открытый шар радиуса r с центром в точке $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$, и обозначим $\chi_{mh} := \mathcal{F}^{-1}(m, h)$.

Лемма 3.5.В. *Найдутся $r_0 > 0$ и $c > 0$, такие, что при любом $r = (0, r_0)$ множество θ_r обладает следующими свойствами. Оно является объединением двух гладких поверхностей, содержащим дополнительно часть своей границы в $\mathcal{F}_2^{-1}(0)$; эту часть обозначим через $\partial\theta$. Эти поверхности лежат в малой деформации $\{\mathcal{F}_1(p_1, q_1, q_2) \leqslant 0\} \cap \overline{B}_r$ замыкания $\overline{k}_{1r}$ конуса k_{1r} и пересекаются по кривой l_0 под ненулевым углом в каждой* *точке этой кривой, и этот угол равномерно отделен от нуля. При этом упомянутая часть $\partial\theta$ границы множества θ совпадает с особой линией χ_{00}. Каждая из этих двух поверхностей в каждой из своих точек, включая точки $(p_1 q_1 q_2) \in \partial\theta$, имеет касательную плоскость. Кроме того, каждая из этих двух поверхностей трансверсально пересекает поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ при любых $m \leqslant 0$.*

При $r \to 0$ множество θ_r стремится к своему невозмущенному аналогу

$$\theta^0 \cap B_r, \quad \text{где} \quad \theta^0 = (\{p_1 = 0\} \cup \{q_1 = 0\}) \cap \overline{k}$$

(см. (21), (22) и лемму 3.1.Г). *Точнее, расстояние между θ_r и $\theta^0 \cap B_r$ не больше cr в метрике C^1 и не больше cr^2 в метрике C^0.*

Лемма 3.5.Г. *В обоих случаях $m_2 = 1, 2$ линия χ_{00} состоит из $2m_2$ гладких связных кривых $l_1, \ldots, l_{2m_2}$, выходящих из начала координат $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$, но не содержащих эту точку. Каждая из этих кривых получается гладкой деформацией интервала одного из $2m_2$ прямолинейных лучей, выходящих из $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ и описанных в лемме 3.1.Г. Более точно, обозначим эти «невозмущенные» лучи через $l_1^0, \ldots, l_{2m_2}^0$. Тогда дополненная нулем $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ кривая l_i, то есть $l_i \cup \{0\}$, будет связной кривой, имеющей в точке $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ касательную, совпадающую с прямой, на которой лежит луч l_i^0, $i = 1, \ldots, 2m_2$.*

§ 3.6. Вид расслоений поверхностями $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ и кривыми χ_{mh} некоторых подмножеств конуса $k_{\alpha r}$

В данном параграфе мы изучим расслоения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}$ в конусе $k_{\alpha r}$ при больших α. Проведенные в § 3.4 исследования расслоения $\widehat{\Phi}_m|_{k_\alpha}$ позволят нам выяснить вид расслоения $\mathcal{F}$ при $m_2 = 2$ в конической окрестности $k_{\alpha r}$ интервала вертикального луча $\{p_1 = q_1 = 0, q_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$, раствор 2α которого мал. Но мы хотим найти вид этого расслоения в пересечении полупространства V_+ с как можно большей окрестностью нуля $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ и при обоих значениях $m_2 = 1, 2$. В невозмущенном случае при $m_1 \geqslant 2$ все точки горизонтальной плоскости $\partial V_+ = \{q_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ заведомо являются критическими для отображения $F^0|_{\{p_2=0\}}$, а при $m_1 = 1$ эта плоскость содержит критические точки, и поэтому она была исключена из рассмотрения. В возмущенном случае, чтобы избежать «лишних» критических точек отображения $\mathcal{F}$, приходится существенным образом отступить от этой плоскости. Это и приводит к рассмотрению конуса $k_{\alpha r}$, $\alpha > 1$, в качестве упомянутого пересечения. Его раствор 2α, впрочем, можно брать сколь угодно большим. Однако вид расслоения $\mathcal{F}$ мы изучим не во всем конусе $k_{\alpha r}$, а в некотором его подмножестве «флажкового типа» Y_r, занимающем бóльшую часть конуса $k_{\alpha r}$.

Лемма 3.6.А. *Для любого $\alpha > 1$ найдутся $r > 0$ и $c > 0$, такие, что будут выполнены следующие утверждения.*

i) *Поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m) \cap k_{\alpha r}$ гладкие и гладко зависят от m. При $m < 0$ эти поверхности тривиально расслаивают множество*

$$k_{\alpha r} \cap \Big(\cup_{-\frac{1}{10} r^2 < m < 0} \mathcal{F}_1^{-1}(m) \Big),$$

а при $m > 0$ — множество

$$k_{\alpha r} \cap \Big(\cup_{0 < m < \frac{1}{10} r^2} \mathcal{F}_1^{-1}(m) \Big).$$

При этом поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)\cap k_{\alpha r}$ *имеют вид графиков функций вида* $q_2 = G_m(p_1, q_1)$, *гладко зависящих по совокупности от* (m, p_1, q_1) *с гладко зависящей от* m *областью определения, близкой к кругу при* $m < 0$ *и к кольцу при* $m \geqslant 0$. *Точка* (p_1, q_1, q_2) *любой поверхности* $\mathcal{F}_1^{-1}(m)\cap k_{\alpha r}$ *будет* $c\rho^2$*-близка к поверхности* $(\mathcal{F}_1^0)^{-1}(m)$ *в метрике* C^0 *и* $c\rho$*-близка к ней в метрике* C^1, *где* $\rho = \sqrt{p_1^2+q_1^2+q_2^2}$.

ii) *Множество критических точек отображения* $\mathcal{F}|_{k_{\alpha r}}$ *при* $m_2 = 1$ *пусто, а при* $m_2 = 2$ *совпадает с кривой* $l_0 \cap B_r$, *где*

$$B_r = \{(p_1, q_1, q_2) \in \mathbf{R}^3 | p_1^2 + q_1^2 + q_2^2 < r^2\}.$$

Введем следующие обозначения: $\Upsilon_r := A_r \cap C_r$, где

$$A_r := \left\{(m,h) \in \mathbf{R}^2 | m > -\frac{1}{100}r^2,\ |h| < \left(\frac{1}{10}r\right)^{m_1+m_2}\right\},$$
$$C_r := \left\{(m,h) \in \mathbf{R}^2 | m < |h|^{\frac{2}{m_1+m_2}},\ |h| < \left(\frac{1}{10}r\right)^{m_1+m_2}\right\},$$

$\Upsilon_r^e := \Upsilon_r \cup \{0\}$ (оба подмножества Υ_r и Υ_r^e плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$ имеют вид «флажка»), и

$$Y_r := \mathcal{F}^{-1}(\Upsilon_r) \cap B_r, \quad Y_r^e := \mathcal{F}^{-1}(\Upsilon_r^e) \cap B_r.$$

Лемма 3.6.Б. *Найдутся* $r_0 > 0$ *и* $\alpha > 1$, *такие, что*

$$Y_r^e \subset k_{\alpha r} \quad \text{при любом} \quad r \in (0, r_0). \tag{49}$$

Обозначим $\widetilde{\chi}_{mhr} := \chi_{mh} \cap Y_r^e$, где $\chi_{mh} = \mathcal{F}^{-1}(m,h)$. Расслоение на кривые $\widetilde{\chi}_{mhr}$ обладает свойствами, сформулированными в приведенных ниже четырех леммах. Первая из них показывает, что линии $\widetilde{\chi}_{mhr}$ расслаивают часть поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ и это расслоение является малой деформацией соответствующего невозмущенного расслоения. При этом отличие от соответствующей невозмущенной кривой будет тем меньшим, чем ближе к точке $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ расположена кривая $\widetilde{\chi}_{mhr}$.

Лемма 3.6.В. *Существуют константы* $r_0 > 0$ *и* $c > 0$, *такие, что при любом* $r \in (0, r_0)$ *будут верны следующие два утверждения.*

i) *При каждом* $m \in \left(-\frac{1}{100}r^2, \frac{1}{100}r^2\right)$ *связные компоненты кривых* $\widetilde{\chi}_{mhr}$ *расслаивают поверхность* $Y_r^e \cap \mathcal{F}_1^{-1}(m)$, *причем расслоение задается сужением функции* $\widehat{\Phi}_m$ *на данную поверхность и это сужение является гладкой функцией, гладко зависящей от* m. *Сужение* $\widehat{\Phi}_m|_{Y_r^e\cap\mathcal{F}_1^{-1}(m)}$ *при таком* m *может иметь не более одной критической точки. Критическая точка имеется в том и только том случае, когда* $m_2 = 2$ *и* $m < 0$, *и эта точка совпадает с пересечением* $\mathcal{F}_1^{-1}(m) \cap l_0$.

ii) *Рассмотрим невозмущенный аналог* $\widetilde{\chi}^0_{mhr} := (\mathcal{F}^0)^{-1}(m,h) \cap B_r$ *кривой* $\widetilde{\chi}_{mhr}$. *Тогда при* $m_2 = 1$ *расстояние между кривыми* $\widetilde{\chi}_{mhr}$ *и* $\widetilde{\chi}^0_{mhr}$ *при любом* $(m,h) \in \Upsilon_r^e$ *в метрике* C^0 *будет не больше* cr^2, *а в метрике* C^1 *— не больше* cr. *В случае* $m_2 = 2$ *то же самое верно при* $m \geqslant 0$. *При* $m_2 = 2$ *и* $m \leqslant 0$ *в том же смысле мало расстояние между кривыми* $\widetilde{\chi}_{mhr}$ *и* $\widetilde{\chi}^0_{mh'r}$, *где* $(m,h) \in \Upsilon_r^e$ *и* $h' = h - t(m)$, *а* $t\colon m \mapsto h$ *— функция, графиком которой является кривая* $\tau = F(l_0) \cup \{0\}$ (см. лемму 3.5.Б).

Следующее утверждение показывает, в частности, что если в рассмотренном расслоении поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ кривыми $\widetilde{\chi}_{mhr}$ убрать особые слои, то оно будет тривиальным.

Лемма 3.6.Г. *Найдется $r_0 > 0$, такое, что при любом $r \in (0, r_0)$ будут верны следующие утверждения. В случае $m_2 = 1$ кривые $\widetilde{\chi}_{mhr}$, $(m, h) \in \Upsilon_r$, связны и при любом m тривиально расслаивают поверхность $Y_r \cap \mathcal{F}_1^{-1}(m)$. Эта поверхность связна при $m < 0$ и состоит из двух связных компонент при $m \geqslant 0$.*

При $m_2 = 2$ линии $\widetilde{\chi}_{mhr}$, $(m, h) \in \Upsilon_r \setminus \check{\tau}$, состоят из двух связных компонент и при любом фиксированном m тривиально расслаивают поверхность $(Y_r \setminus \theta_r) \cap \mathcal{F}_1^{-1}(m)$, состоящую из четырех связных компонент.

Следующие две леммы показывают, что расслоение кривыми $\widetilde{\chi}_{mhr}$ всего 3-мерного множества, являющегося объединением поверхностей, рассмотренных в лемме 3.6.Г, является тривиальным и гладким. Ясно, что дополнение $\Upsilon_r \setminus \check{\tau}$ $(m_2 = 2)$ состоит из двух связных компонент. Обозначим их Υ_r^+ и Υ_r^-, где Υ_r^+ пересекается с положительной полуосью h плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$.

Лемма 3.6.Д. *Существует константа $r_0 > 0$, такая, что при любом $r \in (0, r_0)$ будут верны следующие утверждения. При $m_2 = 1$ расслоение множества Y_r на кривые $\widetilde{\chi}_{mhr}$ является тривиальным. При $m_2 = 2$ расслоение на кривые $\widetilde{\chi}_{mhr}$ каждого из множеств $\mathcal{F}^{-1}(\Upsilon_r^+) \cap B_r$ и $\mathcal{F}^{-1}(\Upsilon_r^-) \cap B_r$ является тривиальным, причем объединение этих двух множеств совпадает с $(Y_r \setminus \theta_r)$.*

Лемма 3.6.Е. *Найдется $r_0 > 0$, такое, что при любом $r \in (0, r_0)$ будет выполнено следующее утверждение. При $m_2 = 1$ кривые $\widetilde{\chi}_{mhr}$ гладко зависят от $(m, h) \in \Upsilon_r$, а при $m_2 = 2$ гладкая зависимость от (m, h) будет существовать при $(m, h) \in \Upsilon_r \setminus \check{\tau}$.*

Замечание 3.6.Ж. Подчеркнем, что даже в простейшем случае $m_1 = m_2 = 1$ лемма 3.6.Д утверждает, что тривиальность расслоения на кривые $\widetilde{\chi}_{mhr}$ достигается на $\cup_{(m,h)\in\Upsilon_r}\widetilde{\chi}_{mhr}$, где подмножество Υ_r, имеющее вид «флажка», не является полной проколотой окрестностью нуля $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$. Если тривиальность расслоения была бы в прообразе отображения $\mathcal{F}$ полной такой окрестности, то монодромия оказалась бы тождественной.

§ 3.7. Равномерная малая оценка углов между векторами гамильтоновых полей, задаваемых функциями F_1 и F_1^0. Вид множества критических точек отображения F в малой окрестности нулевой точки из $\mathrm{R}^4_{p,q}$

Обозначим через $X_{F_1^0}$ и X_{F_1} векторные поля с функциями Гамильтона F_1^0 и F_1 соответственно.

Лемма 3.7.А. *Существуют константы $r > 0$ и $c > 0$, такие, что в любой точке $(p, q) \in B_r \subset \mathbf{R}^4$ четырехмерного шара B_r радиуса r и с центром в нуле будет выполнено следующее неравенство:*

$$|X_{F_1}(p,q) - X_{F_1^0}(p,q)| \leqslant c\rho |X_{F_1^0}(p,q)|, \quad \text{где} \quad |(p,q)| = \sqrt{p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2}, \quad \rho = |(p,q)|,$$

а $B_r = \{(p,q) \in \mathbf{R}^4 \| (p,q)| < r\}$. В частности,

$$(\widehat{X_{F_1}, X_{F_1^0}})(p,q) \leqslant c\rho,$$

где слева стоит угол между векторами полей X_{F_1} и $X_{F_1^0}$ в точке (p, q).

Лемма 3.7.Б. *Найдется $r > 0$, обладающее следующим свойством. При $m_1 = m_2 = 1$ единственной критической точкой отображения F в четырехмерном шаре B_r радиуса r*

и с центром в $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ *будет эта точка* $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$*. Пусть* $m_2 = 2$*; рассмотрим пересечение* $l_0 \cap B_R$*, где* $R = 2r$*, и обозначим через* $\Sigma := G_{F_1}(l_0 \cap B_R) \cup \{\xi^0\}$ *его разнесение фазовым потоком* G_{F_1} *системы с гамильтонианом* F_1 *в объединении с точкой* ξ^0*. Тогда* Σ *целиком состоит из критических точек отображения* F*, и это отображение не имеет в шаре* B_r *других критических точек, кроме точек пересечения* $B_r \cap \Sigma$*. Помимо того, каждая траектория потока* G_{F_1}*, пересекающая* $l_0 \cap B_R$*, является замкнутой, и все эти кривые тривиально расслаивают* $\Sigma \setminus \{0\}$*. Минимальный период решений системы, отвечающих этим траекториям, близок к* π*:* $|T - \pi| < \frac{1}{100}$*. Само* Σ *является диском, гладким во всех точках, кроме, быть может, точки* $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$*, в которой, тем не менее,* Σ *имеет касательную плоскость, совпадающую с плоскостью* $\{p_1 = q_1 = 0\} \in \mathbf{R}^4_{pq}$*. При этом* $\Sigma \cap V_+ = l_0 \cap B_R$*, а для любой точки* (m, h) *пересечение* $F^{-1}(m, h) \cap \Sigma$ *либо пусто, либо совпадает с одной из орбит группы* G_{F_1}*. Множество критических значений отображений* F *совпадает с кривой* τ (см. (48)).

§ 3.8. Доказательство лемм § 3.4

Доказательство опирается на следующее техническое утверждение, которое будет неоднократно использовано нами в дальнейшем.

Лемма 3.8.0. *Пусть* $F(x, y)$ *— гладкая функция от* $n + 1$ *переменной* $(x, y_1, \ldots, y_n)$*, определенная в некоторой окрестности* U n*-мерного диска* $D_r = \{x = 0, |y| < r\} \subset \mathbf{R}^{n+1}_{xy}$*, где* $r > 0$ *и* $y = (y_1, \ldots, y_n)$*. Пусть ряд Тейлора этой функции по переменной* x *в любой точке* $(0, y) \in D_r$ *имеет вид* $F \sim \sum_{i=k}^{\infty} C_i(y)x^i$*, где* $k \geqslant 1$*. Иными словами, требуется, чтобы в любой такой точке* $\deg_x F \geqslant k$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется окрестность* $V \subseteq U$ *диска* $D_{r-\varepsilon}$*, в которой функция* F *представима в виде* $F = x^k G$*, где* $G = G(x, y)$ *— гладкая в* V *функция. При этом для любого* $s \geqslant k + 1$

$$G = \sum_{i=0}^{s-k-1} C_{i+k}(y)x^i + R_s(x, y)x^{s-k},$$

где R_s *— гладкая в* V *функция.*

Доказательство леммы 3.8.0. Рассмотрим функцию $\mathcal{R}_s := F - \sum_{i=k}^{s-1} C_i(y)x^i$ и функцию $G_s := \frac{1}{x^k}\mathcal{R}_s$ при $x \neq 0$, $G_s := 0$ при $x = 0$; во всех случаях $s \geqslant k + 1$. Покажем, что функция G_s имеет в V все частные производные по $x, y_1, \ldots, y_n$ до порядка $s - k - 1$ включительно, причем все эти производные непрерывны в V, где $V := \{|x| < \delta,\ |y| < r - \varepsilon\} \subset \mathbf{R}^{n+1}_{xy}$ при некотором $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, то есть

$$G_s \in C^{s-k-1}(V). \tag{50}$$

Обозначим через $\mathcal{R}^L_s$ L-ую частную производную функции $\mathcal{R}_s$ по переменным $y_1, \ldots, y_n$. Порядок такой производной обозначим через $|L|$. Ряд Тейлора функции $\mathcal{R}_s$ по переменной x, очевидно, имеет вид $\sum_{i=s}^{\infty} C_i(y)x^i$, где $C_i(y)$ — гладкие функции, так как являются производными по x функции F. Учитывая этот факт, нетрудно проверить, что найдутся константы $\delta_s > 0$ и $C_s > 0$, такие, что в $V_s := \{|x| < \delta_s,\ |y| < r - \varepsilon\}$

$$\left|\frac{\partial^l \mathcal{R}^L_s}{\partial x^l}(x, y)\right| \leqslant C_s|x|^{s-l}; \tag{51}$$

здесь и далее $l = 0, 1, \ldots, s-k-1$, $|L| < s-k-1$. Радиус диска пришлось уменьшить, чтобы отступить от границы области U, а это нужно для получения равномерных оценок. Дифференцируя по x произведение $\dfrac{1}{x^k}\mathcal{R}_s^L(x,y)$ и используя оценки (51), получаем, что найдется константа K_s, обладающая следующим свойством. В дополнении $V_s \setminus \{x=0\}$

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x^l}\left(\frac{1}{x^k}\,\mathcal{R}_s^L(x,y)\right)\right| \leqslant K_s|x|^{s-l-k}. \tag{52}$$

Рассмотрим функции

$$G_s^{lL} := \frac{\partial^l}{\partial x^l}\left(\frac{1}{x^k}\,\mathcal{R}_s^L(x,y)\right) \quad \text{в} \quad V \setminus \{x=0\}$$

и $G_s^{lL} := 0$ в $V \cap \{x=0\}$. Ясно, что $G_s^{lL}|_{l=0} = G_s^L$ в V, где справа стоит L-ая частная производная функции G_s по y. Действительно, слева и справа стоит функция, равная $\dfrac{1}{x^k}\,\mathcal{R}_s^L$ при $x \neq 0$ и равная нулю при $x=0$. Из (52) следует, что все функции G_s^{lL}, $l = 0, 1, \ldots, s-k-1$, $|L| \leqslant s-k-1$, непрерывны в V_s. Взяв $l=0$, получаем, что производные G_s^L функции G_s при $|L| \leqslant s-k-1$ непрерывны в V_s.

Покажем индукцией по $l = 0, 1, \ldots, s-k-1$, что

$$\left.\frac{\partial^l}{\partial x^l}\right|_{x=0} G_s^L = 0. \tag{53}$$

Действительно, как уже отмечалось выше, $G_s^L = 0$ при $x=0$. Пусть (53) верно при некотором $l = 0, 1, \ldots, s-k-2$. Тогда

$$\left.\frac{\partial^{l+1}}{\partial x^{l+1}}\right|_{x=0} G_s^L(x,y) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=0} \frac{\partial^l}{\partial x^l}\,G_s^L(x,y) = \lim_{x\to 0} Z(x,y),$$

где $Z(x,y) := \frac{1}{x}\dfrac{\partial^l}{\partial x^l}\,G_s^L(x,y)$. Используя (52), получаем $|Z| \leqslant K_s\dfrac{1}{|x|}\,|x|^{s-l-k} = K_s|x|^{s-l-k-1}$, $x \neq 0$. Так как $l \leqslant s-k-2$, то $s-l-k-1 \geqslant 1$, а следовательно, $\lim_{x\to 0} Z(x,y) = 0$, что и доказывает (53). Отсюда, из определения функций G_s^{lL}, $l = 0, 1, \ldots, s-k-1$, и из доказанной непрерывности этих функций получаем, что функция $G_s^L = G_s^{0L}$ имеет во всем V непрерывные производные по x до порядка $s-k-1$ включительно. Но G_s^L является L-ой частной производной функции G_s по переменным $y_1, \ldots, y_n$, а следовательно, функция G_s^{lL} является (l, L)-ой частной производной функции G_s, причем непрерывной в V_s, где $l = 0, 1, \ldots, s-k-1$, $|L| \leqslant s-k-1$.

Однако мы пока рассмотрели частные производные функции G_s лишь специального вида — сначала были взяты производные по переменным набора y, а затем по x. При $x \neq 0$ функция G_s гладкая, так что там порядок, в котором берутся производные, не имеет значения. Покажем, что он не имеет значения и при $x=0$. Действительно, мы можем сначала дифференцировать G_s по x. Наличие таких производных следует из доказанного выше факта о том, что функции G_s^L имеют непрерывные производные по x до порядка $s-k-1$ включительно, — нужно только положить $L=0$ или, что эквивалентно, $|L|=0$. Все эти производные при $x=0$ равны нулю (см. (53)), следовательно, и частные производные по $y_1, \ldots, y_n$ этих производных тоже равны нулю. Таким образом, если G_s, как сейчас, сначала дифференцировать по x, а затем по $y_1, \ldots, y_n$ или, как это делалось раньше, сначала по $y_1, \ldots, y_n$, а затем по x, то при $x = 0$ в обоих случаях получим нуль. Отсюда следует, что вообще при любом чередовании производных по x и по $y_1, \ldots, y_n$ при $x = 0$ получим нуль, то есть порядок взятия производных по $x, y_1, \ldots, y_n$ не имеет значения и при $x = 0$.

Имеются в виду те частные производные, в которых общее число производных по x, а также общее число производных по $y_1, \ldots, y_n$ ограничено величиной $s - k - 1$. Таким образом, $G_s \in C^{s-k-1}(V_s)$. В силу гладкости G_s в $U \setminus \{x = 0\}$ множество V_s можно растянуть вдоль оси x до множества $V = \{|x| < \delta,\ |y| < r - \varepsilon\}$ с δ, не зависящим от s, и мы получаем (50).

Рассмотрим функцию

$$G = \sum_{i=0}^{s-k-1} C_{i+k}(y)x^i + G_s(x, y).$$

Первое из двух слагаемых справа является гладкой функцией, а следовательно, G, как и G_s, принадлежит классу $C^{s-k-1}(V)$. Из определения G_s получаем, что функция G, в действительности, не зависит от s. Так как $s \geqslant k + 1$ произвольно, то отсюда получаем, что G бесконечное число раз дифференцируемая, то есть гладкая, функция. Покажем, что $F = x^k G$. При $x \neq 0$ это очевидно следует из определений G и G_s. При $x = 0$ из равенства $F = \sum_{i=k}^{s-1} C_i(y)x^i + \mathcal{R}_s$ и неравенства (51) при $L = 0$ и $l = 0$ получаем $F|_{x=0} = 0$, а значит, $F = x^k G$ во всем V. Заметим теперь, что ряд Тейлора по x для функции $\mathcal{R}_s$, $s > k$, имеет вид $\sum_{i=s}^{\infty} C_i(y)x^i$. Следовательно, полученное представление имеет место и для функции $\mathcal{R}_s$, то есть $\mathcal{R}_s = x^s R_s(x, y)$, где $R_s(x, y)$ — некоторая гладкая в V функция. Обозначим $\Sigma_{s-k-1} := \sum_{i=0}^{s-k-1} C_{i+k}x^i$, тогда в V имеем $G = \Sigma_{s-k-1} + G_s = \Sigma_{s-k-1} + x^{s-k} R_s$, что и завершает доказательство леммы 3.8.0.

3.8.А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4.А. Далее до конца §3.8 предполагаем, что $m_2 = 2$. Введем следующие обозначения:

$$\psi_i := F_i|_{\{p_2=0\}}, \quad i = 1, 2, \quad \widehat{\pi}_m := \psi_2|_{\psi_1^{-1}(m)}. \tag{54}$$

Из вида функции F_1 (см. (8) и (10)) следует, что поверхность $\psi_1^{-1}(m)$ при $m < 0$ состоит из двух связных компонент, которые лежат в полупространствах $\{q_2 > 0\}$ и $\{q_2 < 0\}$ соответственно. Сужения функций (p_1, q_1) на каждую из этих компонент могут быть координатами на них. В этом случае определим функцию $\pi_\mu(p_1, q_1)$, положив ее при $\mu > 0$ равной функции $\widehat{\pi}_{-\mu^2}$, суженной на верхнюю компоненту, то есть лежащую в полупространстве $\{q_2 > 0\}$ и выраженную через переменные (p_1, q_1). При $\mu < 0$ определим $\pi_\mu(p_1, q_1)$ точно так же, только заменим $\{q_2 > 0\}$ на $\{q_2 < 0\}$. Рассмотрим масштабную замену переменных

$$p_1 = \mu P_1, \quad q_i = \mu Q_i, \quad i = 1, 2. \tag{55}$$

Рассмотрим связанное с этой заменой преобразование функции $\pi_\mu(p_1, q_1)$, $0 < |\mu| < \mu_0$, в функцию $\Pi(\mu, P, Q)$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$:

$$\Pi(\mu, P, Q) := \frac{1}{\mu^3}\,\pi_\mu(\mu P, \mu Q), \quad \mu \neq 0 \quad \text{и} \quad \Pi(0, P, Q) = \Phi^0(P, Q), \tag{56}$$

где

$$\Phi^0 := \Phi^0_m(p_1, q_1)|_{m=-1,\, p_1=P,\, q_1=Q},$$

а функция $\Phi^0_m(p_1, q_1)$ является «невозмущенным приближением» к функции $\Phi_m(p_1, q_1)$ и определена в начале § 3.2 (см. также (29) и (26)). Из (29) легко следует, что

$$\Phi^0 = LPQ(1 + z(P, Q)), \quad L := \sqrt{\frac{8}{m_2}} \neq 0, \tag{57}$$

где $z(P, Q)$ — гладкая функция, такая, что $\deg z \geqslant 1$. Покажем, что

$$\Pi = \Phi^0(P, Q) + \mu Z(\mu, P, Q), \tag{58}$$

где $Z(\mu, P, Q)$ (а значит, и вся функция $\Pi(\mu, P, Q)$) является гладкой в некоторой окрестности нуля $0 \in \mathbf{R}^3_{\mu PQ}$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$\mathcal{R}(\mu, P, Q) := \pi_\mu(\mu P, \mu Q) - \Phi^0_{-\mu^2}(\mu P, \mu Q). \tag{59}$$

Обозначим через $Q_2(\mu, P, Q)$ решение уравнения $\psi_1(\mu P, \mu Q, \mu Q_2) = -\mu^2$. Существование такой функции при малых $P^2 + Q^2$ и ее гладкость легко следуют из теоремы о неявной функции. Эта функция является выраженным через переменные (μ, P, Q) «возмущенным» аналогом функции $q_2(\mu, p_1, q_1)$, определенной формулой (31). Используя вид F_1 и F_2 (см. (8) и (10)) и вид функции $Q_2(\mu, P, Q)$, нетрудно показать, что $\mathcal{R}(\mu, P, Q)$ при достаточно малых $P^2 + Q^2$ — гладкая функция, ряд Тейлора которой по μ имеет вид

$$\mathcal{R} \sim \sum_{i=4}^{\infty} C_i(P, Q)\mu^i. \tag{60}$$

Следовательно, функция $\mathcal{R}(\mu, P, Q)$ удовлетворяет всем условиям леммы 3.8.0 при $k = 4$, $x = \mu$ и $y = (P, Q)$. Из этой леммы следует, что $\mathcal{R} = \mu^4 Z$, где $Z(\mu, P, Q)$ — гладкая функция. Из (29) следует, что

$$\Phi^0_{-\mu^2}(\mu P, \mu Q) = \mu^3 \Phi^0_{-1}(P, Q) = \mu^3 \Phi^0(P, Q).$$

Из этих двух фактов и определения Π (см. (56)) получаем $\Pi = \Phi^0 + \mu Z$. Так как Φ^0 — гладкая (см. (57)), то и функция Π будет гладкой. Представление (58) доказано.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P}(\mu, P, Q) = \frac{\partial \Pi}{\partial Q}(\mu, P, Q) = 0. \tag{61}$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ матрицу Гесса функции Π по переменным (P, Q):

$$\mathcal{H}(\mu, P, Q) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial (P, Q)^2}(\mu, P, Q).$$

Тогда из (58) и (57) следует

$$\mathcal{H}(0, 0, 0) = \frac{\partial^2 \Phi^0}{\partial (P, Q)^2}(0, 0, 0) = G_2,$$

где G_2 — невырожденная матрица размера 2×2, такая, что $\det G_2 = -L^2$. Таким образом, $\det \mathcal{H}(0,0,0) \neq 0$. Из вида Π и $\Phi^0 = \Phi^0_{-1}$ (см. (56), (58) и (57)) имеем $\dfrac{\partial \Pi}{\partial(P,Q)}(0,0,0) = 0$. Из этих двух фактов, из теоремы о неявной функции и из гладкости функции Π следует, что в некоторой окрестности $\mathcal{D}$ нуля $0 \in \mathbf{R}^3_{\mu PQ}$ система (61) разрешима в следующем смысле. Все ее решения $(\mu, P, Q) \in \mathcal{D}$ лежат на кривой вида $P = A(\mu)$, $Q = B(\mu)$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, где $\mu_0 > 0$, а $A(\mu)$ и $B(\mu)$ — гладкие функции, причем

$$A(0) = B(0) = 0. \tag{62}$$

Отсюда получаем, что существуют $m_0 > 0$ и окрестность Ω нуля $0 \in \mathbf{R}^2_{PQ}$, такие, что при каждом $m \in (-m_0, 0)$ функция $\widetilde{\Pi}_m$, где $\widetilde{\Pi}_m(P,Q) = \Pi(\mu, P, Q)|_{\mu=\sqrt{-m}}$, будет иметь в Ω единственную критическую точку $P = A(\mu)$, $Q = B(\mu)$, где $\mu = \sqrt{-m}$, причем эта точка будет невырожденной. Переходя к исходным координатам (p_1, q_1) (см. (56) и (55)) и учитывая гладкость функций $A(\mu)$ и $B(\mu)$, а также то, что (55) можно рассматривать как преобразование гомотетии, получаем утверждение леммы 3.4.А, где $a_\mu = \mu A(\mu)$ и $b_\mu = \mu B(\mu)$. В частности, получаем неравенство (43) и требуемую единственность.

3.8.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4.Б. Вернемся к разрешающим переменным (P, Q), рассмотренным в пп. 3.8.А. Сделаем еще одну замену переменных

$$Y := P - A(\mu), \quad X := Q - B(\mu)$$

в функции Π и вычтем из нее $\mathcal{H}_\mu := \Pi(\mu, A(\mu), B(\mu))$; полученную функцию обозначим через Ψ:

$$\Psi(\mu, X, Y) := \Pi(\mu, Y + A(\mu),\, X + B(\mu)) - H_\mu. \tag{63}$$

С функцией $\phi_\mu(p_1, q_1)$ она связана соотношением

$$\phi_\mu(p_1, q_1) = \mu^3 \Psi\left(\mu, \frac{1}{\mu}(q_1 - b_\mu),\, \frac{1}{\mu}(p_1 - a_\mu)\right), \quad \mu > 0. \tag{64}$$

Так как $\Pi(\mu, P, Q)$, $A(\mu)$ и $B(\mu)$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, — гладкие функции, то при достаточно малом $\mu_0 > 0$ функция Ψ тоже будет гладкой в некоторой окрестности $D' \subset \mathbf{R}^3_{\mu XY}$ нуля $0 \in \mathbf{R}^3$, соответствующей области $D \subset \mathbf{R}^3_{\mu PQ}$. Покажем, что в D'

$$\Psi(\mu, X, Y) = \Psi(0, X, Y) + \mu R(\mu, X, Y), \tag{65}$$

где R — гладкая функция, такая, что $\deg_{XY} R \geqslant 2$, а

$$\Psi(0, X, Y) = \Phi^0(X, Y), \quad \Phi^0(X, Y) = \Phi^0_m(p_1, q_1)|_{m=-1, p_1=Y, q_1=X}. \tag{66}$$

Оба равенства (66) очевидно следуют из определения функции $\Psi(\mu, X, Y)$, заданного (63), (56), и из (62). Далее рассуждаем так же, как при выводе представления (58). Ясно, что $\deg_\mu(\Psi(\mu, X, Y) - \Psi(0, X, Y)) = 1$. Отсюда и из леммы 3.8.0 получаем вид (65). Оценим теперь $\deg_{XY} R$. Легко видеть, что $\Psi(\mu, 0, 0) = 0$ и что точка $X = Y = 0$ является критической для функции Ψ_μ, где $\Psi_\mu(X, Y) := \Psi(\mu, X, Y)$, при всех $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, $\mu_0 > 0$ (см. конец доказательства леммы 3.4.А). Следовательно, эта точка является критической и для функции $R_\mu(X, Y)$, где $R_\mu(X, Y) := R(\mu, X, Y)$ (см. (65) и (57)). Иными словами, $\deg_{XY} \Psi(\mu, X, Y) \geqslant 2$, и поэтому $\deg_{XY} R \geqslant 2$. Представление (65) полностью доказано.

Покажем, что найдутся константы $\mu_0 > 0$, $c > 0$ и $\alpha > 0$, такие, что в круге $\Omega = \Omega_{2\alpha}$ радиуса 2α с центром в нуле $0 \in \mathbf{R}^2_{XY}$ нулевая линия $\Psi_\mu^{-1}(0)$ функции Ψ обладает следующими свойствами. При любом $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$

$$\Psi_\mu^{-1}(0) \cap \Omega = \lambda_\mu \cup \nu_\mu, \tag{67}$$

где λ_μ и ν_μ — гладкие кривые, гладко зависящие от μ и пересекающиеся в единственной точке $X = Y = 0$, причем под ненулевым углом. И обе эти кривые с обоих концов выходят на границу круга Ω, разделяя его на четыре части. Кроме того, расстояние в метрике C^1 от кривой λ_μ до координатной оси $\{Y = 0\}$ не больше $c\mu$ и, аналогично, C^1-расстояние от ν_μ до оси $\{X = 0\}$ тоже не больше $c\mu$.

Для доказательства представления (67) сделаем замену переменных $(X, Y) \mapsto (X, U)$, где $U = \dfrac{Y}{X}$, и рассмотрим функцию $\Xi_\mu(X, U) := \dfrac{1}{X^2}\,\Psi_\mu(X, UX)$. Так как $\deg \Psi_\mu(X, Y) \geqslant 2$, то легко видеть, что $\deg_X \Psi_\mu(X, UX) \geqslant 2$. Отсюда и из леммы 3.8.0 получаем, что функция $\Xi(\mu, X, U) := \Xi_\mu(X, U)$ корректно определена в некоторой окрестности D' нуля $0 \in \mathbf{R}^3_{\mu XU}$ и является гладкой. Из (65), (66) и (57) получаем

$$\Psi = LXY + LXYz(X, Y) + \mu R(\mu, X, Y), \tag{68}$$

где $\deg z \geqslant 1$ и $\deg_{XY} R \geqslant 2$. Это позволяет на основе леммы 3.8.0 уточнить вид Ξ:

$$\Xi = LU + LXUS(X, U) + \mu T(\mu, X, U), \tag{69}$$

где S и T — гладкие функции. Из этого представления следует

$$\left.\frac{\partial \Xi}{\partial U}\right|_{\mu = X = U = 0} = L \neq 0.$$

Отсюда и из теоремы о неявной функции получаем, что уравнение $\Xi(\mu, X, U) = 0$ имеет решение вида $U = U(\mu, X)$, определенное в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ нуля $0 \in \mathbf{R}^2_{\mu X}$, причем $U(0, X) \equiv 0$ (см. (69)). Следовательно, $\deg_\mu U(\mu, X) \geqslant 1$ и, применяя еще раз лемму 3.8.0, получаем, что $U(\mu, X) = \mu f(\mu, X)$, где f — гладкая функция в области $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^2_{\mu X}$.

Переходя снова к переменным (X, Y), получаем, что существуют константы $\mu_0 > 0$ и $X_0 > 0$, такие, что при любом $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ имеет место вложение $\lambda_\mu \subset \Psi_\mu^{-1}(0)$, где через λ_μ обозначен график функции

$$Y = \mu X f(\mu, X), \tag{70}$$

рассматриваемой как функция от $X \in (-X_0, X_0)$. Из гладкости функции f следует, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial X}\,[\mu X f(\mu, X)]\right| = \mu \left| f(\mu, X) + X \frac{\partial f}{\partial X}(\mu, X)\right| \leqslant \frac{c}{2}\mu$$

в некоторой области $\mathcal{O} \ni 0$ и при некотором $c > 0$. Отсюда и из тождества $Y(\mu, 0) \equiv 0$ получаем

$$\rho_1(\lambda_\mu, \{Y = 0\}) \leqslant c\mu \quad \text{при любом} \quad \mu \in (-\mu_0, \mu_0). \tag{71}$$

Аналогичное рассуждение можно провести, поменяв в нем местами переменные X и Y. Получаем существование гладкой кривой ν_μ, гладко зависящей от μ и обладающей другими свойствами, аналогичными свойствам кривой λ_μ, в частности,

$$\rho_1(\nu_\mu, \{X = 0\}) \leqslant c\mu, \quad \mu \in (-\mu_0, \mu_0). \tag{72}$$

Главная часть функции Ψ равна LXY, $L \neq 0$ (см. представление (68)), поэтому в достаточно малой окрестности нуля $0 \in \mathbf{R}^3_{\mu XY}$ уравнение $\Psi(\mu, X, Y) = 0$ других решений, кроме двух, соответствующих параметризованным кривым λ_μ и ν_μ, не имеет. Таким образом, представление (67) доказано. Учитывая, что $A(0) = B(0) = 0$ (см. (62)), получаем, что в формулах (71) и (72) прямые $\{Y = 0\}$ и $\{X = 0\}$ можно заменить на $\{P = 0\}$ и $\{Q = 0\}$ соответственно (см. (63)). Возвращаясь к исходным координатам (p_1, q_1) (см. (64)), получим все утверждения леммы 3.4.Б.

В оставшейся части § 3.8 приведено доказательство леммы 3.4.В. Снова воспользуемся разрешающими переменными (X, Y) и рассмотрим функцию $\Psi_\mu(X, Y) = \Psi(\mu, X, Y)$, где Ψ определена формулой (63). Лемма 3.4.В будет легко получена из следующего утверждения, являющегося аналогом леммы 3.4.В, отвечающим переменным (X, Y).

Лемма 3.8.В. *Найдутся положительные константы α, μ_0 и c, такие, что при любом $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ будут верны следующие утверждения.*

i) *В круге $B_\alpha = \{X^2 + Y^2 < \alpha^2\}$ все линии $\Psi_\mu^{-1}(H)$ будут гладкими за исключением линии $\Psi_\mu^{-1}(0)$, состоящей из двух гладких кривых λ_μ и ν_μ, пересекающихся в нулевой точке $X = Y = 0$. Кроме того, взаимное расстояние в метрике C^1 между линиями $\Psi_\mu^{-1}(H)$ и $\Psi_0^{-1}(H)$ в круге B_α будет не больше $c\mu$. Более точно,*

$$\rho_1(\Psi_0^{-1}(H) \cap B_\alpha,\, \Psi_\mu^{-1}(H)) + \rho_1(\Psi_\mu^{-1}(H) \cap B_\alpha,\, \Psi_0^{-1}(H)) \leqslant c\mu. \tag{73}$$

ii) *Кривая λ_μ делит круг B_α на два открытых «полукруга» B^1_α и B^2_α, обладающих следующими свойствами. Линия $\Psi_\mu^{-1}(H) \cap B_\alpha$ при любом $0 < |H| < \alpha^2/100$ состоит из двух связных компонент, одна из которых лежит в B^1_α, а другая — в B^2_α. Кроме того, при каждом $i = 1, 2$ кривые $\Psi_\mu^{-1}(H) \cap B^i_\alpha$ гладкие и гладко зависят от (μ, H) при любых $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ и любых $|H| < \alpha^2/100$, то есть включая $H = 0$, и эти кривые тривиально расслаивают полукруг B^i_α. Аналогичными свойствами обладают и два полукруга, на которые круг B_α делит ν_μ.*

3.8.Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.8.В. Исследуем вначале общую структуру семейства линий уровня функции $\Psi_0(X, Y)$ в круге B_α и семейства ортогональных к ним линий. Так как

$$\Psi_0(X, Y) = \Phi^0(X, Y) = \Phi^0_m(p_1, q_1)|_{m=-1, p_1=Y, q_1=X}$$

(см. (65) и (66)), то из (29) следует, что «невозмущенная» функция $\Psi_0(X, Y)$ имеет вид

$$\Psi_0 = LXY\sqrt{1 + L_1(X^2 + Y^2)}, \tag{74}$$

где $L_1 = L_1(m_1, m_2) > 0$ — некоторая константа. Следовательно, ее линии уровня $\Psi_0^{-1}(H)$ в круге B_α при малых $\alpha > 0$ близки к линиям уровня $\{LXY = H\}$ функции LXY, являющимся при $H \neq 0$ гиперболами. Линии семейства $\{LXY = H\}$ являются интегральными кривыми уравнения в дифференциалах $XdY + YdX = 0$, поэтому семейство ортогональных линий удовлетворяет уравнению $YdY - XdX = 0$, то есть имеет вид $Y^2 - X^2 = C$. Это то же самое семейство «обобщенных гипербол», но повернутых относительно гипербол семейства $XY = C_1$ на угол $\pi/4$. Легко видеть, что линии семейства $\Psi_0^{-1}(H)$ являются искажениями линий семейства $\{LXY = H\}$, причем эти искажения тем меньше, чем меньше расстояние от точки (X, Y) до нуля. То же самое верно и для линий, ортогональных к линиям семейства $\{LXY = H\}$: они являются деформациями гипербол $Y^2 - X^2 = C$, причем эти деформации тем меньше, чем меньше $X^2 + Y^2$. Из симметрий функции $\Psi_0(X, Y)$ следует, что среди этих линий обе биссектрисы $Y = \pm X$, а любая линия, отличная от биссектрисы, пересекает координатную ось $\{Y = 0\}$ либо $\{X = 0\}$ в точности под прямым углом.

Пусть $(X_0, Y_0) \neq 0$ — любая точка круга B_α, а $H_0 := \Psi_0(X_0, Y_0)$. Обозначим через $\gamma = \gamma(X_0, Y_0)$ проходящую через эту точку кривую семейства линий, ортогональных к линиям семейства $\Psi_0(X, Y) = H$. Иными словами, γ — траектория градиентного векторного поля, отвечающего функции $\Psi_0(X, Y)$. Обозначим через (X_1, Y_1) точку на этой дуге, такую, что $\Psi_\mu(X, Y) = H_0$. Заметим, что из (74) и представления (65) следует, что в круге B_α справедливы равномерные оценки градиентов функций Ψ_0 и R_μ

$$|\nabla\Psi_0(X, Y)| \geqslant \frac{L}{2}\, r, \quad |\nabla R_\mu(X, Y)| \leqslant c_1 \mu r$$

при некотором $c_1 > 0$, где $r = r(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Из этих неравенств легко следует, что, во-первых, линии $\Psi_\mu(X, Y)$ будут гладкими везде кроме точки $X = Y = 0$. Во-вторых, что точка (X_1, Y_1), определяемая точкой (X_0, Y_0), существует и единственна, причем найдется константа $c_2 > 0$, не зависящая от $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ и от точки $(X_0, Y_0) \in B_\alpha \setminus \{0\}$, такая, что евклидово расстояние между точками (X_1, Y_1) и (X_0, Y_0) будет не больше $c_2 \mu r_0$, где $r_0 = r(X_0, Y_0)$. Ясно, что в круге $B_{2\alpha}$ (радиуса 2α)

$$\left\| \frac{\partial^2 \Psi_\mu}{\partial (X, Y)^2} \right\| \leqslant 2L,$$

где слева стоит норма матрицы Гесса функции Ψ_μ. Следовательно, угол между касательной к линии $\Psi_0^{-1}(H_0)$ в точке (X_0, Y_0) и касательной к линии $\Psi_\mu^{-1}(H_0)$ в точке (X_1, Y_1) будет не больше $c_3\mu$, где $c_3 > 0$. Отсюда получаем $\rho_1(\Psi_0^{-1}(H) \cap B_\alpha,\, \Psi_\mu^{-1}(H)) \leqslant \frac{c}{2}\,\mu$ при некотором $c > 0$ равномерно по всем H, таким, что линия $\Psi_\mu^{-1}(H)$ пересекается с кругом B_α. Используя те же самые дуги траекторий градиентного векторного поля

$$\dot X = \frac{\partial\Psi_0}{\partial X}, \quad \dot Y = \frac{\partial\Psi_0}{\partial Y},$$

соединяющие точки (X_0, Y_0) и (X_1, Y_1), нетрудно получить аналогичное неравенство, в котором кривые $\Psi_0^{-1}(H)$ и $\Psi_\mu^{-1}(H)$ поменялись местами: $\rho_1(\Psi_\mu^{-1}(H) \cap B_\alpha,\, \Psi_0^{-1}(H)) \leqslant \frac{c}{2}\,\mu$. Таким образом, утверждение 3.8.В.i полностью доказано.

Из построения точки (X_1, Y_1) следует, что она гладко зависит от (μ, X_0, Y_0) при $(X_0, Y_0) \in B_\alpha \setminus \{0\}$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$. Из (67) (см. также лемму 3.4.Б) следует, что кривые λ_μ и ν_μ разбивают круг B_α на четыре открытых «квадранта», в каждом из которых функция Ψ_μ знакоопределена, и знак этой функции в 1-ом и 3-ом таком квадранте положителен, а в остальных двух отрицателен. Используя эти два факта, получаем, во-первых, что линия $\Psi_\mu^{-1}(H)$ при $0 < |H| < \alpha^2/100$ состоит из двух связных компонент, лежащих в квадрантах с номерами одинаковой четности. Во-вторых, рассмотрим любой из двух полукругов, на которые делит B_α кривая λ_μ. Тогда связные компоненты этих линий, лежащие в этом полукруге, вместе с пересечением с ним линии $\Psi_\mu^{-1}(0)$ будут гладко зависеть от (μ, H) и будут тривиально расслаивать соответствующую часть этого полукруга. Утверждение 3.8.В.ii полностью доказано, а значит, полностью доказана и вся лемма 3.8.В.

3.8.Д. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4.В. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Phi}^0(X, Y) := \Phi^0(X + B(\mu), Y + A(\mu)).$$

Линии уровня $(\widetilde{\Phi}^0)^{-1}(H)$ этой функции получаются в координатах (X, Y) из линий уровня $(\Phi^0)^{-1}(H)$ просто сдвигом на вектор $(B(\mu), A(\mu))$. Так как $|B(\mu)| \leqslant c\mu$ и $|A(\mu)| \leqslant c\mu$, то отсюда следует, что оценка (73) останется верной, если в ней заменить $\Psi_0 = \Phi^0$ на $\widetilde{\Phi}^0$.

Полученное неравенство, как и все утверждения леммы 3.8.В, касается свойств линий уровня функций от переменных (X, Y). Исходные переменные (p_1, q_1) выражаются через эти переменные следующим образом:

$$p_1 = \mu(Y + A(\mu)), \quad q_1 = \mu(X + B(\mu))$$

(см. (63), (64)). Отсюда и из определения функций $\Psi_\mu(X, Y)$, $\widetilde{\Phi}^0(X, Y)$, $\phi_\mu(p_1, q_1)$ и $\Phi^0_{-\mu^2}(p_1, q_1)$ (см. (63), (56), (44), (29)), следует, что если в первых двух функциях сделать замену переменных $(X, Y) \mapsto (p_1, q_1)$ и разделить эти функции на μ^3, то получим функции $\phi_\mu(p_1, q_1)$ и $\Phi^0_{-\mu^2}(p_1, q_1)$ соответственно. Из этих двух фактов и из подкорректированного выше неравенства (73) получаем оценку леммы 3.4.В.i для C^1-расстояния. Переменные (p_1, q_1) получаются из (X, Y) композицией сдвига и гомотетии. Из вида этих преобразований и из леммы 3.8.В, а также из определения кривых λ_μ и ν_μ и из гладкости функций $a(\mu)$ и $b(\mu)$, определяющих упомянутый сдвиг, следуют утверждения леммы 3.4.В о числе и расположении связных компонент линий $\phi_\mu^{-1}(h)$ при $h \neq 0$ и об их гладкости, а также утверждения о гладкой зависимости кривых $\phi_\mu^{-1}(h) \cap \widetilde{w}^i_{\mu\alpha}$ от (μ, h) и о тривиальном расслоении этими кривыми частей полукругов $\widetilde{w}^i_{\mu\alpha}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, все утверждения леммы 3.4.В доказаны.

§ 3.9. Доказательство утверждений § 3.5 (кроме леммы 3.5.В)

3.9.А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5.А О КОРРЕКТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВАХ КРИВОЙ l_0. Слева в уравнении (45) стоит функция от (μ, γ), главная часть которой в точке $\mu = \gamma = 0$ является невырожденной квадратичной формой. Опираясь на лемму 3.8.0, как в § 3.8 при получении функции $Y = Y_\mu(X)$ (см. (70)), или просто применяя лемму Морса, получаем следующие факты. Уравнение (45) имеет единственное решение $\gamma = \gamma(\mu) = \gamma_\mu$, определенное в некоторой окрестности точки $\mu = 0$ и имеющее вид $\gamma_\mu = c\mu + O(\mu_2)$, где $c > 0$, а через $O(x)$ здесь и далее обозначена такая функция, что $|O(x)| \leqslant cx$ при $|x| < x_0$, $x_0 > 0$, $c > 0$. Это решение будет гладко зависеть от $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, где $\mu_0 > 0$. Оно представляется также в виде графика гладкой функции $\gamma \mapsto \mu$, такой, что

$$\mu(\gamma) = \mu_\gamma = \frac{1}{c}\,\gamma + O(\gamma^2). \tag{75}$$

Так как γ_μ является единственным решением уравнения (45) с положительной производной в нуле, то корректно определение (46) кривой l_0. Обозначим $g_1(\gamma) := a_{\mu_\gamma}$, $g_2(\gamma) := b_{\mu_\gamma}$ и положим $\gamma = q_2$. Используя (46) и (75), получаем, что кривая $l_0 \cup \{0\}$ совпадает с графиком гладкого отображения $g = (g_1, g_2)$, $g\colon q_2 \mapsto (p_1, q_1)$, $q_2 \in [0, K)$, $K > 0$. Из (43) и (75) следует (47). Лемма 3.5.А доказана.

3.9.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5.Б О ВИДЕ КРИВОЙ τ. Согласно доказанной лемме 3.5.А, кривая l_0 имеет вид графика гладкого отображения $g\colon (0,K) \mapsto \mathbf{R}^2_{p_1q_1}$, $K > 0$, причем функции $(g_1(q_2), g_2(q_2)) = g(q_2)$ удовлетворяют неравенству (47). Подставим $(p_1, q_1) = g(q_2)$ в функцию $\mathcal{F}_1(p_1, q_1)$. Используя то, что $\mathcal{F}_1 = F_1|_{\{p_2=0, q_2>0\}}$, и вид F_1 (см. (8), (9) и (10)), получаем, что функция $f(q_2) := \mathcal{F}_1(g_1(q_2),\, g_2(q_2))$ не будет иметь критических точек на интервале $(0, K)$. Следовательно, сужение $F_1|_{l_0} = \mathcal{F}_1|_{l_0}$ функции F_1 на l_0 не имеет критических точек. Это означает, что и сужение $F|_{l_0}$ не имеет критических точек. Отсюда и из гладкости вектор-функции $F = (F_1, F_2)$ следует гладкость кривой $\breve{\tau} = F(l_0)$.

