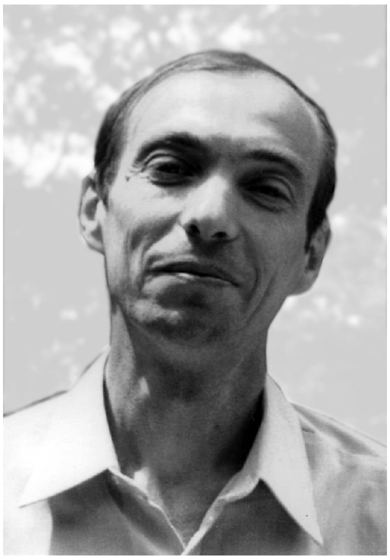
Послесловие к статье Н. Н. Нехорошева



Николай Нехорошев, 1946–2008

Важной чертой Н. Н. Нехорошева был его интерес и стремление заниматься тем, что необходимо для разработки реальных проблем в прикладной механике и физике. Так, в 2001 году, при его первой встрече с Б. И. Жилинским на конференции в Институте Ньютона, в Кэмбридже[2], он заинтересовался математическими аспектами качественных моделей конкретных атомных и молекулярных квантовых систем (атом водорода во внешних однородных полях, система нескольких связанных угловых моментов). Прежде всего его интересовало использование методов теории интегрируемых гамильтоновых динамических систем в задачах, для которых переменные действие – угол не существуют глобально.

Проблема существования глобальных переменных действие – угол была рассмотрена в первой научной работе Н. Н. Нехорошева [38, 40], написанной в МГУ на основе его дипломной работы 1971 года под руководством В. И. Арнольда. Уже в то время Нехорошев осознал, что монодромия является простейшим препятствием для существования этих переменных. Однако физические примеры такой монодромии не рассматривались, и она оставалась математической абстракцией, вне возможных приложений. Позднее, благодаря независимой работе Дёйстермата [10] и ее развитию Кушманом [4, 6, 7], гамильтонова монодромия и ее квантовый аналог заинтересовали физиков. Многие физические фундаментальные системы оказались существенным образом связанными с монодромией [14, 15, 25, 46, 48–50, 53, 60]. Надо отметить, что сам Дёйстермат (1942–2010) хорошо понимал вклад Нехорошева и с большим интересом относился к его работам по монодромии.

Во время своего визита в качестве приглашенного профессора во французский университет Литтораль, в Дюнкерке[3] в конце 2001–начале 2002 года Н. Н. Нехорошев обращает внимание на формальные эвристические обобщения квантовой монодромии, предложенные Б. И. Жилинским [61], который рассматривал совместные спектры собственных значений двух квантовых операторов — энергии и момента, соответствующих первым интегралам классической системы (см. примеры на рисунке 1). В пространстве возможных значений энергии h и момента m, то есть в базе интегрируемого расслоения F, такой спектр образует решетку с локальной структурой $\boldsymbol{Z}^2$ (связанной с целой аффинной структурой [55, 58, 59]). Монодромия проявляется как (точечный) *дефект* этой решетки с центром в образе существенно особой точки ξ^0 (точка $0 \in \boldsymbol{R}^2$ на рисунке 1). Вслед за Б. И. Жилинским [25, 61], стало общепринятым демонстрировать такие дефекты с помощью элементарных (минимальных) ячеек, которые непрерывно деформируются по мере продвижения по замкнутому пути в регулярной части решетки вокруг образа ξ^0 (нетривиальный цикл фундаментальной группы базы расслоения). Отметим, что выбор ячейки однозначно соответствует выбору базиса в группе гомологий H_1 регулярных слоев Λ. Монодромия определяет соотношение конечной и начальной ячеек; пример «обычной» монодромии представлен на рисунке 1a.

[2]Isaac Newton Institute, Cambridge, UK.

[3]Université du Littoral — Côte d'Opale, Dunkerque, France.