Подставим $(p_1, q_1) = g(q_2)$ в обе функции $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Из (8), (9) и (10) (см. также (18) и (19)), учитывая, что $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, получаем

$$\mathcal{F}_1|_{l_0} = c_1 q_2^2 + O(q_2^3), \quad \mathcal{F}_2|_{l_0} = c_2 q_2^4 + O(q_2^5),$$

где $c_1 > 0$, $q_2 = q_2|_{l_0}$ — координата на l_0. Отсюда следует наличие и вид касательной к кривой τ в точке $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$.

3.9.В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5.Г О ВИДЕ ЛИНИИ χ_{00}. Рассмотрим функции $S_i(\mu,\, P,\, Q)$, следующим образом полученные из функций $\psi_i(p_1, q_1, q_2)$, $i = 1, 2$ (см. (54)):

$$S_1 = \frac{1}{\mu^2}\, \psi_1(\mu P,\, \mu Q,\, \mu), \quad S_2 = \frac{1}{\mu^{m_1+m_2}}\, \psi_2(\mu P,\, \mu Q,\, \mu).$$

Из (8), (10), (18) и (19) следует, что

$$\deg_\mu \psi_1(\mu P,\, \mu Q,\, \mu) \geqslant 2 \quad \text{и} \quad \deg_\mu \psi_2(\mu P,\, \mu Q,\, \mu) \geqslant m_1 + m_2.$$

Отсюда и из леммы 3.8.0 получаем корректность определения и гладкость функций S_1 и S_2. Более того, из всех этих фактов следует, что

$$S_i = \phi_i + \mu \mathcal{R}_i(\mu, P, Q), \quad \text{где} \quad \phi_i(P, Q) := \mathcal{F}_i^0(p_1, q_1, q_2)|_{p_1=P,\, q_1=Q,\, q_2=1}, \quad i = 1, 2;$$

здесь $\mathcal{F}_1^0$ и $\mathcal{F}_2^0$ определены формулами (20), а $\mathcal{R}_1^0$ и $\mathcal{R}_2^0$ — некоторые гладкие функции от (μ, P, Q). Рассмотрим любой из $2m_2$ лучей $l^0 = l_i^0$, составляющих $(\mathcal{F}^0)^{-1}(0)$ (см. также лемму 3.1.Г). Из вида множества критических точек отображения $\mathcal{F}^0$ (см. лемму 3.1.Д) следует, что l^0 не содержит критических точек этого отображения. Полупрямая l^0 трансверсально пересекает плоскость $\{Q_2 = 1\} \subset \mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2}$, и мы обозначим через $(P_0, Q_0, 1)$ координаты точки пересечения. Из этой трансверсальности следует, что точка (P_0, Q_0) не является критической для отображения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, а значит, и для отображения S^μ при любом $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, где $\mu_0 > 0$ достаточно мало, $S^\mu := (S_1^\mu, S_2^\mu)$, а $S_i^\mu(P, Q) := S_i(\mu, P, Q)$, $i = 1, 2$. Отсюда и из теоремы о неявной функции следует, что система $S_1(\mu, P, Q) = S_2(\mu, P, Q) = 0$ имеет в некоторой окрестности точки $(0, P_0, Q_0) \in \mathbf{R}^3_{\mu PQ}$ единственное решение $(P, Q) = (y(\mu), x(\mu))$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, где $\mu_0 > 0$, и что функции $y(\mu)$ и $x(\mu)$ будут гладкими, а $y(0) = P_0$, $x(0) = Q_0$. Переходя к исходным переменным (p_1, q_1, q_2), получаем, что гладкое решение системы

$$F_1|_{\{p_2=0\}}(p_1, q_1, q_2) = F_2|_{\{p_2=0\}}(p_1, q_1, q_2) = 0,$$

близкое при $q_2 > 0$ к лучу $l^0 = l_i^0$, единственно и имеет вид графика гладкого отображения $\lambda\colon q_2 \mapsto (p_1, q_1)$, $q_2 \in (-\mu_0, \mu_0)$, где $\lambda_1 = q_2 y(q_2)$, $\lambda_2 = q_2 x(q_2)$. Отсюда легко следует утверждение леммы 3.5.Г.

3.9.Г. ЗАМЕЧАНИЕ. Действительно, из приведенных выше доказательств лемм 3.5.А и 3.5.Г следует, что кривые l_0 и l_i продолжаются до гладких кривых в пространстве $\{p_2 = 0\}$, пересекающих точку $p_1 = q_1 = q_2 = 0$. Нетрудно показать, что продолженные кривые являются особыми в том же смысле, что и соответствующие продолжаемые кривые. Но далее эти факты нам не понадобятся.

§ 3.10. Доказательство утверждений § 3.6 и § 3.7 и леммы 3.5.В

Обозначим $\kappa^1_{\alpha r} := k_{\alpha r}$ при $m_2 = 1$, а при $m_2 = 2$ возьмем $\kappa^2_{\alpha r} := k_{\alpha r} \setminus \overline{k_{1/\alpha,r}}$, где $\alpha > 1$, а $\overline{k_{1/\alpha,r}}$ — замыкание полного конуса $k_{1/\alpha,r}$ (см. (42)).

Лемма 3.10.А. (Частичный аналог для кривых χ_{mh} леммы 3.6.A.i.) *Для любого $\alpha > 1$ существуют константы $r_0 > 0$ и $c > 0$, такие, что при любом $r \in (0, r_0)$ будут верны следующие утверждения. Кривые $\chi_{mh} \cap \kappa_{\alpha r}$ гладкие и задают гладкое слоение на множестве $\kappa_{\alpha r} = \kappa^{m_2}_{\alpha r}$. Пусть $(p_1, q_1, q_2) \in \kappa_{\alpha r}$ — любая точка, и пусть $(m, h) = \mathcal{F}(p_1, q_1, q_2)$. Пусть $h' \in \mathbf{R}$ таково, что $|h' - h| \leqslant \frac{c}{100}\rho^{m_1+m_2+1}$, где $\rho = |(p_1, q_1, q_2)|$. Тогда расстояние от точки (p_1, q_1, q_2) кривой χ_{mh} до кривой $(\mathcal{F}^0)^{-1}(m, h')$ будет не больше $c\rho^2$ в метрике C^0 и не больше $c\rho$ в метрике C^1.*

3.10.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.10.А. Фиксируем точку $(p_1, q_1, q_2) \in \kappa_{\alpha r}$ и пусть $\rho = |(p_1, q_1, q_2)|$. Рассмотрим замену переменных $(p_1, q_1, q_2) = \rho(P_1, Q_1, Q_2)$ и рассмотрим функции, отвечающие этой замене:

$$\widetilde{\psi}_i(\rho, P_1, Q_1, Q_2) := \widetilde{\psi}_{\rho i}(P_1, Q_1, Q_2) := \frac{1}{\rho^{n_i}}\, \psi_i(\rho P_1, \rho Q_1, \rho Q_2),$$

$i = 1, 2$, где $n_1 = 2$, $n_2 = m_1 + m_2$. Используя (8), (10), (18) и (19), а также лемму 3.8.0, получаем, что эти функции продолжаются на значения $\rho \in (-\rho_0, \rho_0)$ при некотором малом $\rho_0 > 0$, причем

$$\widetilde{\psi}_i(\rho, P_1, Q_1, Q_2) = \mathcal{F}^0_i(P_1, Q_1, Q_2) + \rho \mathcal{Z}_i(\rho, P_1, Q_1, Q_2), \tag{76}$$

где $\mathcal{Z}_i$ — гладкие функции, $i = 1, 2$. Пусть $G = (G_1, G_2)$, где $G_i = G_i(P_1, Q_1, Q_2)$, — произвольная вектор-функция. Пусть $\dfrac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(P_1, Q_1, Q_2)}$ — ее матрица Якоби; обозначим через $D_G = D_G(P_1, Q_1, Q_2)$ квадратный корень из суммы квадратов всех миноров порядка 2 этой матрицы в точке (P_1, Q_1, Q_2). Покажем, что существует константа $c = c(\alpha) > 0$, такая, что

$$D_{\widetilde{\psi}}(P_1, Q_1, Q_2) \geqslant c s^{m_1+m_2} \tag{77}$$

для любой точки $(P_1, Q_1, Q_2) \in \kappa_{\alpha 1}$, где $s = |(P_1, Q_1, Q_2)|$. Действительно, из леммы 3.1.Д и вида матриц Якоби (23) и (24) следует, что найдется константа $c > 0$, такая, что $D_{\mathcal{F}^0}(P_1, Q_1, Q_2) \geqslant 2c s^{m_1+m_2}$ в любой точке $(P_1, Q_1, Q_2) \in \kappa_{\alpha\infty}$. Отсюда, используя представление (76), получаем (77). Неравенство (77) позволяет применить теорему о неявной функции к системе уравнений $\widetilde{\psi}_{\rho 1} = M$, $\widetilde{\psi}_{\rho 2} = H$ и, в частности, представить кривые $\widetilde{\psi}^{-1}_{\rho}(M, H) \cap \kappa_{\alpha 1} \subset \mathbf{R}^3_{P_1 Q_1 Q_2}$ в виде объединения графиков нескольких гладких отображений от одной из переменных (P_1, Q_1, Q_2). В целом, используя (77) и (76), получаем факты о свойствах функций $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_2$, из которых при возвращении к исходным переменным (p_1, q_1, q_2) получаем все утверждения леммы 3.10.А.

3.10.В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.6.А. Докажем утверждение 3.6.А.i. Из вида функций $\mathcal{F}_1^0$ и $\mathcal{R}_1 := R_1|_{V_+}$ (см. (18) и (10) соответственно) легко получить, что для любого $\alpha > 1$ найдутся константы $r > 0$, $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, обладающие следующими свойствами. В любой точке $(p_1, q_1, q_2) \in k_{\alpha r}$ верны равенства

$$\left|\frac{\partial \mathcal{F}_1^0}{\partial q_2}\right| \geqslant c_1\rho, \quad \left|\nabla \mathcal{F}_1^0\right| \leqslant c_2\rho, \quad \left|\nabla \mathcal{R}_1\right| \leqslant c_2\rho^2, \tag{78}$$

где через ∇f обозначен градиент функции f, а $\rho = |(p_1, q_1, q_2)|$. Из этих неравенств, из теоремы о неявной функции, а также учитывая вид «невозмущенных» поверхностей $(\mathcal{F}_1^0)^{-1}(m)$, описание которых приведено в § 3.1, получаем утверждение 3.6.А.i о поверхностях $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$.

Докажем утверждение 3.6.А.ii о виде множества $\Sigma_{\mathcal{F}} \cap k_{\alpha r}$ критических точек отображения $\mathcal{F}$, лежащих в $k_{\alpha r}$. В пп. 3.10.Б мы, фактически, показали, что кольцевое при $m_2 = 2$ конусообразное множество $\kappa_{\alpha r} = \kappa_{\alpha r}^{m_2}$ не имеет критических точек отображения $\mathcal{F}$. Используя доказанные выше свойства функции $\mathcal{F}_1$ и задаваемого ею расслоения, а также те же аргументы, что и в доказательстве леммы 3.2.А (см. начало пп. 3.2.Е), получаем следующий факт. Найдется $r > 0$, такое, что каждая критическая точка $(p_1, q_1, q_2) \in k_{\beta r}$ отображения $\mathcal{F}$ при достаточно малых β и r является критической точкой гладкой функции $\widehat{\Phi}_m$, где $m = \mathcal{F}_1(p_1, q_1, q_2)$, и что верно обратное утверждение. Отсюда и из леммы 3.4.А о виде критических точек функции $\Phi_{m\alpha}$, а также из определения кривой l_0 (см. (46)) следует, что множество критических точек отображения $\mathcal{F}$, содержащихся в полном конусе $k_{\beta r}$ при малых β и r, пусто при $m_2 = 1$ и совпадает с кривой $l_0 \cap k_{\beta r}$ при $m_2 = 2$. Так как $k_{\alpha r} = \kappa_{\alpha r} \cup k_{\beta r}$ при $\beta > \dfrac{1}{\alpha}$ и $\alpha > 1$, то $\Sigma_{\mathcal{F}} \cap k_{\alpha r} = l_0 \cap B_r$ для достаточно малых $r > 0$ и больших $\alpha > 1$ и $m_2 = 2$. Отсюда, учитывая, что если $\gamma < \delta$, то $k_{\gamma r} \subset k_{\delta r}$, получаем утверждение 3.6.А.ii. Лемма 3.6.А полностью доказана.

3.10.Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5.В. Согласно лемме 3.6.А.ii все критические точки отображения $\mathcal{F}$, лежащие в полном конусе $k_{\alpha r}$, $\alpha > 1$, лежат на кривой l_0. Используя этот факт и то, что $\theta_r = \mathcal{F}^{-1}(\tau) \cap B_r$, а также гладкость кривой $\check{\tau}$ и наличие касательной к кривой τ в нулевой точке, легко показать следующее. Поверхность $\theta_r \setminus (l_0 \cup \chi_{00})$ является гладкой, а в любой точке из χ_{00} она имеет касательную плоскость. Из этого же факта о критическом множестве и из трансверсальности пересечения кривой τ и вертикальных прямых $\{m = \mathrm{const}\} \subset \mathbf{R}^2_{mh}$ следует, что θ_r трансверсально пересекает поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ вне l_0. Нетрудно видеть, что для конусообразной окрестности $k_{\beta\infty}$ кривой l_0 с вершиной в точке $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ со сколь угодно малым углом раствора 2β найдутся столь малые $r > 0$ и $c > 0$, что вне этой окрестности поверхность $\theta_r \setminus l_0$ будет обладать следующими свойствами. Она будет cr-близка в метрике C^1 и cr^2-близка в метрике C^0 к пересечению $(\theta^0 \setminus k_{\beta r}) \cap B_r$. Это утверждение легко получить, исходя из фактов и рассуждений, приведенных в пп. 3.10.Б, содержащем доказательство леммы 3.10.А.

Используя леммы 3.4.А и 3.4.Б, нетрудно получить, что найдется малая конусообразная окрестность $k_{\gamma r}$ кривой l_0, $\gamma > \beta$, в которой поверхность θ_r имеет вид объединения двух гладких поверхностей, близких в том же смысле, что и выше, к лежащим в $\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ плоскостям $\{p_1 = 0\}$ и $\{q_1 = 0\}$ соответственно. Гладкость этих двух поверхностей, составляющих $\theta_r \cap k_{\gamma r}$, следует, в частности, из гладкой зависимости от $m < 0$ двух гладких кривых, составляющих линию χ_{mh}, $(m, h) \in \check{\tau}$, и имеющих в координатах (p_1, q_1) на поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ вид η_μ и ζ_μ, где $\mu = \sqrt{-m}$ (см. лемму 3.4.Б), а также из того факта, что линии χ_{mh}, $(m, h) \in \check{\tau}$, расслаивают поверхность $\theta_r \cap k_{\gamma r}$. Используем также то, что кривая l_0 трансверсальна поверхностям $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ (см. лемму 3.5.А), и, следовательно, гладкая зависимость от $m < 0$ означает гладкую зависимость от точки на кривой l_0, в которой пересекаются эти две кривые, составляющие $\chi_{mh} \subset \mathcal{F}_1^{-1}(m)$, $(m, h) \in \check{\tau}$. Так как эти кривые пересекаются под ненулевым углом (см. лемму 3.4.Б), то из трансверсальности кривой l_0 к $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ получаем, что две поверхности, составляющие $\theta_r \supset l_0$, будут трансверсальны друг другу в точках кривой l_0. Утверждение о том, что две гладкие поверхности, составляющие $\theta_r \cap k_{\gamma r}$, $\gamma \ll 1$, близки в нужном смысле к подмножествам координатных плоскостей $\{p_1 = 0\}$ и $\{q_1 = 0\}$ пространства $\mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2}$, легко следует из леммы 3.4.Б и из того факта, что кривая l_0, содержащаяся в обеих этих поверхностях, близка в этом же смысле к вертикальному лучу $\{p_1 = q_1 = 0, q_2 > 0\}$ (см. лемму 3.5.А). Объединяя приведенные утверждения о виде $\theta_r \cap k_{\alpha r}$ «вне» и «вблизи» от l_0, получаем лемму 3.5.В.

3.10.Д. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.6.Б. Покажем сначала, что найдется $\alpha > 1$, такое, что

$$(\mathcal{F}^0)^{-1}(\Upsilon^e_\infty) \subset k_{\alpha\infty}. \tag{79}$$

Действительно, легко проверить, что стоящее слева в этом включении подмножество полупространства V_+ является инвариантным относительно группы гомотетий $(p_1, q_1, q_2) \mapsto \mapsto \mu(p_1, q_1, q_2)$, $\mu > 0$. Имеем также $\overline{\Upsilon^e_\infty} \cap \tau_+ = \varnothing$ и

$$(F^0|_{\{p_2=0\}})^{-1}(\tau_+) \supset (\{p_2 = q_2 = 0\} \setminus \{0\}),$$

где $\overline{\Upsilon^e_\infty}$ — замыкание Υ^e_∞, а τ_+ — луч, определенный перед леммой 3.1.Г. Из этих фактов легко следует (79).

Из (79) получаем, что $(\mathcal{F}^0)^{-1}(\Upsilon^e_r) \cap B_r \subset k_{\alpha r}$. Отсюда и из леммы 3.10.А следует, что найдется достаточно малое $r_0 > 0$ такое, что для любого $r \in (0, r_0)$ при замене слева в этом вложении $\mathcal{F}^0$ на $\mathcal{F}$ оно останется верным, если «раствор» 2α конуса $k_{\alpha r}$ несколько увеличить. Это и есть требуемое вложение (49). Лемма 3.6.Б доказана.

3.10.Е. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 3.6.В, 3.6.Г, 3.6.Д, 3.6.Е. Утверждение 3.6.В.i следует из соответствия между отображением $\mathcal{F}$ и функцией $\widehat{\Phi}_m$ (см. определение $\widehat{\Phi}_m$ в начале § 3.4), а также из вида множества критических точек отображения $\mathcal{F}$ (см. 3.6.А.ii). Ясно, что при $(m, h) \in Y^e_r$ кривые $\widetilde{\chi}_{mhr}$ устроены так же, как и кривые $\widetilde{\chi}^0_{mhr}$, то есть $\widetilde{\chi}_{mhr} = \chi_{mh} \cap B_r$. Утверждение 3.6.В.ii нетрудно получить, используя этот факт, доказанные леммы 3.6.А и 3.6.Б и свойства кривых $\widetilde{\chi}_{mhr}$ (см. лемму 3.10.А), а также учитывая вид невозмущенного расслоения поверхностей $(\mathcal{F}^0_1)^{-1}(m)$ на кривые χ^0_{mh} (см. леммы 3.2.В, 3.2.Г и 3.2.Д). При $m_2 = 2$ нужно сослаться также на структуру расслоения, задаваемого функциями $\widehat{\Phi}_m$ в окрестности критической точки этой функции, лежащей на кривой l_0 (см. лемму 3.4.В.ii). Кроме того, используем рассуждения, подобные тем, на которые опиралось доказательство этой леммы (см. пп. 3.8.Д). Таким образом, лемма 3.6.В полностью доказана.

Лемма 3.6.Г о тривиальном расслоении кривыми $\widetilde{\chi}_{mhr}$ поверхностей $Y_r \cap \mathcal{F}_1^{-1}(m)$ с выкинутыми особыми слоями является несложным следствием доказанной леммы 3.6.В и невозмущенных аналогов леммы 3.6.Г (см. леммы 3.2.Г и 3.2.Д). Лемма 3.6.Д о тривиальном расслоении кривыми $\widetilde{\chi}_{mhr}$ множеств Y_r при $m_2 = 1$ и $Y_r \setminus \theta_r$ при $m_2 = 2$, а также лемма 3.6.Е о гладкой зависимости этих кривых от (m, h) легко следуют из лемм 3.10.А, 3.6.В и 3.6.Г (см. также лемму 3.2.Ж).

3.10.Ж. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.7.А. Из вида F^0_1 и R_1 (см. (8) и (10) соответственно) легко получаем, что найдутся $r > 0$, $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, такие, что в любой точке

$(p, q) \in B_r$ будут выполнены следующие неравенства:

$$\left|\nabla F_1^0\right| \geqslant c_1\rho, \quad \left|\nabla R_1\right| \leqslant c_2\rho^2,$$

где $\rho = |(p, q)|$ (ср. с доказательством леммы 3.6.A.i). С другой стороны, для любой функции G в любой точке (p, q) имеем $|X_G| = |\nabla G|$, где X_G — вектор гамильтонова поля, задаваемого функцией G в канонических координатах (p, q), которые рассматриваем как декартовы. Из этих двух фактов получаем лемму 3.7.А.

3.10.З. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.7.Б. Рассмотрим матрицу Якоби $\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(p, q)}$ отображения F. Обозначим через $D^2 = D^2(p, q)$ сумму квадратов всех ее миноров порядка 2 в точке (p, q). Запишем D^2 в виде $D^2 = D_0^2 + \mathcal{R}$, где D_0^2 — невозмущенный аналог величины D^2. Ясно, что D_0^2 — однородный полином степени однородности $2(m_1 + m_2)$, а $\deg \mathcal{R} \geqslant 2(m_1 + m_2) + 1$. Согласно лемме 3.3.Д, полином D_0^2 при $m_1 = m_2 = 1$ обращается в нуль только в точке $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$. Однородность D_0^2 означает фактическую компактность ситуации, поэтому D^2 не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$, проколотой в этой точке.

В случае $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ такое же рассуждение, опирающееся на лемму 3.3.Д, показывает, что критические точки отображения F, лежащие в достаточно малой окрестности $\mathcal{O}$ нуля $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$, могут быть только в пересечении $\mathcal{K}$ области $\mathcal{O}$ с узкой конической окрестностью плоскости $\{p_1 = q_1 = 0\}$ в $\mathbf{R}^4_{pq}$. Из лемм 3.3.В и 3.7.А получаем, что векторы поля X_{F_1} трансверсально пересекают полупространство V_+ в точках пересечения $V_+ \cap \mathcal{K}$. Отсюда и из лемм 3.6.A.ii и 3.3.Е следует, что кривая l_0 состоит из критических точек отображения F. Из леммы 3.3.Е также следует, что множество S, полученное разнесением кривой l_0 потоком G_{F_1}, тоже состоит из критических точек отображения F.

Из вида l_0 (см. лемму 3.5.А) и из расположения по отношению к V_+ траекторий системы с гамильтонианом F_1^0 (см. лемму 3.3.В), а также из леммы 3.7.А вытекает следующий факт. Точка $x(t)$, двигающаяся по траектории β_ξ под действием потока G_{F_1} и стартующая из положения $\xi \in l_0$, вернется через время, близкое к π, на полупространство V_+ и попадет в положение $\xi' \in V_+$, близкое к ξ. Из леммы 3.3.Е следует, что точка ξ' должна быть критической точкой для $\mathcal{F}$, а значит, $\xi' \in l_0$ (см. лемму 3.6.A.ii). Но в разных точках кривой l_0 значения F_1 разные (см. лемму 3.5.А, (8), (10) и (18)), а на кривой β функция F_1 постоянна, поэтому $\xi' = \xi$. Отсюда получаем, что S является гладким диском, проколотым в нуле $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$, и что $S \cap V_+ = l_0$, а траектории β_ξ, $\xi \in l_0$, тривиально расслаивают S. Ось q_2 в $\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ является касательной в нуле к кривой $l_0 \cup \{0\}$ (см. лемму 3.5.А). Отсюда и из лемм 3.3.А и 3.7.А следует наличие касательной к $\Sigma = S \cup \{0\}$ в нуле, совпадающей с плоскостью $\{p_1 = q_1 = 0\}$. Из приведенных рассуждений также следует, что $F^{-1}(m, h) \cap \Sigma$ либо пусто, либо совпадает с одной из траекторий потока G_{F_1}, пересекающих кривую $l_0 \cup \{0\}$.

Покажем, что других критических точек, кроме как на Σ, отображение F в $\mathcal{K}$ не имеет. Действительно, пусть $\xi \in \mathcal{K} \setminus \Sigma$ — критическая точка. Тогда из лемм 3.3.А и 3.7.А следует, что траектория потока G_{F_1} с началом в точке ξ достаточно быстро пересечет полупространство V_+ в некоторой точке $\eta \notin l_0$, лежащей в достаточно малой конического типа окрестности в V_+ конуса $\mathcal{K} \cap V_+$. По лемме 3.3.Е, точка η будет критической для $\mathcal{F}$, но это противоречит лемме 3.6.A.ii. Вид множества критических значений отображения F получаем из равенств $F(\Sigma) = F(l_0) \cup \{0\} = \tau$ (см. (48)). Таким образом, все утверждения леммы 3.7.Б доказаны.

§ 4. Построение функции действия $\boldsymbol{I}$, задающей периодический фазовый поток, близкий к фазовому потоку системы с гамильтонианом $\boldsymbol{F_1^0}$. Протягивание элемента $\boldsymbol{\gamma_1}$

§ 4.1. Формулировка основного утверждения § 4

Это утверждение — предложение 4.1 — является одной из основных лемм, используемых для доказательства теорем 2.4 и 2.5. Обозначим через $B(\eta, r)$ шар радиуса r с центром в точке $\eta \in M^4$:

$$B(\eta, r) := \{\xi = (p, q) \in \mathbf{R}^4 \Big| |\xi - \eta| < r\},$$

где $|\xi - \eta|$ — евклидово расстояние между точками ξ и η в декартовых координатах (p, q). Предполагается, что этот шар лежит в окрестности $\mathcal{O}$ точки ξ^0, в которой определены канонические координаты (p, q), заданные по условиям теорем 2.4 и 2.5, и что этот шар «полный» в том смысле, что для каждого значения (p, q), такого, что $|(p, q) - (p_\eta, q_\eta)| < r$, имеется точка из $\mathcal{O}$ с такими координатами, где (p_η, q_η) — координаты точки η.

Предложение 4.1. *В условиях теорем 2.4 и 2.5 существует функция* $I\colon U \to R$, *определенная в некоторой окрестности* U *в* M^4 *особого слоя* $\Lambda^0 \ni \xi^0$ *и обладающая следующими свойствами. Она является однозначной гладкой функцией от* F_1 *и* F_2: $I = f(F_1, F_2)$, *причем фазовый поток* G_I *системы с функцией Гамильтона* I *будет* 2π*-периодическим. Кроме того, найдется окрестность точки* ξ^0, *лежащая в* U, *в которой векторное поле* X_I *этой системы будет мало отличаться от векторного поля* $X^0 = X_{F_1^0}$ *системы с гамильтонианом* F_1^0. *Более точно, найдутся константы* $r > 0$, $K_1 > 0$ *и* $K_2 > 0$, *такие, что для любой точки* $\xi \in B(0, r)$ *будут выполнены неравенства*

$$|X_I(\xi) - X^0(\xi)| < K_1|\xi|^2, \quad |X^0(\xi)| \geqslant K_2|\xi|. \tag{80}$$

При этом $F|_U$ *задает лагранжево расслоение на* U, *(связными) слоями которого являются прообразы* $(F|_U)^{-1}(m, h)$ *точек* $b \in F(U)$ (см. определение 1.1.Б).

§ 4.2. Геодезические на слоях лагранжевых расслоений

Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} определено лагранжево расслоение, задаваемое некоторым отображением $F\colon M^{2n} \to B^n$ (см. определение 1.1.Б). Пусть Λ_0 — некоторый слой этого расслоения, а $\mathcal{W}$ — окрестность слоя Λ_0 в $M = M^{2n}$, в которой отображение F задается набором функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$. Напомним, что эти функции находятся попарно в инволюции. Пусть α — связная кривая на $\mathcal{W}$, являющаяся частью полной траектории системы с гамильтонианом вида $c_1\Phi_1 + \ldots + c_n\Phi_n$, где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные константы.

Определение 4.2.А. Любую такую кривую α для краткости будем называть *геодезической*, отвечающей расслоению F.

Каждая такая кривая α целиком лежит на одном из слоев расслоения F. Пусть α отлична от точки и лежит в дополнении $M \setminus \Sigma_F$ к множеству Σ_F критических точек отображения F, то есть $\alpha \subset \Lambda \cap (M \setminus \Sigma_F)$, например α лежит в регулярной части M_R этого расслоения (см. определение 1.1.Б). Тогда она действительно является геодезической в плоской метрике, задаваемой на неособой части $\Lambda \setminus \Sigma_F$ каждого слоя Λ расслоения F попарно коммутирующими векторными полями $X_{\Phi_1}, \ldots, X_{\Phi_n}$, — в этой метрике длины векторов полей X_{Φ_i}, $i = 1, \ldots, n$, на $\Lambda \setminus \Sigma_F$ постоянны. Отметим, что если геодезическая пересекается с $M \setminus \Sigma_F$, то она целиком лежит в $M \setminus \Sigma_F$. Это следует из того очевидного более общего факта, что на любой геодезической $\operatorname{rang} \partial F$ постоянен (ср. начало доказательства леммы 3.3.Е; на $M \setminus \Sigma_F$ он максимален: $\operatorname{rang} \partial F = n$). Понятие *геодезической*, как и приведенные утверждения о ее свойствах, очевидно, можно обобщить на произвольные псевдоинтегрируемые отображения F (см. определение 1.1.Б). В этих утверждениях под Λ нужно понимать связные компоненты прообразов точек при отображении F. Не выполняется лишь утверждение о том, что отображение F задает плоскую метрику на всей неособой части $\Lambda \setminus \Sigma_F$ слоя Λ — это связано с тем, что Λ может иметь размерность бóльшую, чем n.

§ 4.3. Семейство замкнутых геодезических в окрестности существенно особой точки ξ^0

В этом пункте сформулирована лемма 4.3.Б о наличии семейства периодических геодезических в окрестности точки ξ^0 с каноническими координатами (p, q), в которых отображение F имеет специальный вид (см. (8), (9) и (10)). Построение такого семейства является начальным этапом построения круговой функции действия I с нужными свойствами.

Обозначим через η_μ точку на кривой l_1, такую, что $|\eta_\mu| = \mu$, где l_1 — одна из $2m_2$ гладких кривых, выходящих из начала координат $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ и составляющих линию $\chi_{00} = \mathcal{F}^{-1}(0, 0)$ (см. лемму 3.5.Г). Здесь, как и далее, под $|\,.\,|$ понимается евклидова норма в пространстве $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ с декартовыми координатами (p_1, q_1, q_2). Из леммы 3.5.Г следует, что при всех достаточно малых $\mu > 0$ точка η_μ однозначно определена. Обозначим через ζ^μ образ точки η_μ при гомотетии $(p, q) \mapsto (P, Q) = \dfrac{1}{\mu}(p, q)$, тогда $\zeta^\mu \in V_+$ и $|\zeta^\mu| = 1$ при любых $\mu \in (0, \mu_0)$, где $\mu_0 > 0$. Обозначим через F_1^μ, F_2^μ, F^μ функции и отображение, следующим образом получаемые из F_1, F_2, F соответственно:

$$F_1^\mu(P, Q) := \frac{1}{\mu^2} F_1(p, q), \quad F_2^\mu(P, Q) := \frac{1}{\mu^{m_1+m_2}} F_2(p, q), \tag{81}$$

$F^\mu = (F_1^\mu, F_2^\mu)$, где $p = \mu P$ и $q = \mu Q$. Здесь и далее верхний индекс μ является значением параметра, а не степенью соответствующего параметра либо отображения. Доопределим функции F_i^μ при $\mu = 0$, положив $F_i^\mu|_{\mu=0} = F_i^0$, $i = 1, 2$, где функции F_i^0 заданы формулами (9). Обозначим $\widetilde{F}_i(\mu, P, Q) := F_i^\mu(P, Q)$, $i = 1, 2$.

Лемма 4.3.А. *Найдется $\mu_0 > 0$, такое, что $\widetilde{F}_i(\mu, P, Q)$, $i = 1, 2$, являются гладкими функциями в прямом произведении $(-\mu_0, \mu_0) \times B(0, 2)$. В этом прямом произведении*

$$\widetilde{F}_i(\mu, P, Q) = F_i^0(P, Q) + \mu \mathcal{R}_i(\mu, P, Q), \quad i = 1, 2, \tag{82}$$

где $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2$, — тоже гладкие функции. Кроме того, имеется предельное положение точки ζ^μ при $\mu \to 0$, причем $\lim_{\mu \to 0} \zeta^\mu = \zeta^0$, где ζ^0 — точка на прямолинейном луче $l_1^0 \subset \mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2}$, касательном к l_1 в $0 \in \mathbf{R}^3$ (см. леммы 3.5.Г и 3.1.Г).

Лемма 4.3.Б. (О существовании семейства замкнутых геодезических, отвечающих расслоению F^μ.) *Будем считать координаты (P, Q) каноническими, тогда функции $F_1^\mu(P, Q)$ и $F_2^\mu(P, Q)$ находятся в инволюции, то есть отображение $F^\mu = (F_1^\mu, F_2^\mu)$ является псевдоинтегрируемым. Кроме того, найдутся константы $\mu_0 > 0$ и $K > 0$ и окрестность $\mathcal{V} \subset \{P_2 = 0\} = \mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2}$ точки ζ^0, удовлетворяющие следующим условиям. При каждом $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ имеется семейство замкнутых геодезических β_ξ^μ, $\xi \in \mathcal{V}$, которые отвечают разбиению F^μ* (см. определение 3.2.0) *и являются такими, что $\beta_\xi^\mu \ni \xi$. В частности, любая кривая β_ξ^μ, $\xi \in \mathcal{V}$, семейства лежит на слое $\Lambda_\xi^\mu \ni \xi$ этого разбиения. Кроме* *того, это семейство обладает перечисленными ниже свойствами. Кривые β_ξ^μ гладко зависят от (ξ,μ) при всех $\mu\in(-\mu_0,\mu_0)$ и $\xi\in\mathcal{V}$. И для каждой пары $(\xi,\mu)\in\mathcal{V}\times(-\mu_0,\mu_0)$ найдутся константы c_1 и c_2, гладко зависящие от (ξ,μ) и такие, что β_ξ^μ является траекторией 2π-периодического решения системы с гамильтонианом*

$$(1+c_1)F_1^\mu+c_2F_2^\mu, \quad \textit{где} \quad \sqrt{c_1^2+c_2^2}\leqslant K\mu. \tag{83}$$

При этом замкнутые кривые β_ξ^μ тривиально расслаивают объединение $\cup_{\xi\in\mathcal{V}}\beta_\xi^\mu$ всех кривых семейства.

4.3.В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3.А. Из (8), (9) и (10) следует, что

$$F_1(\mu P,\mu Q)=\mu^2F_1^0(P,Q)+Z_1(\mu,P,Q),$$
$$F_2(\mu P,\mu Q)=\mu^{m_1+m_2}F_2^0(P,Q)+Z_2(\mu,P,Q),$$

где $\deg_\mu Z_1>2$ и $\deg_\mu Z_2>m_1+m_2$. Отсюда и из леммы 3.8.0 следует корректность и гладкость функций $\widetilde{F}_i$, $i=1,2$, а также представление (82). Существование предельного положения $\lim_{\mu\to0}\zeta^\mu$ и совпадение его с точкой ζ^0 легко следует из леммы 3.5.Г.

Доказательство леммы 4.3.Б приведено в §4.8 и будет опираться на лемму 4.5, полученную с помощью следующей леммы 4.4, доказанной в пп. 4.6.Б.

§4.4. Нормализующие координаты в невозмущенном случае

Лемма 4.4. (О наличии «нормализующих координат» $(F_1^0,F_2^0,g,\psi \bmod 2\pi)$ в окрестности $\mathcal{W}$ траектории $\nu^0\ni\zeta^0$ системы с гамильтонианом F_1^0.) *Траектория ν^0 системы с гамильтонианом F_1^0, проходящая через точку $\zeta^0\in l_1^0$, $|\zeta^0|=1$, имеет окрестность $\mathcal{W}$ в $\mathbf{R}^4_{PQ}$, обладающую следующими свойствами. Эта окрестность инвариантна относительно фазового потока $G_{F_1^0}$ системы с гамильтонианом F_1^0 и тривиально расслаивается общими поверхностями уровня $(F^0)^{-1}(m,h)$, $(m,h)\in\mathbf{R}^2$, функций F_1^0 и F_2^0. Более того, в $\mathcal{W}$ существуют «координаты» $(y_1,y_2,g,\psi \bmod 2\pi)$, где $y_i=F_i^0$, $i=1,2$, удовлетворяющие следующим условиям.*

А. В этих координатах действие фазового потока $G_{F_1^0}$ за время t имеет вид сдвига по переменным ψ на t

$$(y_1,y_2,g,\psi \bmod 2\pi)\mapsto(y_1,y_2,g,(\psi+t) \bmod 2\pi),$$

а действие потока $G_{F_2^0}$ за время t имеет вид сдвига по переменной g на t

$$(y_1,y_2,g,\psi \bmod 2\pi)\mapsto(y_1,y_2,g+t,\psi \bmod 2\pi).$$

Б. Рассмотрим связную компоненту $\mathcal{V}$ пересечения $\mathcal{W}\cap V_+$, содержащую точку ζ^0, где $V_+=\{P_2=0,\ Q_2>0\}\subset\mathbf{R}^4_{PQ}$. Тогда $\mathcal{V}$ является окрестностью точки ζ^0 в V_+, такой, что сужения функций y_1, y_2, g на $\mathcal{V}$ являются координатами на $\mathcal{V}$.

§4.5. Почти нормализующие координаты в возмущенном случае

В возмущенном случае, то есть при рассмотрении функций F_1^μ и F_2^μ вместо F_1^0 и F_2^0 соответственно, утверждения леммы 4.4, касающиеся расслоения окрестности $\mathcal{W}\supset\nu^0$ и координат на $\mathcal{W}$ и $\mathcal{V}$, практически останутся в силе. Утверждение о нормализации векторных полей X_H при $H = F_i^\mu$, $i = 1, 2$, станет верным лишь с точностью до величин порядка μ. Более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.5. («Почти нормализующие координаты» $(F_1^\mu, F_2^\mu, g, \psi \bmod 2\pi)$.) *Пусть $\nu^0 \ni \zeta^0$, $\mathcal{W} \supset \nu^0$, g и $\psi \bmod 2\pi$ — те же, что и в лемме 4.4. В частности, $\mathcal{W}$ является объединением траекторий невозмущенного фазового потока $G_{F_1^0}$, которые пересекают некоторую окрестность $\mathcal{V}$ точки ζ^0 в V_+. Рассмотрим набор функций $(z_1, z_2, g, \psi \bmod 2\pi)$, где $z_i = F_i^\mu$, $i = 1, 2$. Тогда найдутся столь малые окрестность $\mathcal{V}$ точки ζ^0 в V_+ и константы $\mu_0 > 0$ и $L > 0$, такие, что при любом $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ этот набор является набором «координат» на $\mathcal{W}$, гладко зависящих от параметра μ, и будут выполнены следующие утверждения.*

А. Векторные поля X_H при $H = F_i^\mu$, $i = 1, 2$, в этих координатах на $\mathcal{W}$ имеют вид

$$(0, 0, a_{11}, 1 + a_{12}) \quad \text{и} \quad (0, 0, 1 + a_{21}, a_{22}), \tag{84}$$

где $a_{ij} = a_{ij}^\mu$ удовлетворяют следующим условиям. Вектор-функции

$$\widetilde{a}_{ij}(\mu, z_1, z_2, g, \psi \bmod 2\pi) := a_{ij}^\mu(z_1, z_2, g, \psi \bmod 2\pi)$$

— гладкие по совокупности всех пяти аргументов $(\mu, z_1, z_2, g, \psi \bmod 2\pi)$, а сами a_{ij}^μ имеют порядок μ при $\mu \to 0$, а точнее,

$$|a_{ij}^\mu| \leqslant L\mu \quad \text{при всех} \quad i, j = 1, 2 \quad \text{и} \quad \mu \in (-\mu_0, \mu_0). \tag{85}$$

Б. Набор сужений функций z_1, z_2, g на $\mathcal{V}$ является набором координат на $\mathcal{V}$. Эти координаты гладко зависят от параметра $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$.

§4.6. Построение нормализующих координат в окрестности невозмущенной траектории ν^0

Доказательство леммы 4.4 опирается на следующее утверждение. Проведем через точку ζ^0 малую 2-мерную трансверсаль $S \subset V_+ \subset \mathbf{R}^3 = \{p_2 = 0\}$ к прямой l_1^0.

Лемма 4.6.А. *Сечение S в каждой своей точке трансверсально к слоям $(F^0)^{-1}(m, h)$ невозмущенного расслоения F^0.*

Доказательство леммы 4.6.А. Так как сечение S можем взять сколь угодно малым, то трансверсальность достаточно доказать лишь в точке ζ^0. В этой точке отображение F^0 не является критическим (см. лемму 3.3.Д). Из леммы 3.3.В следует, что вектор $X_{F_1^0}(\zeta) \subset T_\zeta\Lambda$ трансверсален гиперплоскости $\{P_2 = 0\}$ в $\mathbf{R}^4_{PQ}$, где $\zeta = \zeta^0$, а $\Lambda = (F^0)^{-1}(0, 0)$. Следовательно, $T_\zeta\Lambda \cap \{P_2 = 0\} = T_\zeta l_1^0$. Так как плоскость $T_\zeta S$ трансверсальна прямой $T_\zeta l_1^0$ в 3-мерном пространстве $\{P_2 = 0\}$, то $T_\zeta S \cap T_\zeta\Lambda = \{0\}$, где, как и выше, $\zeta = \zeta^0$. Таким образом, эти две плоскости $T_\zeta S$ и $T_\zeta\Lambda$ трансверсальны друг другу, что и доказывает лемму 4.6.А.

4.6.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.4. Функции g и $\psi \bmod 2\pi$ будем строить следующим образом. Так как $\{F_1^0, F_1^0\} = 0$, то векторные поля $X_{F_1^0}$ и $X_{F_2^0}$ попарно коммутируют и касательны к слоям $(F^0)^{-1}(m, h)$ расслоения F^0. Отсюда и из леммы 4.6.А следует, что линейная оболочка векторов $X_{F_1^0}(\zeta^0)$ и $X_{F_2^0}(\zeta^0)$ этих полей в точке ζ^0 и касательного пространства $T_{\zeta^0}S$ к S в этой точке совпадают со всем касательным пространством $T_{\zeta^0}\mathbf{R}^4$.

Из этих фактов следует, что под действием фазового потока $G_{F_2^0}$ системы с гамильтонианом F_2^0 за малый промежуток времени, содержащий нулевой момент $t = 0$, сечение S

прочертит 3-мерную поверхность, которую обозначим через $\mathcal{A}$ и которая лежит вблизи S. Определим на $\mathcal{A}$ функцию g, положив $g(\xi) = t$ при $\xi \in \mathcal{A}$, где $t = t(\xi)$ — малое время, за которое точка $\xi' = \xi'(\xi)$, лежащая на S, перейдет в данную точку ξ под действием потока $G_{F_2^0}$. В частности, $g|_S = 0$. Аналогично определим «угловую функцию» $\psi \bmod 2\pi$ на области $\mathcal{W}$, которую прочертит поверхность $\mathcal{A}$ под действием фазового потока $G_{F_1^0}$ в течение всего времени $t \in \mathbf{R}$, а именно: положим $\psi(\xi) = t$ при $\xi \in \mathcal{W}$, где $t = t(\xi)$ — время, за которое точка $\xi' = \xi'(\xi) \in \mathcal{A}$ перейдет в данную точку ξ под действием фазового потока $G_{F_1^0}$. Определим на $\mathcal{W}$ функцию g, положив $g(\xi) = g(\xi')$, где $\xi \in \mathcal{W}$, а $\xi' \in \mathcal{A}$ — та же точка, что и выше. Из приведенных в начале доказательства утверждений о функциях F_i^0 и о векторных полях $X_{F_i^0}$, $i = 1, 2$, легко следует корректность построения g и «функции» $\psi \bmod 2\pi$, а также следующие факты. Набор $(y_1, y_2, g, \psi \bmod 2\pi)$ действительно определяет локальные координаты на $\mathcal{W}$, и будет выполнено условие А. Из трансверсальности пересечения гиперплоскости $\{P_2 = 0\}$ траекториями фазового потока $G_{F_1^0}$ вблизи точки ζ^0 (см. лемму 3.3.В) следует выполнение условия Б. Таким образом, лемма 4.4 полностью доказана.

§ 4.7. Доказательство леммы 4.5

Согласно лемме 4.3.А, функции F_i^μ, $i = 1, 2$, рассматриваемые как функции от переменных (μ, P, Q), гладко зависят от совокупности этих аргументов, в число которых включен и параметр $\mu \in \mathbf{R}$. Отсюда и из леммы 4.4 получаем, что при достаточно малых $|\mu|$ набор $(z_1, z_2, g, \psi \bmod 2\pi)$ останется набором локальных координат на $\mathcal{W}$. По той же причине получаем, что сужения функций z_1, z_2, g на $\mathcal{V}$ при всех $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, где $\mu_0 > 0$ достаточно мало, останутся координатами на $\mathcal{V}$, гладко зависящими от μ, что доказывает лемму 4.5.Б.

По тем же причинам гладкой зависимости функций F_1^μ и F_2^μ от (μ, P, Q) следует гладкая зависимость векторных полей $X_{F_i^\mu}$, $i = 1, 2$, от (μ, P, Q). Так как координаты $(z_1, z_2, g, \psi \bmod 2\pi)$ тоже гладко зависят от (μ, P, Q), то и функции a_{ij}, $i, j = 1, 2$, о которых речь идет в лемме 4.5.А (см. (85)), будут гладко зависеть от (μ, P, Q). Из гладкости векторных полей $X_{F_i^\mu}$ также следует, что разности $\Delta_i := X_{F_i^\mu} - X_{F_i^0}$ будут порядка μ на $\mathcal{W}$. Точнее, найдутся константы $\mu_0 > 0$ и $L_1 > 0$, такие, что $|\Delta_i| \leqslant L_1\mu$ на $\mathcal{W}$ при каждом $i = 1, 2$ и любом $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$. Отсюда получаем оценки (85). Утверждения 4.5.А, а с ними вместе и вся лемма 4.5, полностью доказаны.

§ 4.8. Доказательство леммы 4.3.Б

Равенство $\{F_i^\mu(P, Q), F_i^\mu(P, Q)\} = 0$ доказывается простым вычислением. Переобозначим через $\mathcal{V}'$ и $\mathcal{W}'$ области $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ соответственно, имеющиеся согласно лемме 4.5. Докажем существование семейства эамкнутых геодезических β_ξ^μ, $\xi \in \mathcal{V}$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, гладко зависящих от параметров (μ, ξ), где в качестве $\mathcal{V}$ возьмем несколько меньшую, чем $\mathcal{V}'$, окрестность точки ζ^0. Фиксируем $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ и любую точку $\xi \in \mathcal{V}$. Рассмотрим проходящие через ξ траектории ν_ξ^0 и ν_ξ^μ систем с гамильтонианами F_1^0 и F_1^μ соответственно. Векторы поля $X_{F_1^0}$ в $\mathcal{W}'$ существенно отличаются от нуля (см. лемму 3.3.А):

$$\sup_{\xi \in \mathcal{W}} |X_{F_1^0}(\xi)| > c, \quad \text{где} \quad c > 0.$$

С другой стороны, векторы полей $X_{F_1^\mu}$ и $X_{F_1^0}$ отличаются в точках на $\mathcal{W}'$ на векторы длины порядка μ (см. лемму 4.3.А и представление (82)). Отсюда получаем, что через время $t = \widetilde{t}$, близкое к 2π,

$$|\widetilde{t} - 2\pi| \sim O(\mu), \tag{86}$$

траектория ν_ξ^μ, $\xi \in \mathcal{V}$, параметризованная временем t, пересечет гиперплоскость $\{P_2 = 0\}$ в некоторой точке $\widetilde{\xi} \in \mathcal{V}'$, лежащей на расстоянии порядка μ от стартовой точки ξ. Ясно, что обе точки ξ и $\widetilde{\xi} = \widetilde{\xi}(\xi)$ лежат на одной связной компоненте линии $\chi_{mh}^\mu \cap \mathcal{V}$, где $\chi_{mh}^\mu := (\mathcal{F}^\mu)^{-1}(m,h)$, $(m,h) \in \mathbf{R}^2$. При достаточно малых $|\mu|$ и $\mathcal{V}$ отображение $F^\mu|_\mathcal{V}$ не имеет критических точек (см. представление (82) и лемму 3.1.Д). Следовательно, эти пересечения являются гладкими кривыми, тривиально расслаивающими $\mathcal{V}$, то есть это расслоение можно «выпрямить» — диффеоморфизмом перевести кривые в интервалы параллельных друг другу прямых. (Сами линии χ_{mh}^μ можно рассматривать как линии χ_{mh}, изученные в §3.6, но здесь они переписаны в разрешающих координатах (P,Q).)

Обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\mu$ прямую, касательную к геодезической ν_ξ^μ разбиения F^μ в стартовой точке $\xi \in \mathcal{V}$. Эта прямая лежит в плоскости $T_\xi\Lambda_\xi^\mu$, касательной в точке ξ к слою $\Lambda_\xi^\mu \ni \xi$ разбиения F^μ. Используя лемму 4.5, эту прямую можно подкорректировать в $T_\xi\Lambda_\xi^\mu$ так, чтобы получить замкнутую геодезическую этого разбиения. Более точно, в плоскости $T_\xi\Lambda_\xi^\mu$ имеется прямая $\mathcal{L}' \ni 0$, единственная близкая к $\mathcal{L}$ и такая, что геодезическая $\beta = \beta_\xi = \beta_\xi^\mu$, выходящая из точки ξ с касательной, совпадающей с $\mathcal{L}'$, будет замкнутой и лежащей в $\mathcal{W}'$. Под близкой к $\mathcal{L}$ здесь понимается прямая $\mathcal{L}'$, такая, что угол между прямыми $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ будет порядка μ. Для доказательства существования таких геодезических β_ξ^μ отметим следующие факты. Коммутирующие векторные поля $X_{F_1^\mu}$ и $X_{F_2^\mu}$ обладают перечисленными ниже свойствами. Во-первых, эти поля определяют плоскую евклидову структуру на поверхностях $\Lambda_\xi^\mu \cap \mathcal{W}'$, в которой длины векторов этих полей равны 1, а траектории систем с гамильтонианами вида $H = f(F_1^\mu, F_2^\mu)$ являются геодезическими, то есть отрезками прямых. При $\mu = 0$ эта структура совпадает со структурой, определяемой «координатами» $(g, \psi \bmod 2\pi)$ на поверхностях $\Lambda_{mh}^0 \cap \mathcal{W}' = \{z_1 = m,\, z_2 = h\}$. Во-вторых, в «координатах» $(z_1, z_2, g, \psi \bmod 2\pi)$, построенных в лемме 4.5, эти поля имеют вид (84) и выполнены оценки (85).

Заметим также, что поверхности $\Lambda_\xi^\mu \cap \mathcal{W}'$ гладкие и гладко зависят от $(\mu,\xi) \in \mathcal{D}$ при достаточно малых m_0 и $\mathcal{V}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}(m_0, \mathcal{V}) = (-\mu_0, \mu_0) \times \mathcal{V}$. Коэффициенты $a_{ij}(\mu,\eta)$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, $\eta \in \mathcal{W}' = \mathcal{W}'(\mathcal{V}')$, также гладко зависят от (μ,η) при таких μ_0 и $\mathcal{V}'$ и обнуляются при $\mu = 0$. Евклидова структура на поверхностях $\Lambda_{mh}^\mu \cap \mathcal{W}'$ тоже гладко зависит от (μ, m, h). Отсюда нетрудно получить, что и прямая $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\mu,\xi)$ гладко зависит от $(\mu,\xi) \in \mathcal{D}(\mu_0, \mathcal{V})$ при достаточно малых μ_0 и $\mathcal{V}$. Из всей этой тотальной гладкости рассмотренных объектов и из их вида при $\mu = 0$ получаем существование семейства геодезических β_ξ^μ, гладко зависящих от $(\mu,\xi) \in \mathcal{D}(\mu_0, \mathcal{V})$ при достаточно малых μ_0 и $\mathcal{V}$ и таких, что $\beta_\xi^\mu|_{\mu=0} = \nu_\xi^0$.

Как всякая геодезическая, любая кривая β_ξ^μ построенного семейства является траекторией системы с гамильтонианом H вида $H = H_\xi^\mu = \widetilde{c}_1 F_1^\mu + \widetilde{c}_2 F_2^\mu$, где $\widetilde{c}_i = \widetilde{c}_i(\mu,\xi)$ — константы на M^4, зависящие от параметров $(\mu,\xi) \in \mathcal{D}$. Из доказанной гладкости семейства и равенства $\beta_\xi^0 = \nu_\xi^0$ следует, что $H_\xi^\mu = k(\mu,\xi)(F_1^\mu + \delta(\mu,\xi) \cdot F_2^\mu)$, где $\delta(\mu,\xi)$ гладкая в $\mathcal{D}$ функция, такая, что $\delta(0,\xi) \equiv 0$, а функция $k(\mu,\xi)$ не обращается в нуль. Покажем, что константу $k(\mu,\xi)$ при любых $(\mu,\xi) \in \mathcal{D}(m_0, \mathcal{V})$, где m_0 и $\mathcal{V}$ достаточно малы, можно подобрать так, что решение системы с гамильтонианом H_ξ^μ с начальной точкой ξ будет 2π-периодическим. Константа $k(\mu,\xi)$ в этом случае будет удовлетворять условию $k(0,\xi) \equiv 1$.

Действительно, вектор $V := X_{F_1^\mu}(\xi)$, лежащий на прямой $\mathcal{L}$, можно рассматривать как вектор начальной скорости геодезической ν_ξ^μ. Он задает параметризацию временем t этой геодезической, и мы знаем, что через время $\widetilde{t}$, близкое к 2π, движущаяся по геодезической точка $x(t)$ опять вернется в область $\mathcal{V}' \subset V_+$ вблизи точки ξ (см. (86)). Таким же образом можно параметризовать и замкнутую геодезическую β_ξ^μ, задав ненулевой вектор $V' \in T_\xi \beta_\xi^\mu = \mathcal{L}'$. Его длину всегда можно выбрать так, чтобы $y(2\pi) = y(0) = \xi$, где $y(t)$ — движение по β_ξ^μ с начальной скоростью V'. Опять же из гладкости рассмотренных объектов и их вида при $\mu = 0$ получаем, что выбранный исходя из этого условия вектор V' гладко зависит от $(\mu, \xi) \in \mathcal{D}$, причем $V' = V$ при $\mu = 0$. Но вектор $V'(\mu, \xi)$ совпадает с вектором поля с гамильтонианом H_ξ^μ в точке ξ. Как уже отмечалось, векторы полей $X_{F_1^\mu}$ и $X_{F_2^\mu}$ линейно независимы в точках $\xi \in \mathcal{V}$. Из этих фактов следует гладкость коэффициента $k(\mu, \xi)$ при $(\mu, \xi) \in \mathcal{D}$, а так как $V' = V$ при $\mu = 0$, то $k(0, \xi) = 1$. Таким образом, β_ξ^μ является траекторией 2π-периодического решения системы с гамильтонианом вида $H_\xi^\mu = (1 + c_1(\mu, \xi))F_1^\mu + c_2(\mu, \xi)F_2^\mu$ с гладкими $c_i(\mu, \xi)$, такими, что $c_1(0, \xi) = c_2(0, \xi) = 0$. Так как μ_0 и V можно взять сколь угодно малыми, то найдется константа $K > 0$, такая, что $|c_i(\mu, \xi)| \leqslant K/2$, $i = 1, 2$, в $\mathcal{D}(\mu_0, \mathcal{V})$, что и доказывает оценку (83).

Из леммы 3.3.Б следует, что при $\mu = 0$ траектории $\nu_\xi^0 \ni \xi$ системы с гамильтонианом F_1^0 тривиально расслаивают их объединение $\cup_{\xi \in \mathcal{V}} \nu_\xi^0$. Из доказанных выше утверждений получаем, что построенные кривые β_ξ^μ близки к траекториям $\nu_\xi^0 = \beta_\xi^0$, имеющим размеры порядка не меньше 1 (см. лемму 3.3.А). Они близки в том смысле, что расстояние между ними в метрике C^1 оценивается равномерной оценкой порядка μ при $(\mu, \xi) \in \mathcal{D}$. Из этих фактов получаем тривиальность расслоения объединения $\cup_{\xi \in \mathcal{V}} \beta_\xi^\mu$ кривыми β_ξ^μ. Таким образом, лемма 4.3.Б полностью доказана.

В §§ 4.9–4.11 завершается доказательство предложения 4.1. В них строится функция действия I и изучаются ее свойства и свойства задаваемого ею фазового потока G_I.

§ 4.9. Построение функции действия I

По условию теорем 2.4 и 2.5, имеются функции $F_1(p, q)$ и $F_2(p, q)$ от канонических переменных (p, q). Эти функции определены в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ и задают там разбиения (см. определение 1.1.Б) и векторные поля. В § 4.3 (см. (81)) по функциям $F_i(p, q)$ были построены зависящие от параметра μ функции $F_i^\mu(P, Q)$, $i = 1, 2$, тоже задающие разбиения и векторные поля, исследованные в §§ 4.4–4.8 и заданные в области в $\mathbf{R}^4_{PQ}$ с координатами (P, Q), рассматриваемыми как канонические. Следующее утверждение с использованием гомотетии $\mathcal{H}_\mu \colon (P, Q) \mapsto (p, q) = \mu(P, Q)$ (ср. (17)) показывает, как именно связаны разбиения и поля в $\mathbf{R}^4_{pq}$ с их аналогами в $\mathbf{R}^4_{PQ}$.

Лемма 4.9.0. *В достаточно малой окрестности $\mathcal{O}$ нуля $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ при любом $\mu > 0$ справедливы следующие соотношения:*

$$(p, q) = \mu(P, Q) = \mathcal{H}_\mu(P, Q),$$
$$F_1^{-1}(m) = \mathcal{H}_\mu((F_1^\mu)^{-1}(m')), \quad m' = \frac{m}{\mu^2},$$
$$F_2^{-1}(h) = \mathcal{H}_\mu((F_2^\mu)^{-1}(h')), \quad h' = \frac{h}{\mu^{m_1+m_2}},$$

$$F^{-1}(m,h) = \mathcal{H}_\mu((F^\mu)^{-1}(m',h')),$$
$$X_{F_1}(p,q) = \mathcal{H}_\mu X_{F_1^\mu}(P,Q), \quad X_{F_2}(p,q) = \mathcal{H}_\mu \mu^{m_1+m_2-2} X_{F_2^\mu}(P,Q),$$

где $(P,Q) = \dfrac{1}{\mu}(p,q) = \mathcal{H}_\mu^{-1}(p,q)$. *Здесь* $X_{F_i^\mu}(P,Q)$, $i=1,2$, *— вектор поля с гамильтонианом* $F_i^\mu(P,Q)$, *определенным в области из* $\mathbf{R}^4_{PQ}$ *с каноническими координатами* (P,Q).

Доказательство леммы 4.9.0. Доказательство получается простыми вычислениями из определений функций $F_i^\mu(P,Q)$, $i=1,2$.

Выше было построено семейство β_ξ^μ, $\xi \in \mathcal{V}$, $\mu \in (-\mu_0,\mu_0)$, где $\mathcal{V} \subset V_+$ и $\mu_0 > 0$, замкнутых геодезических отображения F^μ, лежащих в $\mathbf{R}^4_{PQ}$ с каноническими координатами (P,Q). Обозначим

$$\mathcal{V}_\mu := \mathcal{H}_\mu \mathcal{V}, \quad \beta_{\mu\xi} := \mathcal{H}_\mu \beta_\eta^\mu, \quad \text{где} \quad \eta = \mathcal{H}_\mu^{-1}\xi, \quad \mu \in (-\mu_0,\mu_0),$$

так что $\mathcal{V}_\mu \subset V_+ \subset \mathbf{R}^4_{pq}$, $\beta_{\mu\xi} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$. Рассмотрим интеграл

$$I_\mu(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\beta_{\mu\xi}} p\,dq, \quad \xi \in \mathcal{V}_\mu, \quad \mu \in (0,\mu_0). \tag{87}$$

Из гладкости семейства β_ξ^μ следует гладкая зависимость этого интеграла от (μ,ξ).

Лемма 4.9. *Найдутся столь малые* μ_0 *и окрестность* $\mathcal{V}$ *точки* ζ^0, *такие, что при любом* $\mu \in (0,\mu_0)$ *верны следующие три утверждения.*

А. Замкнутые кривые $\beta_{\mu\xi}$, $\xi \in \mathcal{V}_\mu$, *являются геодезическими для отображения* F.

Б. Функция $I_\mu(\xi)$ *постоянна на каждом пересечении* $F^{-1}(m,h) \cap \mathcal{V}_\mu = \mathcal{F}^{-1}(m,h) \cap \mathcal{V}_\mu$, *то есть на каждом слое расслоения множества* $\mathcal{V}_\mu$ *этими кривыми:*

$$I_\mu(F^{-1}(m,h) \cap \mathcal{V}_\mu) = c_\mu(m,h). \tag{88}$$

В. Кривые $\beta_{\mu\xi}$, *а вместе с ними и функция* I_μ, *не зависят от* $\mu \in (0,\mu_0)$, *а зависят лишь от точки* ξ.

Доказательство леммы 4.9. Из формул леммы 4.9.0 и из леммы 4.3.Б (см. (83)) легко следует утверждение А, то есть кривые $\beta_{\mu\xi}$ действительно являются геодезическими расслоения F. Из этих же фактов следует существование для каждой кривой $\beta_{\mu\xi}$ векторного поля с гамильтонианом, зависящим только от F_1 и F_2 и таким, что $\beta_{\mu\xi}$ является 2π-периодической траекторией этого поля. Вектор этого поля в точке $\eta \in \beta_{\mu\xi}$ далее будем обозначать через $Y_\mu(\eta)$. Так как через каждую точку η множества $\mathcal{W}_\mu := \cup_{\xi \in \mathcal{V}_\mu} \beta_{\mu\xi}$ проходит своя кривая $\beta_{\mu\xi}$, то мы получаем корректно определенное гладкое векторное поле Y_μ на $\mathcal{W}_\mu$ с 2π-периодическим фазовым потоком, который обозначим через G_Y. Для доказательства утверждений Б и В рассмотрим также малую 2-мерную трансверсаль $S \subset V_+$ к лучу l_1^0 в точке ζ^0, которая была введена в лемме 4.6.А. Обозначим

$$S_\mu = \mathcal{H}_\mu S. \tag{89}$$

Из леммы 4.3.А следует, что найдется $\mu_0 > 0$, такое, что при любом $\mu \in (0,\mu_0)$ трансверсаль S_μ пересекает кривую l_1. Из леммы 3.6.А.ii получаем, что отображение $\mathcal{F}$ не имеет на $\mathcal{V}_\mu$ критических точек. Отсюда, используя представление (82), нетрудно получить, что S и $\mu_0 > 0$ можно выбрать столь малыми, что при любом $\mu \in (0,\mu_0)$ будут выполнены следующие два утверждения. Во-первых, сужение $\mathcal{F}|_{S_\mu} = F|_{S_\mu}$ задает диффеоморфизм на свой образ $W_\mu := \mathrm{Im}(F|_{S_\mu})$, $W_\mu \subset \mathbf{R}^2_{mh}$. Во-вторых, пересечения $\lambda_{\mu mh} := \mathcal{F}^{-1}(m,h) \cap \mathcal{V}_\mu$, $(m,h) \in W_\mu$, являются гладкими связными кривыми, тривиально расслаивающими $\mathcal{V}_\mu$ и трансверсально пересекающими сечение S_μ; среди этих кривых будет $l_1 \cap \mathcal{V}_\mu$.

Из леммы 4.3.Б следует, что кривые $\beta_{\mu\xi}$ тривиально расслаивают объединение $\mathcal{W}_\mu$. Из оценок (83) и из лемм 3.3.В и 3.7.А, а также из инвариантности V_+ и поля $X_{F_1^0}$ относительно гомотетий пространства $\mathbf{R}^4_{pq}$ получаем, что векторы поля Y_μ трансверсально пересекают V_+ в точках $\xi \in \mathcal{V}_\mu$. Из всех этих фактов следует, что μ_0 и $\mathcal{V}$ можно выбрать так, что пересечения $\Lambda_{\mu mh} := F^{-1}(m,h) \cap \mathcal{W}_\mu$ будут совпадать с разнесением $G_Y(\lambda_{\mu mh})$ кривых $\lambda_{\mu mh}$ потоком G_Y и будут представлять собой имеющие вид колец узкие полоски, тривиально расслаивающие $\mathcal{W}_\mu$ и тривиально расслаиваемые циклами $\beta_{\mu\xi}$. Заметим, что расслоение $\mathcal{W}_\mu$ на цилиндры $\Lambda_{\mu mh}$ является лагранжевым и, следовательно, дифференциальная 1-форма pdq на каждом слое $\Lambda_{\mu mh}$ замкнута. Отсюда получаем (88), то есть 4.9.Б. Кривые $\beta_{\mu\xi}$ являются замкнутыми геодезическими одного и того же не зависящего от μ разбиения F, лежат на полосках $\Lambda_{\mu mh}$ и гладко зависят от (μ,ξ). Из этих фактов вытекает, что $\beta_{\mu\xi}$ зависят только от ξ. Следовательно, и интеграл I_μ формы pdq по этим кривым тоже не зависит от μ. Утверждение В доказано, а вместе с ним полностью доказана вся лемма 4.9.

§4.10. Продолжение функции действия I на окрестность U полного особого слоя $\Lambda^0 \subset M^4$. Представление функции I в виде $I = f(F_1, F_2)$ и 2π-периодичность задаваемого ею фазового потока G_I

Фиксируем произвольное $\mu \in (0,\mu_0)$ и рассмотрим подмножество многообразия M^4

$$U_\mu := \cup_{\xi\in\mathcal{V}_\mu} \Lambda_\xi; \tag{90}$$

здесь и далее $\Lambda_\xi \subset M^4$ — связная компонента прообраза точки при отображении $F\colon M^4 \to \mathbf{R}^2$, содержащая точку ξ. Продолжим функцию I_μ на все это множество $U_\mu \supset \mathcal{V}_\mu$, положив для любой точки $\eta \in U$

$$I_\mu(\eta) = I_\mu(\xi), \quad \text{где} \quad \xi \in \mathcal{V}_\mu, \quad \text{и} \quad \eta \in \Lambda_\xi.$$

Лемма 4.10. *Найдутся $\mu_0 > 0$ и $\mathcal{V}$, такие, что будут верны следующие утверждения.*

А. Описанное продолжение функции I с $\mathcal{V}_\mu$ на U_μ корректно в следующих смыслах. При любом $\mu \in (0,\mu_0)$ функция $I\colon U_\mu \to \mathbf{R}$ определена однозначно и имеет место равенство

$$I_\mu|_{\mathcal{V}_\mu} = I_\mu, \tag{91}$$

где слева стоит продолженная функция, а справа исходная. И функция I_μ, фактически, не зависит от μ, а точнее, для разных значений $\mu_j \in (0,\mu_0)$, $j = 1,2$, параметра μ функции I_{μ_1} и I_{μ_2} совпадают в пересечении $U_{\mu_1} \cap U_{\mu_2}$ их областей определения. Кроме того, функция I_μ является гладкой в U_μ и, более того, зависящей только от F_1 и F_2: $I_\mu = f_\mu(F_1,F_2)$, где f_μ — гладкая функция от двух переменных, определенная в некоторой окрестности нуля $0 \in \mathbf{R}^2$.

Б. Множество U_μ является (открытой) окрестностью в M^4 всей особой поверхности $\Lambda^0 = F^{-1}(0,0)$ и, в частности, содержит некоторую окрестность $\mathcal{O}_\mu$ в M^4 существенно особой точки ξ^0. Прообраз $(F|_{U_\mu})^{-1}(m,h)$ любой точки $(m,h) \in F(U_\mu)$ состоит ровно из одной связной компоненты прообраза точки отображения F на всем M^4. Эту поверхность далее будем обозначать через Λ_{mh}, $\Lambda_{mh} \subset U_\mu$.

В. Фазовый поток G_I системы с гамильтонианом $I_\mu := U_\mu \to \mathbf{R}$ является 2π-периодическим во всем U_μ. Те его траектории, которые лежат в $\mathcal{W}_\mu \subset U_\mu$, совпадают с траекториями $\beta_{\mu\xi}$, $\xi \in \mathcal{V}_\mu$, то есть с траекториями, по которым первоначально строилась функция I_μ (см. (87)).

4.10.Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.10.А и ЛЕММЫ 4.10.Б. (Доказательство корректности продолжения функции I.) Однозначность функции $I_\mu \colon U_\mu \to \mathbf{R}$ и ее совпадение на $\mathcal{V}_\mu$ с продолжаемой функцией следует из определения U_μ (см. (90)) и из леммы 4.9.Б (см. (88)). Докажем независимость продолжения функции $I_\mu \colon \mathcal{V}_\mu \to \mathbf{R}$ от μ. Обозначим

$$k^S_{\mu_0} := \cup_{\mu\in(0,\mu_0)} S_\mu, \quad S_\mu = \mathcal{H}_\mu S. \tag{92}$$

Возьмем трансверсаль S лежащей на единичной сфере в $\mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2} \supset V_+$ с центром в нуле и имеющей на сфере вид малого открытого «круга с центром» в точке ζ^0, лежащей на луче l^0_1; тем самым, S «ортогональна» в $\mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2}$ этому лучу. Тогда из леммы 4.9.0 следует, что $k^S_{\mu_0}$ имеет вид ограниченного правильного открытого конуса типа $k_{\beta r}$ при малом β и $r = \mu_0$ (см. (42)), то есть является объединением интервалов длины μ_0 прямых, проходящих через $0 \in \mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2}$, но ось конуса не вертикальна, а лежит на луче l^0_1. Основание S_{μ_0} этого конуса будет сферическим. Покажем, что пересечения $k^S_{2\mu_0} \cap \chi_{mh}$, где $\chi_{mh} = \mathcal{F}^{-1}(m,h)$, при достаточно малом $\mu_0 > 0$ являются связными гладкими кривыми. Действительно, используя описание поверхностей $(\mathcal{F}^0_1)^{-1}(m)$, $(\mathcal{F}^0_2)^{-1}(h)$ (см. леммы 3.1.А, 3.1.Б и 3.1.В), а также тот факт, что в конусообразной окрестности луча l^0_1 отображение $\mathcal{F}^0$ не имеет критических точек (см. лемму 3.1.Д), нетрудно получить следующее утверждение. Невозмущенные линии $\chi^0_{mh} = (\mathcal{F}^0)^{-1}(m,h)$ гладкие в некотором коническом расширении конуса $k = k^S_{2\mu_0}$ и пересекают боковую границу этого конуса под ненулевым углом, причем угол равномерно по всем точкам границы отделен от нуля.

Связано это с тем, что, во-первых, граница бесконечного конуса k^S_∞, равно как и расслоение (в слабом смысле) на линии χ^0_{mh} инвариантны относительно действия группы гомотетий $\mathcal{H}_\mu$ и, во-вторых, что линии χ^0_{mh} при удалении от нуля $0 \in \mathbf{R}^3$ прижимаются к лучу l^0_1. Геометрическое рассуждение можно подкрепить выкладкой, доказывающей последнее свойство линий χ^0_{mh}, а именно: нужно рассмотреть сужение $\mathcal{F}_c := \mathcal{F}|_{\{q_2=c\}}$ отображения $\mathcal{F}$ на плоскость $\{q_2 = c\}$. Далее рассмотрим матрицу Якоби отображения $\mathcal{F}_c(p_1,q_1)$ в точке (p_1,q_1), такой, что $(p_1,q_1,c) \in l^0_1$. (Ее можно, например, получить, используя матрицы (23) и (24).) Из вида этой матрицы следует, что, действуя на векторы, она увеличивает их длины с коэффициентами растяжения порядка c. Отсюда нетрудно получить, что линии χ^0_{mh} действительно прижимаются к кривой $l^0_1 \subset \chi^0_{00}$ при возрастании $q_2 = c$.

Из леммы 3.10.А следует, что линии $\chi_{mh} \cap k$ гладкие и что угол между касательными к линиям χ^0_{mh} и χ_{mh} в каждой точке $\xi \in k$ оценивается сверху малой равномерной оценкой порядка $|\xi|$. Отсюда получаем, что возмущенные линии χ_{mh}, как и χ^0_{mh}, пересекают боковую границу под ненулевым углом. В доказательстве леммы 4.9 было показано, что основание конуса $k = k^S_{2\mu_0}$ (то есть сечение $S_{2\mu_0}$) пересекает линии χ_{mh} трансверсально, как, впрочем, и все другие сечения S_μ, $\mu \in (0, 2\mu_0)$. В § 4.9 мы также показали, что $F|_{S_\mu} \colon S_\mu \to \mathbf{R}^2_{mh}$ при любом $\mu \in (0, 2\mu_0)$ определяет диффеоморфизм на свой образ. Отсюда следует, что $\mathcal{J} := \chi_{mh} \cap k$ состоит из одной связной кривой, что и требовалось. Более того, из приведенных выше фактов следует, что один конец этой кривой лежит на боковой границе конуса, а другой — на основании.

На кривой $\mathcal{J}$ продолжаемая функция I_μ постоянна и не зависит от μ. Это очевидно следует из ее связности и лемм 4.9.Б и 4.9.В. Из доказанных свойств пересечений $\mathcal{J}$ легко получить, что $\mathcal{V} \supset S$ можно выбрать так, что при любом $\mu \in (0, 2\mu_0)$ будем иметь $\mathcal{V}_\mu \subset k^S_{2\mu_0}$, и при продолжении I_μ в формуле (90) $\mathcal{V}_\mu$ можно заменить на S_μ:

$$
\begin{gathered}
U_\mu = \cup_{\xi \in \mathcal{V}_\mu} \Lambda_\xi = \cup_{\xi \in S_\mu} \Lambda_\xi, \text{ и для } \forall \eta \in U_\mu \text{ положим } I(\eta) = I(\xi), \\
\text{где } \xi \in S_\mu, \ \eta \in \Lambda_\xi, \ \mu \in (0, \mu_0).
\end{gathered}
\tag{93}
$$

Из приведенных фактов получаем корректность продолженной функции, то есть ее фактическую независимость от μ.

Доказательство леммы 4.10.Б. Из приведенных рассуждений и из представления (93) множества U_μ также следует, что найдется $\mu_0 > 0$, такое, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ для любой точки $(m, h) \in F(k^S_\mu) = F(S_\mu)$ ее прообраз $(F|_{U_\mu})^{-1}(m, h)$ состоит ровно из одной связной компоненты прообраза точки (m, h) отображения F на всем M^4. Эту компоненту далее будем обозначать через Λ_{mh}. Из леммы 4.3.А следует, что найдется $\mu_0 > 0$, такое, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ сечение S_μ пересекает кривую l_1, откуда получаем, что $\Lambda^0 \subset U_\mu$. Так как S является открытым подмножеством гладкой поверхности в $V_+ \subset \mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2}$, то образ W_μ сечения S_μ при диффеоморфизме $F|_{S_\mu}$ будет (открытой) окрестностью нуля $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$. Отображение F гладкое, поэтому и прообраз $F^{-1}(W_\mu)$ тоже будет открытым множеством в M^4. Из (93) следует, что U_μ является связным подмножеством M^4, а используя свойство диффеоморфности $F|_{S_\mu}$, нетрудно показать, что U_μ является связной компонентой множества $F^{-1}(W_\mu)$. Следовательно, U_μ при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ является открытым множеством, а значит, окрестностью в M^4 всей особой поверхности $\Lambda^0 = \Lambda_{00} \subseteq F^{-1}(0, 0)$, в частности, окрестностью точки $\xi^0 \in \Lambda^0$. Лемма 4.10.Б доказана.

Доказательство представления $I_\mu = f_\mu(F_1, F_2)$. Так как $F|_{S_\mu} : S_\mu \to \mathbf{R}^2_{mh}$ является диффеоморфизмом на свой образ, то функции $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$, где $\overline{F}_i := F_i|_{S_\mu}$, являются гладкими координатами на S_μ. Функция $\overline{I}_\mu := I_\mu|_{S_\mu}$ тоже является гладкой на S_μ (см. (91) и (87)). Следовательно, $\overline{I}_\mu = f_\mu(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$, где f_μ — гладкая функция от двух переменных, гладко зависящая от $\mu \in (0, \mu_0)$. По построению, функция I_μ постоянна на каждой поверхности Λ_{mh} в U_μ (см. (93)). Из этих двух фактов следует, что $I_\mu = f_\mu(F_1, F_2)$ на всей окрестности U_μ (см. (93)), причем из гладкости функций F_1, F_2 и f_μ получаем, что $I_\mu \colon U_\mu \to \mathbf{R}$ является гладкой функцией. Из доказанной выше зависимости I только от ξ следует, что от μ зависят только области определения W_μ и U_μ функций f_μ и I_μ соответственно. Таким образом, получены все утверждения лемм 4.10.А и 4.10.Б. Для доказательства леммы 4.10.В воспользуемся следующим утверждением. Будем теперь под Σ понимать множество всех критических точек отображения F, лежащих в малой окрестности существенно особой точки ξ^0. Подробное описание этого множества дано в лемме 3.7.Б; в частности, при $m_1 = m_2 = 1$ имеем $\Sigma = \{\xi^0\}$, и $\Sigma = G_{F_1}(l_0) \cup \{\xi^0\}$ при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

Лемма 4.10.Д. *Найдется $\mu_0 > 0$, такое, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ множество U_μ целиком состоит из компактных поверхностей Λ разбиения на связные компоненты прообразов точек при отображении F. При этом пересечение $\Sigma_F \cap U_\mu$ всех критических точек отображения F, лежащих в U_μ, совпадает с $\Sigma \cap U_\mu$. Соответственно, множество σ_μ критических значений сужения $F|_{U_\mu}$ имеет следующий вид. При $m_1 = m_2 = 1$ это точка $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$, а при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ это пересечение $W_\mu \cap \tau$, где кривая τ определена формулой* (48) *и $W_\mu = F(U_\mu)$. Пересечение $U_\mu \cap M^4_R$ открытого множества U_μ с областью регулярности M^4_R рассматриваемого разбиения, задаваемого F* (см. определение 1.1.Б), *в обоих случаях совпадает с $(F|_{U_\mu})^{-1}(W_\mu \setminus \sigma_\mu)$. Это пересечение является открытым и всюду* *плотным в U_μ. Более того, разбиение U_μ на поверхности Λ_{mh}, $(m,h) \in W_\mu$, является легранжевым расслоением, задаваемым отображением $F|_{U_\mu}$* (см. определение 1.1.Б).

Доказательство леммы 4.10.Д. По условию теорем 2.4 и 2.5, существенно особая поверхность $\Lambda^0 = \Lambda_{00}$ есть компакт и имеет единственную критическую точку ξ^0 отображения F. Следовательно, найдется достаточно малая окрестность U' этой поверхности в M^4, такая, что все критические точки отображения F, лежащие в этой окрестности, локализованы в малой окрестности $\mathcal{O}$ точки ξ^0, то есть $\Sigma = \Sigma_F$ в U_μ. Так как Λ^0 есть компакт и связная компонента прообраза $F^{-1}(0)$, то существует малая окрестность U'' поверхности Λ^0, такая, что пересечение $F^{-1}(0) \cap \overline{U}''$ совпадает с Λ^0, а значит, $\partial U'' \cap F^{-1}(0)$ пусто, где $\overline{U}''$ — замыкание U''. Следовательно, $\partial U'' = \overline{U}'' - U''$ — компакт, а поэтому $F(\partial U'')$ тоже компакт, причем он не пересекается с нулем $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$. Из этих фактов вытекает существование окрестности $U \subset U' \cap U''$ в M^4 поверхности Λ^0, которая целиком состоит из компактных связных слоев разбиения F, а образ $W := F(U)$ является окрестностью нуля $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$, причем $U \setminus \mathcal{O}$ не содержит критических точек отображения F.

Так как $W_\mu = F|_{S_\mu}$, то из определения $S_\mu = \mathcal{H}\mu S$ и свойства $S_\mu \cap l_1 \neq \varnothing$ получаем, что $\lim_{\mu\to 0} W_\mu = \{0\}$. Следовательно, найдется $\mu_0 > 0$, такое, что $W_\mu \subset W$, а значит, и $U_\mu \subset U$ при любом $\mu \in (0,\mu_0)$. Из этих фактов получаем утверждение леммы 4.10.Д о совпадении $\Sigma_F \cap U_\mu = \Sigma \cap U_\mu$, $\mu \in (0,\mu_0)$, при некотором $\mu_0 > 0$. Из этого равенства, вида Σ (см. лемму 3.7.Б) и из леммы 3.5.Б следует вид множества σ_μ критических значений сужения $F|_{U_\mu}$. Дополнение $W_\mu \setminus \sigma_\mu$ открыто в $\mathbf{R}^2_{mh}$, а следовательно, и множество $F^{-1}(W_\mu \setminus \sigma_\mu)$ открыто в U_μ; здесь и далее $F = F|_{U_\mu}$. Из компактности компонент $\Lambda_{mh} \subset U_\mu$ следует, что $F^{-1}(W_\mu \setminus \sigma_\mu) \subseteq M^4_R$ (ср. § 1.1). При фиксированном (m,h) каждая компонента $\Lambda \subset U_\mu$, такая, что $F(\Lambda) = (m,h)$, единственна (см. лемму 4.10.Б), а из определений σ_μ и τ и из леммы 3.7.Б получаем, что при $(m,h) \in \sigma_\mu$ поверхность $\Lambda = \Lambda_{m,h}$ содержит критическую точку отображения F. Следовательно, $F^{-1}(W_\mu \setminus \sigma_\mu) = M_R \cap U_\mu$.

Множество σ_μ является либо точкой, либо кривой в $\mathbf{R}^2_{mh}$, поэтому дополнение $F^{-1}(\sigma_\mu) \setminus \Sigma$, не содержащее критических точек отображения F, будет гладкой поверхностью в U_μ и, в частности, будет нигде не плотно в $U_\mu \setminus \Sigma$. Но диск Σ — тоже нигде не плотное множество в U_μ, поэтому $M_R \cap U_\mu = F^{-1}(W_\mu \setminus \sigma_\mu)$ будет всюду плотно в U_μ. Более того, F задает лагранжево расслоение в U_μ (см. определение 1.1.Б). В самом деле, $U_\mu \setminus M_R = F^{-1}(\sigma_\mu) = (F^{-1}(\sigma_\mu) \setminus \Sigma) \cup (\Sigma \setminus \{\xi^0\}) \cup \{\xi^0\}$ является тонким множеством в U_μ как объединение трех гладких поверхностей (см. лемму 3.7.Б). Кроме того, $\Lambda_{mh} \cap \Sigma$ либо пусто, либо совпадает или с одной из замкнутых орбит векторного поля X_{F_1}, или с особой точкой ξ^0 этого поля (см. леммы 3.7.Б и 3.5.А). (Непустым это пересечение будет при $(m,h) \in \sigma_\mu$.) Лемма 4.10.Д доказана.

4.10.Е. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.10.В. Расслоение F в $M_R \cap U_\mu$ является, очевидно, регулярным лагранжевым расслоением с компактными слоями. Из известных утверждений о таких расслоениях, тесно связанных с интегрируемыми гамильтоновыми системами, вытекают следующие утверждения (см. [40]). Построенное выше продолжение $I\colon U_\mu \to \mathbf{R}$ интеграла (87), называемое круговой функцией действия, обладает на $M_R \cap U_\mu$ следующими свойствами. Фазовый поток G_I системы с гамильтонианом $I = I_\mu$ на $M_R \cap U_\mu$ является 2π-периодическим и сохраняет каждый слой лагранжева расслоения F на $M_R \cap U_\mu$. При этом для любой точки $\xi \in \mathcal{V}_\mu \cap M_R$ при любом $\mu \in (0,\mu_0)$ траектория потока G_I, проходящая через эту точку, совпадает с замкнутой геодезической $\beta_\xi \ni \xi$ расслоения F, по семейству β_ξ, $\xi \in \mathcal{V}_\mu$, которых строился интеграл (87). Покажем, что 2π-периодичность потока G_I имеет место на всем U_μ. Действительно, пусть $\xi \in U_\mu$, а $\xi' = G_I^{2\pi}(\xi)$ — образ точки ξ под действием потока G_I за время 2π. Допустим, что $\xi' \neq \xi$, тогда найдется окрестность $\mathcal{D}$ точки ξ в M^4, такая, что для любой точки $\eta \in \mathcal{D}$ будет $G_I^{2\pi}(\eta) \neq \eta$. Но это противоречит всюду плотности $M_R \cap U_\mu$ в U_μ и доказанной 2π-периодичности G_I в $M_R \cap U_\mu$, что и доказывает 2π-периодичность во всем U_μ.

Как отмечалось, замкнутые геодезические $\beta_{\mu\xi}$ регулярного расслоения $F|_{U_\mu \cap M_R^4}$, лежащие в $\mathcal{W}_\mu \cap M_R^4$, являются траекториями потока G_I. Поскольку те и другие кривые являются замкнутыми во всем $\mathcal{W}_\mu$, а $\mathcal{W}_\mu \cap M_R^4$ открыто и всюду плотно в $\mathcal{W}_\mu$, то совпадение кривых этих двух типов будет во всем $\mathcal{W}_\mu$. Лемма 4.10.В доказана.

§ 4.11. Завершение доказательства предложения 4.1

В качестве $I\colon U \to R$ можно взять функцию $I_\mu\colon U_\mu \to R$ при любом $\mu \in (0, \mu_0)$, тогда из доказанных выше в § 4.9 и § 4.10 фактов следует, что все утверждения предложения 4.1 выполнены, кроме оценки (80). Докажем эту оценку. Выразим функцию действия I_μ в окрестности $\mathcal{O}_\mu := U_\mu \cap B(0, 2\mu)$ точки ξ^0 в данных там по условию канонических координатах (p, q). Сделаем разрешающую замену $(p, q) = \mu(P, Q)$ и рассмотрим функцию

$$J^\mu(P, Q) := \frac{1}{\mu^2}\, I_\mu(\mu P, \mu Q), \quad \mu \in (0, \mu_0),$$

определенную в $\widetilde{\mathcal{O}}^\mu := \mathcal{H}_\mu^{-1}(\mathcal{O}_\mu)$. Из этого соотношения следует, что гамильтоново векторное поле X_{J^μ}, задаваемое функцией $J^\mu(P, Q)$ от переменных (P, Q), рассматриваемых как канонические, имеет следующий вид:

$$X_{J^\mu}(P, Q) = \frac{1}{\mu}\, X_{I_\mu}(p, q), \quad \text{где} \quad (p, q) = \mu(P, Q). \tag{94}$$

Так как геодезические $\beta_{\mu\xi}$, $\xi \in \mathcal{V}_\mu$, являются траекториями потока G_{I_μ}, то отсюда и из определения кривых $\beta_{\mu\xi}$, а также из леммы 4.9.0 получаем, что геодезические β_ξ^μ, $\xi \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subset \widetilde{\mathcal{O}}^\mu$, расслоения $F^\mu(P, Q)$ являются траекториями потока G_{J^μ}. Из той же леммы и представления $I = f(F_1, F_2)$ получаем $J^\mu = f^\mu(F_1^\mu, F_2^\mu)$, где f^μ — некоторая гладкая в $\widetilde{W}_\mu := F^\mu(\widetilde{\mathcal{O}}^\mu)$ функция, гладко зависящая от $\mu \in (0, \mu_0)$, $\mu_0 > 0$. Отсюда и из оценки (83) леммы 4.3.Б следует, что найдется k, такое, что

$$\left(\frac{\partial f^\mu}{\partial F_1^\mu} - 1\right)^2 + \left(\frac{\partial f^\mu}{\partial F_2^\mu}\right)^2 \leqslant k^2 \mu^2 \tag{95}$$

во всех точках $(F_1^\mu, F_2^\mu) \in \widetilde{W}_\mu$, $\mu \in (0, \mu_0)$. Следовательно, найдутся $\mu_0 > 0$ и $K > 0$, такие, что в $\widetilde{\mathcal{O}}^\mu$

$$\left| X_{J^\mu} - X_{F_1^\mu} \right| \leqslant K\mu, \quad \mu \in (0, \mu_0).$$

Используя вид $\mathcal{O}_\mu$, вытекающий из построения окрестности U_μ, лемму 4.9.0 и представление (82), нетрудно доказать следующий факт. Существует шар $B(0, r_0) \subset \mathbf{R}^4_{PQ}$ фиксированного радиуса r_0, не зависящего от $\mu \in (0, \mu_0)$, который содержится в $\widetilde{\mathcal{O}}^\mu = \mathcal{H}_\mu^{-1}(\mathcal{O}_\mu)$ при всех $\mu \in (0, \mu_0)$. Возвращаясь к исходным координатам (p, q) и используя лемму 4.9.0, получаем, что при $(p, q) \in B(0, \mu r_0)$, где $\mu \in (0, \mu_0)$, оценка разности векторов полей приобретает вид

$$\left| X_{I_\mu}(p, q) - X_{F_1}(p, q) \right| \leqslant K\mu^2.$$

Из этой оценки, применяя леммы 3.7.А и 3.3.А, получаем при некотором $K_1 > 0$ и любом $(p,q) \in B(0, \mu_0 r_0)$

$$\left|X_{I_\mu}(p,q) - X_{F_1^0}(p,q)\right| \leqslant K_1 |(p,q)|^2, \quad \mu \in (0, \mu_0).$$

Вторая из оценок (80) очевидна (см. (9) либо лемму 3.3.А). Таким образом, получаем все утверждения предложения 4.1.

§ 4.12. Некоторые свойства потока G_I в малой окрестности существенно особой точки ξ^0

В §§ 3.4–3.10 были сформулированы и доказаны некоторые аналоги «невозмущенных» утверждений, приведенных в первой части § 3 (см. §§ 3.1–3.3). В данном пункте сформулированы следствия из предложения 4.1, позволяющие существенно дополнить список этих аналогов. Роль возмущения потока $G_{F_1^0}$ в них играет поток G_I.

Следствие 4.12. *Для любых $\alpha > 1$ найдутся $L > 0$, $c > 0$ и $r > 0$, такие, что будут выполнены следующие утверждения.*

А. Траектории β фазового потока G_I трансверсально пересекают полупространство $V_+ = \{p_2 = 0, q_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2}$ во всех точках полного трехмерного конуса $k_{\alpha r}$ (см. (42)), *причем угол между β и V_+ в этих точках будет равномерно отделен от нуля. Кроме того, траектории β близки к траекториям ν^0 невозмущенного фазового потока $G_{F_1^0}$ в некоторой полной окрестности точки ξ^0. Точнее, для любой точки $\xi \in B(0,r)$ шара $B(0,r)$ в $\mathbf{R}^4_{pq}$ радиуса r с центром в нуле*

$$\rho_j(\beta_\xi, \nu^0_\xi) \leqslant L|\xi|^{2-j}, \quad \rho_j(\nu^0_\xi, \beta_\xi) \leqslant L|\xi|^{2-j}, \quad j = 0, 1,$$

где β_ξ и ν^0_ξ — траектории, проходящие через точку ξ, $|\xi| = |(p,q)|$, а ρ_j — расстояние в метрике C^j, $j = 0, 1$ (см. определение 1.5.А).

Б. Обозначим через $G_I(k_{\alpha r})$ множество в $\mathbf{R}^4_{pq}$, заметаемое конусом $k_{\alpha r}$ под действием потока G_I, и обозначим через $K_{\alpha r}$ 4-мерный полный конус, заметаемый конусом $k_{\alpha r}$ под действием потока $G_{F_1^0}$:

$$K_{\alpha r} := \{(p,q) \in \mathbf{R}^4 | m_1(p_1^2 + q_1^2) < \alpha^2 m_2(p_2^2 + q_2^2)\} \cap B(0,r).$$

Тогда $G_I(k_{\alpha r})$ целиком содержит конус $K_{\alpha(1-cr),\, r(1-cr)}$ и целиком содержится в конусе $K_{\alpha(1+cr),\, r(1+cr)}$.

В. Орбиты $\beta_\xi \ni \xi$ потока G_I при $\xi \in G_I(k_{\alpha r}) \setminus \Sigma$ пересекают полупространство V_+ ровно в m_2 точках, где $\Sigma = \Sigma_F$ — множество критических точек отображения F, в частности, $\Sigma = \{0\}$ при $m_2 = 1$ (см. леммы 3.7.Б и 4.10.Д). *Множество Σ инвариантно относительно этого потока, и лежащие при $m_2 = 2$ в $\Sigma \setminus \{0\}$ его орбиты β пересекают $k_{\alpha r}$ ровно в одной точке. При $m_2 = 2$ пара лежащих на V_+ точек, которые соединяет орбита β, расположены, грубо говоря, симметрично относительно кривой l_0.*

Более точно, ситуация при $m_2 = 2$ следующая. Прежде всего, орбиты β группы G_I соединяют точки, лежащие на кривой $l_i \cap B_r$, где $B_r = B(0,r) \cap V_+$, с точками кривой l_{i+2} при $i = 1, 2$ и l_{i-2} при $i = 3, 4$. Соседние кривые $l_i \subset \Lambda^0 \cap V_+$, $i = 1, 2, 3, 4$, этими орбитами не соединяются. Аналогично рассмотрим особую линию $\widetilde{\chi}_{mhr}$ при $(m,h) \in \check{\tau}$, то есть $\widetilde{\chi}_{mhr} = (\theta_r \setminus \chi_{00}) \cap F_1^{-1}(m)$, при отрицательном значении $m \in \left(-\frac{1}{100} r^2, 0\right)$. Из лемм 3.5.В и 3.6.В следует, что такая линия состоит из двух гладких кривых, которые обозначим *через* $\widetilde{\eta}_m$ *и* $\widetilde{\zeta}_m$ (ср. с леммой 3.4.Б) *и которые пересекаются под ненулевым углом в точке* ξ_m *пересечения* $l_0 \cap \mathcal{F}_1^{-1}(m)$. *Орбиты* β *соединяют точки, лежащие на одной и той же из этих двух кривых, но по разные стороны от* ξ_m. *Подобный факт верен и для неособых линий* $\widetilde{\chi}_{mhr}$ *при*

$$m \in \left(-\frac{1}{100}\,r^2, 0\right), \quad h \in \left(-\frac{1}{1000}\,r^3, \frac{1}{1000}\,r^3\right), \quad (m,h) \notin \tau,$$

а также для значений (m,h) *вида*

$$m = 0, \quad 0 < |h| < \frac{1}{1000}\,r^3.$$

Из лемм 3.6.В и 3.5.В следует, что особая линия $\widetilde{\chi}_{mhr}$, $(m,h)\in\tau$, $m\in\left(-\frac{1}{100}\,r^2, 0\right]$, *делит «круг»* $\mathcal{F}_1^{-1}(m)\cap B_r$ *на четыре части. Иными словами, дополнение* $(\mathcal{F}_1^{-1}(m)\cap B_r)\setminus\widetilde{\chi}_{mhr}$ *к криволинейному «кресту»* $\widetilde{\chi}_{mhr}$, $(m,h)\in\tau$, *состоит из четырех связных компонент — «открытых квадрантов». То же самое верно и для малой окрестности этого круга в* $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$. *Утверждается, что каждая точка любого из исходных квадрантов, лежащая на линии* $\widetilde{\chi}_{mhr}$ (см. § 3.6), *при* (m,h), *удовлетворяющем приведенным выше условиям, соединяется орбитой* β *с точкой противоположного несколько большего квадранта, лежащей на той же неособой линии, то есть первый квадрант соединяется с третьим, а второй — с четвертым.*

Г. Дополнение $G_I(k_{\alpha r})\setminus\Sigma$ *локально тривиально расслаивается орбитами* β 2π*-периодического фазового потока* G_I. *Минимальный период тех решений системы с гамильтонианом* I, *траектории которых лежат в* $G_I(k_{\alpha r})\setminus\Sigma$, *равен в точности* 2π. *Кроме того, при* $m_2 = 2$ *множество* $\Sigma\setminus\{0\}$ *тривиально расслоено орбитами* β *группы* G_I. *Соответствующий минимальный период тоже будет одинаков для всех траекторий* $\beta\subset\Sigma\setminus\{0\}$ *и равен* π, *то есть будет вдвое меньше, чем в* $G_I(k_{\alpha r})\setminus\Sigma$. *Точка* $0\in\mathbf{R}^4_{pq}$ *будет неподвижной точкой потока* G_I.

Д. Расслоения 4-мерного множества $G_I(k_{\alpha r})$ *поверхностями* $F_1^{-1}(m)$, $F_2^{-1}(h)$ *и* $F^{-1}(m,h)$ *можно получить следующим образом. Рассмотрим пересечения этих поверхностей с* $\mathcal{G}_{\alpha r} := G_I(k_{\alpha r})\cap V_+$, *являющимся, очевидно, открытым в* V_+ *множеством, совпадающим при* $m_2 = 1$ *с* $k_{\alpha r}$. *Подействуем на них группой* G_I, *тогда эти пересечения прочертят слои указанных расслоений. Кроме того, в случае* $m_2 = 2$ *при* (m,h), *удовлетворяющих условиям*

$$m \in \left(-\frac{1}{100}\,r^2, 0\right], \quad |h| < \frac{1}{1000}\,r^3, \quad (m,h)\notin\tau,$$

пересечение $F^{-1}(m,h)\cap\mathcal{G}_{\alpha r}$ *состоит из двух связных компонент и поверхность* $F^{-1}(m,h)\cap G_I(k_{\alpha r})$ *получается разнесением только любой из этих компонент. В случае* $m = h = 0$ *такая поверхность получается разнесением любых двух соседних из четырех кривых, составляющих* $F^{-1}(m,h)\cap\mathcal{G}_{\alpha r}$ *при* $m_2 = 2$ (см. лемму 3.5.Г).

§ 4.13. Доказательство следствия 4.12

4.13.А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ 4.12.А. и 4.12.Б. Из оценки (80) предложения 4.1 следует, что при достаточно малых $|\xi|$, $\xi\in\mathbf{R}^4_{pq}$, угол между векторами $X_I(\xi)$ и $X_{F_1^0}(\xi)$ будет не больше, чем порядка $|\xi|$, а $|X_{F_1^0}(\xi)|\sim|\xi|$. Отсюда и из трансверсальности пересечения полупространства V_+ векторами поля $X_{F_1^0}$ и их инвариантности относительно гомотетий (см. леммы 3.3.В и 3.3.А) следуют оба факта, составляющие утверждение А. Утверждение Б является очевидным следствием утверждения А и вида орбит невозмущенного потока $G_{F_1^0}$ (см. лемму 3.3.А).

4.13.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.12.В. При движении под действием 2π-периодического невозмущенного фазового потока $G^0 = G_{F_1^0}$ точка $x(t)$ за время $t \in [0, 2\pi)$ пересечет полупространство V_+ ровно m_2 раз (см. лемму 3.3.Б). Из этого факта, из утверждения 4.12.А и оценок (80) то же самое следует и для потока G_I, но лишь для пересечения $\mathcal{G}_{\alpha r} = G_I(k_{\alpha r}) \cap V_+$ вместо самого полупространства V_+, допустимого в невозмущенном случае. Отсюда получаем утверждение 4.12.В при $m_2 = 1$. При $m_2 = 2$ двукратное пересечение V_+ точкой $x(t)$ означает лишь, что число точек пересечения полупространства V_+ любой орбитой $\beta_\xi \ni \xi$ при $\xi \in G_I(k_{\alpha r})$ не превосходит 2.

Покажем, что при $\xi \in \mathcal{G}_{\alpha r} \setminus l_0$ это число не равно 1, то есть

$$\#(\beta_\xi \cap V_+) = 2, \quad \xi \in \mathcal{G}_{\alpha r} \setminus l_0. \tag{96}$$

Рассмотрим, как в лемме 3.10.А, дополнение $\kappa_{\alpha r} = k_{\alpha r} \setminus \overline{k}_{\gamma r}$, где $\gamma = 1/\alpha$, в «широком» конусе $k_{\alpha r}$ к замыканию «узкого» конуса $k_{\gamma r}$. Тогда (96) в «кольцеобразном» конусе $\kappa_{\alpha r}$ следует из леммы 3.3.В и утверждения 4.12.А. Более того, вне конуса $\overline{k}_{\gamma r}$ справедливы и остальные утверждения следствия 4.12.В. Это следует опять же из леммы 3.3.В о виде пары β-связанных точек на V_+ в невозмущенном случае, то есть при $\beta = \nu^0$, и из утверждения 4.12.А, а также из следующих фактов. На кресте $\widetilde{\chi}_{mhr} = \widetilde{\eta}_m \cup \widetilde{\zeta}_m$ функция $F_2(p,q) - F_2(\xi_m)$ равна нулю, а в точках каждого из четырех рассматриваемых в доказываемом следствии открытых «квадрантов», лежащих на поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ вместе с этим крестом, данная функция отлична от нуля и имеет один и тот же знак. Эти знаки чередуются при обходе по $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ вокруг точки ξ_μ. Приведенные факты следуют из лемм 3.5.В и 3.6.В (см. также лемму 3.4.Б). Кроме того, используем то очевидное утверждение, что на траекториях потока G_I сохраняется функция $F_2(p,q)$.

Доказательство следствия 4.12.В в узком конусе $k_{\gamma r}$, где теперь $\gamma = 1/\alpha'$, а α' чуть меньше α. Начнем доказательство с исследования диска Σ, $m_2 = 2$. Согласно лемме 3.7.Б, он целиком состоит из критических точек отображения $F = (F_1, F_2)$ и инвариантен относительно потока G_{F_1}, а согласно предложению 4.1, $I = f(F_1, F_2)$. Из этих фактов с учетом оценки (80) получаем, что Σ инвариантен также относительно потоков G_{F_2} и G_I, причем траектории потоков G_{F_1} и G_I на Σ совпадают. Отсюда и из свойств траекторий потока G_{F_1} на Σ (см. лемму 3.7.Б) следуют все утверждения следствия 4.12.В, касающиеся диска Σ. Что касается траекторий потока G_{F_2} на Σ, то можно утверждать, что каждая из траекторий потока G_{F_1}, лежащая на $\Sigma \setminus \{0\}$, либо является и замкнутой траекторией потока G_{F_2}, либо сплошь состоит из неподвижных точек этого потока.

Посмотрим теперь, как расположена точка $\xi' \in V_+$, β-связанная с $\xi \in k_{\gamma r} \setminus l_0$. Точку ξ' можно рассматривать как проекцию точки ξ на полупространство V_+ «параллельно» орбитам β группы G_I. Из трансверсальности пересечения орбитами β полупространства V_+ в точках всего широкого конуса $k_{\alpha r}$ следует, что эта проекция $\xi \mapsto \xi'$ задает на всем $k_{\alpha r}$ локальный диффеоморфизм. Действительно, семейство $\overline{\beta}_\xi$, $\xi \in k_{\alpha r}$, дуг $\overline{\beta}_\xi \subset \beta_\xi$ траекторий β_ξ, которые соединяют точки ξ и $\xi' \in V_+$, гладко зависит от ξ. Отсюда, из трансверсальности и из того факта, что поток G_I, как любой фазовый поток, задает локальный диффеоморфизм, получаем, что рассматриваемая проекция задает локальный диффеоморфизм.

Предположим, что точка ξ лежит на кривой $\widetilde{\eta}_m$ вне $k_{\gamma r}$, но вблизи этого конуса, $m < 0$. Тогда, по доказанному ранее свойству кольцеобразного конуса $\kappa_{\alpha r}$, точка $\xi' = \xi'(\xi)$ тоже лежит на $\widetilde{\eta}_m$, но по другую сторону от точки ξ_m пересечения $\widetilde{\eta}_m \cap l_0$. При движении точки ξ к ξ_m по $\widetilde{\eta}_m$ она попадает в конус $k_{\gamma r}$, а точка ξ', очевидно, будет двигаться тоже по $\widetilde{\eta}_m$ ей навстречу, и одна из точек ξ либо ξ' достигнет положения ξ_m. Но тогда и другая в тот же момент достигнет положения ξ_m, то есть ξ и ξ' столкнутся в точке ξ_m, иначе получится противоречие с инвариантностью диска $\Sigma \supset l_0 \ni \xi_m$ и теоремой единственности дифференциальных уравнений — точка, стартующая с Σ, не может сойти с Σ. Все то же самое верно и для кривой $\widetilde{\zeta}_m$. Случай $m = 0$ рассматривается аналогично.

Перейдем теперь к рассмотрению открытых квадрантов на $\mathcal{F}_1^{-1}(m) \cap B_r$, отвечающих кресту $\widetilde{\chi}_{mhr}$, $(m, h) \in \tau$, совпадающему при $m < 0$ с объединением $\widetilde{\eta}_m \cup \widetilde{\zeta}_m$. Пусть точка ξ лежит в первом квадранте. Так как функция $F_2(p, q) - F_2(\xi_m)$ постоянна на траекториях β, то точка ξ' обязана лежать либо в первом, либо в третьем квадрантах. Если ξ лежит вне конуса $k_{\gamma r}$, то, по ранее доказанному, ξ' лежит в третьем квадранте. Будем двигать точку ξ по $F_1^{-1}(m) \cap B_r$, оставаясь в первом квадранте, во внутренность этого конуса, тогда точка ξ' не выйдет за пределы третьего квадранта. То же самое верно и для других квадрантов. Утверждение 4.12.В полностью доказано.

4.13.В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.12.Г. Пусть $\xi \in \mathcal{G}_{\alpha r} \setminus l_0$, где $\mathcal{G}_{\alpha r} = G_I(k_{\alpha r}) \cap V_+$, тогда из утверждения 4.12.А и оценок (80) следует, что под действием фазового потока G_I точка $x(t)$, стартующая из положения ξ, через время, близкое к π, но не раньше, снова пересечет V_+ в некоторой точке ξ'. Ясно, что $\xi' \in \mathcal{G}_{\alpha r} \setminus l_0$. Из утверждения 4.12.В следует, что $\xi' \neq \xi$. Из этих фактов получаем, что минимальный период решений, соответствующих траекториям β_ξ при таких ξ, в точности равен 2π. Фиксируем некоторое $\xi_0 \in \mathcal{G}_{\alpha r} \setminus l_0$ и рассмотрим достаточно малую окрестность $\mathcal{V} \subset V_+$ этой точки, лежащую в $\mathcal{G}_{\alpha r} \setminus l_0$. Тогда $G_I(\mathcal{V})$ будет окрестностью траектории $\beta_0 := \beta_{\xi_0}$ в $\mathbf{R}^4_{pq}$. Пусть $\eta \in G_I(\mathcal{V})$ — любая точка, и пусть $\xi = \xi(\eta) \in \mathcal{V}$ лежит на той же орбите $\beta = \beta_\eta$, что и η. Пусть $t = t(\eta) \in [0, 2\pi)$ — время, за которое точка, стартующая из положения ξ, под действием фазового потока перейдет в положение η. Тогда указание пары (ξ, t) для точки η задает на $G_I(\mathcal{V})$ структуру прямого произведения $\mathcal{V} \times S^1$ окрестности $\mathcal{V}$ и окружности S^1 с угловой «координатой» $t \bmod 2\pi$. Таким образом, доказана локальная тривиальность расслоения области $G_I(k_{\alpha r}) \setminus \Sigma$ орбитами β.