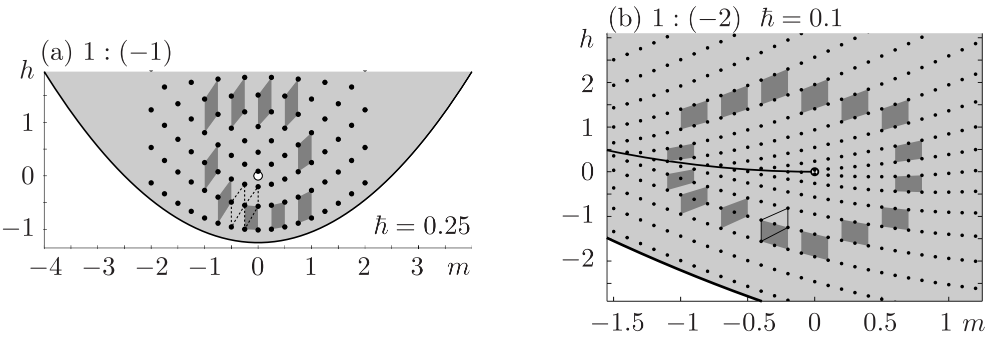


Рис. 1. Квантовые решетки (черные точки) в базе (затушеванная область) конкретных интегрируемых расслоений F [21] вблизи резонансной осцилляторной точки: (a) $1:(-1)$, (b) $1:(-2)$. Образ существенно особой точки ξ^0 находится в $(0,0)$ и показан большим кружком. Сплошные линии представляют критические значения F: относительные равновесия с минимальной энергией h при заданном моменте m соответствуют толстой линии (нижняя граница), а тонкая линия в случае (b) соответствует «слабым» особенностям F. Обычная (a) и «дробная» (b) квантовая монодромия проявляется как *дефект* решеток в $(0,0)$, который продемонстрирован с помощью диаграмм Б. И. Жилинского (темные четырехугольники). В случае (b) *минимальная* ячейка с необходимостью выбрана для подрешетки индекса 2. Значение $\hbar$ подобрано так, что решетки достаточно плотны вблизи ξ^0.

В начале 2002 года, рассматривая возможные решетки, Б. И. Жилинский предположил существование «дробного» дефекта и связал его с резонансом $1:2$. Совместными усилиями была предложена подходящая динамическая система, резонансный осциллятор $1:(-2)$ с компактифицирующим вкладом $R(q,p)$. После того как Б. И. Жилинский отбыл на несколько месяцев с визитом в Дрезден, на нас легла трудная задача соединить его предположения с тем, что реально происходит в конкретной системе. Это заняло несколько месяцев. Первоначально Н. Н. Нехорошев категорически возражал против того, что монодромия может быть «дробной». (И в самом деле, ведь речь идет об автоморфизмах группы гомологий тора H_1, которые задаются матрицами с целыми коэффициентами!) Конкретный пример для квантового аналога нашей резонансной системы $1:(-2)$, показанный на рисунке 1b, помог ему понять и проинтерпретировать происходящее, переходя к подгруппе H_1/Z_2 [20]. Н. Н. Нехорошев сумел сформулировать идею своего доказательства обычной и дробной монодромии для наших конкретных примеров. Его подход дает универсальное описание, опирающееся на геометрические свойства расслоения F. Динамика используется только для ориентации циклов в группе $H_1(\Lambda)$ (для так называемого «знака» монодромии [51]). Другими словами, Н. Н. Нехорошев дал геометрическое доказательство гамильтоновой монодромии, которое может непосредственно сравниваться с монодромией в других областях математики. Заметим, что если «обычная» гамильтонова монодромия в простейшем невырожденном случае локально аналогична монодромии Пикара – Лефшеца для особенности A_1, аналога дробной монодромии в теории особенностей нет. Так, занимаясь анализом конкретных динамических систем, Н. Н. Нехорошев обобщил само понятие монодромии. Его определение монодромии допускает рассмотрение подгруппы группы гомологий регулярных слоев. Н. Н. Нехорошев хорошо понимал необходимость полных, надежных доказательств, но прежде всего он стремился к концептуальной ясности и универсальности. Вспоминаются его слова: «Главное сейчас — чтобы мы сами твердо поняли, что наша формулировка верна! А доказательства — другие пойдут вслед за нами и приведут их». Впоследствии нам потребовалось несколько лет, серия совместных встреч и обсуждений, чтобы оформить наши доказательства для конкретного примера [21].