В доказательстве утверждения 4.12.В было показано, что траектории $\beta \subset \Sigma$ потока G_I совпадают с траекториями потока G_{F_1}. Отсюда и из леммы 3.7.Б следует, что расслоение проколотого в нуле диска $\Sigma \setminus \{0\}$ траекториями β задает структуру кольца $l_0 \times S^1$. Из утверждения 4.12.А, оценок (80) и леммы 3.7.Б вытекает, что минимальный период T решений системы с гамильтонианом I, отвечающих траекториям $\beta \subset \Sigma$, будет близок к π. Но все такие решения имеют период 2π; следовательно, $T \equiv \pi$. Следствие 4.12.Г доказано.

4.13.Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4.12.Д. Первая его часть — о получении каждого слоя $F_1^{-1}(m)$, $F_2^{-1}(h)$ и $F^{-1}(m, h)$ с помощью разнесения всего его пересечения с $\mathcal{G}_{\alpha r}$ — вытекает из инвариантности слоя относительно потока G_I и из инвариантности самого множества $G_I(k_{\alpha r})$. Используется также тот факт, что каждая орбита $\beta \subset G_I(k_{\alpha r})$ пересекает $\mathcal{G}_{\alpha r}$. Вторая его часть — о достаточности для получения неособых слоев $\Lambda_{mh} \cap G_I(k_{\alpha r})$ одной из двух связных компонент пересечения $\Lambda_{mh} \cap \mathcal{G}_{\alpha r}$ — следует из того факта, что любая точка на такой компоненте, согласно утверждению 4.12.В, соединена «половиной» траектории β с точкой другой компоненты. Наличие именно двух компонент в $\mathcal{G}_{\alpha r}$ также следует из утверждения 4.12.В, а еще потому, что траектории β_ξ близки к траекториям невозмущенного поля $X_{F_1^0}$ (см. утверждение 4.12.А). Случай $m = h = 0$ рассматривается аналогично (см. лемму 3.5.Г). Таким образом, утверждение 4.12.Д доказано, а с ним вместе полностью доказано и все следствие 4.12.

§ 4.14. Выбор петли δ и элемента $\gamma_1 \in H_1(\Lambda^s)$ и протягивание этого элемента вдоль петли δ

Рассмотрим 2-мерную трансверсаль $S \subset V_+$ к лучу l_1^0 (см. лемму 4.6.А) и рассмотрим ее образ $S_\mu = \mathcal{H}_\mu S$ при гомотетии $\mathcal{H}_\mu$. При достаточно малом $\mu_0 > 0$ и любом $\mu \in (0, \mu_0)$ сечение S_μ будет трансверсально в V_+ линиям $\chi_{mh} = \mathcal{F}^{-1}(m, h)$, в том числе и кривой $l_1 \subset \chi_{00}$, которую S_μ пересекает в точке η_μ, $|\eta_\mu| = \mu$ (см. доказательство лемм 4.9.Б и 4.10.А, а также начало § 4.3). В доказательстве леммы 4.9.Б было показано, что сужение $F|_{S_\mu}$ задает диффеоморфизм сечения S_μ на его образ $W_\mu = F(S_\mu)$. Рассмотрим петлю Γ, лежащую в $W_\mu \subset \mathbf{R}^2_{mh}$ и имеющую вид прямоугольника с центром в нуле $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$ и со сторонами, параллельными координатным осям m и h. Длины сторон прямоугольника обозначим через $2m^0$ и $2h^0$ и при необходимости будем их уменьшать — при достаточно малых m^0 и h^0 протягивание от размеров m^0, h^0 прямоугольника Γ зависеть не будет. В качестве выделенной на петле Γ возьмем среднюю точку $(m, h) = (0, -h^0)$ нижней стороны прямоугольника, считая ось m горизонтальной и направленной вправо, а ось h — вертикальной и направленной вверх. Движение по этой петле зададим против часовой стрелки.

Определение 4.14. Петлю Γ далее будем называть *контуром*.

Перенесем петлю $\Gamma \subset F(S_\mu)$ с помощью диффеоморфизма $(F|_{S_\mu})^{-1}$ на сечение S_μ. Полученную петлю δ и возьмем в качестве петли, обходящей особый слой Λ^0. В частности, в качестве выделенной на δ возьмем точку $\xi^s \in S_\mu$, такую, что $F(\xi^s) = (0, -h^0)$. Далее, используя диффеоморфизм $F|_{S_\mu}$, петли δ и Γ нередко будем отождествлять. Петля δ не проходит через существенно особый слой Λ^0. В дальнейшем мы увидим, что при $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ петля δ пересекает слой Λ_{mh} со слабыми особенностями, то есть лежащий на некоторой полупроницаемой поверхности $\mathcal{T}'$. То же самое будет и при $m_1 = 2$, $m_2 = 1$.

Определим теперь один из двух базисных элементов 1-мерной группы гомологий $H_1(\Lambda^s)$ стартового слоя $\Lambda^s \ni \xi^s$; протягиванию этих двух элементов вдоль петли δ посвящено практически все доказательство теорем 2.4 и 2.5. Этот элемент обозначим через $\gamma_1 \in H_1(\Lambda^s)$, и представляется он циклом, совпадающим с орбитой β_{ξ^s} потока G_I, которая ориентирована этим потоком, $\xi^s \in \beta^s \subset \Lambda^s$. Из предложения 4.1 и из следствия 4.12 получаем следующие факты. Любая траектория β потока G_I целиком лежит на слое Λ расслоения F, и этот поток 2π-периодичен; здесь и далее под отображением F понимается сужение отображения F на окрестность U слоя Λ^0, в которой справедливы все утверждения предложения 4.1, и, соответственно, под расслоением F понимается расслоение этой окрестности. Кроме того, на любом слое Λ этого расслоения имеется регулярная траектория потока G_I, даже на существенно особом слое $\Lambda^0 \ni \xi^0$. Под регулярной здесь понимается орбита группы Ли, окрестность которой в M^4 соседние орбиты расслаивают тривиально. Таким образом, непрерывное продолжение элемента $\gamma_1 \in H_1(\Lambda^s)$ на все другие слои $\Lambda \subset U$ расслоения F как бы «вморожено» в такой слой. Протягивая цикл с носителем на орбите группы G_I и ориентированный этой группой, причем протягивая произвольным образом по произвольным слоям Λ расслоения F на U и вдоль произвольных петель, не пересекающих Σ, мы снова получим цикл того же вида. Следовательно, элемент $\gamma_1 \in H_1(\Lambda^s)$ не может быть причиной нетривиальной локальной монодромии, отвечающей обходу вокруг Λ^0, то есть причиной отличного от тождественного отображения монодромии. В частности, при обходе вдоль рассматриваемой петли δ такой цикл переходит в гомотопный себе, а значит,

$$\gamma_1 \mapsto \gamma_1. \tag{97}$$

§ 5. Семейства замкнутых кривых, лежащих на слоях Λ_{mh} и отвечающих второму элементу $\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$ и полупространству $V_+ \subset \{p_2 = 0\}$

Оставшаяся часть статьи, кроме второй половины последнего § 8, посвящена построению и протягиванию цикла, представляющего второй базисный элемент γ_2 группы 1-мерных гомологий стартового слоя Λ^s. Сначала мы соединим дугой геодезической α соседние кривые l_j особой линии $\chi_{00} = \Lambda^0 \cap \mathcal{O} \cap V_+$ и дополним α интервалами этих кривых до проколотой в нуле $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ (то есть в ξ^0) замкнутой кривой e на Λ^0 (лемма 5.1.А). Затем включим дугу α в семейство геодезических, лежащих на соседних с Λ^0 слоях расслоения F (лемма 5.3). В заключение, в § 5.10, мы изучим «полоски» σ, лежащие на поверхностях $F_1^{-1}(m) \subset M^4$ либо $F_2^{-1}(h) \subset M^4$ и являющиеся там 2-мерными трансверсалями к орбитам β группы G_I. Полоски расслоены на построенные в §§ 5.7–5.9 замкнутые линии λ, составленные из геодезических упомянутого семейства и из «крюков» — частей линий $\chi_{mh} \subset V_+ \cap \mathcal{O}$ (см. лемму 3.6.В). В § 6 и § 7 полоски, аналогичные рассмотренным в § 5, будут построены для гиперплоскости $\{p_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$ вместо $\{p_2 = 0\}$. В завершающем § 8 они будут использованы для продолжения цикла, представляющего второй базисный элемент $\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$.

§ 5.1. Построение геодезической, соединяющей соседние кривые, составляющие особую линию χ_{00}. Дополнение геодезической этими двумя кривыми до проколотой в нуле замкнутой кривой

Линия $\chi_{00} = \mathcal{F}^{-1}(0)$ состоит из $2m_2$ криволинейных интервалов с общим концом в точке $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ (см. лемму 3.5.Г). Пронумеруем эти интервалы $l_1, \ldots, l_{2m_2}$, начиная с любого и в соответствии с любым направлением вращения вокруг оси q_2 в $\mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$, но так, чтобы интервалы с номерами, отличающимися на 1, были соседними.

Лемма 5.1.А. *Существует $\mu_0 > 0$, такое, что для любого $\mu \in (0, \mu_0)$ будут верны следующие утверждения. Рассмотрим любой из интервалов $l_1, \ldots, l_{2m_2}$, составляющих линию $\chi_{00} = \Lambda^0 \cap \mathcal{O} \cap V_+$, скажем, l_1, и соседний с ним, скажем, l_2. В случае $m_2 = 1$ соседний интервал единственный, это l_2, а в случае $m_2 = 2$ вторым соседним интервалом для l_1 является кривая l_4. Утверждается, что существует гладко зависящая от $\mu \in (0, \mu_0)$ геодезическая α_μ расслоения F, соединяющая точки $\eta_{\mu 1}$ и $\eta_{\mu 2}$ кривых l_1 и l_2 соответственно, где $|\eta_{\mu j}| = \mu$, $j = 1, 2$. Кривая α_μ лежит на Λ^0 и автоматически не является дугой орбиты β группы G_I* (см. следствие 4.12.В). *Кроме того, дополним геодезическую α_μ интервалами $l_{\mu j}$ кривых l_j от точки $\eta_{\mu j}$ до нуля $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$, $j = 1, 2$, и полученную проколотую в нуле, то есть в точке ξ^0, замкнутую кривую обозначим через e_μ:*

$$e_\mu := l_{\mu 1} \cup \alpha_\mu \cup l_{\mu 2}.$$

Тогда каждая орбита β группы G_I пересекает кривую e_μ ровно в одной точке и пересекает ее под ненулевым углом везде, в том числе и в точках $\eta_{\mu j}$, $j = 1, 2$, возможной неглад-

кости кривой e_μ, которая в каждой их этих двух точек имеет с обеих сторон касательные. Проколотый в нуле особый слой $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ тривиально расслаивается этими орбитами, то есть орбитами семейства β_ξ, $\xi \in e_\mu$, где $\beta_\xi \ni \xi$, в частности, $\Lambda^0 \setminus \{0\} = \cup_{\xi \in e_\mu} \beta_\xi$.

Для доказательства леммы 5.1.А воспользуемся следующим утверждением. Фиксируем некоторое $\mu \in (0, \mu_0)$ и орбиту $\beta = \beta_{\eta_{\mu 1}}$ потока G_I, проходящую через точку $\eta_{\mu 1} \in l_1$. Обозначим как $\beta^\tau := G^\tau_{F_2}(\beta)$ образ орбиты β под действием потока G_{F_2} через время τ.

Лемма 5.1.Б. *Орбиты семейства β^τ, $\tau \in (-\infty, \infty)$, потока G_I различны при разных τ и тривиально расслаивают проколотый в нуле существенно особый слой расслоения F, то есть дополнение $\Lambda^0 \setminus \{0\}$. В частности, имеет место равенство $\Lambda^0 \setminus \{0\} = \cup_{\tau \in \mathbf{R}} \beta^\tau$, и это множество диффеоморфно цилиндру.*

§ 5.2. Доказательство лемм 5.1.Б и 5.1.А

5.2.А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1.Б. Так как $\{F_i, I\} = 0$, $i = 1, 2$, а $\beta = \beta^0 \subset \Lambda^0$, то $\beta^\tau \subset \Lambda^0$, $\tau \in \mathbf{R}$. Если $\beta^\tau \cap l_1 \neq \varnothing$, то обозначим через η^τ точку пересечения $\beta^\tau \cap l_1$. Эта точка единственна (см. следствие 4.12.В), так что определение точки η^τ корректно. Покажем теперь, что коммутирующие векторные поля X_I и X_{F_2} в каждой точке $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ линейно независимы. В самом деле, перейдем к разрешающим координатам $(P, Q) = (p, Q)/\mu$, и пусть $\mathcal{W}$ — окрестность в M^4 орбиты потока $X_{F_1^0}$, проходящей через точку ζ_1^0. Тогда из лемм 3.3.Д и 3.3.А легко следует, что длины векторов полей $X_{F_1^0}$ и $X_{F_2^0}$, как и угол между этими векторами в точках $(P, Q) \in \mathcal{W}$, будут равномерно отделены от нуля. Отсюда, из (81) и представления (82) и из (95) получаем, что векторы полей X_{J^μ} и $X_{F_2^\mu}$ в этих точках будут линейно независимы. Из этого факта, из равенства (94) и из формул леммы 4.9.0 вытекает, что векторы полей X_I и X_{F_2} будут линейно независимы в некоторых точках, лежащих на $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ достаточно близко к нулю $0 \in \mathbf{R}^4_{PQ}$. Следовательно, $\dfrac{\partial f(F_1, F_2)}{\partial F_1}(0, 0) \neq 0$, где $I = f(F_1, F_2)$. Из отсутствия критических точек отображения $F = (F_1, F_2)$ на $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ следует, что векторы полей X_{F_1} и X_{F_2} в каждой точке поверхности $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ линейно независимы. Из этих двух фактов получаем, что векторы полей X_I и X_{F_2} действительно линейно независимы в любой точке поверхности $\Lambda^0 \setminus \{0\}$.

Так как кривая $l_1 \subset V_+$ лежит на особом слое Λ^0 и трансверсальна лежащим на Λ^0 орбитам группы G_I (см. следствие 4.12.А), а $[X_I, X_{F_2}] = 0$, то из доказанного утверждения вытекает следующее. Орбиты семейства β^τ пересекают эту кривую в каждой ее точке, расположенной не слишком далеко от нуля $0 \in \mathbf{R}^3_{p_1 q_1 q_2}$, причем только при единственном значении τ. Таким образом, точка η^τ пробегает всю часть кривой l_1, расположенную вблизи нуля. Кроме того, точка η^τ зависит от τ гладко, причем вектор $\dfrac{d}{d\tau}\eta^\tau$ на этой части l_1 не обращается в нуль. Это означает, что при убывании либо возрастании τ точка η^τ достигает в пределе нуля $0 \in \mathbf{R}^3$. Допустим для определенности, что при убывании (это не принципиально), тогда $\lim_{\tau \to -\infty} \eta^\tau = 0$, то есть чтобы достичь нуля, нужно бесконечное время, а не конечное, иначе получим противоречие с теоремой единственности для дифференциальных уравнений.

Покажем, что при некотором $\tau = T > 0$ цикл β^τ опять вернется в малую окрестность $\mathcal{B}$ точки ξ^0 в M^4. Действительно, коммутирующие векторные поля X_I и X_{F_2} определяют в $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ плоскую риманову метрику, в которой векторы этих полей ортогональны и имеют единичную длину. В силу компактности $\Lambda^0 \setminus \mathcal{B}$ площадь $\mathrm{mes}(\Lambda^0 \setminus \mathcal{B})$, отвечающая этой метрике, конечна. Обозначим $Z^\tau := \cup_{-\infty<s\leqslant\tau}\beta^s$, тогда ясно, что

$$\frac{d}{d\tau}\,\mathrm{mes}(Z^\tau) = c \tag{98}$$

при любом $\tau \in \mathbf{R}$, где $c > 0$ — длина в данной метрике орбиты β^τ, которая, очевидно, не зависит от τ. Множество Z^τ является 2-мерным цилиндром, составленным из орбит β^s группы G_I, причем каждая из этих орбит проходится движущейся кривой β^s ровно один раз. В самом деле, движению цикла β^s вспять по Z^τ препятствует знакоопределенность производной, стоящей слева в (98), а как-нибудь замкнуться множеству Z^τ, например в тор или бутылку Клейна, мешает гладкость дополнения $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ и то, что $\lim_{\tau\to-\infty}\beta^\tau = \{0\}$. Из полученных фактов и (98), а также из конечности меры $\Lambda^0 \setminus \mathcal{B}$ следует, что остается один вариант: через конечное время $\tau = T$ кривая β^τ снова попадет в малую окрестность $\mathcal{B}$ точки ξ^0, она же 0.

Попав в эту окрестность, орбита β^T должна пересечься с $\chi_{00} = l_1 \cup \ldots \cup l_{2m_2}$ (см. лемму 4.12.А). Снова на кривую l_1 орбита β^T попасть не может, так как она пришла при возрастании τ из дополнения $\Lambda^0\setminus\mathcal{B}$, и поэтому пересечение $l_1\cap\beta^\tau$ должно двигаться к $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$, то есть «вспять». Параметр τ при таком движении должен убывать, и мы получаем противоречие. Так как кривые l_j с номерами j одинаковой четности β-связанны (см. следствие 4.12.В), то это означает, что β^T не будет пересекаться с кривыми l_j с нечетными номерами, но пересечет все кривые l_j с четными j, в частности, кривую l_2. Повторив рассуждение, приведенное в начале доказательства данной леммы для l_1, получаем, что точка пересечения η_2^τ орбиты β^τ с l_2 будет единственной, и при $\tau \to +\infty$ эта точка прочертит всю кривую l_2 и ее пределом будет нуль $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$.

Осталось показать, что

$$\cup_{\tau=-\infty}^{\infty}\beta^\tau \supseteq \Lambda^0 \setminus \{0\}. \tag{99}$$

Пусть $\xi \in \Lambda^0\setminus\{0\}$ и $\beta_\xi \ni \xi$ — орбита группы G_I. Рассуждение о попадании в малую окрестность точки ξ^0 движущейся под действием потока G_{F_2} орбиты β^τ, стартующей из положения $\beta^0 \ni \eta_{\mu1}$, можно повторить для стартующей из любого положения орбиты $\beta \subset \Lambda^0\setminus\{0\}$. Получим семейство $\overline{\beta}^t$, $t \in \mathbf{R}$, где $\overline{\beta}^0 = \beta_\xi$. При t, близком к любой из двух бесконечностей цикл $\overline{\beta}^t$ будет пересекать линию χ_{00} и совпадет с одним из циклов первого, ранее построенного семейства β^τ, $\tau \in \mathbf{R}$. Отсюда и из теоремы единственности для дифференциальных уравнений получаем, что циклы обоих семейств совпадают, только параметризации τ и t могут быть разными. Следовательно, $\beta_\xi = \beta^\tau$ при некотором $\tau \in \mathbf{R}$, что и доказывает утверждение (99). Лемма 5.1.Б полностью доказана.

5.2.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1.А. Пусть $\zeta^\tau := G^\tau_{F_2}\eta_{\mu1}$, $\tau \in \mathbf{R}$, — движение точки с начальным положением $\eta_{\mu1}$ под действием фазового потока G_{F_2}. Ясно, что $\zeta^\tau \in \beta^\tau$, $\tau \in \mathbf{R}$. Отсюда и из леммы 5.1.Б получаем, что $\zeta^\tau \in \beta_{\eta_{\mu2}}$ при некотором $\tau = T$; при условии, наложенном для определенности в доказательстве леммы 5.1.Б, имеем $T > 0$. Часть $\overline{\zeta}$ траектории точки ζ^τ при $\tau \in [0, T]$ лежит в плоском цилиндре $Z_0^T := \cup_{0\leqslant s\leqslant T}\beta^s$. Она соединяет точки $\eta_{\mu1} \in \beta = \beta^0$ и $\zeta^T \in \beta^T$, лежащие на окружностях β^0 и β^T, составляющих границу цилиндра Z_0^T. Ясно, что направление касательной к геодезической в точке $\eta_{\mu1}$ можно выбрать так, чтобы получившийся сегмент геодезической по-прежнему лежал на цилиндре Z_0^T, но соединял точку $\eta_{\mu1}$ не с ζ^T, а с $\eta_{\mu2} \in l_2$, лежащей на той же граничной окружности β^T. Этот сегмент и возьмем за α_μ. Построение сегмента α_μ вполне аналогично построению замкнутой геодезической, подробно описанному в доказательстве леммы 4.3.Б (см. § 4.8). Но там мы ограничились малой корректировкой направления касательной к геодезической в стартовой точке, а здесь изменение этой касательной существенно.

Из леммы 3.5.Г следует, что точки $\eta_{\mu 1}$ и $\eta_{\mu 2}$ гладко зависят от $\mu \in (0, \mu_0)$. Отсюда и из построения α_μ, а также из гладкости поверхности $\Lambda^0 \setminus \{0\}$, легко получаем, что сегмент α_μ гладко зависит от $\mu \in (0, \mu_0)$, $\mu_0 > 0$. Из построения дуги геодезической α_μ следует, что для любой точки $\xi \in \alpha_\mu$ орбита $\beta_\xi \ni \xi$ пересекает α_μ только в самой этой точке ξ. Дополним дугу α_μ до почти замкнутой кривой e_μ интервалами $l_{\mu 1}$ и $l_{\mu 2}$ кривых l_1 и l_2 соответственно, как это объяснялось в формулировке леммы 5.1.А. Из леммы 5.1.Б и ее доказательства и из построения кривой e_μ получаем, что для каждой точки $\xi \in e_\mu$ найдется $\tau \in \mathbf{R}$, такое, что $\xi \in \beta^\tau$, и наоборот, для каждого $\tau \in \mathbf{R}$ найдется $\xi \in \beta^\tau \cap e_\mu$. Из следствия 4.12.В вытекает, что для любой точки $\xi \in l_{\mu j}$ орбита $\beta_\xi \ni \xi$ пересекает интервал $l_{\mu j}$ только в самой этой точке ξ, $j = 1, 2$. Пересечь одновременно и геодезическую α_μ, и кривую $l_{\mu j}$ при одном из $j = 1, 2$ орбита β группы G_I тоже не может, так как орбиты β^τ пересекают $l_{\mu 1}$, α и $l_{\mu 2}$ при $\tau < 0$, $\tau \in [0, T]$ и $\tau > T$ соответственно, а при разных τ орбиты β^τ различны (см. лемму 5.1.Б и ее доказательство). Из построения α_μ и свойств β^τ (см. лемму 5.1.Б) получаем, что такое соответствие между $\xi \in e_\mu$ и $\tau \in \mathbf{R}$ будет взаимно однозначным. Трансверсальность на слое Λ кривых l_1 и l_2 орбитам β группы G_I вытекает из следствия 4.12.А. Трансверсальность кривой α_μ этим орбитам следует из того факта, что α_μ является дугой геодезической рассматриваемой плоской метрики на $\Lambda^0 \setminus \{0\}$, не совпадающей ни с какой орбитой группы G_I, которые тоже являются геодезическими. Из полученных утверждений и из леммы 5.1.Б вытекает тривиальность расслоения $\Lambda^0 \setminus \{0\}$ орбитами семейства β_ξ, $\xi \in e_\mu$. Лемма 5.1.А полностью доказана.

§ 5.3. Построение семейства геодезических, соединяющих точки конических окрестностей в V_+ соседних кривых, составляющих особую линию χ_{00}

Рассмотрим любые две соседние из кривых $l_1, \ldots, l_{2m_2}$, составляющих линию $\chi_{00} = \mathcal{F}^{-1}(0, 0)$, например l_1 и l_2. Проведем произвольную малую трансверсаль $S_1 \subset V_+ \subset \mathbf{R}^3_{P_1 Q_1 Q_2}$ к прямой l_1^0 в точке ζ_1^0, где $|\zeta_1^0| = 1$, как это делали в лемме 4.6.А. Аналогичную трансверсаль к прямой l_2^0 обозначим через S_2. Рассмотрим конусы $k_{\mu_0}^{S_j}$ (см. (92)), составленные из сечений $S_{\mu j} = \mathcal{H}_\mu S_j$, $j = 1, 2$, $\mu \in (0, \mu_0)$.

Лемма 5.3. *Сечения $S_1 \ni \zeta_1^0$ и $S_2 \ni \zeta_2^0$ можно заузить в такой степени, а $\mu_0 > 0$ взять столь малым, что будут верны следующие утверждения.*

А. Построенное в лемме 5.1.А семейство геодезических $\{\alpha_\mu,\ \mu \in (0, \mu_0')\}$, $\mu_0' > 0$, за счет возможного уменьшения μ_0' до μ_0 включается в семейство геодезических

$$\{\alpha_{\xi_1}, \quad \xi_1 \in k_{\mu_0}^{S_1}\}, \tag{100}$$

гладко зависящих от $\xi_1 \in k_{\mu_0}^{S_1}$, где α_{ξ_1} соединяет точку ξ_1 с точкой $\xi_2 \in k_{\mu_0}^{S_2}$. При этом если $\xi_1 \in S_{\mu 1}$, то $\xi_2 \in S_{\mu 2}$ с тем же самым значением μ, и при фиксированной поверхности S_1 такое семейство со всеми перечисленными свойствами единственно. Кроме того, рассмотрим отображение $\psi\colon k_{\mu_0}^{S_1} \to k_{\mu_0}^{S_2}$, сопоставляющее точке ξ_1 точку ξ_2 — второй конец геодезической α_{ξ_1}. Тогда ψ, как и сужения $\psi|_{S_{\mu 1}}$ при любом $\mu \in (0, \mu_0)$, задает диффеоморфизм на свой образ. Найдется также несколько меньшее сечение $S_2' \subset S_2$, содержащее точку $\zeta_2^0 \in l_2^0$, $|\zeta_2^0| = 1$, и такое, что

$$\psi(S_{\mu 1}) \supseteq S_{\mu 2}' = \mathcal{H}_\mu S_2', \quad \mu \in (0, \mu_0).$$

При любом $\mu \in (0, \mu_0)$ продолжения дуг геодезических

$$\alpha_\xi, \quad \xi \in S_{\mu 1} \tag{101}$$

пересекают под ненулевыми углами как сечение $S_{\mu 1}$, так и $S_{\mu 2}$, причем сами дуги α_ξ, $\xi \in S_{\mu 1}$, тривиально расслаивают их объединение $\cup_{\xi \in S_{\mu 1}} \alpha_\xi$.

Б. Для каждого $\mu \in (0, \mu_0)$ существует окрестность $U = U_\mu \subset M^4$ особого слоя Λ^0 и окрестность $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mu$ существенно особой точки ξ^0, обладающие следующими свойствами. Окрестность $\mathcal{B} \ni \xi^0$ содержится в шаре $B(0, 2\mu) \subset \mathbf{R}^4_{pq}$ радиуса 2μ и с центром в нуле $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$, то есть в ξ^0. Дополнение $U \setminus \mathcal{B}$ инвариантно относительно действия фазового потока G_I и тривиально расслаивается его траекториями β. Дополнения $\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}$ к слоям Λ_{mh} расслоения F, пересекающие $U \setminus \mathcal{B}$, целиком лежат в $U \setminus \mathcal{B}$ и тривиально расслаивают это дополнение, а кроме того, $\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}$ имеют вид цилиндров, тривиально расслоенных траекториями β.

Такими свойствами обладает окрестность $U_\mu \supset \Lambda^0$, задаваемая формулой $U_\mu = \cup_{\xi \in S_{\mu 1}} \Lambda_\xi$ (см. (93) в пп. 4.10.Г). *В качестве $U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$ возьмем объединение орбит β группы G_I, проходящих через точки построенного в утверждении 5.3.А семейства дуг геодезических, отвечающих сечению $S_{\mu 1}$:*

$$U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu := \cup_{\xi \in A_\mu} \beta_\xi, \quad \textit{где} \quad \beta_\xi \ni \xi, \quad \textit{а} \quad A_\mu := \cup_{\eta \in S_{\mu 1}} \alpha_\eta.$$

Такое представление будет определять на $U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$ структуру прямого произведения $A_\mu \times S^1$, отвечающего расслоению на орбиты β, где S^1 — окружность. Кроме того, определенное таким образом $U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$ представимо в виде

$$U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu = \cup_{(m,h) \in W_\mu} (\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_\mu),$$

где $W_\mu = F(U_\mu)$, а $\Lambda_{mh} \subset U_\mu$. Это представление задает на $U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$ структуру прямого произведения $W_\mu \times Z$:

$$U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu \sim W_\mu \times Z, \tag{102}$$

отвечающего расслоению на цилиндры $\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_\mu$, где $Z = \mathcal{I} \times S^1$ — стандартный 2-мерный цилиндр, а $\mathcal{I}$ — интервал прямой.

§ 5.4. Доказательство леммы 5.3

5.4.А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВНОМЕРНОГО ВАРИАНТА ЛЕММЫ 5.3.А. Докажем сначала утверждения 5.3.А и 5.3.Б, неравномерные по $\mu \in (0, \mu_0)$. Точнее, 5.3.А докажем для семейств вида $\{\alpha_\xi, \xi \in \mathcal{V}_{\mu 1}\}$ и сечений $S_{\mu 1}$, где $\mathcal{V}_{\mu 1} \supset S_{\mu 1}$ — малая окрестность в V_+ точки $\eta_{\mu 1}$, неопределенным образом зависящая от малых μ, то есть $\xi \in \mathcal{V}_{\mu 1}$ вместо $\xi \in k^{S_1}_{\mu_0}$ (см. (100)), что было эквивалентно линейной зависимости $\mathcal{V}_{\mu 1}$ от μ. Лемму 5.3.Б тоже докажем для неравномерных по $\mu \in (0, \mu_0)$ сечений $S_{\mu 1}$. После этого докажем равномерный вариант сначала для утверждения 5.3.Б, а затем для 5.3.А; в частности, покажем, что $S_{\mu j}$ можно взять как $\mathcal{H}_\mu S_j$ при одном и том же S_j для всех $\mu \in (0, \mu_0)$, $j = 1, 2$. Это и завершит доказательство леммы 5.3.

Итак, фиксируем некоторое малое $\mu > 0$. Как любая дуга геодезической расслоения F, кривая $\alpha = \alpha_\mu$, построенная в лемме 5.1.А, является частью траектории системы с гамильтонианом вида $H = c_1 F_1 + c_2 F_2$, где c_1 и c_2 — константы. Ясно, что траектории фазового потока G_H тривиально расслаивают некоторую малую окрестность $\mathcal{W}'$ в M^4 кривой α. Так как $\alpha \subset \Lambda^0 \backslash \{0\}$, то найдется окрестность кривой α в M^4, не содержащая критических точек отображения F. Отсюда и из условия $\{F_1, F_2\} = 0$ получаем, что некоторая (может быть, меньшая) окрестность $\mathcal{W} \subset M^4$, $\alpha \subset \mathcal{W}$, тривиально расслоена пересечениями $\mathcal{W} \cap \Lambda_{mh}$, имеющими вид 2-мерных незамкнутых полосок. Эти полоски содержат интервалы орбит потока G_H, близкие к α. Ранее было показано, что сечения S_j, $j = 1, 2$, всегда можно взять столь малыми, что сужения $F|_{S_{\mu j}}$ задают диффеоморфизм. Условием этого является трансверсальность $S_{\mu j}$ и l_j в V_+, $j = 1, 2$. Используя эту трансверсальность, нетрудно получить, что набор (F_1, F_2, ν) является системой координат на конусах $k_j := k_{\mu_0}^{S_j}$, $j = 1, 2$, где F_1 и F_2 — сужения соответствующих функций на конусы k_j, а $\nu(\xi)$ определяется условием $\xi \in S_{\nu j}$, $j = 1, 2$. Именно эти наборы являются координатами на малых окрестностях $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{\mu 1}$ и $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_{\mu 2}$ в V_+ точек $\eta_{\mu 1}$ и $\eta_{\mu 2}$ соответственно, где $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{W} \cap V_+$.

Обозначим через T время, необходимое точке, движущейся под действием потока G_H по α и стартующей из положения $\eta_1 = \eta_{\mu 1}$, чтобы попасть во второй конец $\eta_2 = \eta_{\mu 2}$ дуги геодезической α: $G_H^T(\eta_1) = \eta_2$. Возьмем любую точку $\xi_1 \in \mathcal{V}_1$, и пусть (F_1, F_2, ν) — координаты этой точки, а $\xi_2 \in \mathcal{V}_2$ — точка с теми же координатами. Обозначим $\xi' := G_H^T(\xi_1)$. Все три точки ξ_1, ξ_2 и ξ' лежат на одной гладкой полоске $\mathcal{W} \cap \Lambda_{mh}$ с заданной плоской метрикой, где $(m, h) = F(\xi_1) = F(\xi_2)$. Используя разрешающие координаты $(P, Q) = (p, q)/\mu$, нетрудно показать, что расстояние между точками ξ_2 и ξ' мало и его можно сделать сколь угодно малым относительно μ за счет уменьшения μ и окрестности $\mathcal{V} \ni \xi_1$ точки η_1. Отсюда получаем, что малой коррекцией направления в точке ξ_1 геодезической, выходящей из ξ_1 и пересекающей ξ', можно добиться того, что она будет пересекать точку ξ_2, а не ξ'; коррекция того же типа, что и в доказательстве леммы 4.3.Б (см. § 4.8). Сегмент построенной геодезической, соединяющий точки ξ_1 и ξ_2, возьмем за α_{ξ_1}. Ясно, что этот сегмент однозначен, непрерывно зависит от точки ξ_1 и при выборе другой точки $\eta_{\mu 1} \in l_1$, то есть при другом значении μ, параметризующем точку на кривой l_1, от этого выбора не зависит, а значит, определяется только самой стартовой точкой ξ_1, лежащей в окрестностях точек $\eta_{\mu 1}$.

Таким образом, имеем две гладкие 3-мерные поверхности $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ в M^4 и семейство дуг геодезических, соединяющих точки на $\mathcal{V}_1$ с точками на $\mathcal{V}_2$. Отображение, сопоставляющее концу дуги геодезической на $\mathcal{V}_1$ другой ее конец, лежащий на $\mathcal{V}_2$, является тождественным в координатах (F_1, F_2, ν), а значит, оно само и его сужения на поверхности $\{\nu = \mathrm{const}\}$ задают диффеоморфизм. Из этих двух фактов также следует, что построенное семейство $\{\alpha_\xi, \xi \in \mathcal{V}_1\}$ гладко зависит от точки ξ. Трансверсальность сечений $S_{\mu j}$, $j = 1, 2$, полоскам $\mathcal{W} \cap \Lambda_{mh}$ следует из трансверсальности $S_{\mu j}$ в V_+ линиям $\chi_{mh} = \Lambda_{mh} \cap V_+$ и из трансверсальности во всем M^4 орбит β группы G_I полупространству V_+ (см. доказательство аналогичного факта в доказательстве леммы 4.6.А). Отсюда получаем, что геодезические, содержащие дуги α_ξ, $\xi \in S_{\mu j} \cap \mathcal{V}_j$, пересекают сечения $S_{\mu j}$ под ненулевыми углами, $j = 1, 2$. Из трансверсальности сечений $S_{\mu j}$ лагранжевым полоскам $\mathcal{W} \cap \Lambda_{mh}$ и из тривиальности расслоения трубки $\mathcal{W}$ этими полосками и полосок дугами α_ξ следует тривиальность расслоения $\cup_{\xi \in S_{\mu 1}} \alpha_\xi$ кривыми α_ξ. Таким образом, за исключением свойств образа $\psi(S_{\mu 1})$, ослабленный, «неравномерный» вариант утверждения 5.3.А доказан.

5.4.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.3.Б. Фиксируем достаточно малое $\mu > 0$. Рассмотрим построенное выше семейство дуг геодезических и выделим из него подсемейство (101). Обозначим $\mathcal{L}_\mu := \cup_{\xi \in S_{\mu 1}} \alpha_\xi$ и рассмотрим объединение D_μ всех орбит β группы G_I, проходящих через точки множества $\mathcal{L}_\mu$:

$$D_\mu := \cup_{\zeta \in \mathcal{L}_\mu} \beta_\zeta; \quad \text{возьмем также} \quad U_\mu = \cup_{\xi \in S_{\mu 1}} \Lambda_\xi,$$

где $\Lambda_\xi \ni \xi$ — слои расслоения F. Согласно лемме 5.1.А, для любой точки $\zeta \in \alpha(\eta_{\mu 1})$, где $\alpha(\eta_{\mu 1}) = \alpha_{\eta_{\mu 1}}$, орбита β_ζ пересекает дугу $\alpha(\eta_{\mu 1})$ ровно в одной этой точке ζ и под ненулевым углом. Ясно, что если сечение $S_{\mu 1}$, содержащее точку $\eta_{\mu 1} \in l_1$, взять достаточно малым, то эти два свойства пересечений α_ξ с орбитами β при $\xi = \eta_{\mu 1}$ сохранятся и при любом $\xi \in S_{\mu 1}$. В доказательстве леммы 5.1.А на основе этих свойств было показано, что дополнение $\Lambda^0 \setminus \mathcal{B}$ к некоторой окрестности $\mathcal{B}$ в M^4 точки ξ^0 имеет вид цилиндра, тривиально расслоенного орбитами β_ζ, $\zeta \in \alpha(\eta_{\mu 1})$. Дословно повторяя доказывающие этот факт рассуждения для слоев Λ_{mh}, близких к $\Lambda^0 = \Lambda_{00}$, нетрудно получить то же самое и для этих слоев, то есть что $\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_{mh}$ имеет вид цилиндра, тривиально расслоенного циклами $\beta_\zeta \ni \zeta$, где $\zeta \in \alpha_\xi$, $\xi \in S_{\mu 1}$; здесь $(m,h) = F(\xi)$. Ясно, что окрестность $\mathcal{B}_\mu = \mathcal{B}_{mh}$ точки ξ^0 можно выбрать независящей от $(m,h) \in F(S_{\mu 1})$ и лежащей в шаре $B(0, 2\mu)$, так что $D_\mu = U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$; хотя в выборе окрестности $\mathcal{B}_\mu$ имеется произвол, но основные ее свойства определяются сечением $S_{\mu 1}$ (в частности, это сечение расположено на границе области $\mathcal{B}_\mu$). Из приведенных фактов легко следуют все утверждения «неравномерного» варианта леммы 5.3.Б.

Покажем теперь, что сечение $S_{\mu 1}$ можно выбрать «равномерно», то есть найдутся сечение S_1 и $\mu_0 > 0$, такие, что $S_{\mu 1} = \mathcal{H}_\mu S_1$ при всех $\mu \in (0, \mu_0)$. Фиксируем любое $\mu' > 0$, такое, что для него верен только что доказанный «неравномерный» вариант утверждения 5.3.Б. Положим $S_1 := \mathcal{H}_{\mu'}^{-1}(S_{\mu' 1})$. Рассмотрим соответствующий S_1 и μ' конус $k_1 = k_{\mu'}^{S_1}$ и воспользуемся следующим доказанным в начале пп. 4.10.Г свойством линий χ_{mh} в таком конусе. Пересечение $\chi_{mh} \cap k_1$ при любом $(m,h) \neq 0$ является связной кривой, соединяющей точку на боковой границе этого конуса с точкой на его основании, то есть на $S_{\mu' 1}$. Отсюда следует, что при любом $\mu \in (0, \mu')$ имеет место вложение $W_\mu \subseteq W_{\mu'}$, где $W_\mu = F(S_{\mu 1})$. Рассмотрим множество

$$D(\mu, \mu') := \left(F|_{D'_\mu}\right)^{-1}(W_\mu).$$

Тогда $D(\mu, \mu') \subseteq D_{\mu'}$ при любом $\mu \in (0, \mu')$, и оно тривиально расслоено теми же цилиндрами $\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_{\mu'}$, что и $D_{\mu'}$, только (m,h) принадлежит W_μ, а не W'_μ ($\mathcal{B}_{\mu'} = \mathcal{B}_{\mu'}(S_{\mu' 1})$ построено выше). С другой стороны, рассмотрим следующую область в M^4, лежащую в малой «полой окрестности» в M^4 точки ξ^0:

$$D^0(\mu, \mu') := \left(\cup_{\xi \in R(\mu,\mu')} \beta_\xi\right) \setminus \mathcal{B}_\mu, \quad \text{где} \quad R(\mu, \mu') := \cup_{(m,h) \in W_\mu} \chi_{mh} \cap k_1, \quad k_1 = k_{\mu'}^{S_1},$$

и, как везде, $\beta_\xi \ni \xi$ — орбиты группы G_I, а $\mathcal{B}_\mu \subset B(0, 2\mu)$ — окрестность рассмотренного выше типа точки ξ^0 в M^4, отвечающая сечению $S_{\mu 1}$, где $S_{\mu 1} = \mathcal{H}_\kappa(S_{\mu' 1})$ при $\kappa = \mu/\mu'$. Легко видеть, что $D^0(\mu, \mu')$ тоже тривиально расслоено цилиндрами $\Lambda_{mh} \cap D^0(\mu, \mu')$, которые, в свою очередь, тривиально расслоены орбитами β. Ясно, что объединение $D' := D(\mu, \mu') \cup \cup D^0(\mu, \mu')$ «широкого» 4-мерного цилиндра D с «узким» цилиндром D^0 будет тривиально расслоено гладкими лагранжевыми цилиндрами

$$(\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_{\mu'}) \cup (\Lambda_{mh} \cap D^0(\mu, \mu')) = \Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_\mu, \quad (m,h) \in W_\mu = F(S_{\mu 1}), \tag{103}$$

и имеет вид $U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$. Область D' единообразно построена по сечению S_1, и ее возьмем за $D_\mu = U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$. Тогда из построения D', используя разрешающие координаты $(P, Q) = \mathcal{H}_\mu(p, q)$, легко получить все требуемые утверждения о расслоениях множества D_μ. Лемма 5.3.Б полностью доказана.

5.4.В. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 5.3.А. Докажем существование единого сечения S_1, такого, что $S_{\mu 1} = \mathcal{H}_\mu S_1$ при всех $\mu \in (0, \mu_0)$ обладает требуемыми свойствами. Как и в аналогичной ситуации при доказательстве леммы 5.3.Б, фиксируем $\mu' > 0$,

$\mathcal{V}_{\mu'1}$ и $S_{\mu'1}$, для которых выполнено доказанное в пп. 5.4.А «неравномерное» утверждение А, в частности, построено семейство дуг, обладающее определенными свойствами. Выделим из построенного семейства подсемейство (101). Будем считать, что для $\mu_0 = 2\mu'$ и $S_1 = \mathcal{H}_{\mu'}^{-1}(S_{\mu'1})$ выполнены и все утверждения доказанной леммы 5.3.Б. Рассмотрим конус $k_1 = k_{\mu'}^{S_1}$, и пусть $\xi_1 \in k_1$, тогда $\xi_1 \in S_{\mu_1 1}$ при некотором $\mu_1 \in (0, \mu')$. Из упомянутых свойств пересечений $\chi_{mh} \cap k_1$ (см. пп. 4.10.Г) следует, что на одном из этих пересечений лежит криволинейный полуинтервал $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1(\mu_1, \mu')$, соединяющий точку ξ_1 с точкой ξ_1', лежащей на основании конуса k_1, то есть на $S_{\mu'1} \subset \partial k_1$; здесь считаем, что $\xi_1 \in \mathcal{I}_1$ и $\xi_1' \notin \mathcal{I}_1$. По ранее доказанному «неравномерному» утверждению 5.3.А, семейство (101) содержит дугу геодезической $\alpha = \alpha_{\xi_1'}$, соединяющую точку ξ_1' с точкой $\xi_2' \in \partial k_2$, $k_2 = k_{\mu'}^{S_2}$, имеющей те же координаты (F_1, F_2, μ'), что и ξ_1'. Ясно, что существует аналогичный $\mathcal{I}_1$ полуинтервал $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2(\mu_1, \mu')$, лежащий на пересечении $\chi_{mh} \cap k_2$, $(m, h) = (F_1(\xi_j'), F_2(\xi_j'))$, $j = 1, 2$, и соединяющий точки ξ_2' и ξ_2, где ξ_2 имеет те же координаты (F_1, F_2, μ_1), $F_1 = m$, $F_2 = h$, что и точка ξ_1. Из леммы 5.3.Б следует, что кусочно-гладкая кривая $\mathcal{I}_1 \cup e \cup \mathcal{I}_2$ лежит в $U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu$ и, значит, в снабженном плоской метрикой лагранжевом цилиндре $(\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_\mu) \subset (U_\mu \setminus \mathcal{B}_\mu)$, где $\mu = \mu_1$. Этот цилиндр ограничен двумя замкнутыми геодезическими, являющимися орбитами группы G_I и пересекающими точки ξ_1 и ξ_2 соответственно.

Будем непрерывно двигать концы дуги геодезической α вдоль сегментов $\mathcal{I}_1 \cup \{\xi_1'\}$ и $\mathcal{I}_2 \cup \{\xi_2'\}$ из положений ξ_1' и ξ_2' соответственно, причем так, чтобы координата μ у обоих концов все время была одной и той же. (Две другие координаты $F_1 \equiv m$ и $F_2 \equiv h$ при этом автоматически не меняются.) Ясно, что в любой момент такой гомотопии $\{g^\xi,\ \xi \in \mathcal{I}_1\}$ кривой $\alpha = g^{\xi_1'}$ дуга геодезической g^ξ не покинет плоского цилиндра $\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}_\mu$ при $\mu = \mu_1$, так что эта гомотопия определена корректно. Обозначим $\alpha_{\xi_1} := g^{\xi_1}$; так как точка $\xi_1 \in k_1$ произвольна, то получаем семейство $\{\alpha_\xi,\ \xi \in k_1\}$. Дуги геодезических α_ξ построенного семейства будут, очевидно, гладко зависеть от ξ. Оставшиеся свойства дуг α_ξ получаем из неравномерного варианта утверждения 5.3.А (см. конец пп. 5.4.А), используя переход к разрешающим координатам $(P, Q) = \mathcal{H}_\mu^{-1}(p, q)$, лемму 4.9.0 и предложение 4.1.

Осталось доказать свойства образа $\psi(S_{\mu 1})$. Сечения S_1 и S_2 подберем так, чтобы образ при отображении F некоторой окрестности замыкания $\overline{S_{\mu'1}} = \overline{\mathcal{H}_{\mu'} S_1}$ содержался бы в $F(S_{\mu'2}) = F(\mathcal{H}_{\mu'} S_2)$, но был близок к этому множеству. Используя представление (82) и формулы леммы 4.9.0, легко показать, что при достаточно малом $\mu_0 > 0$ и любом $\mu \in (0, \mu_0)$ будет выполнено вложение $\psi(S_{\mu 1}) \subset S_{\mu 2}$. Аналогичным образом можно подобрать сечение $S_2' \subset V_+ \subset \mathbf{R}^4_{PQ}$ чуть меньшее, чем S_2, и такое, что $\psi(S_{\mu 1}) \supset S_{\mu 2}' = \mathcal{H}_\mu S_2'$ при любом $\mu \in (0, \mu_0)$. Лемма 5.3.А полностью доказана.

§ 5.5. Допустимые семейства $\mathcal{A}_{ij}$ дуг геодезических, соединяющих конические окрестности в V_+ соседних кривых l_i, l_j, составляющих линию χ_{00}

Итак, в лемме 5.3.А построено семейство геодезических $\{\alpha_\xi,\ \xi \in k_1\}$, гладко зависящих от $\xi \in k_1$ и соединяющих точки конуса k_1 с точками конуса k_2, где k_1 и k_2 — конусообразные окрестности вида (92) укороченных кривых l_1 и l_2 соответственно, а $l_1 \cup \ldots \cup l_{2m_2} = \chi_{00} = \mathcal{F}^{-1}(0, 0)$; здесь и далее под геодезическими будем понимать и дуги геодезических. При этом концы кривых α имеют одинаковые координаты (F_1, F_2, μ) (см. пп. 5.4.А, где вместо μ использовано ν). При $m_2 = 2$ такое же семейство можно построить для оставшейся пары соседних кривых, то есть для l_3 и l_4. Однако нам будет необходимо, чтобы эти два семейства — для l_1, l_2 и для l_3, l_4 — были жестко связаны через орбиты β группы G_I. Для этого нам понадобится введенное ниже определение 5.5 допустимого семейства $\mathcal{A}_{ij}$ дуг геодезических, отвечающего соседним кривым l_i и l_j. Конусы k_i и k_j для такого семейства возьмем более общего вида, чем (92). Кроме того, выше предполагалось, что поверхности уровня S_μ координатной функции μ инвариантны относительно гомотетий $\mathcal{H}_a$, теперь же мы потребуем, чтобы эти поверхности были близки к пересечениям с данным конусом k концентрических сфер с центром в нуле $0 \in \mathbf{R}^3$ линейного пространства с декартовыми координатами (p_1, q_1, q_2).

Рассмотрим вначале конусы того же вида, что и выше: $k = k^S_{\mu_0}$ (см. (92)). Предполагаем, что трансверсаль S диффеоморфна 2-мерному открытому кругу и содержит точку ζ^0, $\zeta^0 \in l^0_1 \subset \mathbf{R}^3_{P_1Q_1Q_2}$, и наложим дополнительное условие, состоящее в том, что S лежит на сфере $|(P_1, Q_1, Q_2)| = 1$; в остальном S — произвольное множество. На таком конусе введем координаты (F_1, F_2, μ), отличающиеся от рассмотренных выше координатной функцией μ, от которой потребуем следующее. Существует $L > 0$, такое, что

$$|\mu - \rho| \leqslant L\rho^2 \quad \text{при всех} \quad (p_1, q_1, q_2) \in k, \tag{104}$$

где $\rho = |(p_1, q_1, q_2)|$, $\mu = \mu(p_1, q_1, q_2)$ — координата μ точки (p_1, q_1, q_2). Пусть k' — несколько больший конус вида (92), скажем, $k' = k^{S'_1}_{\mu'_0}$, где $\mu'_0 = 1,1 \cdot \mu_0$, а S' — «1,1-расширение по единичной сфере множества» S. Под 1,1-расширением здесь понимается множество

$$S' = \{(P_1, Q_1, Q_2) \in \mathbf{R}^3 | r((P_1, Q_1, Q_2), S) < \nu D, \quad |(P_1, Q_1, Q_2)| = 1\},$$

где $r((P_1, Q_1, Q_2), S)$ — расстояние от точки (P_1, Q_1, Q_2) до S в декартовых координатах (P_1, Q_1, Q_2), $\nu = 0,05$, а $D = \operatorname{diam} S$. Будем предполагать, что кривая l_1 является как бы «центральной осью» конусов k и k'. Пусть k_1 — некоторое множество, диффеоморфное некоторому конусу вида $k^S_{\mu_0}$ и имеющее границу между границами конусов k и k', то есть $k \subseteq k_1 \subseteq k'$. Рассмотрим множество k_2 того же типа, что и k_1, но с центральной осью l_2 вместо l_1 и с того же типа координатами (F_1, F_2, μ), что и на k_1. Предположим также, что тождественное в этих координатах отображение задает диффеоморфизм между k_1 и k_2. Пусть имеется семейство геодезических $\{\alpha_\xi,\ \xi \in k_1\}$, гладко зависящих от $\xi \in k_1$ и соединяющих точки $\xi \in k_1$ и $\eta \in k_2$, имеющие те же самые координаты, то есть

$$F_i(\xi) = F_i(\eta), \quad i = 1, 2, \quad \mu(\xi) = \mu(\eta), \quad \forall \xi \in k_1.$$

Определение 5.5. Такие пары конусов (k_1, k_2), координаты (F_1, F_2, μ) на них и семейство дуг геодезических $\{\alpha_\xi,\ \xi \in k_1\}$ будем называть *допустимыми*. Это семейство, отвечающее соседним кривым (l_1, l_2), обозначим через $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$. Аналогично определяются конусы k_i и k_j и классы $\mathcal{A}_{ij}$ для пар соседних кривых (l_i, l_j). Здесь мы рассматриваем оба случая $m_2 = 1, 2$.

Замечание 5.5.А. В лемме 5.3.А на форму поверхностей S_1 и S_2 никаких ограничений не накладывается, и их можно взять, например, лежащими на единичной сфере и диффеоморфными кругам (см. начало пп. 4.10.Г). Используя следствие 4.12.А и леммы 3.3.В и 5.3.А, нетрудно показать, что в этом случае S_1 и S_2 можно подобрать так, что пара конусов $(k^{S_1}_{\mu_0}, \psi(k^{S_1}_{\mu_0}))$ будет допустимой. Следовательно, среди семейств дуг, построенных в лемме 5.3.А, имеются и семейства класса $\mathcal{A}_{ij}$.

Замечание 5.5.Б. Утверждения лемм 5.3.А и 5.3.Б с очевидными оговорками останутся в силе, если «правильные» конусы $k^{S_j}_{\mu_0}$, составленные из сечений $S_{\mu j} = \mathcal{H}_\mu S_j$, заменить конусами k_j с функцией μ на них, а $S_{\mu j}$ заменить поверхностями уровня этой функции, $j = 1, 2$, где (k_1, k_2) — допустимая пара конусов. Это следует из того почти очевидного факта, что доказательство леммы 5.3 проходит и при этих более слабых условиях на конусы и функцию μ на них.