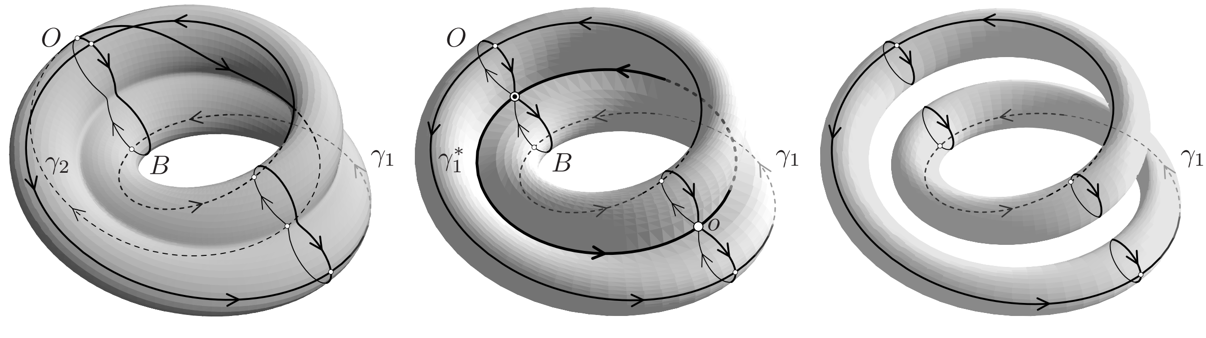
Понимая новизну концепции дробной (обобщенной) монодромии, Н. Н. Нехорошев активно взялся за ее математически строгое обоснование [21, 39, 56]. Это привело к созданию публикуемой рукописи. В то же время идея дробной монодромии получила признание и, как и предвидел Николай Николаевич, последовали новые доказательства и интерпретации [12, 47, 52, 57, 64]. Мы можем без преувеличения сказать, что в последние годы жизни обобщенная монодромия стала одним из основных научных интересов Н. Н. Нехорошева. Он является ключевой фигурой в построении ее математической теории [21, 39]. Безвременная кончина Н. Н. Нехорошева [62] оставила без продолжения многие направления дальнейшего обобщения и приложений, которые он наметил в предлагаемой рукописи и активно обсуждал с нами и которые он, полный новых идей, намеревался разрабатывать в мае 2008 года во время своего нового визита в университет Литтораль. За неделю до отъезда резкое неожиданное ухудшение здоровья заставило его отменить поездку. Далеко идущие планы так и не были реализованы.