§ 5.6. Случай $m_2 = 2$ — сопряженные геодезические и допустимые пары $(\mathcal{A}_{12}, \overline{\mathcal{A}}_{12})$ семейств геодезических

5.6.А. ПОСТРОЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ И ДОПУСТИМОЙ ПАРЫ $(\mathcal{A}_{12}, \overline{\mathcal{A}}_{12})$. Пусть $m_2 = 2$, и пусть $k_{\alpha r} \subset V_+$ — конус с осью вращения, совпадающей с координатной осью q_2 в $\mathbf{R}^3 \ni (p_1, q_1, q_2)$ (см. (42)). Предполагается, что $\alpha > 0$ произвольно, а $r = r(\alpha)$ достаточно мало. Определим отображение $\mathcal{P}_\pi\colon k_{\alpha r} \to V_+$, положив $\mathcal{P}_\pi(\xi)$ совпадающей со второй (помимо $\xi \in k_{\alpha r}$) точкой пересечения орбиты $\beta_\xi \ni \xi$ группы G_I с V_+ (см. следствие 4.12.B). Если β_ξ пересекает V_+ только в точке ξ, то положим $\mathcal{P}_\pi(\xi) = \xi$. Отображение $\mathcal{P}_\pi$ можно получить еще и следующим образом. Из следствия 4.12.A и предложения 4.1 (см. (80)) вытекает, что образ $G_I^\pi(\xi)$ точки $\xi \in k_{\alpha r}$ под действием фазового потока G_I за время π будет близок к V_+. Отсюда и из трансверсальности векторного поля X_I полупространству V_+ в точках конуса $k_{\alpha r}$ (см. следствие 4.12.A) следует, что найдется близкое к π значение t, такое, что точка $G_I^t(\xi)$ будет лежать на V_+. Ее и возьмем в качестве $\mathcal{P}_\pi(\xi)$. Из такого построения $\mathcal{P}_\pi$ и из теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает следующее утверждение.

Лемма 5.6.A.0. *Для любого $\alpha > 0$ найдется $r > 0$, такое, что рассмотренное отображение $\mathcal{P}_\pi\colon k_{\alpha r} \to V_+$ локально является диффеоморфизмом.*

Этот факт был уже установлен в доказательстве следствия 4.12.B.

Пусть дано допустимое семейство геодезических $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$. Тогда из следствия 4.12.A и из вида невозмущенных траекторий β^0 потока $G_{F_1^0}$ (см. лемму 3.3.B) вытекает, что отображение $\mathcal{P}_\pi$ на каждом из конусов k_1 и k_2 глобально задает диффеоморфизм на свой образ. Отсюда и из следствия 4.12.A получаем, что $\mathcal{P}_\pi$ переводит конусы k_1 и k_2 в некоторые конусы k_3 и k_4 соответственно: $\mathcal{P}_\pi(k_j) = k_{j+2}$, $j = 1, 2$. Из следствия 4.12.B вытекает, что «центральной осью» конуса k_j будет кривая l_j, $j = 3, 4$. Конус k_j переведем в k_{j+2} вместе с заданными на k_j, $j = 1, 2$, координатами (F_1, F_2, μ), то есть положим $(F_1, F_2, \mu)(\eta) = (F_1, F_2, \mu)\mathcal{P}_\pi^{-1}(\eta)$ для любой точки $\eta \in k_{j+2}$. Используя отображение G_I^π потока G_I за время π, можно преобразовать также и семейство геодезических $\mathcal{A}_{12} = \{\alpha_\xi,\ \xi \in k_1\}$ в семейство $\mathcal{A}_{34} = \{\alpha_\xi,\ \xi \in k_3\}$ геодезических, соединяющих точки, лежащие на конусах k_3 и k_4 и имеющие совпадающие координаты (F_1, F_2, μ). Действительно, кривая $G_I^\pi(\alpha_\xi)$, $\xi \in k_1$, является, очевидно, геодезической, лежащей на том же слое Λ_{mh}, что и исходная геодезическая α_ξ. Геодезическая $G_I^\pi(\alpha_\xi)$ соединяет точки η_3 и η_4, такие, что η_3 лежит вблизи точки $\xi_3 \in k_3$, а η_4 — вблизи $\xi_4 \in k_4$, где все четыре точки $\xi_1 = \xi$, ξ_2, ξ_3, ξ_4 имеют одни и те же координаты (F_1, F_2, μ) и, в частности, лежат на одном и том же слое Λ_{mh} с данной плоской метрикой. Следовательно, геодезическую $G_I^\pi(\alpha_\xi)$ можно малой деформацией гомотопировать в геодезическую $\overline{\alpha}_\xi := \alpha_{\xi_3}$, $\xi_3 = \mathcal{P}_\pi(\xi)$, соединяющую точки ξ_3 и ξ_4. Построенное по $\mathcal{A}_{12}$ семейство геодезических обозначим через $\mathcal{A}_{34} = \mathcal{A}_{34}(\mathcal{A}_{12})$, а отображение $\alpha_\xi \mapsto \overline{\alpha}_\xi$ из $\mathcal{A}_{12}$ в $\mathcal{A}_{34}$ обозначим тоже через $\mathcal{P}_\pi$.

Определение 5.6.A. Геодезическую $\overline{\alpha}_\xi$ будем называть *β-сопряженной*, или *G_I-сопряженной*, или просто *сопряженной* по отношению к геодезической α_ξ. Построенное допустимое семейство $\mathcal{A}_{34}$ будем называть *сопряженным* семейству $\mathcal{A}_{12}$ и обозначать через $\overline{\mathcal{A}}_{12}$. Пару допустимых семейств $(\mathcal{A}_{12}, \overline{\mathcal{A}}_{12})$ будем называть *допустимой*.

5.6.Б. КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ $\overline{\alpha}_\xi$ И ДОПУСТИМОЙ ПАРЫ $(\mathcal{A}_{12}, \overline{\mathcal{A}}_{12})$

Лемма 5.6.Б. (Случай $m_2 = 2$.) *Все приведенные в пп. 5.6.А построения и определения корректны, а пары конусов (k_3, k_4) и само семейство $\mathcal{A}_{34} = \overline{\mathcal{A}}_{12}$ являются допустимыми. Эти построения однозначно определяются допустимым семейством $\mathcal{A}_{12}$; в частности, конусы k_3 и k_4 однозначно определяются конусами k_1 и k_2 соответственно, и то же самое верно для функций μ на k_3 и k_4. Кроме того, построенное отображение $\mathcal{P}_\pi\colon \mathcal{A}_{12} \to \mathcal{A}_{34}$ задает взаимно однозначное соответствие между геодезическими семейств $\mathcal{A}_{12}$ и $\mathcal{A}_{34}$. Это отображение обладает также следующими свойствами. «Сужение» отображения $\mathcal{P}_\pi\colon \mathcal{A}_{12} \to \mathcal{A}_{34}$ на концы геодезических α_ξ, $\xi \in k_1$, совпадает с сужением на эти концы определенного в начале пп. 5.6.А отображения $\mathcal{P}_\pi\colon k_{\alpha r} \to V_+$. Вместе с отображением, сопоставляющим один конец геодезической семейства $\mathcal{A}_{12}$ другому его концу, и аналогичным отображением для геодезических семейства $\mathcal{A}_{34}$ это сужение задает диффеоморфизмы между всеми четырьмя конусами k_1, k_2, k_3, k_4. При любом фиксированном $\xi \in k_1$ геодезические α_ξ и $\mathcal{P}_\pi(\alpha_\xi)$ лежат на одном слое Λ расслоения F. Начальные точки геодезических α_ξ и $\mathcal{P}_\pi(\alpha_\xi)$ — они лежат в конусах k_1 и k_3 соответственно — принадлежат одной орбите β_ξ фазового потока G_I. Конечные точки этих двух геодезических — они лежат в k_2 и k_4 соответственно — тоже принадлежат одной орбите β_η потока G_I, где $\eta \in k_2$ — конец геодезической α_ξ. Все утверждения с учетом замены индексов $1, 2$ на i, j останутся верными, если семейство $\mathcal{A}_{12}$ поменять на $\mathcal{A}_{ij}$ с теми же свойствами, где l_i и l_j — соседние кривые линии χ_{00}. При этом если взять $\mathcal{A}_{34} = \overline{\mathcal{A}}_{12}$, то $\overline{\mathcal{A}}_{34} = \mathcal{A}_{12}$.*

Доказательство леммы 5.6.Б. Корректность построений отчасти объяснялась по их ходу. Из следствия 4.12.А и из (80) получаем, что расстояния между точками η_3 и ξ_3 и между η_4 и ξ_4 действительно малы. Отсюда и из леммы 5.3.Б следует корректность деформации геодезической $G_I^\pi(\alpha_\xi)$ в геодезическую, соединяющую точки ξ_3 и ξ_4. Из малости тех же расстояний, из следствия 4.12.А и вида траекторий невозмущенного потока $G_{F_1^0}$ (см. леммы 3.3.А и 3.3.В) получаем допустимость пары конусов (k_3, k_4) и, в частности, оценку (104). Из этих фактов и из построения семейства $\mathcal{A}_{34}$ следует, что это семейство геодезических допустимо. Взаимная однозначность соответствия между геодезическими семейств $\mathcal{A}_{12}$ и $\mathcal{A}_{34}$, задаваемая отображением $\mathcal{P}_\pi$, очевидна. Из построения $\mathcal{P}_\pi$ получаем, что оно обладает и всеми другими требуемыми свойствами. Из доказанных фактов следуют все остальные утверждения леммы 5.6.Б.

§ 5.7. Семейство циклов e_ξ в случае $m_2 = 1$, составленных из геодезической α_ξ и крюка $\mathcal{K}_\xi$

На этом мы завершим построение и исследование семейств геодезических и далее будем строить семейства замкнутых линий (регулярных и с особенностями), лежащих на слоях Λ. Эти линии будут составлены из геодезических построенных выше семейств и из определенных ниже «крюков», являющихся частями линий χ_{mh}. Начнем с более простого случая $m_2 = 1$. Пусть $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$ — допустимое семейство геодезических (см. определение 5.5). Здесь k_1 и k_2 — конусы с центральными кривыми l_1 и l_2 соответственно, где $l_1 \cup l_2 = \chi_{00} = \Lambda^0 \cap V_+$. Часть геодезических α_ξ семейства $\mathcal{A}_{12} = \{\alpha_\xi,\ \xi \in k_1\}$ замкнем «крюками», являющимися связными кривыми, лежащими на линиях $\chi_{mh} = \mathcal{F}^{-1}(m, h)$. Точное утверждение состоит в следующем.

Лемма 5.7.А. *Существует допустимое семейство геодезических $\mathcal{A}'_{12} = \mathcal{A}'_{12}(k'_1, k'_2, \mu)$, являющееся подсемейством данного семейства $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$, в частности, $k'_j \subseteq k_j$ и на k'_j задана та же координатная функция μ, что и на исходном конусе k_j, $j = 1, 2$. Это семейство $\mathcal{A}'_{12}$ обладает следующими свойствами. (Далее штрих для простоты опущен.) Пусть $\xi_1 \in k_1$ и $\xi_2 \in k_2$ — любые точки с одинаковыми координатами (F_1, F_2, μ), такими, что $F_1 < |F_2|$. Тогда существует связная гладкая кривая $\mathcal{K}_{\xi_1}$, лежащая на линии χ_{mh} и соединяющая точки ξ_1 и ξ_2, $(m, h) = (F_1(\xi_j), F_2(\xi_j))$, $j = 1, 2$, причем такая кривая единственна. Кривые $\mathcal{K}_\xi$ получившегося семейства будут гладко зависеть от точки $\xi \in Y(k_1)$, где*

$$Y(k_j) := \left\{ \xi \in k_j | F_1(\xi) < |F_2(\xi)|^{\overline{\frac{2}{m_1+m_2}}} \right\}, \tag{105}$$

и в рассматриваемом случае показатель справа равен 1. Объединение $e_\xi := \alpha_\xi \cup \mathcal{K}_\xi$ при любом $\xi \in Y(k_1)$ будет замкнутой кривой, лежащей на слое Λ_{mh}, являющемся гладким тором. Каждая кривая e_ξ, $\xi \in Y(k_1)$, будет гладкой за исключением, быть может, точек $\xi = \xi_1$ и $\xi_2 \in Y(k_2)$ стыковки кривых α_ξ и $\mathcal{K}_\xi$. Для любой точки η любой такой кривой α_ξ, то есть для $\eta \in \alpha_\xi$, $\xi \in Y(k_1)$, орбита $\beta_\eta \ni \eta$ группы G_I пересекает эту кривую только в точке η: $e_\xi \cap \beta_\eta = \{\eta\}$. Кроме того, для любой кривой e_ξ, $\xi \in Y(k_1)$, будем иметь $\Lambda_{mh} = \cup_{\eta \in e_\xi} \beta_\eta$, где $\Lambda_{mh} \supset e_\xi$ — слой расслоения F.

Определение 5.7.Б. Множество $\mathcal{K}_\xi$ будем называть *крюком*, а их семейство $\{\mathcal{K}_\xi, \xi \in Y(k_1)\}$ назовем *соответствующим* семейству геодезических $\mathcal{A}_{12} = \{\alpha_\xi, \xi \in k_1\}$. Так же будем называть и семейство замкнутых кривых $\{e_\xi, \xi \in Y(k_1)\}$, а кривые e_ξ этого семейства назовем *составными циклами*.

5.7.В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.7.А. Существование и единственность кривых $\mathcal{K}_\xi$ следуют из вида невозмущенных кривых χ^0_{mh} (см. леммы 3.2.А–3.2.Д и 3.2.Ж), а также из малости отличия возмущенных кривых χ_{mh} от χ^0_{mh} (см. лемму 3.6.В.ii). Действительно, утверждение леммы 3.6.В доказано для участков линий χ_{mh} вида $\widetilde{\chi}_{mhr} = \chi_{mh} \cap Y^e_r$ (см. определение после леммы 3.6.Б). Но если взять конусы k_1 и k_2 достаточно узкими и малыми, то из леммы 4.9.0 и из неравенства $F_1(\xi) < |F_2(\xi)|$ следует, что кривые $\mathcal{K}_\xi$ при $\xi \in k_1$ являются частью кривых $\widetilde{\chi}_{mhr}$. Гладкую зависимость кривой $\mathcal{K}_\xi$ от $\xi \in Y(k_1)$ получаем из лемм 3.6.Д и 3.6.Е. Так как орбиты β группы G_I «равномерно» трансверсальны в $\mathbf{R}^4_{pq}$ полупространству V_+ в точках конуса $k_{\alpha r}$ (см. следствие 4.12.А), то и кривые $\widetilde{\chi}_{mhr} \subset V_+$ эти орбиты пересекают под ненулевыми углами, отделенными от нуля (см. лемму 3.6.Б). Орбиты β пересекают каждую из кривых l_1 либо l_2 ровно в одной точке (см. следствие 4.12.В либо следствие 4.12.А и лемму 3.3.А). Геодезическая α_ξ при любом $\xi \in k_1$ также пересекает орбиты β под ненулевым углом. Это следует из того факта, что β тоже является геодезической плоской метрики на слое Λ_{mh}, причем α_ξ не может лежать на орбите β, так как эти орбиты не могут соединять точки, лежащие в конических окрестностях соседних кривых l_1 и l_2 (см. следствие 4.12.В).

Обозначим $\beta^\tau_\eta = G^\tau_{F_2}(\beta_\eta)$, где $\beta_\eta \ni \eta$ — орбита группы G. Пусть $\eta_1 \in k_1$ — точка с координатами $(0, 0, \mu)$, $\mu > 0$. И пусть $e_\mu = l_{\mu 1} \cup \alpha_\mu \cup l_{\mu 2}$ — проколотая в нуле $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$ замкнутая кривая, построенная в лемме 5.1.А и состоящая из геодезической α_μ, соединяющей точку η_1 с точкой $\eta_2 \in k_2$, имеющей те же координаты $(0, 0, \mu)$, а также из интервалов $l_{\mu 1}$ и $l_{\mu 2}$ кривых l_1 и l_2 соответственно. Без ограничения общности можно считать, что при малых положительных τ орбиты $\beta^\tau_{\eta_1}$ пересекают геодезическую α_μ, а при малых отрицательных — интервал $l_{\mu 1}$, а не наоборот. Ясно, что это свойство сохранится и для всех конически близких к кривой l_1 точек. Более точно, пусть $\eta = \eta_1 \ni Y(k_1)$. Тогда кривая β^τ_η при малых отрицательных τ будет пересекать крюк $\mathcal{K}_\eta$. Так как $\eta \notin l_1$, то поверхность $\Lambda_{mh} \ni \eta$ не содержит критических точек отображения F. Следовательно, Λ_{mh} является гладким тором, по которому без остановок и возвратов движется при убывании τ кривая β_η^τ. Через некоторое отрицательное время $-T^0 < 0$ двигающаяся от β_η вспять по времени τ кривая β_η^τ пересечет точку $\eta_2 \in k_2$, имеющую те же координаты, что и точка $\eta = \eta_1$, то есть $\beta_\eta^{-T^0} \ni \eta_2$. При любом $\tau \in [-T^0, 0]$ кривая β_η^τ пересекает крюк $\mathcal{K}_\eta$ в единственной точке (см. следствие 4.12.В). Таким образом, крюк $\mathcal{K}_\eta$ действительно дополняет геодезическую α_η до замкнутой кривой ε_η, которую любая орбита β может пересечь только в одной точке. Лагранжев цилиндр $\Lambda_{mh} \setminus \mathcal{B}$, построенный в лемме 5.3.Б и проходящий через точку η, очевидно, имеет вид $\cup_{\tau\in[0,T]}\beta_\eta^\tau$ при некотором $T = T_\eta > 0$. Из следствия 4.12.Д получаем, что $\cup_{\tau\in[-T^0,0]}\beta_\eta^\tau$ тоже является цилиндром, расслоенным на орбиты β. Объединение этих двух цилиндров составляет, очевидно, тор $\Lambda_{mh} \ni \eta$. Лемма 5.7.А полностью доказана.

§5.8. Построение и определение крюков $\mathcal{K}_\xi$, составных циклов и кластеров λ_ξ в случае $m_2 = 2$

Для $m_2 = 2$ аналогами составных циклов являются кластеры λ_ξ, которые, как и в случае $m_2 = 1$, составлены из геодезических и крюков. Кластеры, как правило, тоже являются либо составными циклами, либо парами составных циклов, но есть и исключения — вырожденные кластеры. Такие кластеры тоже будут кусочно-гладкими линиями, но в отличие от невырожденных имеют точку самопересечения. В случае $m_2 = 1$ все составные циклы имеют лишь один тип — это одна геодезическая, дополненная одним крюком. Тот же тип имеет и каждый из составных циклов, которые парами входят в кластер. Однако составной цикл, образующий полный кластер, является как бы двойным и имеет более сложный тип. Во всех случаях составной цикл — связная кусочно-гладкая замкнутая кривая без самопересечений.

Перейдем теперь к точным описаниям и определениям крюков, циклов и кластеров. Фиксируем допустимую пару $(\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{34})$, $\mathcal{A}_{34} = \overline{\mathcal{A}}_{12}$, семейств сопряженных геодезических (см. определение 5.6.А), где $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$ — допустимое семейство геодезических, а $\mathcal{A}_{34} = \mathcal{A}_{34}(k_3, k_4, \mu)$ — сопряженное ему семейство. Центральной осью конуса k_j является кривая l_j, $j = 1, 2, 3, 4$. Как везде, соседние кривые l_1 и l_2 можно заменить любой другой парой соседних кривых из набора l_1, l_2, l_3, l_4, составляющих χ_{00}. *Крюком* $\mathcal{K}_\xi$, $\xi \in k_1$, отвечающим паре $(\mathcal{A}_{12}, \overline{\mathcal{A}}_{12})$, будем называть связное подмножество линии χ_{mh}, $m = F_1(\xi)$, $h = F_2(\xi)$, соединяющее ξ либо с одной точкой, лежащей на одном из соседних конусов, то есть на k_2 или k_4, либо с тремя точками, лежащими на остальных конусах, то есть на k_2, k_3 и k_4. Предполагается также, что все концы крюка $\mathcal{K}_\xi$ имеют одинаковые координаты (F_1, F_2, μ), а сами крюки обладают следующими свойствами. При $(F_1, F_2) \in \breve{\tau}$ крюк $\mathcal{K}_\xi \subset \Lambda_{mh}$, $(m, h) = (F_1, F_2)$, имеет вид креста — объединения двух гдадких криволинейных сегментов, пересекающихся в точке, лежащей на «почти вертикальной» кривой l_0. Каждый из четырех концов креста принадлежит своему конусу k_j, так что крюк $\mathcal{K}_\xi$ соединяет точки всех четырех конусов. Такой крюк будем называть *вырожденным*, а остальные крюки — *невырожденными*. Последние имеют вид связных гладких кривых, соединяющих точки двух соседних конусов, то есть либо k_1 и k_2, либо k_1 и k_4, причем координаты (F_1, F_2, μ) этих двух точек совпадают и удовлетворяют условиям $F_1 < |F_2|^{2/3}$ и $(F_1, F_2) \notin \breve{\tau}$. Аналогично определяются *вырожденные* и *невырожденные крюки* $\mathcal{K}_\xi$ для точек $\xi \in k_j$ при $j = 2, 3, 4$; вырожденные крюки для каждой из этих четырех точек при фиксированном (F_1, F_2, μ) совпадают. Приведенными условиями крюк $\mathcal{K}_\xi$ однозначно определяется точкой $\xi \in k_j$.

Каждому невырожденному крюку $\mathcal{K}_\xi$, $\xi \in k_1$, соответствует другой невырожденный крюк $\mathcal{K}_\eta = \mathcal{P}_\pi \mathcal{K}_\xi$, где $\eta = \mathcal{P}_\pi(\xi) \in k_3$. Крюк $\mathcal{K}_\eta$ назовем *сопряженным* крюку $\mathcal{K}_\xi$ и обозначим через $\overline{\mathcal{K}}_\xi$, тогда $\overline{\overline{\mathcal{K}}}_\xi = \mathcal{K}_\xi$, что мотивирует употребление термина. Оба крюка лежат на одной линии χ_{mh}, и пары $(\mathcal{K}_\xi, \overline{\mathcal{K}}_\xi)$ могут быть только двух типов. Крюк $\mathcal{K}_\xi$ пары первого типа соединяет точки конусов k_1 и k_2, а $\overline{\mathcal{K}}_\xi$ — конусов k_3 и k_4. В паре второго типа крюк $\mathcal{K}_\xi$ соединяет конусы k_1 и k_4, а $\overline{\mathcal{K}}_\xi$ — k_3 и k_2. Оба сопряженных крюка $\mathcal{K}_\xi$ и $\overline{\mathcal{K}}_\xi$ лежат на одном слое Λ_{mh} расслоения F, где $m = F_1(\xi)$, $h = F_2(\xi)$. Кривая $\check{\tau}$ делит область

$$\Upsilon_\infty = \{(m,h) \in \mathbf{R}^2 | m < |h|^{2/3}\}$$

на две связные компоненты Υ_∞^+ и Υ_∞^-, $\Upsilon_\infty = \Upsilon_\infty^+ \cup \check{\tau} \cup \Upsilon_\infty^-$ (см. лемму 3.6.Д). Все пары $(\mathcal{K}_\xi, \overline{\mathcal{K}}_\xi)$ крюков, лежащих на слое Λ_{mh} при (m,h), принадлежащем одной компоненте, будут одного типа, а при (m,h), принадлежащем другой компоненте, пары $(\mathcal{K}_\xi, \overline{\mathcal{K}}_\xi)$ будут другого типа. Для определенности далее будем всегда считать, что такие пары $(\mathcal{K}_\xi, \overline{\mathcal{K}}_\xi)$, где крюк $\mathcal{K}_\xi$ соединяет конусы k_1 и k_2, соответствуют «нижней» компоненте Υ_∞^-. В частности, если $m < 0$, то точка (m,h) удовлетворяет неравенству $h - t(m) < 0$, где график функции $h = t(m)$, $m < 0$, задает кривую $\check{\tau}$ (см. лемму 3.5.Б).

Построение крюков $\mathcal{K}_\xi$ мы начинали с фиксированной пары семейств сопряженных геодезических $(\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{34})$. Дополним часть из этих геодезических α_ξ невырожденными крюками до замкнутых кривых e_ξ. Рассмотрим любую точку $\xi \in k_1$, и пусть (F_1, F_2, μ) — координаты этой точки, где $(F_1, F_2) \in \Upsilon_\infty^-$. Пусть $\alpha_\xi \in \mathcal{A}_{12}$, положим $e_\xi = \alpha_\xi \cup \mathcal{K}_\xi$. Так как концы крюка $\mathcal{K}_\xi$ совпадают с концами геодезической α_ξ, то e_ξ будет замкнутой кривой, лежащей на Λ_{mh}, $(m,h) = (F_1, F_2)$. Рассмотрим построенную в пп. 5.6.А сопряженную α_ξ геодезическую $\overline{\alpha}_\xi = \mathcal{P}_\pi(\alpha_\xi)$, соединяющую точки конусов k_3 и k_4, которую обозначим через $\alpha_\eta := \overline{\alpha}_\xi$, где $\eta = \mathcal{P}_\pi(\xi)$. Возьмем $e_\eta := \alpha_\eta \cup \mathcal{K}_\eta$; по определению, $\mathcal{K}_\eta = \overline{\mathcal{K}}_\xi$. Замкнутые кривые e_ξ и e_η будем называть *составными циклами внутреннего типа*, отвечающими допустимой паре $(\mathcal{A}_{12}, \overline{\mathcal{A}}_{12})$. Цикл e_η будем называть также *сопряженным* циклу e_ξ и обозначать $\overline{e}_\xi$.

Рассмотрим теперь случай $(F_1, F_2) \in \Upsilon_\infty^+$. Геодезическая α_ξ соединяет точку $\xi \in k_1$ с точкой $\xi_2 \in k_2$, а крюк $\mathcal{K}_{\xi_2}$ соединяет точки ξ_2 и $\xi_3 \in k_3$. Геодезическая $\overline{\alpha}_\xi$ соединяет ξ_3 с точкой $\xi_4 \in k_4$, и, наконец, крюк $\mathcal{K}_{\xi_4} = \overline{\mathcal{K}}_{\xi_2}$ соединяет ξ_4 со стартовой точкой ξ. Положим $e_\xi = \alpha_\xi \cup \mathcal{K}_{\xi_2} \cup \overline{\alpha}_\xi \cup \overline{\mathcal{K}}_{\xi_2}$. Тогда e_ξ будет замкнутой кривой на торе Λ_{mh}, $(m,h) = (F_1, F_2)$, гладкой за исключением не более четырех точек, лежащих, соответственно, на конусах k_1, k_2, k_3, k_4 и являющихся точками стыковок геодезических с крюками. Кривую e_ξ назовем *составным циклом внешнего типа*, проходящим через точку $\xi \in k_1$. Аналогично определяются внутренние и внешние составные циклы e_ξ, а также сопряженные внутренние составные циклы для точек $\xi \in k_j$ при $j = 2, 3, 4$. Все составные циклы в случае $m_2 = 1$ и все циклы внутреннего типа при $m_2 = 2$ состоят из одной геодезической и одного крюка, в то время как составные циклы внешнего типа являются объединением двух сопряженных геодезических и двух сопряженных крюков. Такие «четырехэлементные» циклы e_ξ будем также называть *невырожденными кластерами внешнего типа.* Объединение $\lambda_\xi := e_\xi \cup \overline{e}_\xi$ двух сопряженных друг другу составных циклов внутреннего типа будем называть *невырожденными кластерами внутреннего типа.* Если точка $\xi \in k_1$ имеет координаты (F_1, F_2, μ), где $(F_1, F_2) \in \check{\tau}$, то положим $\lambda_\xi := \alpha_\xi \cup \mathcal{K}_\xi \cup \overline{\alpha}_\xi$. Эта кривая без концов имеет вид «восьмерки» с особой точкой самопересечения, совпадающей с $\nu = \nu_m$, $m = F_1$, где ν_m — единственная точка пересечения λ_ξ с l_0: $\{\nu_m\} = \lambda_\xi \cap l_0 = \mathcal{K}_\xi \cap l_0$. Восьмерку λ_ξ будем называть *вырожденным кластером.* Любой кластер λ_ξ любого типа имеет, помимо точки самопересечения восьмерки в вырожденном случае, ровно четыре точки возможной негладкости; эти точки расположены на всех конусах k_1, k_2, k_3, k_4 и являются точками стыковки геодезических α_ξ и $\overline{\alpha}_\xi$ либо с одним вырожденным крюком $\mathcal{K}_\xi$, либо с двумя невырожденными сопряженными друг другу крюками.

§ 5.9. Корректность построения и свойства крюков, составных циклов и кластеров при $m_2 = 2$

Лемма 5.9.А. *Пусть $m_2 = 2$, и пусть $(\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{34})$ — допустимая пара семейств сопряженных геодезических* (см. определение 5.6.А)*, где $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$, $\mathcal{A}_{34} = \mathcal{A}_{34}(k_3, k_4, \mu)$. Тогда за счет возможного заужения и уменьшения размеров конуса k_1, а значит, и конусов k_2, k_3, k_4, можно получить допустимые подсемейства $\mathcal{A}'_{12} = \mathcal{A}'_{12}(k'_1, k'_2, \mu)$, $\mathcal{A}'_{34} = \mathcal{A}'_{34}(k'_3, k'_4, \mu)$ без изменения координаты μ, где $k'_j \subseteq k_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, такие, что пара $(\mathcal{A}'_{12}, \mathcal{A}'_{34})$ будет обладать следующими свойствами. (Далее штрихи для простоты обозначений опущены.) Для любой точки $\xi \in Y(k_1)$, где $Y(k_j) \subset k_j$ определяется формулой* (105) (см. лемму 5.7.А)*, корректны все приведенные в § 5.8 построения и верны все утверждения, которые были сделаны по ходу этого построения. В частности, для каждой точки $\xi \in Y(k_1)$ крюк $\mathcal{K}_\xi$ существует и единственен. Все определенные в § 5.8 крюки $\mathcal{K}_\xi$ являются гладкими связными кривыми, лежащими на слоях Λ_{mh}, кроме вырожденных крюков $\mathcal{K}_\xi$, которые состоят не из одной, а из двух гладких кривых, пересекающихся в точке $\nu_m \in l_0$, где $\mathcal{K}_\xi \cap l_0 = \{\nu_m\}$, $m = F_1(\xi)$, $h = F_2(\xi)$. Невырожденные крюки $\mathcal{K}_\xi$ при $(m, h) \in \Upsilon^+_\infty$ гладко зависят от набора координат (m, h, μ) любого из концов этой кривой — в обоих концах этот набор один и тот же, где $(m, h) = (F_1, F_2)$. То же самое верно и для $(m, h) \in \Upsilon^-_\infty$. Кресты $\mathcal{K}_\xi \subset \Lambda_{mh}$, $(m, h) \in \check{\tau}$, тоже гладко зависят от координат (m, h, μ) любого из четырех концов этого креста — координаты всех четырех концов также совпадают.*

Каждый кластер $\lambda_\xi \ni \xi$, $\xi \in k_1 \cup k_2 \cup k_3 \cup k_4$, целиком лежит на слое Λ_{mh} расслоения F, где, как обычно, (m, h) — первые две из трех координат (F_1, F_2, μ) точки ξ. Орбиты β фазового потока G_I пересекают любой кластер λ_ξ в любой его точке под ненулевым углом, включая и точки негладкости кластера, в каждой из которых могут быть две разные касательные к λ_ξ с разных сторон от такой точки. Каждая орбита β пересекает любой составной внутренний цикл e ровно в одной точке: $\beta_\eta \cap e = \{\eta\}$ для любой точки $\eta \in e$, где $\beta_\eta \ni \eta$. Орбита β, пересекающая любой кластер λ_ξ, пересекает его ровно в двух точках за исключением особой точки ν_μ вырожденного кластера λ_ξ: орбита β, проходящая через точку $\nu_\mu \in \lambda_\xi$, пересекает кластер λ_ξ только в точке ν_μ. Пусть e — произвольный составной цикл внутреннего типа, а Λ_{mh} — содержащий этот цикл слой расслоения F. Тогда этот слой может быть получен следующим образом: $\Lambda_{mh} = \cup_{\eta \in e} \beta_\eta$, где $\beta_\eta \ni \eta$ — орбита группы G_I. Пусть λ — кластер любого типа и $\lambda \subset \Lambda_{mh}$. Тогда аналогично $\Lambda_{mh} = \cup_{\eta \in \lambda} \beta_\eta$. При $(m, h) \in \Upsilon_\infty \setminus \check{\tau}$, то есть при $(m, h) \in \Upsilon^+_\infty \cup \Upsilon^-_\infty$, слой $\Lambda_{mh} \supset \lambda_\xi$ содержится в регулярной части $M_R \subset M^4$ расслоения F, а значит, является двумерным гладким тором.

5.9.Б. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.9.А. Существование, единственность и вид крюка $\mathcal{K}_\xi$ следуют из вида невозмущенных кривых χ^0_{mh} (см. леммы 3.2.А–3.2.Д и 3.2.Ж), а также из малости отличия возмущенных кривых $\chi_{mh} \supset \mathcal{K}_\xi$ от χ^0_{mh} (см. лемму 3.6.В.ii), и это доказывается, как в случае $m_2 = 1$ (см. начало доказательства леммы 5.7.А в пп. 5.7.В). Гладкая зависимость от ξ невырожденных крюков $\mathcal{K}_\xi$ при ξ, таких, что $\xi \in k_1$ и $(F_1(\xi), F_2(\xi)) \in \Upsilon^+_\infty$, следует из лемм 3.6.Д и 3.6.Е. То же самое и из тех же фактов получаем для Υ^-_∞ вместо Υ^+_∞. Все эти утверждения в случае $\xi \in k_3$ вместо k_1 следуют из утверждения о том, что семейство $\mathcal{A}_{34}$ тоже является допустимым и равнозначным семейству $\mathcal{A}_{12}$ в паре $(\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{34})$ (см. лемму 5.6.Б), так что для $\mathcal{A}_{34}$ справедливы все факты, доказанные выше для $\mathcal{A}_{12}$. Гладкая зависимость имеющего вид креста вырожденного крюка $\mathcal{K}_\xi$ от точки $\xi \in k_1 \cap F^{-1}(\breve{\tau})$ следует из лемм 3.5.В и 3.6.В. Для любого составного цикла внутреннего типа e_ξ, $\xi \in Y(k_1)$, утверждения о трансверсальности внутри слоя Λ_{mh} пересечения этого цикла орбитами β и о единственности точки пересечения $\beta \cap e_\xi$, а также о представлении $\Lambda_{mh} = \cup_{\eta \in e_\xi} \beta_\eta$ доказываются дословным повторением доказательства аналогичных фактов в случае $m_2 = 1$ (см. доказательство леммы 5.7.А в пп. 5.7.В).

Нетрудно показать, что сопряженный цикл $\overline{e}_\xi$ при $\xi \in Y(k_1)$ получается малой деформацией из цикла $G_I^\pi(e_\xi)$ (см. построение сопряженных геодезической $\mathcal{P}_\pi(\alpha_\xi)$ и крюка $\mathcal{P}_\pi(\mathcal{K}_\xi)$, где $e_\xi = \alpha_\xi \cup \mathcal{K}_\xi$). Отсюда получаем, что приведенные свойства внутреннего цикла e_ξ при $\xi \in Y(k_1)$ имеют место и для $\overline{e}_\xi$. Аналогично, те же утверждения доказываются и для произвольных кластеров, за исключением того, что число точек пересечения с орбитой β кластера почти всегда равно двум и в очень редких случаях равно 1 (см. следствие 4.12.В). Остальные утверждения леммы 5.9.А очевидны. Лемма 5.9.А доказана.

Определение 5.9.В. Построенные семейства составных циклов $\{e_\xi,\, \xi \in Y(k_1) \backslash F^{-1}(\breve{\tau})\}$ и кластеров $\{\lambda_\xi,\, \xi \in Y(k_1)\}$ будем называть *допустимыми семействами*, соответствующими допустимой паре семейств геодезических $(\mathcal{A}_{12}, \mathcal{A}_{34})$. В случае $m_2 = 1$ под *кластером* λ_ξ, $\xi \in Y(k_1)$, будем понимать составной цикл e_ξ (см. определение 5.7.Б), то есть $\lambda_\xi := e_\xi$. Семейство $\{\lambda_\xi,\, \xi \in Y(k_1)\}$ при $m_1 = 1$ будем называть *допустимым семейством кластеров*, отвечающих допустимому семейству $\mathcal{A}_{12}$.

§5.10. Полоски $\boldsymbol{\sigma}$, отвечающие сегментам $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ вертикальных и горизонтальных прямых плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$. Заключительные замечания

5.10.А. ПОСТРОЕНИЕ СЕГМЕНТОВ $\mathcal{I}$ И ПОЛОСОК σ. Обозначим

$$\mathcal{I}^{|}_{Mb} := \{(m, h) \in \mathbf{R}^2 | m = M,\, |h| \leqslant b\}, \tag{106}$$

где предполагается, что $M \leqslant 0$, $b > 0$ и что $\mathcal{I}^{|}_{Mb} \cap \tau \neq \varnothing$ в случае $m_2 = 2$, а $\tau = \breve{\tau} \cup \{0\}$ — множество критических значений отображения F. Множество $\mathcal{I}^{|}_{Mb}$ имеет вид вертикального отрезка, то есть параллельного оси h, расположенного в левой полуплоскости $m \leqslant 0$ симметрично относительно горизонтальной оси m и при $m_2 = 2$ пересекающего кривую τ. Обозначим $\mathcal{I}^{+}_{Ha} := \{(m, h) \in \mathbf{R}^2|\ |m| \leqslant a,\, h = H\}$, где $a > 0$, $H > 0$, $\mathcal{I}^{+}_{Ha} \subset \Upsilon_\infty$, и в случае $m_2 = 2$ предполагается, что $\mathcal{I}^{+}_{Ha}$ не пересекается с τ: $\mathcal{I}^{+}_{Ha} \cap \tau = \varnothing$. Обозначим через $\mathcal{I}^{-}_{Ha}$ множество, которое определяется в точности, как $\mathcal{I}^{+}_{Ha}$, только $H < 0$. Отрезки $\mathcal{I}^{+}_{Ha}$ и $\mathcal{I}^{-}_{Ha}$ горизонтальные, содержатся в Υ_∞, симметрично расположены относительно оси h, только $\mathcal{I}^{+}_{Ha}$ лежит в верхней полуплоскости плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$, а $\mathcal{I}^{-}_{Ha}$ — в нижней, и в случае $m_2 = 2$ оба отрезка не пересекаются с τ.

Пусть $\{\lambda_\xi,\, \xi \in Y(k_1)\}$ — некоторое допустимое семейство кластеров. В случае $\xi \in k_1 \cap F^{-1}(0)$ и $m_2 = 1$ положим $\lambda_\xi := e_\mu$, где $\mu = \mu(\xi)$, а e_μ — проколотая в существенно особой точке ξ^0 замкнутая кривая, построенная в лемме 5.1.А. Пусть $m_2 = 2$ и e_μ — проколотая в ξ^0 замкнутая кривая, построенная в той же лемме 5.1.А и содержащая полусегменты кривых l_1 и l_2, составляющих часть линии $\chi_{00} = F^{-1}(0) \cap V_+$. Из этой же леммы следует, что может быть построена аналогичная кривая e'_μ, содержащая полусегменты кривых l_3 и l_4, где $l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4 = \chi_{00}$. Положим $\lambda_\xi := e_\mu \cup e'_\mu$. Рассмотрим некоторый вертикальный отрезок $\mathcal{I}^{|}_{Mb}$ описанного типа. Пусть $M \leqslant 0$, $b > 0$ и $\mu > 0$ таковы, что образ $F(S_\mu)$ поверхности $S_\mu := \{(F_1, F_2, \nu) \in k_1 | \nu = \mu\}$ содержит $\mathcal{I}^{|}_{Mb}$: $F(S_\mu) \supset \mathcal{I}^{|}_{Mb}$. Обозначим $J^{|}_{Mb\mu} := (F|_{S_\mu})^{-1}(\mathcal{I}^{|}_{Mb})$ и $\sigma^{|}_{Mb\mu} := \cup_{\xi \in J^{|}_{Mb\mu}} \lambda_\xi$. Аналогичные множества, отвечающие отрезкам $\mathcal{I}^{\pm}_{Ha}$, обозначим $J^{\pm}_{Ha\mu}$ и $\sigma^{\pm}_{Ha\mu}$ соответственно.

Определение 5.10.Б. Множество $\sigma^{|}_{Mb\mu}$ ($\sigma^{\pm}_{Ha\mu}$) будем называть *полосками*, соответствующими вертикальному (горизонтальному) отрезку $\mathcal{I}^{|}_{Mb}$ (соответственно, $\mathcal{I}^{\pm}_{Ha}$) и допустимому семейству кластеров $\{\lambda_\xi, \xi \in Y(k_1)\}$. Полоску $\sigma^{|}_{Mb\mu}$ при $M = 0$ будем называть *особой*. Рассмотренную выше линию $\lambda_\xi \subset \Lambda^0$, не входящую в семейство $\{\lambda_\xi, \xi \in Y(k_1)\}$, но задействованную для построения особой полоски, назовем *особым кластером*.

Предложение 5.10.В. *Построенные полоски $\sigma^{|}_{Mb\mu}$ и $\sigma^{\pm}_{Ha\mu}$ лежат на 3-мерных поверхностях $F_1^{-1}(M)$ и $F_2^{-1}(H)$, а в окрестности существенно особой точки ξ^0 — на двумерных поверхностях $\mathcal{F}_1^{-1}(M)$ и $\mathcal{F}_2^{-1}(H)$. Кусочно-гладкие кластеры λ_ξ, составляющие неособые полоски при $\xi \in J^{|}_{Mb\mu}$ и $\xi \in J^{\pm}_{Ha\mu}$ соответственно, в определенном смысле тривиально их расслаивают за исключение полосок $\sigma^{|}_{Mb\mu}$ в случае $m_2 = 2$. При $m_2 = 2$ все кластеры всех полосок вида $\sigma^{+}_{Ha\mu}$ при любых допустимых H, a и μ не вырожденны и имеют один и тот же тип, то есть являются либо внутренними, либо внешними. То же самое верно и для полосок $\sigma^{-}_{Ha\mu}$, но тип кластеров $\lambda_\xi \subset \sigma^{-}_{Ha\mu}$ противоположен типу кластеров $\lambda_\xi \subset \sigma^{+}_{Ha\mu}$. При сделанном выше для определенности предположении* (см. п. 5.8) *верхнему индексу «−» соответствуют внутренние кластеры, а индексу «+» — внешние. Далее в формулировке предложения будет предполагаться, что это условие выполнено.*

При $m_2 = 2$ «левые» полоски $\sigma^{|}_{Mb\mu}$, $M < 0$, содержат «восьмерку», то есть вырожденный кластер $\lambda^0_\xi \subset \Lambda_{Mh^0}$, где $\{(M, h^0)\} = \mathcal{I}^{|}_{Mb} \cap \breve{\tau}$, иначе говоря, $h^0 = t(M)$ в обозначениях леммы 3.5.Б. Точка $(M, h^0) \in \breve{\tau} \subset \mathbf{R}^2_{mh}$ разбивает вертикальный отрезок $\mathcal{I}^{|}_{Mb}$ на две части $\mathcal{I}^{|+}_{Mb}$ и $\mathcal{I}^{|-}_{Mb}$, так что $\mathcal{I}^{|}_{Mb} = \mathcal{I}^{|-}_{Mb} \cup \{(M, h^0)\} \cup \mathcal{I}^{|+}_{Mb}$. Вся полоска $\sigma^{|}_{Mb\mu}$ при $M < 0$ имеет вид двумерной окрестности восьмерки λ^0_ξ, которую эта восьмерка делит на две части — внутреннюю $\sigma^{|-}_{Mb\mu}$ и внешнюю $\sigma^{|+}_{Mb\mu}$. Внешняя часть связна, и ее составляют и тривиально расслаивают внешние кластеры $\lambda_\xi \subset \Lambda_{mh}$ при $(m, h) \in \mathcal{I}^{|+}_{Mb}$. Внутренняя часть состоит из двух связных компонент, и ее составляют и тривиально расслаивают в слабом смысле внутренние кластеры $\lambda_\xi \subset \Lambda_{mh}$ при $(m, h) \in \mathcal{I}^{|-}_{Mb}$, также состоящие из двух связных компонент.

Аналогичным образом устроена и особая полоска $\sigma^{|}_{Mb\mu}$, $M = 0$: $\sigma^{|}_{0b\mu} = \sigma^{|-}_{0b\mu} \cup \lambda^0_\xi \cup \sigma^{|+}_{0b\mu}$. Здесь множества $\sigma^{|\pm}_{Mb\mu}$ при $M = 0$ определяются точно так же, как и при $M < 0$, а $\lambda^0_\xi \subset \Lambda^0 = \Lambda_{Mh_0}$ при $M = h_0 = 0$. Единственная разница по сравнению со случаем $M < 0$ состоит в том, что $\sigma^{|}_{0b\mu}$ является окрестностью особого кластера $\lambda^0_\xi \subset \Lambda^0$, который имеет вид проколотой в существенно особой точке ξ^0 линии, в то время как в случае $M < 0$ все предельные точки любого кластера $\lambda_\xi \subset \sigma^{|}_{Mb\mu}$ содержатся в этом кластере. Подробнее, при $m_2 = 1$ полоска $\sigma^{|}_{0b\mu}$ является окрестностью замкнутой кривой λ_ξ, проколотой в нуле, то есть в ξ^0, а при $m_2 = 2$ — окрестностью восьмерки λ_ξ, проколотой в точке ξ^0, совпадающей с особой точкой восьмерки. Вид внутренней $\sigma^{|-}_{0b\mu}$ и внешней $\sigma^{|+}_{0b\mu}$ частей по-

лоски $\sigma^{|}_{0b\mu}$ абсолютно такой же, как и в случае $M < 0$. В частности, $\sigma^{|-}_{0b\mu}$ тривиально расслоено внутренними кластерами, а $\sigma^{|+}_{0b\mu}$ — внешними.

Для доказательства предложения 5.10.В полезно следующее определение.

Определение 5.10.Г. Ту из двух полуполосок $\sigma^{|-}_{Mb\mu}$ и $\sigma^{|+}_{Mb\mu}$ при любом $M \leqslant 0$, которая расслоена внутренними кластерами, будем называть *внутренней*, соответственно, другую полуполоску — *внешней*. Аналогично определим *внутренние* и *внешние полоски* типа $\sigma^{-}_{Ha\mu}$ и $\sigma^{+}_{Ha\mu}$. Полуполоски $\sigma^{|-}_{Hb\mu}$, полоски $\sigma^{-}_{Ha\mu}$ и расслаивающие их кластеры назовем *нижними*, а $\sigma^{|+}_{Mb\mu}$, $\sigma^{+}_{Ha\mu}$ и расслаивающие их кластеры — *верхними*. При сделанном в § 5.8 предположении нижние полоски и полуполоски (и только они) являются внутренними. Обозначим $Y^e(k_1) := Y(k_1) \cup (k_1 \cap \Lambda^0)$, то есть наряду с точками $\xi \in k_1$, для которых $F_1(\xi) < |F_2(\xi)|^{\overline{\frac{2}{m_1+m_2}}}$, допускаются и те точки $\xi \in k_1$, для которых $F_1(\xi) = F_2(\xi) = 0$ (ср. обозначения леммы 3.6.Б). Обозначим $L := \{\lambda_\xi, \xi \in Y^e(k_1)\}$ семейство, состоящее из кластеров исходного семейства $\{\lambda_\xi, \xi \in Y(k_1)\}$ и особого кластера $\lambda_\xi \subset \Lambda^0$. Если исходное семейство $\{\lambda_\xi, \xi \in Y(k_1)\}$ было допустимым (см. определение 5.9.В), то семейство L будем называть *допустимым расширенным семейством кластеров*. При этом определение «расширенное» будем иногда опускать, так как верхний индекс e при Y указывает на расширенность семейства.

Доказательство предложения 5.10.В. Оно легко следует из доказанных выше в данном параграфе утверждений, а также из следующей леммы. Обозначим через $S_{\mu j}$ поверхность уровня функции μ на конусе k_j, $j = 1, \ldots, 2m_2$, отвечающем рассматриваемому семейству L.

Лемма 5.10.Д. *При $M \leqslant 0$ сечения $S_{\mu 1}, \ldots, S_{\mu, 2m_2}$ делят полоску $\sigma = \sigma^{|}_{Mb\mu}$ на две гладкие части σ_k и σ_g с общей гладкой границей*

$$\partial := \left(\cup_{j=1}^{2m_2} S_{\mu j}\right) \cap \sigma, \tag{107}$$

так что $\sigma = \sigma_k \cup \sigma_g$ и $\partial = \sigma_k \cap \sigma_g$. Поверхность σ_k связна и состоит из крюков $\mathcal{K}$, входящих в состав кластеров λ, расслаивающих полоску σ, а другая поверхность, σ_g, состоит из m_2 связных компонент и составлена из геодезических α, которые вместе с крюками $\mathcal{K}$ формируют эти кластеры.

Кроме того, обозначим

$$D = D_{Mb} := \cup_{(m,h) \in \mathcal{I}^{|}_{Mb}} \Lambda_{mh}. \tag{108}$$

Тогда, во-первых, $\sigma \subset D$ и $D \setminus \{\xi^0\}$ можно получить из полоски σ ее разнесением группой G_I. Во-вторых, полоска σ трансверсальна в D слоям $\Lambda \subset D$ расслоения F, расслаивающим D.

Отметим, что возможная негладкость полоски σ в точках кривой ∂ связана с тем, что в этих точках стыкуются крюки $\mathcal{K}$ и дуги α, составляющие кластеры λ, расслаивающие σ.

Доказательство леммы 5.10.Д. Гладкость поверхности $\sigma_k \setminus \partial \subset \mathcal{F}_1^{-1}(M)$ следует из гладкости поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(M)$, $M \leqslant 0$, областью которой она является. Гладкость поверхности $\sigma_g \setminus \partial$ нетрудно показать, используя полученное в лемме 5.3.Б представление (102) окрестности U особого слоя Λ^0 вне окрестности $\mathcal{B}$ существенной особой точки в виде прямого произведения 2-мерного диска $W_\mu \sim S_\mu$ на цилиндр. Действительно, слои-цилиндры этого представления будут областями слоев Λ расслоения F, и на них задана плоская метрика. Дуги α, составляющие σ_g, являются дугами геодезических этой метрики, и концы этих дуг лежат на гладких кривых $S_{\mu j} \cap \mathcal{F}_1^{-1}(M)$, $j = 1, \ldots, 2m_2$, пересекающих, очевидно, слои Λ под ненулевым углом. Отсюда получаем гладкость $\sigma_k \setminus \partial$. Отсюда же получаем и трансверсальность в D поверхности σ_g слоям $\Lambda \subset D$. Трансверсальность σ_k слоям $\Lambda \subset D$ в D вытекает из следствия 4.12.А. Аналогично, отдельно для двух частей D, расположенных вблизи точки ξ^0 и вдали от нее, показываем, что эти части получаются из σ_g и σ_k разнесением группой G_I. Остальные утверждения леммы 5.10.Д очевидны. Итак, лемма 5.10.Д доказана.

Замечание 5.10.Е. Семейство кластеров $\{\alpha_\xi, \xi \in Y^e(k_1)\}$, лежащее в основе построения полосок, однозначно определяется допустимым семейством геодезических $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$, но в выборе самого этого семейства геодезических имеется много произвола, в том числе и принципиального. Прежде всего, семейство может иметь вид $\mathcal{A}_{14}(k_1, k_4, \mu)$, то есть геодезические могут соединять точки конусов k_1 и k_4, а не k_1 и k_2. Но даже если фиксировать конусы k_1 и k_2 и координату μ на них, то произвол все равно останется. Дело в том, что геодезические α_ξ разных семейств $\mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$ могут отличаться в заданной плоской метрике на слое $\Lambda \supset \alpha_\xi$ на геодезические $n\beta$, кратные орбитам β группы G_I, $n \in \mathbf{Z}$. Имеется в виду, что ориентированные сегменты геодезических определяют векторы аффинной структуры, отвечающей плоской метрике, так что можно считать, что эти сегменты образуют коммутативную группу по сложению. Таким образом, при фиксированных k_1, k_2, μ имеется произвол, индексируемый дискретным параметром $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание 5.10.Ж. Из отрезков $\mathcal{I}_{Ha}^-$, $\mathcal{I}_{Mb}^|$ при $M < 0$ и $\mathcal{I}_{Ha}^+$ можно составить «левую скобочку», но никак не замкнутый контур Γ, обходящий $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$ и необходимый для протягивания циклов (см. §4.14). Такое протягивание можно делать на основе полосок, соответствующих этим отрезкам. Причина невозможности получить такой контур в том, что множество $\Upsilon_\infty \subset \mathbf{R}^2_{mh}$, имеющее в прямоугольной окрестности нуля вид флажка, не является полной проколотой окрестностью нуля (ср. замечание 3.6.Ж), и это множество нельзя расширить до такой окрестности. Левый отрезок $\mathcal{I}_{Mb}^|$, $M < 0$, есть, а вот такой же отрезок, лежащий в правой полуплоскости $m > 0$ и необходимый, чтобы замкнуть левую скобочку до контура, обходящего $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$, построить невозможно; в противном случае монодромия была бы тривиальной.