Д. А. Садовский, сентябрь 2016 года

1.1. О рукописи

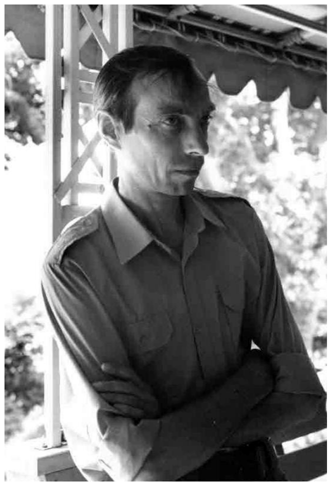
Предлагаемая статья Н. Н. Нехорошева ранее не публиковалась. Она была найдена в конце 2008 года в его компьютерных файлах и была предоставлена Ириной Васильевой, его вдовой, которая взяла на себя переписку Нехорошева во время его тяжелой и скоротечной болезни. Она также предоставила фотографии и документы, использованные в приложении. Н. Н. Нехорошев представил свою рукопись в журнал «Известия РАН. Серия математическая» в конце 2007 года или в начале 2008 года. В феврале-марте он получает первый отзыв рецензента, на который подробно отвечает 3-го апреля. Ответ сохранился. Аргументация Нехорошева интересна для понимания и его взгляда на гамильтонову монодромию, и самой статьи, и приводится, с сокращениями, в разделе 1.2. В мае Николай Николаевич уже потерял зрение. Началась трудная борьба с быстро прогрессирующим беспощадным недугом. Работать он уже не мог.

Основным препятствием к публикации, по мнению рецензента, оставалось то, что «научная значимость полученных результатов недостаточна для того, чтобы журнал «Известия РАН. Сер. мат.» резко изменил допустимый размер публикации». Редколлегия журнала подтвердила, что статья может быть рассмотрена вновь только после ее существенного сокращения. Характерны математические возражения в отзыве (см. раздел 1.2). Рецензент статьи, хотя и был достаточно знаком с монодромией в теории особенностей и комплексной геометрии [29, 54, 63], не смог осознать все последствия компактности слоев интегрируемой гамильтоновой системы и, как результат, — нелокальность монодромии в таком случае. А именно этот аспект, по-видимому, занимал больше всего самого Н. Н. Нехорошева, поскольку нелокальность существенна для «дробной» монодромии. Так, в «обычном» случае особенности Морса A_1 относительный (ко-исчезающий) цикл γ_2 на регулярных некомпактных слоях (цилиндрах) Λ вблизи особенности можно должным образом замкнуть, заклеивая концы Λ в торы на достаточном отдалении от существенно особой точки ξ^0, и тем самым получить эквивалентность гамильтоновому случаю. В случае же «дробной» монодромии, рассматриваемой Нехорошевым в статье (см. рис. 2), γ_2 проходит *дважды* (а в общем случае — несколько раз [39]) вблизи ξ^0, тем самым связывая сложным образом малую окрестность ξ^0 с отдаленными областями многообразия M. Сам Н. Н. Нехорошев глубоко понимал этот аспект, рассматривал его как принципиально новый и продолжал работать над ним [39, 56].



(a) (b) (c)

Рис. 2. Регулярные слои Λ, «толстый» тор (a) и «тонкий» тор (c), вблизи «слабой» особенности (b) (перекрученное двуторие) системы $1 : (-2)$. На торе (a) цикл γ_2 выбран как $OBO - \gamma_1$. Один из первых рисунков, используемых Н. Н. Нехорошевым для иллюстрации дробной монодромии [20, 21]. Он писал: *Преобразование тора, которое происходит при пересечении линии навивания* (b)*, можно было бы назвать «питонизацией». Питон, проглотив свинью, утолщается и несколько укорачивается, а затем пару недель спокойно ее переваривает. Для удобства и компактности — чтобы на него кто-нибудь случайно не наступил — он к тому же еще и стягивается. С тором происходит более сложное преобразование, чем-то похожее на то, что происходит с питоном.*



Окончательный ответ из редакции с отказом в публикации пришел только в июле 2008 года. Очевидно, что изменить (а тем более — сократить) рукопись было к тому времени невозможно. Да и из его ответа (см. раздел 1.2) было видно, что Николай Николаевич не согласился бы с этим. Впоследствии возникла мысль перевести рукопись на английский язык и опубликовать без сокращений в формате «Lecture Notes». Однако объем и сложность текста Нехорошева, изобилующего яркими неформальными терминами и требующего качественного виртуозного перевода, сильно тормозили такой проект. Именно поэтому предлагаемая публикация рукописи в полном объеме на родном языке автора представляется как оптимальное решение.

Вспоминается, что Николай Николаевич работал только на русском. Целеустремленный, с большим вниманием к деталям, он в то же время просматривал далеко вперед и соотносился с другими областями математики, которые он так глубоко понимал. Добиваясь полной ясности, он мог мучительно переделывать по несколько раз один и тот же параграф, лемму, определение. Порой результатом целого дня тяжелого совместного труда могла быть половина странички, а иногда она в отчаянии отвергалась на следующий день. Зная, с какой тщательностью относился Н. Н. Нехорошев к работе и как экономично он пытался формулировать свои утверждения, на нас, его читателей, ложится трудная задача понять полностью то, что он так стремился до нас донести.

1.2. Из ответов Н. Н. Нехорошева неизвестному рецензенту из журнала «Известия РАН»

Далеко не все приведенные в [отзыве] замечания понятны, и у меня появился ряд вопросов (в цитатах из рецензии курсив Н. Н.).

Рецензент (в начале отзыва). В статье исследуется локальная топология лагранжева слоения (в окрестности начала координат), порожденного совместными уровнями инволютивной пары функций (далее формулы) на пространстве $\boldsymbol{R}^4$ со стандартной скобкой Пуассона.

Ответ Н. Н. Локальная топология такого лагранжева слоения действительно исследуется, но это не основное утверждение статьи, а лишь вспомогательное, хотя и полезное само по себе. Основное утверждение гораздо более сложное и состоит в отыскании дробной монодромии лагранжева расслоения, заданного на произвольном 4-х мерном симплектическом многообразии M, см. название статьи, аннотацию и теорему 2.5. Эта проблема существенно нелокальна уже в простейшем случае $M = \boldsymbol{R}^4$, так как монодромия считается через циклы на слоях расслоения, близких к существенно особому слою λ^0, а все эти циклы, кроме одного, большие, порядка 1, то есть не убывают при приближении к особому слою. А из одного цикла даже базиса в группе гомологий двумерной поверхности построить нельзя. По всей видимости, некоторые неясности в понимании глобального характера основной проблемы роковым образом повлияли на восприятие рецензируемой статьи.

Рецензент. По-видимому, случай $R_1 = R_2 = 0$ относительно прост для исследования. Слоение в случае $R_1, R_2 \neq 0$ должно получаться из предыдущего ($R_1 = R_2 = 0$) *малой деформацией.* Так как вычисляется *дискретный* инвариант, ответ должен оставаться *прежним.*

Ответ Н. Н. При $R_1 = R_2 = 0$ все слои рассматриваемого расслоения некомпактны, так как неограничены. (Типичные слои в этом случае являются цилиндрами.) Поэтому монодромия (в исследуемом смысле) вообще не существует. Не может существовать, разумеется, и гомотопия, сохраняющая слоения и связывающая случай $R_1 = R_2 = 0$ с любым случаем, когда такая монодромия существует. В тексте статьи неоднократно подчеркивалось, что слои рассматриваемых лагранжевых расслоений компактны.

Пример, когда дробная монодромия имеет место, существует (например, при $R_1 = 0$ и некотором $R_2 \neq 0$ со специальными свойствами), но существенно особый слой λ^0 и близлежащие к нему слои *глобальны*, то есть порядка 1. Они не малы и не находятся в какой-либо малой окрестности существенно особой точки ξ^0, и, вообще говоря, уже сам слой λ^0 может быть сколь угодно большим в зависимости от того, какими выбраны R_1 и R_2. Таким образом, для интегрируемых расслоений общего класса, рассматриваемого в статье, существенно особый слой не может, как правило, получиться малой деформацией из существенно особого слоя какого-либо одного примера. Что касается построения малой деформации, связывающей лишь сужения этих двух расслоений на достаточно малые окрестности нулевой точки, см. формулы приведенные в отзыве, то даже этот плевый, вроде бы, вопрос не является совсем уж очевидным в случае, когда обе функции R_1 и R_2 отличны от нуля. Но если речь идет об этой локальной проблеме, то при чем здесь глобальные дискретные инварианты?