Выход состоит в следующем: вместе с полупространством $V_+ \subset \{p_2 = 0\}$ рассмотреть и аналогичное полупространство $V_+^2 = \{p_1 = 0, q_1 > 0\}$ пространства $\{p_1 = 0\}$. Дело в том, что при инволюции $(p_1, q_1, p_2, q_2) \mapsto (p_2, q_2, p_1, q_1)$ никаких принципиальных изменений в виде невозмущенных расслоений $(F_1^0)^{-1}(m)$, $(F_2^0)^{-1}(h)$, $(F^0)^{-1}(m, h)$ не происходит, а меняется лишь знак функции F_1^0 (см. (41) и конец §3.3). Следовательно, левые и правые стороны плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$ при переходе к гиперплоскости $\{p_1 = 0\}$ меняются местами, поэтому две левые скобочки, отвечающие гиперплоскостям $\{p_2 = 0\}$ и $\{p_1 = 0\}$ соответственно, позволяют, грубо говоря, получить обходящий нуль замкнутый контур Γ. Для этого в §7 по построенному выше семейству кластеров, отвечающих полупространству $V_+ \subset \{p_2 = 0\}$, будет построено аналогичное семейство кластеров, отвечающее полупространству $V_+^2 \subset \{p_1 = 0\}$. Второе семейство будет жестко связано с исходным и будет получено с помощью проектирования $\mathcal{P}\colon V_+ \to V_+^2$ параллельно орбитам β группы G_I. Эта жесткость, в частности, позволяет избежать разницы в произволе, о котором шла речь в замечании 5.10.Е. Проектирование $\mathcal{P}$ подобно рассмотренному выше отображению $\mathcal{P}_\pi$, но несколько более сложное.

В § 6 изучается принципиальный вопрос о свойствах проектирования $\mathcal{P}$ из полупространства одной гиперплоскости в полупространство другой, что является основой для построений § 7. Именно свойства $\mathcal{P}$, в сущности, определяют нетривиальность монодромии и вид ее оператора.

§ 6. Проектирующее отображение $\mathcal{P}\colon V_+^1 \to V_+^2$ и его свойства

§ 6.1. Построение проектирующего отображения $\mathcal{P}^0$ и геодезической длины $\mathcal{T}^0$ проектирующей дуги в невозмущенном случае

Роль данного параграфа в построении протягивания цикла, отвечающего второму базисному элементу группы гомологий $H_1(\Lambda^s)$ стартового слоя Λ^s, обсуждалась в пп. 5.10.E. В § 6 будет рассмотрено полупространство $V_+^2 := \{(p,q) \in \mathbf{R}^4 | p_1 = 0, q_1 > 0\}$, аналогичное полупространству $V_+ = V_+^1 = \{(p,q) \in \mathbf{R}^4 | p_2 = 0, q_2 > 0\}$ и полученное из него изменением нумерации координат p_1, q_1, p_2, q_2. В пересечении $\mathcal{V}$ полупространства V_+ с некоторой окрестностью $\mathcal{O}$ точки ξ^0, то есть нуля в $0 \in \mathbf{R}^4$, будет построено отображение $\mathcal{P}\colon \mathcal{V} \to V_+^2$ с помощью орбит β фазового потока G_I. Но вначале определим и выясним свойства «невозмущенного» отображения $\mathcal{P}^0$, заданного на V_+. Точнее, выбросим из V_+ и V_+^2 вертикальные полуоси $q_2 > 0$ и $q_1 > 0$ соответственно, а полученные дополнения обозначим N_1 и N_2:

$$N_1 := \{(p_1, q_1, q_2) \in \mathbf{R}^3 | q_2 > 0,\ p_1^2 + q_1^2 > 0\},$$
$$N_2 := \{(p_2, q_2, q_1) \in \mathbf{R}^3 | q_1 > 0,\ p_2^2 + q_2^2 > 0\}.$$

Отображение $\mathcal{P}^0$ будем рассматривать на N_1, и оно будет иметь вид $\mathcal{P}^0\colon N_1 \to N_2$. Наиболее корректное представление этого отображения имеет вид $\mathcal{P}^0\colon \widehat{N}_1 \to \widehat{N}_2$, где $\widehat{N}_1$ и $\widehat{N}_2$ — универсальные накрывающие множеств N_1 и N_2 соответственно. Изучим общий случай: взаимно простые натуральные числа (m_1, m_2), являющиеся основными параметрами отображения F, будут предполагаться произвольными.

Фиксируем произвольную точку $\xi_0 \in N_1$ и проведем через нее орбиту ν_0 фазового потока $G^0 = G_{F_1^0}$ системы с гамильтонианом F_1^0. Эта орбита пересечет N_2 по крайней мере в одной точке. Фиксируем любую точку ξ_0' этого пересечения и положим $\mathcal{P}^0(\xi_0) = \xi_0'$. Далее рассмотрим любой путь Δ на N_1, соединяющий точку ξ_0 с произвольной точкой $\xi \in N_1$. Обозначим через $\overline{\nu}_0$ дугу орбиты ν_0, соединяющую точки ξ_0 и ξ_0'. Точку $\mathcal{P}^0(\xi, \Delta)$ определим с помощью непрерывного продолжения дуги $\overline{\nu}_0$, которое соответствует пути Δ, а именно: пусть $\Delta(t)$, $t \in [0,1]$, — точка, двигающаяся по Δ от ξ_0 до ξ. Обозначим через $\nu(t)$ орбиту группы G^0, проходящую через точку $\Delta(t)$, и обозначим через $\{\overline{\nu}(t),\ t \in [0,1]\}$ семейство дуг $\overline{\nu}(t) \subset \nu(t)$, непрерывно зависящих от $t \in [0,1]$ и таких, что $\overline{\nu}(0) = \overline{\nu}_0$ и при каждом $t \in [0,1]$ дуга $\overline{\nu}(t)$ соединяет точку $\Delta(t)$ с точкой, лежащей на N_2; эту точку обозначим через $\xi'(t)$. Положим $\mathcal{P}^0(\xi, \Delta) = \xi'(1)$. Обозначим через Δ' путь на N_2, который совершает второй конец дуги $\overline{\nu}(t)$, $t \in [0,1]$. Рассмотрим также время $\mathcal{T}^0(\xi, \Delta)$, необходимое точке, двигающейся под действием потока G^0, чтобы преодолеть путь по дуге $\overline{\nu}(1)$ от точки ξ до $\xi' = \xi'(1) = \mathcal{P}^0(\xi, \Delta)$. Функция $\mathcal{T}^0$ непрерывно зависит от (ξ, Δ).

Лемма 6.1.A. *Определения отображения $\mathcal{P}^0\colon (\xi, \Delta) \mapsto \xi' \in N_2$ и функции $\mathcal{T}^0\colon (\xi, \Delta) \mapsto$ $\mapsto t \in \mathbf{R}$, а также пути $\Delta' \subset N_2$, корректны, то есть все приведенные построения реализуемые и однозначные, если не оговорено обратное. В частности, образ $\xi' \in N_2$ точки $\xi \in N_1$ при проектировании $\mathcal{P}^0$ однозначно определяется путем Δ, соединяющим точ-*

ки ξ_0 и ξ, и выбором точки ξ_0'. То же самое верно и для функции $\mathcal{T}^0$ при фиксированном значении $\mathcal{T}^0(\xi_0)$, а также для пути Δ'. Кроме того, отображения $\mathcal{P}^0$ и $\mathcal{T}^0$ являются гладкими, причем $\mathcal{P}^0$ локально является диффеоморфизмом.

Доказательство леммы 6.1.А. Из леммы 3.3.Б следует, что объединение орбит ν потока G^0, пересекающих N_1, совпадает с дополнением

$$\mathbf{R}^4_{pq} \setminus (\{p_1 = q_1 = 0\} \cup \{p_2 = q_2 = 0\}),$$

причем орбиты ν локально тривиально расслаивают это дополнение. То же самое верно и для N_2. Кроме того, легко видеть, что орбиты ν трансверсально пересекают как N_1, так и N_2 (см. лемму 3.3.В и (41)). Из этих фактов вытекают все утверждения леммы 6.1.А.

Определение 6.1.Б. Как правило, многозначное отображение $\mathcal{P}^0\colon N_1 \to N_2$ назовем *проектированием, параллельным орбитам группы* G^0 или, короче, G^0*-проектированием.* Величину $\mathcal{T}^0(\xi, \Delta)$ назовем *геодезической длиной проектирующей дуги*, отвечающей концу ξ пути Δ, то есть дуги $\overline{\nu}(1)$ в использованных выше обозначениях.

§ 6.2. Свойства проектирующего отображения $\mathcal{P}^0$ и геодезической длины $\mathcal{T}^0$: невозмущенный случай

Отображение $\mathcal{P}^0$ и функцию $\mathcal{T}^0$ удобно изучать в цилиндрических координатах, которые мы зададим на N_1 и на N_2. Рассмотрим на $N_1 \subset \mathbf{R}^3_{p_1q_1q_2}$ координаты (r, ϕ, z), где

$$p_1 = r\sin\phi, \quad q_1 = r\cos\phi, \quad q_2 = z, \tag{109}$$

и на $N_2 \subset \mathbf{R}^3_{p_2q_2q_1}$ координаты (R, Φ, Z), где

$$p_2 = R\sin\Phi, \quad q_2 = R\cos\Phi, \quad q_1 = Z. \tag{110}$$

Будем использовать крышечку сверху для обозначения поднятия $\widehat{\xi}$ данной точки $\xi \in N_j$ на универсальную накрывающую $\widehat{N}_j$ множества N_j, $j = 1, 2$. Аналогично будем обозначать через $\widehat{\phi}$ координату на $\widehat{N}_1$, соответствующую координате ϕ набора цилиндрических координат на N_1. Заметим, что на $\widehat{N}_1$ координаты $(r, \widehat{\phi}, z)$ являются «настоящими», в то время как для (r, ϕ, z) на самом N_1 это не так. Дело в том, что на N_1 «координата» ϕ является «угловой», то есть $\phi = \phi \bmod 2\pi$, $\phi\colon N_1 \to S^1$, где S^1 — окружность. На $\widehat{N}_1$ имеем $\widehat{\phi}\colon \widehat{N}_1 \to \mathbf{R} = \widehat{S}^1$. Аналогично введем координату $\widehat{\Phi}$ на $\widehat{N}_2$, тогда все то же самое верно для N_2 и $\widehat{N}_2$. Обозначим через (r_0, ϕ_0, z_0) цилиндрические координаты точки $\xi_0 \in N_1$, а через (r, ϕ, z) — координаты произвольной точки $\xi \in N_1$. Обозначим через (R_0, Φ_0, Z_0) и (R, Φ, Z) координаты точек $\xi_0' = \mathcal{P}^0(\xi_0)$ и $\xi' = \mathcal{P}^0(\xi, \Delta)$ соответственно. Значение $\widehat{\phi}_0$ и $\widehat{\Phi}_0$ определяются с точностью до чисел, кратных 2π, а значения $\widehat{\phi}$ и $\widehat{\Phi}$ после фиксирования $\widehat{\phi}_0$ и $\widehat{\Phi}_0$ однозначно определяются путем Δ.

Лемма 6.2.А. *Рассмотрим все точки пересечения $\nu_0 \cap N_2$, где $\nu_0 \ni \xi_0$ — орбита потока G^0. Рассмотрим все возможные поднятия этих точек на $\widehat{N}_2$. Тогда координаты всех этих поднятий имеют вид*

$$R_0 = z_0,\, \widehat{\Phi}_0 = \frac{m_2}{m_1}\left(\widehat{\phi}_0 + 2\pi k\right), \quad Z_0 = r_0, \quad \text{где} \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{111}$$

Таким образом, число точек пересечения $\nu_0 \cap N_2$ в точности равно m_1. Любую из них можно взять за ξ_0'. Фиксируем любую точку ξ_0' и, более того, фиксируем ее координату $\widehat{\Phi}_0$. Тогда

$$R = z,\ \widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}_0 + \frac{m_2}{m_1}\left(\widehat{\phi} - \widehat{\phi}_0\right), \quad Z = r. \tag{112}$$

В частности, если точка, двигающаяся по пути Δ от ξ_0 до ξ, повернется на угол $\widehat{\phi} - \widehat{\phi}_0$, то точка, двигающаяся по пути $\Delta' = \mathcal{P}^0(\Delta) \subset N_2$ от $\mathcal{P}^0(\xi_0)$ до $\mathcal{P}^0(\xi)$, повернется на угол $\frac{m_2}{m_1}\left(\widehat{\phi} - \widehat{\phi}_0\right)$. При движении по пути Δ геодезическая длина $\mathcal{T}^0$ меняется от $\mathcal{T}^0(\xi_0) = \frac{\widehat{\phi}_0}{m_1} + \frac{2\pi}{m_1}k$ до $\mathcal{T}^0(\xi, \Delta) = \frac{\widehat{\phi}}{m_1} + \frac{2\pi}{m_1}k$, где $k \in \mathbf{Z}$ — то самое k, которое определяло выбор точки $\widehat{\xi}_0'$.

Доказательство леммы 6.2.А. Пусть (p, q) — декартовы координаты точки $\xi \in N_1 \subset \mathbf{R}^4$. Тогда

$$p_1 = r\sin\phi, \quad q_1 = r\cos\phi, \quad p_2 = 0, \quad q_2 = z.$$

Под действием фазового потока G^0 за время t эта точка переместится в положение $(p(t), q(t))$, где

$$p_1 = r\sin(\phi - m_1 t), \quad q_1 = r\cos(\phi - m_1 t), \quad p_2 = z\sin m_2 t, \quad q_2 = z\cos m_2 t \tag{113}$$

(см. лемму 3.3.A). Положив $p_1 = 0$, $q_1 > 0$, получаем $t = \frac{\phi}{m_1} + \frac{2\pi}{m_1}k$, $k \in \mathbf{Z}$. Подставив такое t в (113), получим координаты всех точек пересечения $\nu_\xi^0 \cap N_2$, где $\nu_\xi^0 \ni \xi$; число этих точек будет равно m_1. В частности, при $\xi = \xi_0$ получаем декартовы координаты всех m_1 точек, которые можно взять за $\xi_0' = \mathcal{P}^0(\xi_0)$. Переходя на N_1 и N_2 к цилиндрическим координатам и переходя к отвечающим им координатам на $\widehat{N}_1$ и $\widehat{N}_2$, получаем вид (111) и (112) в этих координатах точек $\widehat{\xi}_0'$ и $\widehat{\xi}'$ соответственно. В частности,

$$\widehat{\Phi} = \frac{m_2}{m_1}\widehat{\phi} + 2\pi\frac{m_2}{m_1}k = \frac{m_2}{m_1}\widehat{\phi}_0 + 2\pi\frac{m_2}{m_1}k + \frac{m_2}{m_1}\left(\widehat{\phi} - \widehat{\phi}_0\right) = \widehat{\Phi}_0 + \frac{m_2}{m_1}\left(\widehat{\phi} - \widehat{\phi}_0\right).$$

Лемма 6.2.А доказана. Очевидны следующие утверждения.

Следствие 6.2.Б. i) *Фиксируем точки ξ_0, ξ и ξ_0'. Тогда значение $\mathcal{P}^0(\xi, \Delta)$ зависит только от гомотопического типа в N_1 пути $\Delta \subset N_1$, соединяющего ξ_0 с ξ_1. Таким образом, если имеется два таких пути Δ_1 и Δ_2, и их разность $\Delta_2 - \Delta_1$ стягивается по N_1 в точку, то есть делает нуль оборотов в N_1 вокруг вертикальной оси q_2 в $\mathbf{R}^3$, она же ось z, то $\mathcal{P}^0(\xi, \Delta_2) = \mathcal{P}^0(\xi, \Delta_1)$.*

ii) *При отображении $\mathcal{P}^0\colon N_1 \to N_2$ цилиндр $\{r = a\} \subset N_1$ переходит в горизонтальную плоскость $\{Z = a\} \subset N_2$, горизонтальная плоскость $\{z = b\}$ — в цилиндр $\{R = b\}$, горизонтальная окружность $\{r = a,\ z = b\}$ — в горизонтальную окружность $\{R = b,\ Z = a\}$, где $a > 0$ и $b > 0$ — произвольные числа. Кроме того, конус $\{z = Lr\} \subset N_1$, $L > 0$, переходит в конус $\{LZ = R\}$, в частности, конус $\{r = z\}$ как бы инвариантен относительно преобразования $\mathcal{P}^0$. Здесь имеются в виду не сами плоскости, конусы, и так далее, а их пересечения либо с N_1, либо с N_2. А под образом $\mathcal{P}^0(\xi)$ точки ξ понимается объединение всех образов $\mathcal{P}^0(\xi, \Delta)$ для всевозможных путей Δ, соединяющих точки ξ_0 и ξ_1.*

iii) *Пусть $\xi = \xi_0$ и, следовательно, путь $\Delta \subset N_1$ замкнут. Тогда образ $\Delta' = \mathcal{P}^0(\Delta) \subset N_2$ будет замкнут, то есть $\mathcal{P}^0(\xi, \Delta) = \mathcal{P}^0(\xi_0)$, в том и только в том случае, когда число оборотов вокруг вертикальной оси q_2 при движении по пути Δ будет кратно m_1, то есть* *равно* $m_1 l$, *где* $l \in \mathbf{Z}$. *Для такого пути* Δ *изменение геодезической длины проектирующей дуги* $\overline{\nu}$ *будет равно* $2\pi l$: $\mathcal{T}^0(\xi, \Delta) - \mathcal{T}^0(\xi_0) = 2\pi l$.

iv) *Рассмотрим пересечение* $V_+ \cap V_+^2 = \{p_1 = p_2 = 0,\ q_1 > 0,\ q_2 > 0\}$. *Возьмем точку* ξ_0 *на этом квадранте и возьмем* ξ_0' *равной* ξ_0: $\xi_0' = \mathcal{P}^0(\xi_0) = \xi_0$. *Тогда формулы* (112) *несколько упростятся и примут вид*

$$R = z, \qquad \widehat{\Phi} = \frac{m_2}{m_1}\,\widehat{\phi}, \qquad Z = r.$$

§6.3. Построение проектирующего отображения $\mathcal{P}$ и геодезической длины $\mathcal{T}$: возмущенный случай

Нас, собственно говоря, интересует возмущенное отображение проектирования, построения и свойства которого не сильно отличаются от построения и свойств изученного выше отображения $\mathcal{P}^0$, определенного с помощью орбит ν линеаризации $G^0 = G_{F_1^0}$ фазового потока G_{F_1} системы с гамильтонианом F_1. Наиболее существенные отличия от невозмущенного случая состоят в следующем. Вместо линейного пространства $\mathbf{R}^4_{pq}$ рассматривается достаточно малая окрестность существенно особой точки ξ^0, в которой, в частности, определены заданные по условиям теорем 2.4 и 2.5 локальные канонические координаты (p, q). Проектирование осуществляется вдоль орбит β 2π-периодического фазового потока $G = G_I$ системы с гамильтонианом I. И наконец, проектирующее отображение $\mathcal{P}$ определяется не на множестве N_1, имеющем вид полупространства V_+, проколотого вертикальной осью z, а на множестве $\mathcal{N}_1$, определенном следующим образом. Рассмотрим в V_+ «кольцеобразный конус» $\kappa_{\alpha r} = k_{\alpha r} \setminus \overline{k}_{\gamma r}$, где $\alpha > 1$, $\gamma = 1/\alpha$, а конус $k_{\alpha r}$ определяется формулой (42) (ср. начало §3.10). Рассмотрим объединение

$$\mathcal{K}_{\alpha r} := \cup_{\xi \in \kappa_{\alpha r}} \beta_\xi \tag{114}$$

орбит $\beta_\xi \ni \xi$ группы G_I, пересекающих $\kappa_{\alpha r}$. Положим $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_{1\alpha r} := V_+ \cap \mathcal{K}_{\alpha r}$. Аналогично определим $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_{2\alpha r} := V_+^2 \cap \mathcal{K}_{\alpha r}$.

Для построения $\mathcal{P}$ фиксируем любую точку $\xi_0 \in \mathcal{N}_1$ и проведем через нее орбиту $\beta_0 \ni \xi_0$ группы G_I. Эта орбита обязательно пересечет $\mathcal{N}_2$ и, возможно, в нескольких точках. Фиксируем одну из них, которую обозначим через ξ_0', и обозначим дугу орбиты β_0, соединяющую точки ξ_0 и ξ_0', через $\overline{\beta}_0$. Пусть $\Delta \subset \mathcal{N}_1$ — любой путь в $\mathcal{N}_1$, соединяющий точку ξ_0 с любой точкой из $\mathcal{N}_1$. Рассмотрим непрерывную гомотопию $\overline{\beta}(t)$, $t \in [0, 1]$, дуги $\overline{\beta}_0$, при которой один ее конец скользит по пути Δ от ξ_0 до ξ_1, а другой конец движется по $\mathcal{N}_2 \subset V_+^2$. В конечный момент $t = 1$ такой гомотопии получим дугу $\overline{\beta}$ орбиты β группы G_I. Эта дуга соединяет точку ξ с некоторой точкой $\xi' \in \mathcal{N}_2$, и точку ξ' возьмем за $\mathcal{P}(\xi, \Delta)$. Обозначим также через Δ' путь на $\mathcal{N}_2$, который совершит второй конец дуги $\overline{\beta}(t)$, $t \in [0, 1]$. Обозначим через $\mathcal{T}(\xi, \Delta)$ время, которое понадобится точке, двигающейся под действием потока G_I, чтобы пройти путь по дуге $\overline{\beta}$ от ξ до ξ'. Для рассматриваемых в доказательстве теорем 2.4 и 2.5 малых значений (m_1, m_2), то есть для $(m_1, m_2) = (1, 1)$, $(1, 2)$ или $(2, 1)$, верны следующие аналоги приведенных выше утверждений для невозмущенного случая.

Лемма 6.3.A. *Для любого* $\alpha > 1$ *найдутся константы* $r_0 > 0$ *и* $c > 0$, *такие, что при любом* $r \in (0, r_0)$ *будут верны следующие утверждения.*

i) *Определения отображения* $\mathcal{P}\colon (\xi, \Delta) \mapsto \xi' \in \mathcal{N}_2$, *функции* $\mathcal{T}\colon (\xi, \Delta) \mapsto t \in \mathbf{R}$ *и пути* Δ' *корректны, то есть построения* $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ *и* Δ' *реализуемые и однозначные, если иное не оговорено специально. Отображение* $\mathcal{P}$ *локально задает гладкий диффеоморфизм, а* $\mathcal{T}$ *является гладкой функцией.*

ii) *Множество* $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_{1\alpha r}$ *лежит «между» двумя близкими друг к другу «кольцеобразными конусами». То же самое верно и для* $\mathcal{N}_2$. *Более точно,*

$$\kappa_{\beta\gamma} \subset \mathcal{N}_{1\alpha r} \subset \kappa_{\delta d}, \quad \textit{где} \quad \beta = \alpha(1-cr), \quad \gamma = r(1-cr), \quad \delta = \alpha(1+cr), \quad d = r(1+cr). \tag{115}$$

Аналогично обозначим

$$\begin{gathered} k^2_{\alpha r} := \{(p_2, q_2, q_1) \in \mathbf{R}^3 | m_2(p_2^2 + q_2^2) < \alpha^2 m_1 q_1^2,\ q_1 > 0,\ p_2^2 + q_2^2 + q_1^2 < r^2\} \\ \textit{и} \quad \kappa^2_{\alpha r} = k^2_{\alpha r} \setminus k^2_{1/\alpha, r} \end{gathered} \tag{116}$$

(ср. определение $\kappa_{\alpha r}$ в начале § 3.10). *Тогда* $\kappa^2_{\beta\gamma} \subset \mathcal{N}_{2\alpha r} \subset \kappa^2_{\delta d}$, *где* β, γ, δ *и* d *те же, что и выше.*

Доказательство леммы 6.3.А. Утверждение 6.3.А.ii легко вытекает из вида орбит ν невозмущенного потока G^0 (см. лемму 3.3.А) и из малости отличия от ν орбит β потока G_I (см. следствие 4.12.А), а также из следствия 4.12.Б. Утверждение 6.3.А.i несложно доказывается из тех же соображений, что и его невозмущенный аналог — лемма 6.1.А; используем следующие факты. Множество $\mathcal{K}_{\alpha r}$ (см. (114)) локально тривиально расслаивается орбитами β группы G_I, объединением которых оно является (см. следствие 4.12.Г и вид Σ в лемме 3.7.Б). Орбиты β трансверсально пересекают область $\mathcal{N}_1 \subset V_+$ (см. следствие 4.12.А). Используя эти утверждения и инволюцию (41), нетрудно показать трансверсальность и для $\mathcal{N}_2 \subset V_+^2$. Из этих фактов получаем 6.3.А.i. Лемма 6.3.А полностью доказана.

Определение 6.3.Б. Многозначное, вообще говоря, отображение $\mathcal{P}\colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ назовем *проектированием, параллельным орбитам* β *потока* G_I или, короче, G_I*-проектированием.* Величину $\mathcal{T}(\xi, \Delta)$ назовем *геодезической длиной проектирующей дуги* $\overline{\beta} = \overline{\beta}(\xi, \Delta)$, соединяющей точки ξ и $\mathcal{P}(\xi, \Delta)$.

§ 6.4. Свойства возмущений проектирующего отображения $\mathcal{P}$ и геодезической длины $\mathcal{T}$

Рассмотрим на $\mathcal{N}_1 \subset N_1$ и $\mathcal{N}_2 \subset N_2$ те же самые цилиндрические координаты (ρ, ϕ, z) и (R, Φ, Z) соответственно (см. (109) и (110)), только r заменим на ρ. Как и в невозмущенном случае, обозначим через (ρ_0, ϕ_0, z_0), (ρ, ϕ, z), (R_0, Φ_0, Z_0) и (R, Φ, Z) координаты точек ξ_0, ξ, $\xi_0' = \mathcal{P}(\xi_0)$ и $\xi' = \mathcal{P}(\xi, \Delta)$. Обозначим $\widehat{\xi} \in \widehat{\mathcal{N}}_j$ поднятие точки $\xi \in \mathcal{N}_j$ на универсальную накрывающую $\widehat{\mathcal{N}}_j$ множества $\mathcal{N}_j$, $j = 1, 2$. На $\widehat{\mathcal{N}}_1$ введем координаты $(\rho, \widehat{\phi}, z)$, такие, что точка с координатами $(\rho, \widehat{\phi}, z)$ является поднятием на $\widehat{\mathcal{N}}_1$ точки (ρ, ϕ, z). Подобные координаты $(R, \widehat{\Phi}, Z)$ введем и на $\widehat{\mathcal{N}}_2$. Таким образом, все обозначения, кроме координаты ρ, в точности соответствуют невозмущенному случаю. Как и выше, $\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_{j\alpha r}$, $j = 1, 2$.

Лемма 6.4.А. *Для любого* $\alpha > 1$ *найдутся константы* $r_0 > 0$ *и* $c > 0$, *такие, что для любого* $r \in (0, r_0)$ *будут верны следующие утверждения.*

i) *При любом выборе точки* $\xi_0' \in \mathcal{N}_2$ *и любых допустимых* ξ *и* Δ

$$R = z + \chi_R, \ \widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}_0 + \frac{m_2}{m_1}\left(\widehat{\phi} - \widehat{\phi}_0\right) + \chi_\Phi, \quad Z = \rho + \chi_Z. \tag{117}$$

Здесь χ_R, χ_Φ, χ_Z — *функции от* ρ, $\widehat{\phi}$, z, 2π*-периодические по* $\widehat{\phi}$, *причем* χ_R *и* χ_Z *малы по сравнению с расстоянием от точки* ξ *и от точки* $\mathcal{P}(\xi, \Delta)$ *до* $0 \in \mathbf{R}^4_{pq}$, *а* χ_Φ *того же* *порядка, что и эти расстояния. Точнее,* $\chi_R^2 + \chi_\Phi^4 + \chi_Z^2 \leqslant c(\rho^2 + z^2)^2$. *Кроме того, при движении по пути* Δ *геодезическая длина* $\mathcal{T}$ *проектирующей дуги* $\overline{\beta}$ *меняется от*

$$\mathcal{T}(\xi_0) = \frac{\widehat{\phi}_0}{m_1} + \frac{2\pi}{m_1}\,k + \chi_0 \quad \text{до} \quad \mathcal{T}(\xi,\Delta) = \frac{\widehat{\phi}}{m_1} + \frac{2\pi}{m_1}\,k + \chi_1.$$

Здесь $k \in \mathbf{Z}$ *определяется выбором точки* $\widehat{\xi}_0' \in \widehat{\mathcal{N}}_2$ *и с точностью до чисел, кратных* m_1, *выбором точки* $\xi_0' \in \mathcal{N}_1$, *а* $|\chi_j(\rho, \widehat{\phi}, z)| \leqslant c\sqrt{\rho^2 + z^2}$, $j = 0, 1$.

ii) *Фиксируем произвольные лежащие на* $\mathcal{N}_1$ *точки* ξ_0 *и* ξ. *Тогда при всевозможных выборах пути* $\Delta \subset \mathcal{N}_1$, *соединяющего точки* ξ_0 *и* ξ_1, *и всех возможных выборах точки* ξ_0' *образ* $\mathcal{P}(\xi,\Delta)$ *принимает ровно* m_1 *значений* (R_i, Φ_i, Z_i), $i = 1, \ldots, m_1$. *Отличия между координатами этих значений удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$|R_j - R_i| \leqslant U, \quad \left|\Phi_j - \Phi_i - 2\pi\frac{m_2}{m_1}\,(j-i)\right| \leqslant U,$$
$$|Z_j - Z_i| \leqslant U, \quad \text{где} \quad U = c\sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Доказательство леммы 6.4.А. Утверждение 6.4.А.i получаем из его невозмущенного аналога — леммы 6.2.А, а также из леммы 6.3.А и из малости отличия орбит ν и β потоков G^0 и G_I соответственно (см. следствие 4.12.А). Используем также малость отличия генерирующих эти потоки векторных полей (см. оценку (80) предложения 4.1). Опираясь на эти факты, нетрудно получить и утверждение 6.4.А.ii. Лемма 6.4.А доказана.

Очевидны следующие факты.

Следствие 6.4.Б. *В условиях леммы 6.4.А верны следующие утверждения.*

i) *Фиксируем точки* ξ_0, ξ_0', ξ, *тогда значение* $\mathcal{P}(\xi,\Delta)$ *определяется только гомотопическим типом пути* Δ. *Иными словами,* $\mathcal{P}(\xi,\Delta)$ *зависит только от целой части числа* $(\widehat{\phi} - \widehat{\phi}_0)/2\pi$ *оборотов вокруг оси* z, *которые совершает точка, движущаяся вдоль пути* Δ (*дробная часть этого числа постоянна*).

ii) *Рассмотрим пересечения с* $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_{1\alpha r}$ *цилиндра* $\{r = a\}$, *горизонтальной плоскости* $\{z = b\}$, *горизонтальной окружности* $\{r = a,\, z = b\}$ *и конуса* $\{z = Lr\}$, *где* $a > 0$, $b > 0$, $L > 0$. *Тогда при отображении* $\mathcal{P}\colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ *эти множества переходят во множества, которые находятся на малом расстоянии от пересечений с* $\mathcal{N}_2$ *горизонтальной плоскости* $\{Z = a\}$, *цилиндра* $\{R = b\}$, *горизонтальной окружности* $\{R = b,\, Z = a\}$ *и конуса* $\{LZ = R\}$ *соответственно. Под малостью расстояния между двумя множествами здесь понимается, что в метрике* C^0 *расстояние от любой точки* (R, Φ, Z) *каждого из множеств до другого множества оценивается сверху величиной* $c(R^2 + Z^2)$ (ср. определение 1.5.Б). *Здесь, как и в невозмущенном случае, под* $\mathcal{P}(\xi)$ *понимается объединение образов* $\mathcal{P}(\xi,\Delta)$ *для всех возможных путей* Δ, *соединяющих точки* ξ_0 *и* ξ.

iii) *Пусть* $\xi = \xi_0$ *или, что эквивалентно, путь* Δ *замкнут. Тогда образ* $\Delta' = \mathcal{P}(\Delta)$ *пути* Δ *при отображении* $\mathcal{P}$ *при любом выборе точки* ξ_0' *будет замкнут тогда и только тогда, когда число оборотов* s *вокруг оси* q_2 *при движении по пути* $\Delta \subset \mathcal{N}_1$ *будет кратно* m_1:

$$\xi = \xi_0, \quad s(\Delta) = m_1 l, \quad \text{где} \quad l \in \mathbf{Z} \Longleftrightarrow \mathcal{P}(\xi,\Delta) = \xi_0' = \mathcal{P}(\xi_0).$$

В случае $s(\Delta) = m_1 l$, $l \in \mathbf{Z}$, *изменение геодезической длины проектирующей дуги* $\widetilde{\beta}$ *будет равно* $2\pi l$: $\mathcal{T}(\xi,\Delta) - \mathcal{T}(\xi_0) = 2\pi l$. *В частности, если путь* Δ *стягивается по* $\mathcal{N}_1$ *в точку, то путь* Δ' *тоже будет замкнут и будет стягиваем по* $\mathcal{N}_2$ *в точку.*

iv) *Рассмотрим пересечение* $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 \cap K = \mathcal{N}_2 \cap K$, *где* $K = \{(p,q) \in \mathbf{R}^4 | p_1 = p_2 = 0,\ q_1 > 0,\ q_2 > 0\}$. *Возьмем любую точку* $\xi_0 \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ *и возьмем* $\xi_0' = \xi_0$. *Тогда формулы* (117) *для координат точки* $\mathcal{P}(\xi, \Delta)$ *несколько упростятся:* $\widehat{\Phi}_0$ *и* $\widehat{\phi}_0$ *в них будут равны нулю.*

§7. Построение семейств кластеров, отвечающих гиперплоскостям $\{p_2 = 0\}$ и $\{p_1 = 0\}$ и согласованных друг с другом

В §5 было построено допустимое расширенное семейство $L = L^1 = \{\lambda_\xi,\ \xi \in Y^e(k_1)\}$ кластеров λ_ξ, частично лежащих на полупространстве $V_+ = V_+^1 = \{(p,q) \in \mathbf{R}^4 | p_2 = 0,\ q_2 > 0\}$. Были построены полоски σ, состоящие из кластеров этого семейства и лежащие на трехмерных поверхностях $F_1^{-1}(M)$ и $F_2^{-1}(H)$. Совершенно аналогичное семейство $L^2 = \{\lambda_\eta,\ \eta \in Y^e(k_1^2)\}$ кластеров, частично лежащих на альтернативном полупространстве $V_+^2 = \{(p,q) \in \mathbf{R}^4 | p_1 = 0,\ q_1 > 0\}$, где $Y^e(k_1^j) \subset k_1^j \subset V_+^j$, $j = 1, 2$, $k_1^1 = k_1$, можно построить абсолютно аналогичным образом. Задачей данного §7 является построение пары (L, L^2) таких семейств, которые были бы согласованы друг с другом. Имеется в виду согласованность невырожденных кластеров, лежащих на особой полоске, а значит, на нулевой поверхности уровня $F_1^{-1}(0)$ функции F_1; далее любой кластер, лежащий на особой полоске, будем называть 0-*кластером.* Под согласованностью кластеров понимается, что если они лежат на одном слое-торе Λ расслоения F, то данные кластеры гомотопны друг другу на Λ. Согласовать в этом смысле можно либо все нижние 0-кластеры, либо лишь все верхние 0-кластеры, и именно такая согласованность рассматривается по определению. Если бы можно было одновременно согласовать все невырожденные кластеры особой полоски, то монодромия была бы тривиальной (ср. замечание 5.10.Ж). В сформулированном ниже предложении 7.1.Б утверждается, что если дано любое допустимое семейство L кластеров, частично лежащих на V_+, то по нему строится согласованное с L в этом смысле допустимое семейство L^2 кластеров, частично лежащих на V_+^2. Это построение делается с помощью исследованного в §6 проектирующего отображения $\mathcal{P}$.

Второе основное утверждение §7 — предложение 7.3 — является как бы продолжением предложения 7.1.Б. В нем кластеры и составляющие их циклы определенным образом ориентируются. Рассматривается ориентация кластеров, согласованная на всей особой полоске. Предполагается, что даны семейства L и L^2, неориентированные кластеры нижних особых полуполосок которых согласованы в смысле предложения 7.1.Б. Утверждается, что ориентации кластеров на особых полосках, отвечающих этим семействам, можно задать так, что будут выполнены следующие условия. Во-первых, имеющаяся гомотопия по слоям Λ нижних неориентированных кластеров продолжается до гомотопии ориентированных кластеров. Во-вторых, верхние ориентированные 0-кластеры тоже будут гомотопными на слоях Λ, но по модулю цикла, соответствующего орбите β группы G_I. (Такое отличие между нижними и верхними кластерами и является причиной нетривиальной монодромии.) Это, совсем грубо, основные утверждения предложений 7.1.Б и 7.3. Строгие формулировки приведены в начале §7, а вся остальная часть §7 посвящена доказательству этих двух предложений.

§7.1. Построение семейства $L^2 = L^2(V_+^2)$, согласованного с данным семейством $L = L(V_+)$ по нижним 0-кластерам

Пусть даны два допустимых расширенных семейства L и L^2 (см. определение 5.10.Г), пересечения кластеров первого из которых с окрестностью точки ξ^0 лежат на V_+, а второго — на V_+^2. На определяющих эти семейства конусах k_1 и k_1^2 заданы допустимые координаты (F_1, F_2, μ) (см. определение 5.5). Будем предполагать, что выполнено следующее условие.

0) Отображение $k_1 \to k_1^2$, задаваемое в координатах (F_1, F_2, μ) тождественным преобразованием, определяет диффеоморфизм конусов k_1 и k_1^2.

Определение 7.1.А. Семейства L и L^2 будем называть *согласованными по нижним 0-кластерам,* если помимо вышеназванного условия выполнено хотя бы одно из следующих пяти условий.

i) $m_1 = m_2 = 1$ и для любых двух точек $\xi \in Y^e(k_1)$ и $\eta \in Y^e(k_1^2)$, лежащих на одном слое $\Lambda = \Lambda_{mh}$ при $m = 0$ и $h < 0$, кластеры $\lambda_\xi \in L$ и $\lambda_\eta \in L^2$ гомотопны на торе Λ. Напомним, что эти кластеры имеют вид составных колец (см. определения 5.9.В и 5.10.Б, а также предложение 5.10.В).

ii) $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и нижние 0-кластеры λ_ξ семейства L, то есть кластеры вида

$$\lambda_\xi \subset \Lambda_{mh}, \quad m = 0, \quad h < 0, \tag{118}$$

являются внутренними, иными словами, каждый из них будет объединением $\lambda_\xi = e_\xi \cup \overline{e}_\xi$ двух составных циклов e_ξ и $\overline{e}_\xi$, сопряженных друг другу (см. определения §5.8). Предполагается, что для любого такого кластера циклы e_ξ и $\overline{e}_\xi$ гомотопны на $\Lambda = \Lambda_{0h}$ друг другу и каждому кластеру $e_\eta = \lambda_\eta \in L^2$, лежащему на этом торе-слое Λ: $e_\xi \sim \overline{e}_\xi \sim e_\eta$.

iii) $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и нижние 0-кластеры (118) семейства L являются внешними, и, в частности, эти кластеры λ_ξ являются составными циклами. Предполагается, что каждый такой цикл $e_\xi = \lambda_\xi$ гомотопен на Λ двукратному циклу-кластеру $e_\eta = \lambda_\eta$ семейства L^2, лежащему на том же торе-слое Λ, что и кластер $\lambda_\xi \in L$.

iv) $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ и нижние 0-кластеры λ_η семейства L^2: $\lambda_\eta \subset \Lambda_{mh}$, $m = 0$, $h < 0$, являются внутренними, то есть $\lambda_\eta = e_\eta \cup \overline{e}_\eta$. Предполагается, что любой нижний 0-кластер $\lambda_\xi \in L$ гомотопен на $\Lambda \supset \lambda_\xi$ каждому из двух циклов e_η и $\overline{e}_\eta$, лежащих на том же слое-торе Λ. Этот случай получается из 7.1.А.ii инволюцией (41).

v) $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ и получается из случая 7.1.А.iii инволюцией (41) так же, как 7.1.А.iv получается из 7.1.А.ii; таким образом, $2e_\xi \sim e_\eta$, $e_\xi = \lambda_\xi$, $e_\eta = \lambda_\eta$.

Аналогично определяется *согласованность семейств* L и L^2 *по верхним* 0-*кластерам.*

Предложение 7.1.Б. *Пусть L — любое допустимое расширенное семейство кластеров, частично лежащих на полупространстве V_+, и если $m_2 = 2$, то предположим, что нижняя особая полуполоска $\sigma^{|-}$ является внутренней* (см. определение 5.10.Г). *Тогда можно построить допустимое расширенное семейство L^2 кластеров, частично лежащих на V_+^2, согласованное по нижней особой полуполоске либо с самим семейством L, либо с зауженным семейством, то есть с допустимым расширенным семейством, полученным из L уменьшением конуса k_1. При этом в случае $m_1 = 2$ семейство L^2 можно построить таким, что его кластеры, расслаивающие нижнюю особую полуполоску, будут внутренними.*

Аналогично можно построить семейство L^2, согласованное с исходным семейством L по верхней полуполоске. В случае $m_2 = 2$ эта полуполоска должна быть внутренней для L, а в случае $m_1 = 2$ семейство L^2 при описанном в доказательстве предложения способе его построения получается с внутренней верхней особой полуполоской.

Разумеется, свойство полуполосок быть внутренними можно в приведенных формулировках поменять на свойство быть внешними, но далее нам это не понадобится, поэтому формулировать и доказывать «внешний» вариант предложения 7.1.Б мы не будем.

§ 7.2. Наличие локальной согласованности ориентации расслаивающих кластеров

Далее кривые на слоях Λ_{mh} в основном будем рассматривать с ориентацией. Введем общее понятие локально согласованной ориентации слоев произвольного регулярного 1-мерного слоения любого многообразия M. Пусть все кривые этого слоения ориентированы локально согласованным образом, то есть после выпрямления этих кривых в окрестности любой точки $\xi \in M$ «стрелочки», отвечающие ориентации, направлены в одну сторону на параллельных друг другу выпрямленных кривых.

Определение 7.2.А. В этом случае данную ориентацию слоев слоения назовем *локально согласованной.*

Например, если на многообразии задано векторное поле X без особых точек, $X(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in M$, то траектории этого поля имеют локально согласованную ориентацию, задаваемую этим полем. Ясно, что и наоборот, если имеется локально согласованная ориентация, то слои слоения можно получить как траектории гладкого неособого векторного поля. Определение локально согласованной ориентации очевидным образом обобщается на одномерные слоения кусочно-гладких непрерывных многообразий M в предположении, что локальное выпрямление слоев возможно в любой точке $\xi \in M$, в том числе и в точках негладкости M. При этом в каждой точке допускается выпрямление, задаваемое гомеоморфизмом, не являющимся локальным диффеоморфизмом только на поверхностях негладкости многообразия M. Это обобщение позволяет рассмотреть локально согласованную ориентацию «проколотых» кластеров $\lambda_{mh} \setminus \Sigma$, расслаивающих «проколотые» полоски $\sigma \setminus \Sigma$ и, более того, расслаивающих трехмерные области вида $\mathcal{D} \setminus \Sigma$, где

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_\mu := \left(\cup_{\xi \in S_{\mu 1} \cap Y^e(k_1)} \lambda_\xi\right) \setminus \Sigma,$$

λ_ξ — кластеры, частично лежащие на V_+, $S_{\mu 1}$ — поверхность уровня координатной функции μ, заданной на конусе k_1, а Σ — множество критических точек отображения F. То же самое относится и к аналогичным σ и $\mathcal{D}$ полоскам и областям соответственно, отвечающим полуплоскости V_+^2.

Локально согласованная ориентация кластеров задается вблизи существенно особой точки ξ^0 с помощью приведенной гамильтоновой системы, а затем продолжается на «геодезическую часть» α кластера λ. Приведение осуществляется с помощью факторизации периодическим фазовым потоком G_I системы с гамильтонианом I. Более точно, пусть $L = \{\lambda_\xi,\, \xi \in Y^e(k_1)\}$ — любое допустимое расширенное семейство кластеров, частично лежащих на V_+. Фиксируем любой кластер λ_ξ этого семейства и следующим образом зададим на $\lambda_\xi \setminus \Sigma$ ориентацию, где Σ — множество критических точек отображения F. Кластер λ_ξ содержит по крайней мере один крюк. Фиксируем любой из них и обозначим его через $\mathcal{K}$. Имеем $\mathcal{K} \subset \chi_{mh} \subset V_+$, где $(m,h) \in \Upsilon^e_r$, $\chi_{mh} = \mathcal{F}^{-1}(m,h)$ (см. §§ 3.6, 5.7 и 5.8). Рассмотрим поверхность вида $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$ и координаты (p_1, q_1) на ней, которые будем считать каноническими, а также систему с гамильтонианом $\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}_m := \mathcal{F}_2|_{\mathcal{F}_1^{-1}(m)}$ на этой двумерной поверхности. Ясно, что траектории этой системы совпадают с кривыми $\chi_{mh} \subset \mathcal{F}_1^{-1}(m)$. Особые точки векторного поля x_m этой системы совпадают с критическими точками функции $\widehat{\Phi}_m$, а значит, с критическими точками отображения F, лежащими на $\mathcal{F}_1^{-1}(m)$. Следовательно, векторные поля семейства x_m задают согласованную ориентацию на линиях $\chi_{mh} \cap (k_1 \setminus \Sigma)$, расслаивающих дополнение $k_1 \setminus \Sigma$. Таким образом, получаем индуцированную ориентацию на дополнении $\mathcal{K} \setminus \Sigma$ к крюку $\mathcal{K} \subset \chi_{mh}$. Легко проверить, что эта ориентация корректно продолжается на весь кластер $\lambda_{mh} \supset \mathcal{K}$, точнее, на $\lambda_{mh} \setminus \Sigma$, в случае, если этот кластер связен, где $\lambda_{mh} = \lambda_{mh}^{\mu} = \lambda_{\xi}$, $(m, h) = F(\xi)$, $\mu = \mu(\xi)$. При $m_2 = 2$ невырожденный связный кластер содержит два крюка, но оба они принадлежат одной линии χ_{mh}, и ориентация на этих крюках, перенесенная с $\chi_{mh} \setminus \Sigma$, позволяет ориентировать весь «проколотый» кластер $\lambda_{mh} \setminus \Sigma$. Если же кластер λ_{mh} несвязен, то каждая из двух его связных компонент содержит по крюку, и ориентация с каждого из них корректно продолжается на соответствующую связную компоненту.

Определение 7.2.Б. Заданную таким образом ориентацию на дополнении $\lambda_{\xi} \setminus \Sigma$ к кластеру $\lambda_{\xi} \in L$ будем называть *отрицательной*. Если для всех кластеров $\lambda_{\xi} \in L$ эти дополнения ориентированы отрицательно, то будем говорить, что кластеры λ_{ξ} допустимого расширенного семейства L *ориентированы отрицательно*. Если ориентация противоположна отрицательной, то будем говорить о *положительной* ориентации.

Абсолютно аналогично определяется *отрицательная* и *положительная ориентация* дополнений $\lambda_{\xi} \setminus \Sigma$ для кластеров семейства L^2, отвечающего альтернативному полупространству V_+^2. Нужно только заменить оси координат (p_1, q_1, q_2) на оси (p_2, q_2, q_1) соответственно, не меняя их расположения. Считая координаты (p_2, q_2) на поверхности $Z_m^2 := F_1^{-1}(m) \cap V_+^2$ каноническими, нужно задать ориентацию с помощью векторного поля с гамильтонианом $F_2|_{Z_m^2}$.

Лемма 7.2.В. *Определение отрицательной и положительной ориентации дополнений $\lambda_{\xi} \setminus \Sigma$, где λ_{ξ} — кластеры допустимых семейств L и L^2, отвечающих полупространствам V_+ и V_+^2 соответственно, является корректным. В частности, всегда корректно продолжение ориентации с крюка на весь кластер, и ориентация не зависит от выбора крюка, если кластер связен и содержит два крюка. Если кластер λ_{ξ} невырожден и, значит, состоит из одной или двух непересекающихся кусочно-гладких связных замкнутых кривых без самопересечений, то получаем самую обычную ориентацию замкнутых кривых. Если кластер λ_{ξ} вырожден, то есть имеет вид восьмерки, то ориентация на нем задана везде кроме особой точки этой восьмерки. Объединение особых точек восьмерок λ_{ξ}, принадлежащих L, совпадает с множеством Σ. Если кластер состоит из двух непересекающихся циклов, то ориентации этих циклов, индуцируемые ориентацией кластера, всегда согласованы в следующем смысле. Ориентированные циклы гомотопны на общем торе-слое Λ, на котором они лежат, представляя один и тот же элемент в группе $H_1(\Lambda)$ одномерных гомологий тора Λ.*

Пусть $L = \{\lambda_{\xi}, \xi \in Y^e(k_1)\}$, как и выше, — допустимое расширенное семейство кластеров, частично лежащих на V_+.

Лемма 7.2.Г. *Предположим, что кластеры семейства L ориентированы единым образом, то есть либо все отрицательно, либо все положительно. Тогда при достаточно малых $\mu > 0$ ориентация дополнений $\lambda_{\xi} \setminus \Sigma$, расслаивающих $\mathcal{D}_{\mu} \setminus \Sigma$, будет локально согласованной в смысле определения 7.2.А. Локально согласованной будет и ориентация «проколотых» кластеров $\lambda_{\xi} \setminus \Sigma$, расслаивающих любую «проколотую» полоску $\sigma \setminus \Sigma$, отвечающую семейству L. Аналогичное утверждение верно и для семейств L^2 кластеров λ_{η}^2, частично лежащих на альтернативном полупространстве V_+^2.*

7.2.Д. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 7.2.В И 7.2.Г. Доказательство корректности перенесения ориентации с крюка $\mathcal{K}$ на остальную часть связной компоненты кластера $\lambda_\xi \supset \mathcal{K}$ следует из построения кластеров и составляющих их крюков и геодезических (см. §§ 5.3–5.10). Отсюда же получаем независимость ориентации от выбора одного из двух крюков, входящих в кластер внешнего типа. Доказательство согласованности ориентации циклов, составляющих кластер λ_ξ внутреннего типа, следует из описания таких циклов: из того факта, что эти составные циклы получаются друг из друга под действием фазового потока G_I за время π с последующей малой коррекцией (см. § 5.8 и построение сопряженных геодезических в пп. 5.6.А, а также лемму 5.9.А). Лемма 7.2.В полностью доказана. Лемма 7.2.Г легко получается из задания ориентации на крюках с помощью векторных полей семейства x_m и из построения полосок σ, кластеров λ_ξ и содержащихся в λ_ξ крюков и геодезических (см. §§ 5.3–5.10).

§ 7.3. Соотношения между ориентированными 0-кластерами семейств L и L^2, согласованных по нижним 0-кластерам

Пусть теперь, как и в § 7.1, даны два допустимых расширенных семейства кластеров L и L^2, отвечающие полупространствам V_+ и V_+^2 соответственно:

$$L = \{\lambda_\xi,\, \xi \in Y^e(k_1)\} \quad \text{и} \quad L^2 = \{\lambda_\eta^2,\, \eta \in Y^e(k_1^2)\},$$

$k_1^j \subset V_+^j$, $j = 1, 2$, где $k_1^1 = k_1$. Зададим на кластерах обоих семейств положительную ориентацию. Кластеры λ_ξ и λ_η^2 с такой ориентацией обозначим C_ξ и C_η^2 соответственно. Кластеры λ_ξ и λ_η^2 и циклы C_ξ и C_η^2 будем обозначать также через λ_{mh}, $\lambda_{m'h'}^2$, C_{mh}, $C_{m'h'}^2$ соответственно, где $(m,h) = (F_1(\xi), F_2(\xi))$, а $(m', h') = (F_1(\eta), F_2(\eta))$. Через σ с соответствующими индексами будем обозначать полоски и полуполоски, расслоенные кластерами $\lambda_\xi \in L$, а через σ^2 — расслоенные кластерами λ_η^2 семейства L^2.

Предложение 7.3. *Пусть семейства L и L^2 согласованы по нижним 0-кластерам, то есть либо кластеры $\lambda_\xi \in L$ и $\lambda_\eta^2 \in L^2$, расслаивающие нижние особые полуполоски $\sigma_{0b\mu}^{|-}$ и $\sigma_{0b\mu}^{2,|-}$ соответственно, гомотопны на торе λ_{0b}, либо гомотопия будет после замены одного из кластеров $\lambda_\xi \in L$ или $\lambda_\eta^2 \in L^2$ на удвоенный* (см. определение 7.1.А). *Предполагаем также, что при $m_2 = 2$ ($m_1 = 2$) полуполоска $\sigma_{0b\mu}^{|-}$ (и, соответственно, $\sigma_{0b\mu}^{2,|-}$) будет внутреннего типа. Тогда циклы $C_\xi = C_{0h}$ и $C_\eta^2 = C_{0h}^2$ будут связаны следующими соотношениями, разными для нижней ($h < 0$) и верхней ($h > 0$) особых полуполосок.*

А. При отрицательных h, а точнее, при $h \in (-b, 0)$, данная по условию гомотопность кластеров $m_1\lambda_{0h}$ и $m_2\lambda_{0h}^2$ на торе Λ_{0h} сохраняется при заданной положительной ориентации обоих кластеров λ_{0h} и λ_{0h}^2, то есть соответствующие циклы представляют один элемент группы $H_1(\Lambda_{0h})$ 1-мерных гомологий тора Λ_{0h}: $m_1\mathcal{C}_{0h} \sim m_2\mathcal{C}_{0h}^2$.

Б. Для верхних кластеров, то есть при $h \in (0, b)$, аналогичное соотношение имеет следующий вид. Обозначим через $B_\xi = B_{mh} \ni \xi$ цикл на торе Λ_{mh}, являющийся орбитой группы G_I, ориентированной этим потоком, $(m,h) = (F_1(\xi), F_2(\xi))$. Тогда естественным образом определяется цикл $m_2\mathcal{C}_{mh}^2 - B_{mh}$. Утверждается, что циклы $m_1\mathcal{C}_{0h}$ и $m_2\mathcal{C}_{0h}^2 - B_{0h}$ гомотопны на Λ_{0h} друг другу: $m_1\mathcal{C}_{0h} \sim m_2\mathcal{C}_{0h}^2 - B_{0h}$.

§ 7.4. Начало доказательства предложения 7.1.Б. Построение кривых $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$

Основные свойства данного по условию семейства кластеров $L = \{\lambda_\xi,\, \xi \in Y^e(k_1)\}$ определяются тремя кривыми: l_1, l_2 и α^μ_{00}. Здесь l_1 и l_2 — любые две соседние кривые из $2m_2$ кривых, составляющих линию χ_{00}, а $\alpha^\mu_{00} = \alpha_\mu \subset \Lambda^0$ — дуга геодезической, соединяющая точки кривых l_1 и l_2 и зависящая от параметра μ (см. лемму 5.1.А). Эта дуга определяет основные свойства семейства дуг $\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{12}(k_1, k_2, \mu)$, которые входят в состав кластеров семейства L; в случае $m_2 = 2$ добавляются еще дуги сопряженного семейства $\overline{\mathcal{A}}_{12}$, однозначно определяемого $\mathcal{A}_{12}$.

Все то же самое относится и к семейству кластеров L^2, которое нужно построить. В данном параграфе строятся кривые $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$, лежащие на линии $\widetilde{\chi}_{00} := \Lambda^0 \cap V^2_+$. В § 7.5 будет построено семейство дуг геодезических $\{\widetilde{\alpha}^\mu_{0h},\, h \leqslant 0\}$, в которое входит и дуга $\widetilde{\alpha}^\mu_{00}$. В § 7.6 на основе кривых $\widetilde{l}_1$, $\widetilde{l}_2$ и $\widetilde{\alpha}^\mu_{00}$, «$\beta$-согласованных» с кривыми l_1, l_2 и α^μ_{00} соответственно, будет построено семейство кластеров L^2. Согласованность семейств L и L^2 будет следовать из «β-согласованности» составных колец $e^\mu_{0h} = \alpha^\mu_{0h} \cup \mathcal{K}^\mu_{0h}$ и $\widetilde{e}^\mu_{0h} = \widetilde{\alpha}^\mu_{0h} \cup \widetilde{\mathcal{K}}^\mu_{0h}$, $h < 0$, из которых состоят нижние 0-кластеры этих семейств, где $\mathcal{K}^\mu_{0h}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}^\mu_{0h}$ — соответствующие им крюки.

В качестве l_1 удобно взять ту из $2m_2$ кривых, составляющих линию $\chi_{00} = \Lambda^0 \cap V_+$, которая имеет касательную, параллельную вектору

$$(p_1, q_1, p_2, q_2) = (0, \sqrt{m_2}, 0, \sqrt{m_1}), \tag{119}$$

а в качестве l_2 возьмем любую соседнюю с l_1 из этих $2m_2$ кривых. Из лемм 3.5.Г и 3.1.Г следует, что кривая $l_1 \subset V_+$ с такими свойствами действительно существует. Из тех же лемм, используя инволюцию (41), нетрудно получить существование аналогичной кривой $\widetilde{l}_1$, являющейся одной из $2m_1$ кривых, составляющих линию $\widetilde{\chi}_{00} \subset V^2_+ = \{p_1 = 0, q_1 > 0\}$ и имеющих ту же касательную (119).

Определим кривую $\widetilde{l}_2$. Кривые l_1 и $\widetilde{l}_1$ имеют одну касательную, и обе лежат на одном слое Λ^0, откуда нетрудно получить следующий факт. Обозначим через $\xi^\mu_j \in k_j$ точку с координатами $(F_1, F_2, \mu) = (0, 0, \mu)$, $j = 1, 2$. Тогда для всех достаточно малых $\mu > 0$ имеется малая вместе с μ дуга $\overline{\beta}_1$ орбиты β_1 группы G_I, соединяющая точку $\xi^\mu_1 \in l_1$ с точкой на кривой $\widetilde{l}_1$. Эту точку обозначим η^μ_1.

Обозначим $\mathcal{K}^\mu_{mh} := \mathcal{K}_\xi$, где $\xi \in k_1$ — точка с координатами (m, h, μ), а $\mathcal{K}_\xi$ — крюк, отвечающий точке ξ (см. §§ 5.7 и 5.8). Крюк $\mathcal{K}^\mu_{mh} \subset \Lambda_{mh} \cap V_+$ существует и единственен (см. леммы 5.7.А и 5.9.А). При $m = 0$ и $h < 0$ он примыкает к кривым l_1 и l_2, а точнее, $\mathcal{K}^\mu_{0h}$ при $h < 0$ соединяет конусы k_1 и k_2; при $m_2 = 2$ это следует из условия предложения 7.1.Б на нижнюю особую полуполоску быть внутренней. Рассмотрим кривую $\Omega^\mu_h := \kappa^\mu_{1h} \cup \mathcal{K}^\mu_{0h} \cup \kappa^\mu_{2h}$, где $h < 0$, а κ^μ_{jh} — кривые, определенные следующим образом:

$$\kappa^\mu_{jh} := J^{|-}_{0h\mu} \cup \{\xi^\mu_j\} = (F|_{S_{\mu j}})^{-1}(\mathcal{I}^{|-}_{0h} \cup \{0\}),$$

$j = 1, 2$, где $S_{\mu j}$ — поверхность уровня координатной функции μ, заданной на конусе k_j. Криволинейный сегмент κ^μ_{jh} соединяет конец крюка $\mathcal{K}^\mu_{0h}$ с точкой ξ^μ_j на кривой l_j, $j = 1, 2$. Кусочно-гладкая связная кривая Ω^μ_h состоит из трех гладких участков и при $m_2 = 1$ напоминает букву «П», а при $m_2 = 2$ перекладина этой буквы, оставаясь гладкой, изгибается под некоторым углом и по форме становится похожей на «раздвинутую» букву «Ω».

Определение 7.4.А. Кривую Ω^μ_h будем называть *расширенным крюком.*

Спроектируем расширенный крюк $\Omega_h^\mu \subset V_+$ на альтернативное полупространство V_+^2 с помощью проектирования $\mathcal{P}\colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ вдоль орбит группы G_I (см. начало § 6.3). Имеем $\Omega_h^\mu \subset \mathcal{N}_1 \subset V_+$; для однозначного определения отображения $\mathcal{P}$ на Ω_h^μ нам еще нужно задать значение $\mathcal{P}$ в некоторой точке из $\mathcal{N}_1$, и мы положим $\mathcal{P}(\xi_1^\mu) = \eta_1^\mu$. Второй конец ξ_2^μ расширенного крюка Ω_h^μ лежит на кривой $l_2 \subset \Lambda^0$. Рассмотрим путь Δ, лежащий на кривой Ω_h^μ и соединяющий точку ξ_1^μ с ξ_2^μ. Точка ξ_2^μ и ее проекция $\mathcal{P}(\xi_2^\mu) = \mathcal{P}(\xi_2^\mu, \Delta)$ лежат на одной орбите группы G_I; следовательно, точка $\eta_2^\mu := \mathcal{P}(\xi_2^\mu)$ тоже лежит на существенно особом слое Λ^0. Это означает, что $\eta_2^\mu \in \widetilde{\chi}_{00} = \Lambda^0 \cap V_+^2$, и, таким образом, эта точка принадлежит одной из $2m_1$ кривых, составляющих линию $\widetilde{\chi}_{00}$. Эту кривую и возьмем в качестве $\widetilde{l}_2$.

Покажем, что кривая $\widetilde{l}_2 \ni \eta_2^\mu$ определена корректно (в частности, независимо от выбора достаточно малых $\mu > 0$ и $-h > 0$) и что она совпадает с одной из двух соседних с $\widetilde{l}_1$ кривых, составляющих $\widetilde{\chi}_{00}$. Действительно, при фиксированных μ и h проекция $\widetilde{\Omega}_h^\mu := \mathcal{P}(\Omega_h^\mu)$ крюка Ω_h^μ является однозначно определенной связной кусочно-гладкой кривой, один из концов которой совпадает с η_2^μ, а значит, при фиксированных μ и h кривая $\widetilde{l}_2$ определена однозначно. При $m_1 = 2$ совпадение кривой $\widetilde{l}_2$ именно с соседней с $\widetilde{l}_1$ кривой, составляющей $\widetilde{\chi}_{00}$, следует из седлового характера расслоения поверхности $F_1^{-1}(0) \cap V_+^2$ кривыми $F^{-1}(0, h) \cap V_+^2$. Используя инволюцию (41), этот факт получаем из седлового характера расслоения поверхности $\mathcal{F}_1^{-1}(0)$ кривыми χ_{0h} при $m_2 = 2$, который вытекает из вида невозмущенных кривых χ_{00}^0 и малости отличия кривых χ_{00} и χ_{00}^0 (см. леммы 3.6.В и 3.2.В, 3.2.Г).

Покажем теперь, что кривая $\widetilde{l}_2$ не зависит от выбора малых параметров μ и h. Действительно, объединение крюков Ω_h^μ и $\Omega_{h'}^{\mu'}$ при любых малых $(h', \mu') \neq (h, \mu)$ можно дополнить до замкнутой кривой двумя сегментами $\widehat{l}_1$ и $\widehat{l}_2$, лежащими на кривых l_1 и l_2 соответственно. Эта замкнутая кривая лежит в проколотом в вершине конусе $\mathcal{F}_1^{-1}(0)$ и стягивается по $\mathcal{F}_1^{-1}(0)$ в точку. Образ этой кривой при отображении $\mathcal{P}$ тоже будет замкнут и стягиваем в точку по того же типа конусу $F_1^{-1}(0) \cap V_+^2$ (см. следствие 6.4.Б.iii). Образы $\mathcal{P}(\widehat{l}_1)$ и $\mathcal{P}(\widehat{l}_2)$ лежат, очевидно, на линии $\widetilde{\chi}_{00} = \Lambda^0 \cap V_+^2$. Из этих двух фактов вытекает корректность определения кривой $\widetilde{l}_2$.

§ 7.5. Построение семейства геодезических $\widetilde{\alpha}_{0h}^\mu$, согласованных с геодезическими α_{0h}^μ, отвечающими исходному семейству кластеров L

Обозначим через A_1 и A_2, $A_j = \mathcal{K}_{0h}^\mu \cap \kappa_{jh}^\mu$, $j = 1, 2$, точки возможной негладкости расширенного крюка Ω_h^μ, то есть концы крюка $\mathcal{K}_{0h}^\mu$, составляющего основу Ω_h^μ. Точки $A_j = A_{jh}^\mu$, $j = 1, 2$, гладко зависят от параметров μ и h при допустимых значениях пар (μ, h), то есть при $\mu \in (0, \mu_0)$ и $-h_0(\mu) < h < 0$, где $h_0(\mu) > 0$. Дополнив эти семейства точками $A_{j0}^\mu = \xi_j^\mu$, мы, очевидно, снова получим два гладких семейства точек A_{jh}^μ, $\mu \in (0, \mu_0)$, $h \in (-h_0(\mu), 0]$, $j = 1, 2$. Отметим, что точка A_{jh}^μ лежит на поверхности уровня $S_{\mu j}$ координатной функции μ, заданной на конусе k_j, и, более того, является единственной точкой пересечения этой поверхности с линией $\chi_{mh} = \mathcal{F}^{-1}(m, h)$ при $m = 0$, $j = 1, 2$.

Обозначим через $B_j = B_{jh}^\mu$ образы точек $A_j = A_{jh}^\mu$ при определенном выше отображении $\mathcal{P}$, $B_j := \mathcal{P}(A_j)$, $j = 1, 2$. Пусть α_{0h}^μ — геодезическая, соединяющая точки A_{1h}^μ и A_{2h}^μ и входящая в состав кластера λ_{0h}^μ исходного семейства L. Построим следующую деформацию геодезической α_{0h}^μ в классе геодезических на слое Λ_{0h} в геодезическую $\widetilde{\alpha}_{0h}^\mu$, соединяющую точки B^μ_{1h} и B^μ_{2h}, где $\mu \in (0, \mu_0)$, $h \in (-h_0, 0]$. Обозначим через $\overline{\beta}_{2+j}$ проектирующую дугу, соединяющую точки A_j и B_j и отвечающую отображению $\mathcal{P}$ и пути Δ, лежащем на кривой Ω^μ_h и соединяющем точку $\xi_1 = \xi^\mu_1$ с точкой A_j, $j = 1, 2$ (см. определение 6.3.Б). (Именно такого типа путь Δ — с началом в точке ξ_1 и лежащий на крюке Ω^μ_h — мы, фактически, использовали выше, в § 7.4.)

Рассмотрим теперь семейство геодезических, лежащих на слое Λ_{0h}, один конец которых фиксирован и находится в точке A_1, а другой скользит по дуге $\overline{\beta}_4$ от точки A_2 до B_2, причем стартовое положение такой деформации совпадает с геодезической α^μ_{0h}. Финишное положение обозначим через α' — это дуга геодезической, соединяющая точки A_1 и B_2. Того же типа деформацию геодезических мы уже использовали в пп. 5.2.Б для построения геодезической α, соединяющей точки, лежащие на кривых l_1 и l_2.

Далее применим еще раз деформацию такого типа — теперь уже к полученной дуге α'. Для этого фиксируем конец B_2, а второй конец возьмем скользящим по дуге $\overline{\beta}_3$ от точки A_1 до B_1. Финишное положение этой деформации возьмем в качестве $\widetilde{\alpha}^\mu_{0h} = [B^\mu_{1h}, B^\mu_{2h}]$.

Определение 7.5.А. Описанное преобразование

$$\alpha = \alpha^\mu_{0h} \mapsto \widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}^\mu_{0h} \tag{120}$$

дуг геодезических, лежащих на торе Λ_{0h}, назовем *двухступенчатым.*

Лемма 7.5.Б. *Существует $\mu_0 > 0$, такое, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ найдется $h_0 = h_0(\mu) > 0$, гладко зависящее от μ, для которого выполнены следующие утверждения. При любом $h \in (-h_0(\mu), 0]$ двухступенчатое преобразование $\alpha^\mu_{0h} \mapsto \widetilde{\alpha}^\mu_{0h}$ определено корректно и однозначно. При этом дуга геодезической $\widetilde{\alpha}^\mu_{0h}$ гладко зависит от (μ, h) при $\mu \in (0, \mu_0)$, $h \in (-h_0(\mu), 0]$.*

Доказательство леммы 7.5.Б легко будет получено из следующего утверждения.

Лемма 7.5.В. *Рассмотрим дополнение $\Lambda^0 \setminus B(0, \mu)$, где $B(0, \mu)$ — шар в $\mathbf{R}^4_{pq}$ радиуса μ с центром в нуле. Тогда для любого сколь угодно малого $\mu > 0$ существует окрестность U этого дополнения в M^4, инвариантная относительно действия группы G_I и обладающая следующим свойством. Рассмотрим любую дугу геодезической α, целиком лежащую в U вместе со своими концами ξ_1 и ξ_2. Пусть $(\xi^\varepsilon_1, \xi^\varepsilon_2)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, — произвольная непрерывная деформация пары точек (ξ_1, ξ_2), при которой в каждый момент ε эти точки остаются в U и лежат на одном слое Λ расслоения F:*

$$\xi^0_i = \xi_i, \ \ \xi^\varepsilon_i \in U, \quad \xi^\varepsilon_i \in \Lambda_{m(\varepsilon), h(\varepsilon)}, \quad i = 1, 2,$$

при всех $\varepsilon \in [0, 1]$. Тогда существует и единственна непрерывная деформация α^ε, $\varepsilon \in [0, 1]$, дуги $\alpha^0 = \alpha$, такая, что при каждом $\varepsilon \in [0, 1]$ концы дуги геодезической α^ε совпадают с точками ξ^ε_1 и ξ^ε_2, а сама дуга α^ε целиком лежит в $U \cap \Lambda_{m(\varepsilon), h(\varepsilon)}$. Если пара точек $(\xi^\varepsilon_1, \xi^\varepsilon_2)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, гладко зависит от ε, то дуги α^ε тоже будут гладко зависеть от $\varepsilon \in [0, 1]$.

Доказательство леммы 7.5.В. Из леммы 5.3.Б следует существование окрестности U дополнения $\Lambda^0 \setminus B(0, \mu)$, замыкание которой в M^4 не содержит точку ξ^0 и которая имеет вид прямого произведения 2-мерного диска на 2-мерный гладкий цилиндр, причем расслоение на цилиндры, отвечающее этому прямому произведению, обладает следующим свойством. Каждый слой этого расслоения является частью слоя Λ расслоения F и ограничен двумя орбитами группы G_I, являющимися, очевидно, параллельными геодезическими плоской метрики, заданной на этой части слоя Λ векторными полями систем с гамильтонианами F_1 и F_2. Отсюда легко получаем все утверждения леммы 7.5.В.

Доказательство леммы 7.5.Б. Докажем лемму сначала для значений μ, близких к любому достаточно малому. Фиксируем любое такое $\mu > 0$, а близкие к нему значения будем обозначать через ν. Рассмотрим дугу геодезической α^μ_{00}, соединяющую точки $\xi^\mu_1 = A^\mu_{10}$ и $\xi^\mu_2 = A^\mu_{20}$. Так как $0 \notin \alpha^\mu_{00}$, то найдутся $h_1 = h_1(\mu) > 0$ и $\zeta = \zeta(\mu) > 0$, такие, что при любых $h \in (-h_1, 0]$ и $\nu \in (\mu - \zeta, \mu + \zeta)$ будет выполнено следующее утверждение. Точки A^ν_{jh} и дуги $\overline{\beta}_{2+j}$, соединяющие точки A^ν_{jh} и $\widetilde{A}^\nu_{jh}$, $j = 1, 2$, используемые для построения дуги α^ν_{0h}, лежат вне шара $B(0, \mu/2)$. Отсюда и из леммы 7.5.В легко следует, что найдется $h_2 = h_2(\mu) > 0$, такое, что при любых $h \in (-h_2, 0]$ и $\nu \in (\mu - \zeta, \mu + \zeta)$ корректно и однозначно определено преобразование $\alpha^\nu_{0h} \mapsto \widetilde{\alpha}^\nu_{0h}$. Отображение $\mathcal{P}$ является локальным диффеоморфизмом (см. лемму 6.3.А). Следовательно, пара точек $(\widetilde{\mathcal{A}}^\nu_{1h}, \widetilde{\mathcal{A}}^\nu_{2h})$ гладко зависит от параметров (ν, h). Отсюда получаем гладкую зависимость дуги геодезической $\widetilde{\alpha}^\nu_{0h}$, соединяющей эти точки. Так как значение достаточно малого $\mu > 0$ произвольно, то отсюда нетрудно получить существование $\mu_0 > 0$ и $h_0(\mu) > 0$, обладающих сформулированными в лемме свойствами, в частности, $h_0(\mu)$ будет гладко зависеть от μ. Лемма 7.5.Б полностью доказана.

Рассмотрим объединение
$$\widetilde{e}^\mu_{0h} := \widetilde{\alpha}^\mu_{0h} \cup \widetilde{\mathcal{K}}^\mu_{0h}, \tag{121}$$
где $\widetilde{\mathcal{K}}^\mu_{0h}$ — образ крюка $\mathcal{K}^\mu_{0h}$ при определенном в данном §7 проектировании $\mathcal{P}$, $\widetilde{\mathcal{K}}^\mu_{0h} := \mathcal{P}(\mathcal{K}^\mu_{0h}, \Delta)$. Из построения кривых $\widetilde{\alpha}^\mu_{0h}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}^\mu_{0h}$ и описания проектирования $\mathcal{P}$ (см. начало §6.3), а также из леммы 7.5.Б легко получаем следующее утверждение.

Лемма 7.5.Г. *Найдутся $\mu_0 > 0$ и $h_0(\mu) > 0$, гладко зависящее от μ, такие, что при любых $\mu \in (0, \mu_0)$ и $h \in (-h_0(\mu), 0)$ кривая $\widetilde{e}^\mu_{0h}$ будет обладать следующим свойством. Она будет замкнутой кривой, лежащей на торе-слое Λ_{0h} расслоения F и будет гомотопна на этом торе составному циклу $e^\mu_{0h} = \alpha^\mu_{0h} \cup \mathcal{K}^\mu_{0h}$.*

§7.6. Завершение доказательства предложения 7.1.Б

Построим допустимое расширенное семейство кластеров $L^2 = \{\lambda^2_\eta,\ \eta \in Y^e(k^2_1)\}$, а затем докажем его согласованность с исходным семейством L. Построение таких семейств описано в §5 (см. леммы 5.3.А и 5.6.А и замечание 5.5.Б, а также определения 5.9.В и 5.10.Г таких семейств). Но в §5 рассматривались объекты, отвечающие полупространству V_+, поэтому теперь в этих построениях и определениях нужно поменять V_+ на альтернативное полупространство $V^2_+ = \{p_1 = 0, q_1 > 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$. В качестве кривых l^2_1 и l^2_2, составляющих целиком или частично $\widetilde{\chi}_{00} = \Lambda^0 \cap V^2_+$, возьмем $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ соответственно. Конусообразными окрестностями k^2_1 и k^2_2 этих кривых, $k^2_j \supset l^2_j$, $j = 1, 2$, возьмем образы $\mathcal{P}(k_1)$ и $\mathcal{P}(k_2)$ при описанном выше в §§7.4 и 7.5 проектировании $\mathcal{P}$ соответствующих конусообразных окрестностей k_1 и k_2 кривых l_1 и l_2. Точнее, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\xi, \Delta)$ таково, что $\mathcal{P}(\xi^\mu_1) = \eta^\mu_1$, а путь Δ имеет начальную точку ξ^μ_1 и лежит вблизи расширенного крюка Ω^μ_h, $h < 0$; ясно, что $\mathcal{P}$ не зависит от выбора достаточно малых $\mu > 0$, $-h > 0$ и такого пути Δ. Координатную функцию μ перенесем с k_j на k^2_j с помощью того же отображения $\mathcal{P}$. Построение k^2_1, k^2_2 и функции μ на них аналогично построению конусообразных окрестностей и функции μ для семейства сопряженных кластеров с помощью проектирования $\mathcal{P}_\pi$ (см. §5.6). Из построения k^2_1, k^2_2 и μ и из локальной диффеоморфности проектирования $\mathcal{P}$ (см. лемму 6.3.А) легко следует, что пара конусов (k^2_1, k^2_2) и координаты (F_1, F_2, μ) на них будут допустимыми (см. определение 5.5).

Далее строим допустимое семейство геодезических $\mathcal{A}^2_{12} = \mathcal{A}^2_{12}(k^2_1, k^2_2, \mu) = \{\alpha^2_\eta,\ \ \eta \in k^2_1\}$ (см. определение 5.5), такое, что геодезическая α_η при $\eta \in l^2_1$ совпадает с геодезической $\widetilde{\alpha}^\mu_{00}$, построенной в § 7.5, где $\mu = \mu(\eta)$. Существование и единственность такого семейства легко получить, используя лемму 5.3.А и замечание 5.5.Б. Затем построим семейство кластеров $L^2 = \{\lambda^2_\eta,\ \eta \in Y^e(k^2_1)\}$ теперь уже по абсолютно однозначным рецептам (см. §§ 5.7–5.10); таким образом, получаем допустимое расширенное семейство L^2, полностью определяемое семейством L. В частности, в случае $m_1 = 2$ дополнительно строим конусы (k^2_3, k^2_4), по семейству $\mathcal{A}^2_{12}$ строим семейство геодезических $\mathcal{A}^2_{34} = \overline{\mathcal{A}}^2_{12}$, $\mathcal{A}^2_{34} = \mathcal{A}^2_{34}(k^2_3, k^2_4, \mu)$ и получаем допустимые пары $(\mathcal{A}^2_{12}, \mathcal{A}^2_{34})$ как это делалось в пп. 5.6.А.

Осталось показать, что семейства L и L^2 согласованы по нижним 0-кластерам. Кластер $\lambda^2_\eta \in L^2$ будем также обозначать $\lambda^{2,\mu}_{mh}$, где (m, h, μ) — координаты точки η. Аналогичным образом введем обозначения $\alpha^{2,\mu}_{mh}$, $\mathcal{K}^{2,\mu}_{mh}$ и $e^{2,\mu}_{mh}$ для объектов, входящих в состав кластера λ^2_η. Из построения составных циклов $e^{2,\mu}_{0h} = \alpha^{2,\mu}_{0h} \cup \mathcal{K}^{2,\mu}_{0h}$, отвечающих семейству L^2, и замкнутых кривых $\widetilde{e}^{\mu}_{0h} = \widetilde{\alpha}^{\mu}_{0h} \cup \widetilde{\mathcal{K}}^{\mu}_{0h}$, $h < 0$ (см. (121)), получаем следующее. Найдутся $\mu_0 > 0$ и $h_0(\mu) > 0$, гладко зависящее от $\mu \in (0, \mu_0)$, такие, что $\alpha^{2,\mu}_{0h} = \widetilde{\alpha}^{\mu}_{0h}$ и $\mathcal{K}^{2,\mu}_{0h} = \widetilde{\mathcal{K}}^{\mu}_{0h}$ при любых $\mu \in (0, \mu_0)$ и $h \in (-h_0(\mu), 0)$. Следовательно, при этих μ и h кривая $\widetilde{e}^{\mu}_{0h}$ будет совпадать с одним из «одинарных» составных циклов $e^{2,\mu}_{0h}$, отвечающих L^2. Отсюда получаем, что при $m_1 = 2$ нижние 0-кластеры $\lambda^{2,\mu}_{0h} \in L^2$, $h < 0$, будут внутреннего типа, а из леммы 7.2.В следует, что парные составные циклы, из которых состоит кластер $\lambda^{i,\mu}_{0h}$ при $m_j = 2$, $h < 0$, гомотопны друг другу, где $(i, j) = (1, 2)$ либо $(i, j) = (2, 1)$, $\lambda^{1,\mu}_{0h} = \lambda^{\mu}_{0h}$. Используя лемму 7.5.Г, получаем, что составные циклы, из которых состоят кластеры λ^{μ}_{0h} и $\lambda^{2,\mu}_{0h}$, гомотопны на слое-торе Λ_{0h} при любых $\mu \in (0, \mu_0)$ и $h \in (-h_0(\mu), 0)$ и любых рассматриваемых значениях m_1 и m_2.

У нас нет информации о виде функции $h_0(\mu) > 0$, так что такая гомотопия может не распространяться на все кластеры λ^{μ}_{0h}, $h \in (-H_0(\mu), 0)$, где $H_0(\mu) > 0$, расслаивающие нижнюю особую полуполосу $\sigma^{|-}_{0h}$, отвечающую при данном μ семейству L. Такое может случиться, если $h_0(\mu) < H_0(\mu)$. (Значение $H_0(\mu)$ фиксировано и определяется максимальным значением функции F_2 на поверхности уровня $S_{\mu 1}$ координатной функции μ, заданной на конусе k_1.) Но здесь можно провести следующее рассуждение. Торы Λ_{0h} тривиально расслаивают объединение $\cup_{h \in (-H_0(\mu), 0)} \Lambda_{0h}$, а кластеры λ^{μ}_{0h} и $\lambda^{2,\mu}_{0h}$ лежат на одном торе Λ_{0h}. Эти кластеры состоят из m_2 и m_1 составных циклов соответственно, каждый из которых непрерывно зависит от h при всех $h \in (-H_0(\mu), 0)$. Следовательно, доказанная выше гомотопность на Λ_{0h} этих циклов при $h \in (-h_0(\mu), 0)$ будет иметь место и при всех $h \in (-H_0(\mu), 0)$. Ясно, что составные циклы, входящие в состав кластеров λ^{μ}_{0h}, при фиксированном $h > 0$ гомотопны друг другу на торе Λ_{0h} при всех допустимых $\mu > 0$. То же самое верно и для циклов кластеров $\lambda^{2,\mu}_{0h}$. Таким образом, предложение 7.1.Б полностью доказано.

§ 7.7. Начало доказательства предложения 7.3. Определение и свойства проектирования $\mathcal{P}_\sigma\colon \sigma \to \widetilde{\sigma}$

Доказательство предложения 7.3 состоит из двух частей. Вначале, в §§ 7.7–7.9, мы построим эквивалентное L^2 семейство $\widetilde{L}$ и отображение $\mathcal{P}_\sigma\colon \sigma \to \widetilde{\sigma}$ из особой полоски σ, отвечающей семейству L, в особую полоску $\widetilde{\sigma}$, отвечающую семейству $\widetilde{L}$, и докажем корректность этого построения. Отображение $\mathcal{P}_\sigma$, как и рассмотренные выше $\mathcal{P}_\pi$ и $\mathcal{P}$, является проектированием параллельно орбитам β группы G_I. Во второй части доказательства, в §§ 7.10–7.12, во-первых, найдены соотношения между ориентированными нижними составными циклами, отвечающими семействам L и $\widetilde{L}$ (см. лемму 7.10.А). Во-вторых, аналогичное утверждение доказано для верхних ориентированных кластеров (см. лемму 7.11.A). Из этих двух соотношений в § 7.12 выводится предложение 7.3.

Ниже в §§ 7.7–7.11 и в части § 7.12 приведено детальное доказательство предложения 7.3 в случае $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ — одного из трех наборов (m_1, m_2), которые мы рассматриваем. В этом случае $\Lambda^0 \cap V_+ = l_1 \cup l_2$, $\Lambda^0 \cap V_+^2 = l_1^2 \cup l_2^2 \cup l_3^2 \cup l_4^2$, где l_j и l_j^2 — интервалы кривых с общим концом в точке ξ^0 (см. лемму 3.5.Г и (41)). Соответственно, имеем два 2-мерных сечения $S_{\mu 1}$ и $S_{\mu 2}$, $S_{\mu j} \ni \xi_j^\mu$, $\{\xi_j^\mu\} = S_{\mu j} \cap l_j$, $j = 1, 2$, и четыре аналогичных сечения $S_{\mu j}^2$, $j = 1, 2, 3, 4$, лежащих на альтернативном полупространстве V_+^2. Нетрудно видеть, что орбита $\beta \ni \xi_j^\mu$ группы G_I проходит через точки на кривых l_j^2 и l_{j+2}^2, $j = 1, 2$. Эти точки обозначим через η_j^μ и η_{j+2}^μ соответственно, $j = 1, 2$. Рассмотрим проектирующее отображение $\mathcal{P}$, построенное в § 7.4; тогда $\mathcal{P}(\xi_j^\mu) = \eta_j^\mu$, $j = 1, 2$. Перенесем на V_+^2 с помощью отображения $\mathcal{P}$ вслед за кривой l_j и ее конусообразную окрестность k_j, а также сечения $S_{\mu j}$. Полученную окрестность кривой l_j^2 обозначим через $\widetilde{k}_j$, а полученные сечения на этой окрестности — через $\widetilde{S}_{\mu j}$, $j = 1, 2$. Далее перенесем $\widetilde{k}_j$ и $\widetilde{S}_{\mu j}$ с помощью определенного в начале пп. 5.6.A отображения $\mathcal{P}_\pi$, но заданного не на V_+, а на V_+^2. Полученные объекты обозначим через $\widetilde{k}_{j+2}$ и $\widetilde{S}_{\mu, j+2}$, $j = 1, 2$. Заменим конусы k_j^2 и поверхности $S_{\mu j}$, отвечающие семейству L^2 и имеющиеся, по предположению предложения 7.3, на $\widetilde{k}_j^2$ и $\widetilde{S}_{\mu j}$ соответственно, $j = 1, 2, 3, 4$. Удобство конусов $\widetilde{k}_j$ и сечений $\widetilde{S}_{\mu j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, в том, что они жестко связаны с k_j и S_j посредством орбит β группы G_I.

Далее пошевелим дуги геодезических α_η^2, отвечающие исходному семейству кластеров L^2, чтобы согласовать их с конусами $\widetilde{k}$ и сечениями $\widetilde{S}$, отличными, вообще говоря, от исходных k^2 и S^2 соответственно. Нетрудно видеть, что в результате мы получим допустимое расширенное семейство кластеров, которое обозначим через $\widetilde{L}$. При замене L^2 на $\widetilde{L}$ произойдет замена кластеров — исходных $\lambda_{mh}^{2,\mu}$ на $\widetilde{\lambda}_{mh}^\mu$. Но эта замена не принципиальная, так как из построения $\widetilde{\lambda}_{mh}^\mu$ следует, что кластеры $\lambda_{mh}^{2,\mu}$ и $\widetilde{\lambda}_{mh}^\mu$ гомотопны на слое Λ_{mh}. Цикл с носителем $\widetilde{\lambda}_{0h}^\mu$, гомотопный данному (по условию предложения 7.3) циклу $C_{0h}^2 = C_{0h}^{2,\mu}$ с носителем $\lambda_{0h}^{2,\mu}$, обозначим через $\widetilde{C}_{0h}^\mu$, где $C_{0h}^{2,\mu} = C_\eta^2$, $\mu = \mu(\eta)$, $(0, h) = F(\eta)$. Особые полоски $\sigma_{0b\mu}^| = \cup_{\xi \in J_{0b\mu}^|} \lambda_\xi$ и $\widetilde{\sigma}_{0b\mu}^| = \cup_{\eta \in \widetilde{J}_{0b\mu}^|} \widetilde{\lambda}_\eta$, отвечающие семействам L и $\widetilde{L}$, далее будем обозначать через σ и $\widetilde{\sigma}$ соответственно.

Определим теперь отображение $\mathcal{P}_\sigma \colon \sigma \to \widetilde{\sigma}$, аналогичное отображению $\mathcal{P}$ и в каком-то смысле являющееся его расширением на дополнение к окрестности точки ξ^0. Точнее, как и $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_\sigma$ является однозначным отображением не из полоски σ, а из ее универсальной накрывающей, и в универсальную накрывающую полоски $\widetilde{\sigma}$, а не в саму эту полоску (см. § 6). Положим $\mathcal{P}_\sigma(\xi_1^\mu) = \eta_1^\mu$, где $\mu > 0$ мало, так что $\xi_1^\mu \in \sigma$ и $\eta_1^\mu \in \widetilde{\sigma}$. Рассмотрим дугу $\overline{\beta}_1$, соединяющую точки ξ_1^μ и η_1^μ, и любой путь $\Delta \subset \sigma$, соединяющий точку $\xi_1 = \xi_1^\mu$ с некоторой точкой $\xi \in \sigma$. Непрерывно деформируем дугу $\overline{\beta}$ со стартовым положением $\overline{\beta}_1$ так, чтобы концы этой дуги лежали на σ и $\widetilde{\sigma}$, причем конец, лежащий на σ, двигался по пути Δ. Конец финишного положения $\overline{\beta}(\xi, \Delta)$ такой деформации, который лежит на $\widetilde{\sigma}$, возьмем в качестве $\mathcal{P}_\sigma(\xi, \Delta)$. Время, необходимое точке, двигающейся под действием потока G_I, чтобы переместиться из положения ξ в положение $\mathcal{P}_\sigma(\xi, \Delta)$, обозначим через $\mathcal{T}_\sigma(\xi, \Delta)$.

Определение 7.7.A. Многозначное, вообще говоря, отображение $\mathcal{P}_\sigma \colon \sigma \to \widetilde{\sigma}$ будем, как и $\mathcal{P} \colon \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$, называть *проектирующим.* Величину $\mathcal{T}_\sigma(\xi, \Delta)$ назовем *геодезической длиной* проектирующей дуги $\overline{\beta}(\xi, \Delta)$.

Лемма 7.7.Б. *Для всех достаточно малых $\mu > 0$ и допустимых пар (μ, b) многозначные отображение $\mathcal{P}_\sigma\colon \sigma \to \widetilde{\sigma}$ и функция $\mathcal{T}_\sigma\colon \sigma \to \mathbf{R}$ определены корректно. При этом значения $\mathcal{P}_\sigma(\xi)$ и $\mathcal{T}_\sigma(\xi)$ однозначно определяются гомотопическим типом кривой Δ в σ, соединяющей точки ξ_1 и ξ. Кроме того, отображение $\mathcal{P}_\sigma$ является локальным гомеоморфизмом, а вне $S_{\mu 1} \cup S_{\mu 2}$, то есть в дополнении $\sigma \setminus (S_{\mu 1} \cup S_{\mu 2})$, будет локальным диффеоморфизмом. Аналогично, функция $\mathcal{T}_\sigma\colon \sigma \to \mathbf{R}$ является непрерывной в σ и гладкой в $\sigma \setminus (S_{\mu 1} \cup S_{\mu 2})$.*

Доказательство леммы 7.7.Б будет опираться на следующее утверждение.

Лемма 7.7.В. *В условиях леммы 7.7.Б каждая орбита β группы G_I, пересекающая полоску σ $(\widetilde{\sigma})$, пересекает ее ровно в одной (и, соответственно, в двух) точках, причем в обоих случаях пересекает под ненулевым углом; и более того, пересекает под углом, равномерно по всем точкам из σ либо из $\widetilde{\sigma}$ отделенным от нуля. В обоих случаях орбита β пересекает каждую дугу геодезической α, входящую в состав σ либо $\widetilde{\sigma}$, ровно в одной точке. То же самое верно и для каждого из двух составных циклов, образующих внутренний кластер $\widetilde{\lambda} \subset \widetilde{\sigma}$.*

§7.8. Доказательство леммы 7.7.В

Лемму 7.7.В можно рассматривать как обобщение леммы 5.1.А, и мы будем опираться на эту лемму и использовать некоторые элементы ее доказательства (см. пп. 5.2.Б). Пусть σ_k и σ_g — две гладкие части полоски σ, на которые ее делят сечения $S_{\mu j}$, $j = 1, 2$ (см. лемму 5.10.Д). Покажем сначала, что орбиты β группы G_I пересекают как σ_k, так и σ_g ровно в одной точке. Первое получаем из следствия 4.12.В о том, что число точек пересечения орбитой β полуплоскости V_+ в области $k_{\alpha r}$, содержащей $\sigma_k \subset V_+$ (см. (42)), равно m_2, а в рассматриваемом случае $m_2 = 1$. Докажем, что пересечение $\beta \cap \sigma_g$ состоит из одной точки. Из леммы 5.3.Б (см. представление (102), ср. доказательство леммы 5.10.Д) следует, что любая дуга геодезической α, которая входит в состав σ_g, либо пересекается орбитами β ровно по одной точке, либо является сегментом этой орбиты. Согласно лемме 5.1.А, дуга геодезической $\alpha_\mu \subset \sigma$, соединяющая точки кривых l_1 и l_2, пересекается орбитами β ровно по одной точке. Следовательно, это верно и для близких к α_μ дуг α, откуда легко получаем требуемое утверждение.

Покажем, что орбиты β пересекают σ_k и σ_g под ненулевым углом. Имеем $\sigma_k \subset k_{\alpha r}$ (см. (42)), а орбиты β трансверсально пересекают V_+ во всех точках множества $k_{\alpha r} \subset V_+$ (см. следствие 4.12.А). Исследуем теперь пересечения β с σ_g. Покажем сначала, что орбиты β пересекают дуги геодезических $\alpha \subset \sigma_g$ под ненулевым углом. Действительно, нулевой угол означал бы, что $\alpha \subset \beta$, а это противоречит доказанному выше факту, что $\alpha \cap \beta$ состоит из одной точки. С другой стороны, согласно лемме 5.10.Д, полоска σ трансверсальна в D слоям $\Lambda \subset D$, где $D = D_{0b}$, а D_{Mb} определено формулой (108). Из этих двух фактов и в силу того, что орбиты β, как и кривая $\alpha \subset \sigma_g$, лежат на слоях Λ, получаем трансверсальность в D пересечений β и σ_g, то есть они пересекаются под ненулевым углом. Таким образом, это верно для пересечений орбит β со всей полоской σ.

Докажем, что орбита β группы G_I не может пересекать одновременно и σ_k, и σ_g. Действительно, противное означало бы, что нашлась орбита β, которая бы пересекала как крюк $\mathcal{K}$, так и дугу геодезической α, причем в разных точках, где $\mathcal{K}$ и α — составляющие некоторого кластера $\lambda \subset \sigma$. Согласно лемме 5.1.А, орбиты β пересекают проколотую в нуле замкнутую кривую e_μ ровно в одной точке, причем это пересечение трансверсально в особом слое Λ^0. Выше мы, фактически, доказали, что орбиты β пересекают трансверсально на слоях Λ кластеры $\lambda \subset \sigma$ (под ненулевым углом). Такая трансверсальность будет и в точках возможной негладкости кривой e_μ, то есть в точках $\xi_j^\mu \subset l_j$, $j = 1, 2$, составляющих $e_\mu \cap \partial$ (см. (107)). Заметим также, что части крюков $\mathcal{K}$ и дуг геодезических α, лежащие вблизи линии ∂ возможной негладкости полоски σ, гладко зависят от точки $\xi \in \partial = \cup(\mathcal{K} \cap \alpha)$. Из этих фактов и из доказанной единственности точки пересечения орбит β с $\mathcal{K} \subset \sigma$ и $\alpha \subset \sigma$, а также с кривой e_μ, используя соображения непрерывности, получаем следующее. Орбита β может пересекать одновременно σ_k и σ_g только в случае, если найдется кластер $\lambda \subset \sigma$, такой, что либо $\mathcal{K}$, либо α, где $\mathcal{K} \cup \alpha = \lambda$, не трансверсальны на слое Λ орбите β в точке из пересечения $\lambda \cap \partial$. Но это противоречит уже установленной трансверсальности такого пересечения, что и доказывает единственность точек пересечения $\beta \cap \lambda$, где $\lambda \subset \sigma$.

Равномерная отделенность от нуля угла между орбитами β и кластерами λ вблизи точки ξ^0 следует из линейности невозмущенного векторного поля $X^0 = X_{F_1^0}$ и из неравенства (80). Вдали от точки ξ^0 равномерную оценку снизу этого угла получаем из фактической компактности ситуации. Таким образом, все утверждения леммы 7.7.В для полоски σ доказаны. Для $\widetilde{\sigma}$, частично лежащей не на полуплоскости V_+, а на вполне эквивалентной ей полуплоскости V_+^2, все рассуждения совершенно аналогичны. Нужно только учесть, что $m_1 = 2$, и поэтому $\widetilde{\partial}$ делит $\widetilde{\sigma}$ не на две гладкие связные части, а на три, причем σ_g состоит из двух связных компонент (см. лемму 5.10.Д), где $\widetilde{\partial} = \widetilde{\sigma}_k \cap \widetilde{\sigma}_g$ и $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_k \cup \widetilde{\sigma}_g$ соответствуют семейству $\widetilde{L}$. И нужно заменить в приведенном в начале § 7.8 рассуждении конус $k_{\alpha r}$ на область $(G_I(k_{\alpha r}) \setminus \Sigma) \cap V_+^2$ и учесть, что число точек пересечения орбит β с этой областью равно 2, а не 1, а также учесть расположение этих точек. Требуемые факты об этих точках получаем из утверждения следствия 4.12.В при $m_2 = 2$, используя инволюцию (41). Лемма 7.7.В доказана.

§ 7.9. Доказательство леммы 7.7.Б

Орбиты β группы G_I локально тривиально расслаивают множество $D \setminus \{0\}$. В рассмотренной в лемме 5.3.Б окрестности $\mathcal{B}$ точки ξ^0 это утверждение вытекает из следствия 4.12.Г, а вне этой окрестности — из леммы 5.3.Б, учитывая замечание 5.5.Б. Используя доказанные в лемме 7.7.В утверждения о постоянстве числа точек пресечения орбит β с полосками σ и $\widetilde{\sigma}$ и о ненулевом угле между β и этими полосками, докажем корректность и непрерывность отображений $\mathcal{P}_\sigma$ и $\mathcal{T}_\sigma$. Действительно, корректность и гладкость этих отображений в окрестности $\mathcal{B}$ следуют из свойств отображения $\mathcal{P}$ в этой окрестности (см. §§ 6.3 и 6.4, ср. построение конусов семейства L^2 в начале § 7.6 и семейства $\widetilde{L}$ в начале § 7.7). Рассмотрим дугу $\overline{\beta}$ с одним концом в точке $\xi \in \sigma \cap \mathcal{B}$, использованную для построения отображения $\mathcal{P}_\sigma$. Будем двигать этот конец дуги по кластеру $\lambda_\xi \ni \xi$ по направлению от ξ^0. Тогда второй конец дуги при выходе первого из $\mathcal{B}$ и дальнейшем движении по λ_ξ не «соскочит» с кластера $\widetilde{\lambda}_\eta \subset \widetilde{\sigma}$, где $\eta = \mathcal{P}(\xi)$.

Отсюда, а также из факта, что $D \setminus \{0\}$ локально тривиально расслоено орбитами β, получаем, что для любой точки $\xi \in \sigma$ и любого непрерывного пути Δ на σ, соединяющего точку ξ_1^μ с ξ, а также для любой дуги геодезической $\beta_1 \ni \xi_1^\mu$, соединяющей точку ξ_1^μ с точкой на $\widetilde{\sigma}$, значения $\mathcal{P}_\sigma(\xi, \Delta)$ и $\mathcal{T}_\sigma(\xi, \Delta)$ определены корректно и однозначно. Более того, $\mathcal{P}_\sigma(\xi', \Delta)$ и $\mathcal{T}_\sigma(\xi', \Delta)$ будут непрерывно зависеть от точки $\xi' \in \Delta$ при фиксированном пути Δ. А если путь Δ будет гладким на $\sigma \setminus \partial$, то из кусочной гладкости полоски σ (см. лемму 5.10.Д) получаем, что эта зависимость будет гладкой на $\sigma \setminus \partial$, причем $\mathcal{P}$ локально будет гомеоморфизмом на всем σ и диффеоморфизмом на $\sigma \setminus \partial$. Отсюда и из тех же фактов о взаимном расположении β и σ и β и $\widetilde{\sigma}$ и о регулярности расслоения $D \setminus \{0\}$ орбитами β получаем следующее. Если путь Δ замкнут и стягиваем по σ в точку, то путь $\mathcal{P}_\sigma(\Delta)$ тоже будет замкнут и стягиваем по $\widetilde{\sigma}$ в точку, а приращение геодезической длины $\mathcal{T}_\sigma(\xi_1^\mu, \Delta) - \mathcal{T}_\sigma(\xi_1^\mu)$ вдоль такого пути Δ будет равно нулю (ср. следствие 6.4.Б.iii, где этот факт доказан лишь вблизи точки ξ^0). Следовательно, значения $\mathcal{P}_\sigma(\xi, \Delta)$ и $\mathcal{T}_\sigma(\xi, \Delta)$ для любого пути $\Delta \subset \sigma$, соединяющего точку ξ_1^μ с ξ, действительно будут зависеть только от гомотопического типа пути Δ в σ. Лемма 7.7.Б доказана.

§7.10. Продолжение доказательства предложения 7.3. Соответствие между нижними циклами

Итак, мы находимся в условиях предложения 7.3. Обозначим через $\widetilde{e}_{0h}$ ту из двух связных компонент кластера $\widetilde{\lambda}_{0h} \subset \widetilde{\sigma}$, $h < 0$, которая пересекает сечения $\widetilde{S}_{\mu 1}$ и $\widetilde{S}_{\mu 2}$. Составной цикл $\widetilde{e}_{0h}$ вместе с ориентацией, наведенной циклом $\widetilde{\mathcal{C}}_{0h} = \widetilde{\mathcal{C}}_{0h}^\mu \sim \mathcal{C}_{0h}^2$ (см. начало §7.7), обозначим через $\widetilde{\mathcal{Z}}_h$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{Z}}_h$ образ пути $\mathcal{C}_{0h} = \mathcal{C}_{0h}^\mu \subset \sigma$ при проектировании $\mathcal{P}_\sigma \colon \sigma \to \widetilde{\sigma}$, то есть $\widehat{\mathcal{Z}}_h := \mathcal{P}_\sigma(\mathcal{C}_{0h})$, $h < 0$.

Лемма 7.10.А. *Найдется $\mu_0 > 0$, такое, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ будут верны следующие утверждения. При $h < 0$ путь $\widehat{\mathcal{Z}}_h$ замкнут и совпадает с $\widetilde{\mathcal{Z}}_h$, причем циклы $\widehat{\mathcal{Z}}_h$ и $\widetilde{\mathcal{Z}}_h$, $h < 0$, представляют на торе Λ_{0h} тот же элемент группы $H_1(\Lambda_{0h})$, что и цикл C_{0h}: $\widehat{\mathcal{Z}}_h = \widetilde{\mathcal{Z}}_h \sim C_{0h}$, $h < 0$. Кроме того, приращение геодезической длины $\mathcal{T}_\sigma \colon \sigma \to \mathbf{R}$ на пути $\Delta = C_{0h}$, $h < 0$, равно нулю.*

Доказательство леммы 7.10.А. Из определения отображения $\mathcal{P}_\sigma$ следует $\mathcal{P}_\sigma(\lambda_{0h}) \subseteq \subseteq \widetilde{\sigma} \cap \Lambda_{0h} = \widetilde{\lambda}_{0h}$. Отсюда и из локальной гомеоморфности отображения $\mathcal{P}_\sigma$ (см. лемму 7.7.Б) получаем, что при движении точки ξ по пути C_{0h} точка $\mathcal{P}_\sigma(\xi)$ будет двигаться по рассматриваемому составному циклу $\widetilde{e}_{0h}$ кластера $\widetilde{\lambda}_{0h}$, причем строго в одном направлении. Орбиты β группы G_I пересекают кластер λ_{0h}, $h < 0$, не более чем в одной точке, и то же самое верно для каждого из двух составных циклов, из которых состоит кластер $\widetilde{\lambda}_{0h}$, $h < 0$ (см. лемму 7.7.В). Из этих фактов следует, что кривая $\mathcal{P}_\sigma(\lambda_{0h})$ совпадает с $\widetilde{e}_{0h}$. Так как по условию леммы 7.3 составные циклы $e_{0h} = \lambda_{0h}$ и $\widetilde{e}_{0h} \subset \widetilde{\lambda}_{0h} \sim \lambda_{0h}^2$, $h < 0$, гомотопны друг другу на торе Λ_{0h}, то приращение функции $\mathcal{T}_\sigma$ на пути C_{0h} будет равно нулю. Используя этот факт, получаем, что циклы C_{0h} и $\widehat{\mathcal{Z}}_h = \mathcal{P}_\sigma(C_{0h})$ гомотопны на торе Λ_{0h}. Из определения 7.2.Б и вида главных частей функций $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ (см. (18) и (19)) следует, что при движении по крюку $\mathcal{K}_{0h} \subset e_{0h}$ в соответствии с его положительной ориентацией полярный угол ϕ, отвечающий декартовым координатам (p_1, q_1) на конусе $\mathcal{F}_1^{-1}(0)$, будет расти. Аналогичный факт верен для угла Φ при положительной ориентации крюка $\widetilde{\mathcal{K}}_{0h} \subset \widetilde{e}_{0h}$. Отсюда и из леммы 6.4.А.i следует, что ориентация циклов $\widetilde{\mathcal{Z}}_h$ и $\widehat{\mathcal{Z}}_h$, имеющих один носитель $\widetilde{e}_{0h}$, совпадает на крюке $\widetilde{\mathcal{K}}_{0h} \subset \widetilde{e}_{0h}$, а значит, совпадает и везде, поэтому $\widetilde{\mathcal{Z}}_h = \widehat{\mathcal{Z}}_h$. Лемма 7.10.А доказана.

Замечание 7.10.Б. В рассматриваемой ситуации согласованности кластеров λ_{0h} и $\widetilde{\lambda}_{0h}$, $h < 0$, утверждение леммы 7.10.А останется верным, если условие положительной ориентации обоих циклов C_{0h} и $\widetilde{C}_{0h}$ поменять на условие отрицательной ориентации. Это эквивалентно замене в лемме 7.3 условия положительной ориентации на отрицательную.

§ 7.11. Соответствие между верхними циклами

Пусть C_{0h} и C^2_{0h}, $h > 0$, — циклы, определенные в предложении 7.3, а $\widetilde{C}_{0h} \sim C^2_{0h}$ построен в § 7.7. Обозначим через $\widehat{\mathcal{Z}}_h$, $h > 0$, путь, полученный при проектировании $\mathcal{P}_\sigma$ точки, дважды обходящий кластер λ_{0h} в положительном направлении, то есть $\widehat{\mathcal{Z}}_h := \mathcal{P}_\sigma(2C_{0h})$, $h > 0$.