[Замечание рецензента о малой деформации и дискретном инварианте не верно.]

Если допустить, что в окрестности существенно особого слоя расслоение гомотопно расслоению в окрестности существенно особого слоя упомянутого примера, то соображение рецензента работает. Но дело в том, что никакой такой деформации для рассматриваемых в статье расслоений не предполагается. Да и не ясно, существует ли вообще что-либо подобное такой гомотопии или деформации для каждого из расслоений класса, рассматриваемого в статье. В ней рассматривается случай, когда лагранжево расслоение с особыми слоями задано на произвольном симплектическом многообразии M размерности 4. А это многообразие может иметь сложную топологическую структуру, имея, например, богатую фундаментальную группу. Вместе с M, *a priori*, может быть «закрученным и перекрученным» и существенно особый слой λ^0. А в такой ситуации совершенно неясно, как строить деформацию, сохраняющую слои в окрестности существенно особого слоя, если одно лагранжево расслоение задано на сложно устроенном симплектическом многообразии, а другое, из упомянутого примера, задано на стандартном линейном симплектическом пространстве. Но даже если предположить, что оба расслоения заданы на стандартном линейном симплектическом пространстве, то и тогда остается проблема построения деформации расслоения, обладающей необходимыми свойствами. Мало того, что в процессе деформации существенно особый слой все время должен быть лагранжевым, но и все соседние слои тоже должны быть лагражевыми. При этом целые семейства из этих слоев обязаны иметь особенности, неустранимые малым шевелением. Дело в том, что монодромия определяется именно соседними слоями. Так что и в этом, на первый взгляд, несложном случае не все так просто.

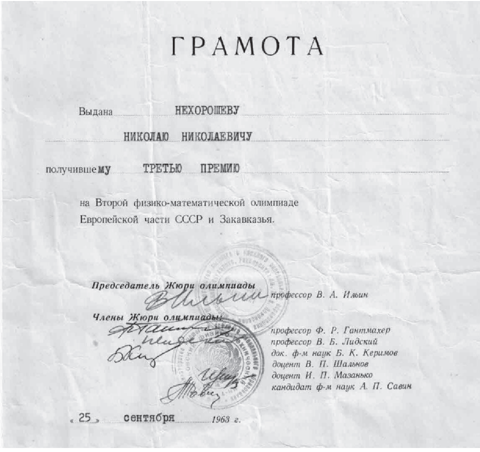
Рецензент. Сама статья занимает *96 страниц* довольно плотного текста (так что, похоже, в журнальном варианте будет далеко за 100). Однако, на мой взгляд, значимость результата не столь велика, чтобы нашлось хотя бы несколько человек, которые прочитают этот текст. Я бы мог рекомендовать этот текст к публикации в Изв. РАН сер. мат., если бы его длина была бы около *20 страниц*, но никак не в настоящем виде.

Ответ Н. Н. Сделать доказательство основного результата более коротким у меня не получилось. Все остальное занимает малую часть статьи. Так что на мотивировках, определениях и формулировках утверждений много не сэкономишь, да это и не стоит делать. Хотелось бы привести доказательство полностью по следующей причине. Представляется, что статья может быть небесполезной не только из-за основного результата, но и за счет иллюстрации достаточно эффективных и универсальных приемов подсчета монодромии на основе особого типа глобального сечения, подобного сечению Пуанкаре для траекторий векторных полей. Дело в том, что монодромию вычисляют в достаточно разных конкретных ситуациях. Приведенные в доказательстве подходы (быть может, после некоторой их притирки) вполне могут помочь и в этих ситуациях. Во всяком случае, менее совершенные методы, разработанные в упомянутой выше совместной статье [21], уже нашли свое применение.