Лемма 7.11.А. *Найдется $\mu_0 > 0$, такое, что при любом $\mu \in (0, \mu_0)$ будут верны следующие утверждения. Путь $\widehat{\mathcal{Z}}_h$ замкнут и совпадает с циклом $\widetilde{C}_{0h}$, $\widehat{\mathcal{Z}}_h = \widetilde{C}_{0h}$. При этом приращение геодезической длины $\mathcal{T}_\sigma$ при движении по пути $\Delta = 2C_{0h}$ будет равно $+2\pi$.*

Доказательство леммы 7.11.А. Покажем сначала, используя примерно те же соображения, что и в аналогичной ситуации в доказательстве леммы 7.10.А, что носители циклов $\widehat{\mathcal{Z}}_h$ и $\widetilde{C}_{0h}$ совпадают. Действительно, из локальной гомеоморфности отображения $\mathcal{P}_\sigma$ следует, что при движении точки ξ по пути $2C_{0h}$ точка $\mathcal{P}_\sigma(\xi)$ будет двигаться строго в одном направлении по кластеру $\widetilde{\lambda}_{0h}$. Орбиты β группы G_I пересекают кластер λ_{0h}, $h > 0$, не более чем в одной точке (см. лемму 7.7.В), следовательно, это верно и для кривой $\mathcal{P}_\sigma(\lambda_{0h})$. Из той же леммы получаем, что орбиты β пересекают кластер $\widetilde{\lambda}_{0h}$ ровно в двух точках. При этом каждую из двух дуг геодезических и каждый из двух крюков, составляющих $\widetilde{\lambda}_{0h}$, эти орбиты пересекают ровно в одной точке. Отсюда получаем $\widehat{\mathcal{Z}}_h = \pm\widetilde{C}_{0h}$, $h > 0$, что и требовалось.

Покажем теперь, что циклы $\widehat{\mathcal{Z}}_h$ и $\widetilde{C}_{0h}$ просто совпадают. Действительно, ориентация цикла $\widetilde{C}_{0h}$ определяется положительной ориентацией любого из двух крюков $\widetilde{\mathcal{K}}_{0h}$, составляющих носитель $\widetilde{\lambda}_{0h}$, $h > 0$, этого цикла (см. определение 7.2.Б). Из этого определения и из вида главных частей функций $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ (см. (18) и (19)) нетрудно получить следующий факт. При движении по крюку $\widetilde{\mathcal{K}}_{0h}$, $h > 0$, в положительном направлении полярный угол Φ, отвечающий декартовым координатам (p_2, q_2) на конусе $\mathcal{F}_1^{-1}(0) \cap V_+^2$, будет возрастать. Аналогично получаем, что при движении точки ξ в положительном направлении по единственному крюку $\mathcal{K}_{0h}$, $h > 0$, входящему в состав кластера λ_{0h}, полярный угол ϕ, отвечающий декартовым координатам (p_1, q_1) на конусе $\mathcal{F}_1^{-1}(0)$, будет возрастать. Отсюда и из леммы 6.4.А.i следует, что при таком движении точки ξ полярный угол $\Phi(\mathcal{P}_\sigma(\xi))$ тоже будет, в целом, возрастать. Таким образом, точка $\mathcal{P}_\sigma(\xi)$ будет двигаться по крюку $\widetilde{\mathcal{K}}_{0h}$, $h > 0$, в том же направлении, что и точка η, двигающаяся по этому крюку в положительном направлении. Следовательно, ориентации циклов $\widehat{\mathcal{Z}}_h$ и $\widetilde{C}_{0h}$ на этом крюке совпадают, а значит, $\widehat{\mathcal{Z}}_h = \widetilde{C}_{0h}$.

Чтобы разобраться с приращением функции $\mathcal{P}_\sigma$ на пути $\Delta = 2C_{0h}$, представим цикл C_{0h}, $h > 0$, в виде суммы некоторых двух циклов A_h и E_h, лежащих на σ. Обозначим

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_h := \big\{(m', h') \in \mathbf{R}^2 | m' = 0,\, h' \in [-h, h]\big\},$$

то есть $\mathcal{I}_h = \mathcal{I}^{|}_{0b}|_{b=h}$ в обозначениях § 5.10, и обозначим $J_j := (F|_{S_{\mu j}})^{-1}(\mathcal{I})$, $j = 1, 2$. Имеем $\lambda_{0h} = e_{0h} = \alpha_{0h} \cup \mathcal{K}_{0h}$, где α_{0h} — дуга геодезической, а $\mathcal{K}_{0h}$ — крюк, $h > 0$. Заменим в этом объединении крюк $\mathcal{K}_{0h}$ на кривую $J_2 \cup \mathcal{K}_{0,-h} \cup J_1$, соединяющую те же точки, что и крюк $\mathcal{K}_{0h}$. Эта кривая лежит на σ, но по другую сторону от точки $\xi^0 \notin \sigma$, чем $\mathcal{K}_{0h}$, и поэтому она не гомотопна $\mathcal{K}_{0h}$ в σ. Зададим на полученной замкнутой кривой $\alpha_{0h} \cup J_2 \cup \mathcal{K}_{0,-h} \cup J_1$ ориентацию так, чтобы на общем с кластером λ_{0h} участке α_{0h} она совпадала с ориентацией цикла C_{0h}. Полученный цикл обозначим через A_h. Обозначим через E_h цикл с носителем

$J_2 \cup \mathcal{K}_{0,-h} \cup J_1 \cup \mathcal{K}_{0h}$, тоже лежащим на σ, ориентация которого на общем с кластером λ_{0h} участке $\mathcal{K}_{0h}$ совпадает с ориентацией цикла C_{0h}. Тогда $C_{0h} = A_h + E_h$.

Покажем, что приращение функции $\mathcal{T}_\sigma$ на пути $\Delta = 2C_{0h}$ равно 2π. Действительно, рассмотрим путь $\mathcal{P}_\sigma(2C_{0h}) = \mathcal{P}_\sigma(A_h + E_h + A_h + E_h)$. Из построения цикла A_h легко следует, что он гомотопен на σ циклу $C_{0,-h}$. Отсюда и из леммы 7.10.A, а также из следствия 6.4.Б.iii получаем, что цикл $\mathcal{P}_\sigma(A_h)$ замкнут, а приращение функции $\mathcal{T}_\sigma$ на пути A_h равно нулю. Следовательно, приращение функции $\mathcal{T}_\sigma$ на пути $\Delta = 2C_{0h}$ равно приращению этой функции на пути $\Delta' := 2E_h$. Легко видеть, что путь E_h делает на σ один оборот вокруг точки ξ^0 против часовой стрелки, то есть приращение угла ϕ вдоль E_h равно 2π. Отсюда и из леммы 6.4.A.i следует, что приращение функции $\mathcal{T}_\sigma$ вдоль пути Δ', а значит, и вдоль Δ, равно 2π. Лемма 7.11.A полностью доказана.

§7.12. Завершение доказательства предложения 7.3

Итак, мы рассматриваем случай $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Из леммы 7.10.A о нижних кластерах и из утверждения леммы 7.2.B о гомотопности ориентированных составных циклов, формирующих внутренний кластер, получаем

$$2C_{0h} \sim 2\widetilde{\mathcal{Z}}_{0h} = \widetilde{C}_{0h} \sim C_{0h}^2, \quad h < 0. \tag{122}$$

Все циклы в этих соотношениях лежат на одном торе Λ_{0h}, и знак эквивалентности означает гомотопность циклов на этом торе. Из леммы 7.11.A о верхних циклах следует

$$2C_{0h} \sim \widehat{\mathcal{Z}}_h - B_{0h} \sim \widetilde{C}_{0h} - B_{0h} \sim C_{0h}^2 - B_{0h}, \quad h > 0. \tag{123}$$

Получаем утверждение предложения 7.3 при $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Остальные два случая $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ и $m_1 = m_2 = 1$ доказываются аналогично. Кроме того, случай $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ можно свести с помощью инволюции (41) к подробно исследованному выше случаю $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Предложение 7.3 доказано.

Отметим, что случай $m_1 = m_2 = 1$ существенно проще двух остальных, и к тому же он используется лишь для доказательства известного результата — теоремы 2.4. А для доказательства новой теоремы 2.5 нам будет достаточно соотношений (122) и (123) и указания на инволюцию (41) и вид функций $F_i(p, q)$, $i = 1, 2$ (см. (8), (9)).

§8. Завершение доказательств теорем 2.4 и 2.5

В параграфах 8.1 и 8.2 мы будем одновременно исследовать два случая: $m_1 = m_2 = 1$ и $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. В §8.3 приведено завершение доказательства теоремы 2.4 (случай $m_1 = m_2 = 1$), а в §§8.4–8.8 — теоремы 2.5 (случай $m_1 = 1$, $m_2 = 2$).

§8.1. Выбор элемента $\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$ и протягивание его вдоль петли δ

Напомним, что петля δ, для которой будем искать монодромию, уже выбрана (см. п. 4.14). Она имеет вид $\delta = (F|_{S_{\mu 1}})^{-1}(\Gamma)$, где контур Γ имеет вид прямоугольника в плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$, размеры которого $2m^0 \times 2h^0$, а центр находится в начале координат $m = h = 0$. Выделенной точкой петли δ является прообраз ξ^s нижней центральной точки $(0, -h^0)$ при отображении $F|_{S_{\mu 1}}$, $h^0 > 0$; далее переобозначим $H := h^0$. Был также определен элемент $\gamma_1 \in H_1(\Lambda^s)$, где $\Lambda^s \ni \xi^s$, и показано следующее. При обходе петли δ, которую нередко будем отождествлять с контуром Г с помощью диффеоморфизма $F|_{S_{\mu 1}}$, элемент γ_1 переходит сам в себя.

Определим элемент $\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$ на торе Λ^s. Для этого фиксируем некоторое допустимое расширенное семейство кластеров $L = \{\lambda_\xi,\, \xi \in Y^e(k_1)\}$, отвечающее исходному полупространству $V_+ = \{p_2 = 0,\, q_2 > 0\} \subset \mathbf{R}^4_{pq}$ (см. определение 5.10.Г). Рассмотрим цикл $C_{0,-H}$, являющийся положительно ориентированным кластером $\lambda_{0,-H}$, где $\lambda_{mh} = \lambda_\xi \in L$, $F_1(\xi) = m$, $F_2(\xi) = h$ (см. лемму 7.3). Согласно лемме 7.2.В,

$$C_{0,-H} \sim m_2 Z_{-H}, \tag{124}$$

где цикл Z_{-H} — любой из m_2 составных циклов $e_{0,-H}$, из которых состоит кластер $\lambda_{0,-H}$, с ориентацией, наведенной циклом $C_{0,-H}$. Элемент из $H_1(\Lambda^s)$, представленный циклом $-Z_{-H}$, и возьмем в качестве γ_2. Согласно лемме 7.7.В, орбиты β группы G_I пересекают циклы $e_{0,-H}$ ровно по одной точке. Так как ориентированные орбиты β представляют элемент γ_1, то отсюда следует, что элементы γ_1 и γ_2 задают базис в $H_1(\Lambda^s)$.

Протягивать вдоль петли δ будем элемент $m_2\gamma_2$, а для этого будем протягивать цикл $m_2\mathcal{Z}_{-H}$. Для протягивания этого цикла будем использовать кластеры как семейства L, так и согласованного с ним семейства

$$\widetilde{L} = \{\widetilde{\lambda}_\eta, \quad \eta \in Y^e(\widetilde{k}_1)\},$$

отвечающего альтернативному полупространству $V_+^2 = \{p_1 = 0,\, q_1 > 0\}$. Под согласованными семействами такого типа здесь и далее будем понимать, что согласованы кластеры, расслаивающие нижние особые полуполоски σ^- и $\widetilde{\sigma}^-$, то есть полуполоски, лежащие на поверхности $F_1^{-1}(0)$ и отвечающие значениям $h \in (-H, 0)$ (см. определения 7.1.А и 5.10.Б). Существование согласованного альтернативного семейства $\widetilde{L} = L^2$ доказано в предложении 7.1.Б.

Протягивание цикла $m_2\mathcal{Z}_{-H}$ вдоль петли δ разобьем на четыре этапа. На первом этапе цикл $m_2\mathcal{Z}_{-H}$ меняется на эквивалентный ему на торе $\Lambda_{0,-H}$ цикл $m_2\widetilde{C}_{0,-H}$. Здесь $\widetilde{C}_{mh}$ — положительно ориентированный кластер $\widetilde{\lambda}_\eta \in \widetilde{L}$, где $F_1(\eta) = m$, $F_2(\eta) = h$. На втором этапе рассматривается непрерывная деформация циклов $m_2\widetilde{C}_{mh}$, где точка (m, h) пробегает правую половину $\Gamma \cap \{m \geqslant 0\}$ контура Г, начиная от нижней центральной точки $(0, -H)$ и до верхней центральной точки $(0, H)$ этого контура. На третьем этапе мы возвращаемся к циклу, отвечающему исходному полупространству V_+, а точнее, заменяем цикл $m_2\widetilde{\mathcal{C}}_{0,H}$ на эквивалентный ему на торе $\Lambda_{0,H}$ цикл $C_{0,H} + B_{0,H}$, где B_{mh} — орбита потока G_I, ориентированная этим потоком и лежащая на торе Λ_{mh}. Здесь C_{mh} — положительно ориентированный кластер $\lambda_\xi \in L$, где $F_1(\xi) = m$, $F_2(\xi) = h$. На четвертом этапе рассматривается деформация циклов $C_{mh} + B_{mh}$, где точка (m, h) пробегает теперь левую половину $\Gamma \cap \{m \leqslant 0\}$ контура Г от точки $(0, H)$ до точки $(0, -H)$.

Таким образом, на первом этапе происходит замена исходного цикла m_2Z_{-H} на эквивалентный ему, то есть лежащий на том же торе Λ и представляющий тот же элемент из $H_1(\Lambda)$, где $\Lambda = \Lambda^s = \Lambda_{0,-H}$. То же самое делается и на третьем этапе с получившимся после второго этапа циклом, лежащем на Λ_{0H}. На втором этапе рассматривается вполне стандартная непрерывная деформация цикла, лежащего на непрерывно деформируемом торе-слое Λ_{mh}, и эти слои локально тривиально расслаивают прообраз $F^{-1}(\Gamma \cap \{m \geqslant 0\})$ правой части контура Г. На четвертом этапе происходит то же самое, что и на втором, за исключением точки (m_c, h_c), имеющейся лишь в случае $m_2 = 2$ и лежащей на пересечении $\Gamma \cap \tau$. В этой точке локальная тривиальность расслоения на слои Λ нарушается; более того, соответствующий этой точке слой Λ_{mh} перестает быть диффеоморфным и даже гомеоморфным тору, а также перестает быть гладким. В этом причина того, что исходный цикл Z_{-H}, лежащий на стартовом торе $\Lambda^s = \Lambda_{0,-H}$, при $m_2 = 2$ не протягивается через кривую τ. А вот цикл $2Z_{-H}$ протягивается вдоль всего контура Γ, включая и точку пересечения Γ и τ. В обоих случаях $m_2 = 1, 2$ на финише получается цикл $C_{0,-H} + B_{0,-H}$, который эквивалентен циклу

$$m_2 Z_{-H} + B_{0,-H} \tag{125}$$

(см. (124)).

§8.2. Корректность протягивания элемента $\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$

Лемма 8.2.А. *Проведенные выше построения вполне корректны: корректно определены все рассмотренные циклы и верны сделанные утверждения об их эквивалентности и об их непрерывной зависимости от точки, пробегающей петлю δ, которая отождествлялась с контуром* Γ. *Более того, если сгладить кластеры, то будут выполнены все условия протягивания сглаживания цикла $m_2 Z_{-H}$ вдоль петли δ* (см. определение 1.3.А). *Таким образом, элемент $m_2\gamma_2 \in H_1(\Lambda^s)$ при протягивании преобразуется в элемент $m_2\gamma_2 - \gamma_1$.*

Доказательство леммы 8.2.А. Эквивалентность циклов $Z_{-H} \sim \widetilde{C}_{0,-H}$, лежащая в основе первого этапа протягивания цикла $m_2 Z_{-H}$ вдоль δ, следует из предложения 7.3.А. На втором этапе рассматриваем неособое протягивание сглаживания цикла $m_2\widetilde{C}_{0,-H}$ по правой стороне контура Γ (см. определение 1.2.Б); такое протягивание получаем, исходя из свойств при $m_1 = 1$ кластеров $\widetilde{\lambda}_{mh}$ и свойств ориентации этих кластеров в случае ее непрерывной зависимости от (m, h). Здесь кластер $\widetilde{\lambda}_{mh}$ имеет вид кусочно-гладкой замкнутой кривой, лежащей на торе Λ_{mh}, гладко зависящем от точки (m, h) вблизи скобки $\Gamma \cap \{m \geqslant 0\}$. Такой кластер $\widetilde{\lambda}_{mh}$ можно сгладить и получить гладкую кривую, гомотопную на Λ_{mh} кривой $\widetilde{\lambda}_{mh}$ и гладко зависящую от точки (m, h) в окрестности этой скобки.

Эти факты нетрудно получить, опираясь на инволюцию (41) и представление в случае $m_2 = 1$ кластера $\lambda_{mh} = \mathcal{K}_{mh} \cup \alpha_{mh}$ в виде объединения крюка $\mathcal{K}_{mh} \subset V_+$ и дуги геодезической α_{mh}, где $(m, h) \in W^l$, а W^l — некоторая малая окрестность левой части $\Gamma \cap \{m \leqslant 0\}$ контура Γ (ср. замечание 5.10.Ж). Используем также следующие утверждения. Крюк $\mathcal{K}_{mh}$ и дуга α_{mh} гладко зависят от $(m, h) \in W^l$ (см. леммы 5.7.А и 5.3.А соответственно) и гладко зависят от этих (m, h) точки стыковки крюка и дуги, что легко следует из трансверсальности в V_+ линий $\chi_{mh} \supset \mathcal{K}_{mh}$ и сечений S_μ. Аналогично, используя инволюцию (41), получаем, что непрерывно меняющаяся при движении вверх точки (m, h) по правой части $\Gamma \cap \{m \geqslant 0\}$ контура Γ ориентация кластера $\widetilde{\lambda}_{mh}$ сохранит свое положительное направление, которое этот кластер имел в стартовом положении, то есть при $(m, h) = (0, -H)$ (см. леммы 7.2.В и 7.2.Г).

Для большей убедительности можно воспользоваться полосками $\widetilde{\sigma}^{|}$ и $\widetilde{\sigma}^{\pm}$, расслоенными носителями $\widetilde{e}_{mh}$ этих циклов и отвечающими, соответственно, правым вертикальным $\mathcal{I}^{|} = \mathcal{I}^{|}_{m^0 H}$, $m^0 > 0$, и горизонтальным $\mathcal{I}^{\pm}$ отрезкам на плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$ (см. § 5.10). (Аналогично использовались полоски в работе [39].) Эти сечения определяют разбиение объединения кластеров

$$\cup_{(m,h)\in\Gamma\cap\{m\geqslant 0\}} \widetilde{\lambda}_{mh}$$

на три части, в каждой из которых проще следить за деформацией кластеров и ориентацией на них при рассматриваемом движении точки (m, h). Эквивалентность циклов

$m_2\widetilde{C}_{0H} \sim m_2 Z_H + B_{0H}$ на третьем этапе следует из предложения 7.3.Б. Четвертый этап аналогичен второму, кроме случая, когда $m_2 = 2$ и точка (m, h), двигающаяся вниз по контуру Γ, проходит положение (m_c, h_c) — точку пересечения τ и Γ. Используя полоску $\sigma^|$, легко показать, что и в этой ситуации все условия протягивания (см. определение 1.2.В) тоже будут выполнены.

В частности, используя вид расслоения $\sigma^| = \sigma^|_{Mb\mu}$ кластерами λ_{Mh} при $M < 0$ и $m_2 = 2$, получаем следующее. При прохождении точки (m_c, h_c) кластер λ_{Mh}, где $M = m_c$ и $h > h_c$, охватывающий на $\sigma^|$ критический кластер λ_{Mh_c}, имеющий вид восьмерки, преобразуется за счет разрыва этой восьмерки в ее особой точке в кластер λ_{Mh}, $h < h_c$, имеющий следующий вид. Он состоит из двух составных циклов, охватываемых восьмеркой λ_{Mh_c}. Такое преобразование допускается условиями протягивания носителей циклов. Тот факт, что ориентация кластеров λ_{Mh}, непрерывно меняющаяся при прохождении точки (m_c, h_c), сохранит свою положительность, несложно следует из леммы 7.2.В и 7.2.Г (см. также определения 7.2.Б такой ориентации кластеров). Выполнение условий протягивания и сохранение положительности ориентации при движении точки (m, h) по части $\Gamma \cap \{m \leqslant 0\} \setminus \{(m_c, h_c)\}$ левой половины контура Γ, то есть вне точки (m_c, h_c), доказывается, как на втором этапе. Лемма 8.2.А доказана.

§ 8.3. Доказательство теоремы 2.4

Из леммы 4.10.Б следует существование окрестности $U \supset \Lambda^0$ слоя Λ^0, в которой прообраз $F^{-1}(m, h)$ состоит ровно из одного слоя расслоения F. Утверждение 2.4.А следует этого факта, из лемм 4.10.Б, 4.10.Д и из описания множества Σ критических точек отображения F в малой окрестности точки ξ^0 (см. лемму 3.7.Б). Используем также замечание из § 1.1 о локальной тривиальности расслоения на торы области регулярности расслоения с компактными лагранжевыми слоями.

Доказательство теоремы 2.4.Б. Из доказанной леммы 8.2.А и из сохранения элемента $\gamma_1 \in H_1(\Lambda^s)$ при любом отображении монодромии (см. § 4.14) следует, что элементы γ_1 и γ_2 группы $H_1(\Lambda^s)$ при описанном в этой лемме протягивании вдоль петли δ преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases} \gamma_1 \longrightarrow \gamma_1, \\ \gamma_2 \longrightarrow \gamma_2 - \gamma_1. \end{cases}$$

Легко видеть, что такое преобразование не зависит от выбора циклов, представляющих протягивание элемента γ_2, так что корректно определена монодромия вдоль петли δ (см. определение 1.4.Б). Отсюда получаем вид (15) матрицы монодромии $M = M(\delta)$. Пусть U — достаточно малая окрестность в M^4 особого слоя Λ^0, а δ' — любая петля, гомотопная в $U \setminus \Lambda^0$ петле δ. Тогда матрица монодромии $M(\delta')$ будет той же самой: $M(\delta') = M(\delta)$. Это следует из дискретности матрицы $M(\delta')$ — она, очевидно, целочисленная, а также следует из непрерывной зависимости этой матрицы от δ'. Из этих фактов нетрудно получить, что выполнены условия определения 1.5.В, и получить утверждение 2.4.Б.

Доказательство теоремы 2.4.В. Теорема утверждает, что существенно особый слой Λ^0 является пинчтором. Этот факт базируется на виде особого кластера $\lambda_{00} \subset \Lambda_{00} = \Lambda^0$ как замкнутой кривой, проколотой в существенно особой точке ξ^0 и пересекаемой орбитами β группы G_I ровно по одной точке, и на том, что объединение этих орбит совпадает с проколотым слоем $\Lambda^0 \setminus \{\xi^0\}$, который тривиально ими расслаивается (см. лемму 5.1.А и определение 5.10.Б). Используется также тот факт, что ξ^0 является единственной неподвижной точкой сужения группы G_I на слой Λ^0 (см. леммы 4.10.Д и 3.7.Б), причем диаметр любой ее орбиты β, лежащей вблизи точки ξ^0, в координатах (p,q) примерно в два раза больше расстояния от β до ξ^0, в частности, диаметр стремится к нулю при приближении β к ξ^0, — это утверждение вытекает из следствия 4.12.А и леммы 3.3.А. Утверждение 2.4.В доказано. Теорема 2.4 полностью доказана.

§ 8.4. Доказательство теоремы 2.5.А

Доказательство утверждения 2.5.А, как и утверждения 2.4.А, опирается на леммы 4.10.Б и 4.10.Д и состоит в следующем. Заметим прежде всего, что существование окрестности $U \supset \Lambda^0$ слоя Λ^0, в которой прообраз $F^{-1}(m,h)$ состоит ровно из одного слоя расслоения F, следует из леммы 4.10.Б; мы этим фактом неоднократно пользовались и этот слой обозначали через Λ_{mh}. Из леммы 4.10.Д следует, что отображение F задает лагранжево расслоение в малой окрестности $U \supset \Lambda^0$ (см. определение 1.1.Б). Чтобы лучше понять структуру разбиения U на слои $F^{-1}(m,h)$, приведем иное доказательство последнего факта, опирающееся на понятия кластера и составляющих его подмножеств.

Множество критических точек отображения F во всем U совпадает с Σ, а кривая $\tau \setminus \{0\}$ является гладкой в $\mathbf{R}^2_{mh}$, где $\tau = F(\Sigma)$ (см. лемму 3.5.Б). Следовательно, $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus (\Sigma \cup \Lambda^0)$ является гладким подмногообразием в M^4, где $\mathcal{T} = F^{-1}(\tau) \cap U$. Гладкость поверхности $\Sigma \setminus \{\xi^0\}$ доказана в лемме 3.7.Б. Так как $\Lambda^0 \cap \Sigma = \{\xi^0\}$, то слой Λ^0 не гладкий только в точке ξ^0. Каждый слой $\Lambda_{mh} \subset \mathcal{T} \setminus \Lambda^0$ не гладк0ий только в точках пересечения $\Lambda_{mh} \cap \Sigma$. Само пересечение $\Lambda_{mh} \cap \Sigma$ совпадает с одной из орбит β группы G_I. Последнее утверждение получаем из следующих фактов. Вырожденные крюки $\mathcal{K}_{mh}$, входящие в состав вырожденных кластеров λ_{mh}, то есть кластеров $\lambda_{mh} \subset \mathcal{T} \setminus \Lambda^0$, имеют вид креста (см. § 5.8 и лемму 5.9.А). Центральная точка ξ_c этого креста является единственной критической точкой отображения $\mathcal{F} = F|_{V_+}$. Отсюда, из леммы 3.3.Е и из совпадения траекторий потоков G_{F_1} и G_I на Σ (см. доказательство следствия 4.12.В в пп. 4.13.Б) получаем, что орбита β_c группы G_I, проходящая через точку ξ_c, совпадает с $G_I(\lambda_{mh}) \cap \Sigma$. Из леммы 5.9.А или из лемм 7.7.В, 5.3.Б и следствия 4.12.Д следует, что имеет место равенство $\Lambda_{mh} = G_I(\lambda_{mh})$. Таким образом, $\Lambda_{mh} \cap \Sigma = \beta_c$, а значит, $\Lambda_{mh} \cap \Sigma$ при $\Lambda_{mh} \subset \mathcal{T} \setminus \Lambda^0$ является гладкой кривой. Из приведенных утверждений о гладкости множеств получаем, что отображение F задает на U расслоение. Компактность слоев $\Lambda \subset U$ доказана в лемме 4.10.Д. Таким образом, все условия определения 2.1.Г выполнены. Теорема 2.5.А полностью доказана.

§ 8.5. Сведение теоремы 2.5.Б к лемме 8.5.Б о тождественности отображения монодромии при обходе петли δ, стягиваемой в точку

Переобозначим рассмотренную выше петлю $\delta \sim \Gamma$ через δ_0.

Лемма 8.5.А. *В условиях теоремы 2.5.Б при протягивании элементов γ_1 и γ_2 группы $H_1(\Lambda^s)$ вдоль петли δ_0 описанным в § 8.1 способом* (см. определение 1.3.А) *эти элементы преобразуются следующим образом:*

$$\begin{cases} \gamma_1 \longrightarrow \gamma_1, \\ 2\gamma_2 \longrightarrow 2\gamma_2 - \gamma_1. \end{cases} \tag{126}$$

Доказательство леммы 8.5.А. Оно следует из леммы 8.2.А и из сохранения элемента γ_1 при отображении монодромии (см. § 4.14). Для доказательства теоремы 2.5.Б нужно еще проверить условия определений 1.4.Б и 1.5.В. Условие а) определения 1.5.В о всюду плотности множества $\delta \in \mathcal{K}_0(F)$ всех кусочно-гладких петель $\delta \subset U'$ с конечным числом точек пересечения с $U \setminus U_R$ в C^1-пространстве $\mathcal{K} = \mathcal{K}(U')$ вообще всех кусочно-гладких петель $\delta \subset U'$, где $U' := U \setminus (\Lambda^0 \cup \Sigma)$, очевидно. Условие б) определения 1.5.В, а также условие 1.4.Б о независимости протягивания от выбора циклов, представляющих γ_1 и γ_2, и способа их протягивания вдоль δ_0 легко получим из следующего утверждения.

Лемма 8.5.Б. *Пусть δ — любая петля класса $\mathcal{K}_0(F) = \mathcal{K}_0(F, U')$, стягиваемая по U' в точку* (см. обозначения определения 1.5.В). *Тогда любая линейная комбинация $k_1\gamma_1 + 2k_2\gamma_2$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, элементов γ_1 и $2\gamma_2$ группы $H_1(\Lambda^s)$ протягивается вдоль петли δ, причем финишное положение такой комбинации всегда совпадает со стартовым. Если петля $\delta \in \mathcal{K}_0(F)$, пересекая поверхность $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus (\Lambda^0 \cup \Sigma)$, переходит с одной ее стороны на другую, то никакие иные элементы, кроме этих линейных комбинаций, не протягиваются вдоль δ.*

§8.6. Доказательство леммы 8.5.Б и завершение доказательства теоремы 2.5.Б. Доказательство теорем 2.5.В и 2.5.Г

Пусть $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{|}_{Mb}$ — определенный в начале пп. 5.10.А вертикальный отрезок на плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$, лежащий в левой полуплоскости $\{m < 0\}$ и пересекающий кривую $\breve{\tau}$ (см. (106)).

Лемма 8.6.А *При достаточно малых $-M > 0$ и $b > 0$ расслоение слоями Λ расслоения F трехмерной гладкой поверхности с краями $D = D_M = F^{-1}(\mathcal{I}) \cap U$* (см. (108)) *можно продолжить за края до элементарного $(1,2)$-лепесткового расслоения* (см. определение 1.8.А). *При этом прообраз при отображении $F|_U$ точки пересечения $\mathcal{I} \cap \breve{\tau}$ будет особым слоем этого расслоения и, следовательно, $(1,2)$-перекрученным тором* (см. предложение 1.9.Б).

Доказательство леммы 8.6.А. Его легко получаем, исходя из следующих фактов: 1) вида расслоения кластерами λ_{Mh} полоски $\sigma^{|}_{Mb}$ — эти кластеры имеют вид линий, «окружающих» восьмерку λ_{Mh_c}, отвечающую точке (M, h_c) пересечения $\mathcal{I}_{Mb}$ с $\breve{\tau}$ (см. предложение 5.10.В), 2) структуры пересечения кластеров $\lambda_{Mh} \subset \sigma^{|}_{Mb}$ орбитами β группы G_I — в частности, под ненулевым углом и ровно в двух точках, за исключением нерегулярной орбиты $\beta_c \subset \Sigma$ (см. лемму 5.9.А и следствие 4.12.В, а также лемму 3.3.Б и следствие 4.12.А), 3) тот факт, что слой $\Lambda_{Mh} \subset D_M$, $M < 0$, совпадает с разнесением кластера λ_{Mh} группой G_I (см. лемму 5.9.А). Используем также структуру расслоения множества $D = D_M$ орбитами β: везде на D это расслоение локально тривиально кроме орбиты β_c, проходящей через особую точку имеющего вид восьмерки вырожденного кластера λ_{Mh_c}. В окрестности орбиты β_c остальные орбиты два раза «навеваются» на β_c. Эти утверждения о структуре расслоения на орбиты β группы G_I следуют для малой окрестности $\mathcal{O}$ точки ξ^0 из описания орбит ν невозмущенной группы $G_{F_1^0}$ (см. леммы 3.3.А и 3.3.Б) и из малости отличия в $\mathcal{O}$ орбит ν и β (см. следствие 4.12.А). Вне $\mathcal{O}$, то есть в $U \setminus \mathcal{O}$, эти факты следуют из леммы 5.3.Б о структуре дополнения $U \setminus \mathcal{O}$, в частности, из утверждения о том, что орбиты β тривиально расслаивают это дополнение. Используя все эти утверждения, получаем лемму 8.6.А.

Опираясь на тот факт, что установленная в лемме 8.6.А структура элементарного $(1,2)$-лепесткового расслоения множества D_M не зависит от $M < 0$, получаем следующее утверждение.

Следствие 8.6.Б. *Найдется лежащая в левой полуплоскости $\{m < 0\}$ окрестность w в $\mathbf{R}^2_{mh}$ кривой $\breve{\tau} = \tau \setminus \{0\}$ и окрестность U слоя Λ^0, такие, что расслоение 4-мерной обла-*

сти $U^w := F^{-1}(w) \cap U$ *со слоями* Λ *расслоения* F *является* $(1, 2)$*-лепестковым* (см. определение 1.8.Б). *При этом в качестве функции* $A\colon U^w \to \mathbf{R}$*, гиперповерхности уровня которой являются элементарными расслоениями* $(1, 2)$*-лепесткового типа на слои* Λ*, можно взять функцию* F_1*,* $F_1(\xi) = M$*, а в качестве функции* $f\colon U^w \to \mathbf{R}$*, задающей вместе с* A *само расслоение со слоями* Λ *и такой, что* $f^{-1}(0)$ *содержит все критические точки отображения* F *на* U^w*, можно взять функцию* $F_2 - t \circ F_1$*. Здесь* $t\colon m \mapsto h$ *— функция, график которой совпадает с кривой* τ*.*

Из леммы 8.6.А и следствия 8.6.Б, а также из предложения 1.8.В вытекают утверждения теоремы 2.5.Г о лепестковых расслоениях. Доказательство леммы 8.5.Б легко получим из следующей леммы, которая тоже базируется на лемме 8.6.А и следствии 8.6.Б.

Лемма 8.6.В. *Зададим в достаточно малой окрестности* U *существенно особого слоя* Λ^0 *произвольным образом риманову метрику. Пусть петля* $\delta \in K_0(F, U')$ (см. определение 1.4.Б) *содержится в 4-мерном шаре* B *достаточно малого радиуса в этой метрике, причем этот шар лежит в* $U' = U \setminus (\Lambda^0 \cup \Sigma)$*. Тогда при протягивании вдоль* δ *любой линейной комбинации* $k_1\gamma_1 + 2k_2\gamma_2$*,* $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$*, элементов* γ_1 *и* $2\gamma_2$ *группы* $H_1(\Lambda^s)$ *получим ту же самую линейную комбинацию без изменений. Если петля* δ *проходит сквозь гиперповерхность* $\mathcal{T}'$*, то никакой элемент из* $H_1(\Lambda^s)$*, кроме имеющих вид* $k_1\gamma_1 + 2k_2\gamma_2$*, не протягивается вдоль* δ*.*

8.6.Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.6.В. Пусть шар $B \supset \delta$ не пересекается с $\mathcal{T}'$. Так как $B \subset U'$, то B лежит в области регулярности $U_R = U \setminus \mathcal{T}$ окрестности $U \supset \Lambda^0$ (см. лемму 4.10.Д). Такая петля δ, очевидно, стягивается по шару $B \subset U_R$ в точку, и поэтому утверждение леммы в этом случае очевидно. Предположим теперь, что $\delta \in \mathcal{K}_0(F, U')$ и что малый шар $B \supset \delta$, $B \subset U'$, пересекает особую поверхность $\mathcal{T}'$, а значит, $F(B)$ пересекается с $\breve{\tau}$. Используя рассмотренный неособый случай $B \subset U_R$, нетрудно получить, что ситуация сводится к случаю, когда для малого шара $B \supset \delta$ выполнено вложение

$$B \subset U' \cap \{\xi \in U | F_1(\xi) < 0\} = F^{-1}(W \cap \{m < 0\}) \setminus \Sigma,$$

где $W = F(U)$ — окрестность точки $0 \in \mathbf{R}^2_{mh}$, а $\{m < 0\} \subset \mathbf{R}^2_{mh}$ — левая полуплоскость плоскости $\mathbf{R}^2_{mh}$, а также выполнены следующие условия. Гладкая гиперповерхность $\mathcal{T}'$ делит шар B на две части B_1 и B_2, отвечающие двум областям, на которые делит кривая τ пересечение $W \cap \{m < 0\}$, так что $B \setminus \mathcal{T}' = B_1 \cup B_2$. Обе эти части гомеоморфны шарам и лежат в U_R: $B_i \subset U_R$, $i = 1, 2$. Выделенная точка ξ^s петли δ лежит вне $\mathcal{T}$, а значит, внутри одной из частей B_1 либо B_2 (скажем, внутри B_1).

Далее рассмотрим еще несколько редукций. Так как $\delta \in K_0(F, U')$, то есть число точек пересечения петли δ с $U \setminus U_R$ конечно, то возможны лишь перечисленные ниже варианты. Она либо не пересекается с $\mathcal{T}'$, а этот случай, фактически, сводится к рассмотренному выше неособому варианту, либо δ можно представить в некотором смысле как композицию конечного числа петель с той же выделенной точкой ξ^s, где каждая из этих петель обладает следующим свойством. Она либо пересекает $\mathcal{T}'$ в двух точках и пересекает обе части B_1 и B_2 — «сквозной» случай, либо касается $\mathcal{T}'$ в одной точке, а все остальные ее точки лежат в B_1 — «касательный» случай. Докажем сначала утверждение леммы в первом, «сквозном», случае, то есть когда петля δ существенным образом и в двух точках пересекает $\mathcal{T}'$. Из определения 1.8.А лепесткового расслоения, а также из предложения 1.8.В о таких расслоениях следует, что в некотором геометрическом смысле оно подобно прямому произведению элементарного лепесткового расслоения на область $D^l \subset \mathbf{R}^l$, а в нашем случае $l = 1$ — на интервал вещественной оси. Отсюда и из следствия 8.6.Б получаем, что ситуация сводится к случаю, когда такая петля δ лежит на 3-мерной поверхности $D = D_M$ при некотором $M < 0$ (см. (108)), расслоение которой на слои Λ, фактически, является элементарным $(1,2)$-лепестковым (см. лемму 8.6.А).

Учтем, как именно действует группа G_I на D, и рассмотрим проектирование поверхности D_M параллельно орбитам β этой группы на 2-мерную полоску $\sigma^{|}_{Mb}$, соответствующую поверхности D, $D \supset \sigma^{|}_{Mb}$. Нетрудно видеть, что при движении по петле $\delta \subset D$ (сначала в область B_2, а затем опять в область B_1) проекция цикла, представляющего элемент $2\gamma_2$, при этом проектировании перемещается по ориентированным кластерам, расслаивающим полоску $\sigma^{|}_{Mb}$, и это перемещение имеет следующий вид.

Если стартовый кластер был внешнего типа, то он преобразуется во внутренний, состоящий из двух связных компонент, а затем опять преобразуется в исходный внешний кластер. Если же стартовым является внутренний кластер, то он преобразуется во внешний, а затем возвращается в исходное положение. Таким образом, внутренние и внешние кластеры, лежащие на $\sigma^{|}_{Mb}$, легко переходят друг в друга, в то время как двум сопряженным составным циклам внутреннего типа соответствуют половинки составного цикла, совпадающего с внешним кластером. Эти половинки получаются в результате разрыва такого цикла и являются незамкнутыми кривыми. Элемент γ_1 сохраняется при протягивании вдоль любой замкнутой петли $\delta \subset U \setminus \Sigma$. Следовательно, линейные комбинации $k_1\gamma_1 + 2k_2\gamma_2$ протягиваются вдоль петли δ и при этом сохраняются. Напротив, элемент γ_2, а вместе с ним и любые элементы вида $k_1\gamma_1 + (2k_2+1)\gamma_2$, где $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, не протягиваются вдоль петли δ, пересекающей поверхность $\mathcal{T}$. «Касательный» случай рассматривается аналогично. Легко видеть, что в этом случае протягиваются вдоль δ и при протягивании сохраняются оба элемента γ_1 и γ_2, а следовательно, и их линейные комбинации. Лемма 8.6.В доказана.

8.6.Д. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8.5.Б И ТЕОРЕМЫ 2.5.Б. Ясно, что петлю $\delta \subset U'$ класса $\mathcal{K}_0(F)$, стягиваемую по U' в точку, можно представить в некотором смысле как композицию конечного числа петель, лежащих в малых шарах B, для которых выполнены утверждения леммы 8.6.В. И если петля δ на некотором своем участке проходит сквозь поверхность $\mathcal{T}'$, то среди этих «малых» петель найдется хотя бы одна петля, проходящая сквозь поверхность $\mathcal{T}'$ на некотором своем участке. Применяя лемму 8.6.В ко всем входящим в композицию малым петлям, получаем, что при обходе вдоль исходной петли δ любые линейные комбинации $k_1\gamma_1+2k_2\gamma_2$ протягиваются и при этом сохраняются. Из-за наличия в композиции петель, проходящих сквозь $\mathcal{T}$, получаем, что никакие другие линейные комбинации элементов γ_1 и γ_2 вдоль δ не протягиваются. Лемма 8.5.Б доказана.

Условие б) определения 1.5.В легко следует из этой леммы. Независимость протягивания элемента γ_2 от выбора соответствующей деформации циклов (см. определение 1.4.Б) достаточно доказать лишь для малой части пути Δ контура $\Gamma \sim \delta_0$, протыкающей особую кривую τ. Рассмотрим гомотопную в U' точке петлю δ, составленную из путей Δ и $-\Delta$. Применяя лемму 8.5.Б к δ, получаем требуемую независимость для пути Δ, откуда, в частности, следует, что матрица монодромии $M = M(\delta_0)$ имеет вид (16). Таким образом (см. конец абзаца перед формулировкой леммы 8.5.Б), теорема 2.5.Б доказана.

8.6.Е. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5.В И ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2.5.Г. Теорему 2.5.В легко получаем из следующих фактов: 1) из леммы 4.10.Д и из описания множества Σ критических точек отображения F в малой окрестности точки ξ^0 (см. лемму 3.7.Б), 2) из вида кривой $\check{\tau}$ (см. лемму 3.5.Б) и 3) из описания области регулярности $U_R = U \cap M_R$ расслоения F на U (см. лемму 4.10.Д). Используем также представление $\mathcal{T}' = (U \setminus \Lambda^0) \setminus (U_R \cup \Sigma)$. Легко видеть, что $\mathcal{T}'$ связно, а значит, является единственной полупроницаемой стенкой расслоения $F|_U$ с полупроницаемыми особенностями (см. теорему 2.5.Б). Теорема 2.5.В доказана. Из этой теоремы следует, что отображение F задает на $U \setminus \mathcal{T}$ регулярное лагранжево расслоение. Следовательно, слои Λ_{mh} этого расслоения являются торами, а само расслоение будет локально тривиальным (см. § 1.1). Так как каждый слой $\Lambda_{mh} \subset U$ совпадает с прообразом $F^{-1}(m, h)$ (см. утверждение 2.5.А), то базой этого расслоения будет $F(U) \setminus \tau$ (см. утверждение 2.5.В). Но эта база односвязная, поэтому расслоение тривиально, что и завершает доказательство теоремы 2.5.Г.

§ 8.7. Доказательство теоремы 2.5.Д

То, что слой $F^{-1}(m, h)$ при $(m, h) \in \breve{\tau}$ является $(1, 2)$-перекрученным тором, следует из уже доказанных утверждений 2.5.Б, 2.5.В и 2.5.Г, а также из предложения 1.9.Б о том, что особый слой (p, q)-лепесткового расслоения при $q \geqslant 2$ является (p, q)-перекрученным тором. Доказательство того, что особый слой Λ^0 является пинчтором, проведем как в случае $m_1 = m_2 = 1$ (см. доказательство теоремы 2.4.В в § 8.3). Особый кластер $\lambda_{00} \subset \Lambda^0$ имеет вид восьмерки, проколотой в ее особой точке, совпадающей с точкой ξ^0 (см. предложение 5.10.В). Из леммы 5.1.А следует, что каждая орбита β группы G_I пересекает любую из половинок e_{00} восьмерки λ_{00} ровно по одной точке. При этом проколотый в ξ^0 слой $\Lambda^0 \setminus \{\xi^0\}$ получается действием группы G_I на половинку e_{00} проколотой восьмерки λ_{00}, и орбиты этой группы тривиально расслаивают $\Lambda^0 \setminus \{\xi^0\}$. Учтем также, что ξ^0 является единственной неподвижной точкой сужения группы G_I на слой Λ^0, а диаметр ее орбит β, лежащих вблизи точки ξ^0, мал вместе с расстоянием от этих орбит до ξ^0. Из всех этих утверждений получаем, что Λ^0 будет пинчтором. Теорема 2.5.Д доказана.

§ 8.8. Замечание 8.7.А

Пусть выполнены условия теоремы 2.5, и пусть $\delta \subset U' = U \setminus (\Lambda^0 \cup \Sigma)$ — любая допустимая петля, гомотопная в U' введенной в § 4.14 стандартной петле $\delta_0 \sim \Gamma$ и имеющая общую с δ_0 выделенную точку ξ^s. Пусть $\sigma \subset H_1(\Lambda^s)$ — подгруппа с образующими γ_1 и $2\gamma_2$. Тогда отсутствие элементов $\gamma' \in H_1(\Lambda^s) \setminus \sigma$, протягиваемых вдоль петли δ, чисто алгебраически вытекает из однозначности отображения монодромии $\mu\colon \sigma \to \sigma$, отвечающей петле δ, и совпадения этих отображений для всех таких петель. Действительно, допустим противное, то есть что такой элемент γ' существует. Тогда протягивается и элемент γ_2, и результат такого протягивания обозначим через $\phi(\gamma_2)$. Следовательно, $\phi(2\gamma_2) = 2\phi(\gamma_2)$. Протягивание элемента $2\gamma_2$ однозначно, поэтому $2\phi(\gamma_2) = 2\gamma_2 + \gamma_1$. Но справа в этом равенстве стоит несократимый элемент, то есть не представимый в виде $k\gamma$, где $k \geqslant 2$, а $\gamma \in H_1(\Lambda^s)$, в то время как элемент $2\phi(\gamma_2)$ сократим. Полученное противоречие доказывает искомое утверждение.

Список литературы

[1] Atiyah M. F. Convexity and commuting Hamiltonians // Bull. London Math. Soc., 1982, vol. 14, no. 1, pp. 1–15.

[2] Bambusi D., Nekhoroshev N. N. A property of exponential stability in nonlinear wave equations near the fundamental linear mode // Phys. D, 1998, vol. 122, nos. 1–4, pp. 73–104.

[3] Colin de Verdière Y., Vũ Ngọc S. Singular Bohr – Sommerfeld rules for 2D integrable systems // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 2003, vol. 36, no. 1, pp. 1–55.

[4] Cushman R. Geometry of the energy momentum mapping of the spherical pendulum // CWI Newslett., 1983, no. 1, pp. 4–18.

[5] Cushman R. H., Bates L. M. Global aspects of classical integrable systems. Basel: Birkhäuser, 1997. 435 pp.
[6] Cushman R., Duistermaat J. J. Non-Hamiltonian monodromy // J. Differential Equations, 2001, vol. 172, no. 1, pp. 42–58.
[7] Cushman R. H., Duistermaat J. J. The quantum mechanical spherical pendulum // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 1988, vol. 19, no. 2, pp. 475–479.
[8] Cushman R. H., Vũ Ngọc S. Sign of the monodromy for Liouville integrable systems // Ann. Henri Poincaré, 2002, vol. 3, no. 5, pp. 883–894.
[9] Dhont G., Sadovskii D. A., Zhilinskii B. I., Boudon V. Analysis of the «unusual» vibrational components of triply degenerate vibrational mode ν_6 of $\mathrm{Mo(CO)}_6$ based on the classical interpretation of the effective rotation–vibration Hamiltonian // J. Molecular Spectroscopy, 2000, vol. 201, pp. 95–108.
[10] Duistermaat J. J. On global action-angle coordinates // Comm. Pure Appl. Math., 1980, vol. 33, no. 6, pp. 687–706.
[11] Dullin H., Giacobbe A., Cushman R. Monodromy in the resonant swing spring // Phys. D, 2004, vol. 190, nos. 1–2, pp. 15–37.
[12] Efstathiou K., Cushman R. H., Sadovskii D. A. Fractional monodromy in the $1:(-2)$ resonance // Adv. Math., 2007, vol. 209, no. 1, pp. 241–273.
[13] Faure F., Zhilinskii B. I. Topological Chern indices in molecular spectra // Phys. Rev. Lett., 2000, vol. 85, no. 5, pp. 960–963.
[14] Giacobbe A., Cushman R. H., Sadovskii D. A., Zhilinskii B. I. Monodromy of the quantum $1:1:2$ resonant swing spring // J. Math. Phys., 2004, vol. 45, no. 12, pp. 5076–5100.
[15] Kosin I. N., Roberts R. M. Monodromy in the spectrum of a rigid symmetric top molecule in an electric fields // J. Chem. Phys., 2003, vol. 118, no. 23, pp. 10523–10533.
[16] Kudryavtseva E. A. Generalization of geometric Poincaré theorem for small perturbations // Regul. Chaotic Dyn., 1998, vol. 3, no. 2, pp. 46–66.
[17] Lerman L. M., Umanskiy Ya. L. Four-dimensional integrable Hamiltonian systems with simple singular points (topological aspects). (Transl. Math. Monogr., vol. 176.) Providence, R.I.: AMS, 1998. 177 pp.
[18] Michel L., Zhilinskii B. I. Symmetry, invariants, topology: Basic tools // Phys. Rep., 2001, vol. 341, nos. 1–6, pp. 11–84.
[19] Nekhoroshev N. N. Generalizations of Gordon theorem // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 3, pp. 239–247.
[20] Nekhoroshev N. N., Sadovskii D. A., Zhilinskii B. I. Fractional monodromy of resonant classical and quantum oscillators // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2002, vol. 335, no. 11, pp. 985–988.
[21] Nekhoroshev N. N., Sadovskii D. A., Zhilinskii B. I. Fractional Hamiltonian monodromy // Ann. Henri Poincaré, 2006, vol. 7, no. 6, pp. 1099–1211.
[22] Nguyen T. Z. A note on focus-focus singularities // Differential Geom. Appl., 1997, vol. 7, no. 2, pp. 123–130.
[23] Nguyen T. Z. Another note on focus-focus singularities // Lett. Math. Phys., 2002, vol. 60, no. 1, pp. 87–99.
[24] Sadovskii D. A., Zhilinskii B. I. Qualitative analysis of vibration–rotation Hamiltonians for spherical top molecules // Molecular Phys., 1988, vol. 65, no. 1, pp. 109–128.
[25] Sadovskii D. A., Zhilinskii B. I. Monodromy, diabolic points, and angular momentum coupling // Phys. Lett. A, 1999, vol. 256, no. 4, pp. 235–244.
[26] Vũ Ngọc S. Quantum monodromy in integrable systems // Comm. Math. Phys., 1999, vol. 203, no. 2, pp. 465–479.
[27] Zhilinskii B. I. Symmetry, invariants, and topology in molecular models: Symmetry, invariants, topology // Phys. Rep., 2001, vol. 341, nos. 1–6, pp. 85–171.
[28] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Москва: Наука, 1989. 472 с.
[29] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений: В 2-х тт. Москва: Наука, 1982, 1984. 303 с.; 334 с.

[30] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия. (Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 4.) Москва: ВИНИТИ, 1985. С. 5–139.

[31] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. (Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 3.) Москва: ВИНИТИ, 1985. С. 5–304.

[32] Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. Москва: Мир, 1967. 335 с.

[33] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 464 с.

[34] Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. Москва: Мир, 1981. 504 с.

[35] Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. Москва: Наука, 1991. 368 с.

[36] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 429 с.

[37] Матвеев В. С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус–фокус и седло–седло // Матем. сб., 1996, т. 187, № 4, с. 29–58.

[38] Нехорошев Н. Н. Две теоремы о переменных действие–угол // УМН, 1969, т. 24, № 5(149), с. 237–238.

[39] Нехорошев Н. Н. Дробная монодромия в случае произвольных резонансов // Матем. сб., 2007, т. 198, № 3, с. 91–136.

[40] Нехорошев Н. Н. Переменные действие–угол и их обобщения // Тр. ММО, 1972, т. 26, с. 181–198.

[41] Нехорошев Н. Н. Сильная устойчивость приближенной основной моды нелинейного уравнения струны // Тр. ММО, 2002, т. 63, с. 166–236.

[42] Нехорошев Н. Н. Теорема Пуанкаре – Ляпунова – Лиувилля – Арнольда // Функц. анализ и его прил., 1994, т. 28, № 2, pp. 67–69.

[43] Нехорошев Н. Н. Типы интегрируемости на подмногообразии и обобщения теоремы Гордона // Тр. ММО, 2005, т. 66, с. 184–262.

[44] Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля. Москва: МЦНМО, 2005. 584 с.

[45] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия: Методы и приложения. Москва: МГУ, 1988. 413 с.

Monodromy of the fibre with oscillatory singular point of type 1 : (−2)

Nikolaí N. Nekhoroshev

Lomonosov Moscow State University,
GSP-1, 1-52, Leninskie gory, 119991, Moscow, Russia

In the present work, we prove the existence of fractional monodromy in a large class of compact Lagrangian fibrations of four-dimensional symplectic manifolds. These fibrations are considered in the neighbourhood of the singular fibre Λ^0, that has a single singular point corresponding to a nonlinear oscillator with frequencies in $1 : (-2)$ resonance. We compute the matrices of monodromy defined by going around the fibre Λ^0. For all fibrations in the class and for an appropriate choice of the basis in the one-dimensional homology group of the torus, these matrices are the same. The elements of the monodromy matrix are rational and there is a non-integer element among them. This work is a continuation of the analysis in [20, 21, 39] where the matrix of fractional monodromy was computed for most simple particular fibrations of the class.

MSC 2010: 37J35, 58K10
Keywords: Hamiltonian monodromy, singular toric fibrations, first homology group

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 413–552 (Russian)