Наша [исходная] статья [21] имеет объем 112 страниц, но по сведениям, полученным от моих соавторов, она вызвала определенный интерес во Франции, Италии и Англии. И думается, что уж несколько человек новую статью на эту тему прочитают всю. Вопрос со значением является, конечно, достаточно тонким. Я, например, абсолютно уверен, что статья весьма полезна как с позиции чистой математики, так и с позиции приложений. Впрочем, такое направление мыслей типично для авторов, так что я могу быть не объективен.

1.3. К биографии Н. Н. Нехорошева

Николай Николаевич родился 2-го октября 1946 года в городе Курске. Отец (1902–1984) служил в пограничных войсках, был на фронте, а после войны работал ветеринарным фельдшером. Мать (1905–1991) — домохозяйка. Три сестры Николая Николаевича, Грета (род. 1929), Женя (род. 1934) и Люда (род. 1939), проживали в 2000-е годы в Курске. По воспоминаниям старшей сестры, Греты, Николай жил с матерью и отцом в Курске. Сестры жили отдельно, Грета — на Дальнем Востоке. Как ветеринар, отец подрабатывал, давали выпить... В жизни семьи он участвовал мало, и это, видимо, наложило отпечаток. Поз-



ГРАМОТА

Выдана НЕХОРОШЕВУ
НИКОЛАЮ НИКОЛАЕВИЧУ
получившему ТРЕТЬЮ ПРЕМИЮ
на Второй физико-математической олимпиаде Европейской части СССР и Закавказья.

Председатель Жюри олимпиады *профессор В. А. Ильин*

Члены Жюри олимпиады: *профессор Ф. Р. Гантмахер*
профессор В. Б. Лидский
док. ф-м наук Б. К. Керимов
доцент В. П. Шальнов
доцент И. П. Мазанько
кандидат ф-м наук А. П. Савин

«25» сентября 1963 г.

ПОЧЕТНАЯ ГРАМОТА

Награждается ученик 10 класса [illegible] общеобразовательной трудовой политехнической школы с [illegible] обучением № 38 г. Курска НЕХОРОШЕВ [illegible] за участие в 4-ой областной математической олимпиаде [illegible] школ Курска и области 24 февраля 1963 года и занявший [illegible] место в олимпиаде.

ЗАВЕДУЮЩИЙ
КУРСКИМ ОБЛАСТНЫМ /ПРОМЫШЛЕННЫМ/
ОТДЕЛОМ НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ /М. НИКИФОРОВ/

г. Курск
26 февраля 1963 г.

же Николай Николаевич спиртного в рот не брал. Самый младший в семье, единственный и долгожданный сын, мальчик рос любимцем матери. Она имела образование в рамках средней школы и принимала самое активное участие в его жизни, ходила на родительские собрания, следила за его заданиями. По-видимому, такие черты его характера, как деликатность, требовательность к себе и тщательность в работе, сложились в юности под ее влиянием. Впоследствии Николай Николаевич был очень близок с матерью и тяжело переживал ее уход. После ее смерти в 1991 году он в Курске ни разу не был.

В. И. Арнольд с учениками школы-интерната № 18, впереди — Коля Нехорошев. «Советская Россия» от 7-го марта 1964 года. Фото Н. С. Сафонова

Очень исполнительный по натуре, Николай отличался редкой тщательностью в приготовлении уроков. Он имел друзей и иной раз подолгу пропадал на улице. Его интерес к математике пробудили учителя, которых он с благодарностью вспоминал. В феврале 1963 года, десятиклассником средней общеобразовательной политехнической школы № 38 с трудовым обучением города Курска, Николай принимает участие в 4-ой математической олимпиаде учащихся школ Курска и области и занимает первое место. В том же году он стал призером Всероссийской математической олимпиады и был приглашен в первую летнюю математическую школу (Красновидово), организованную академиками А. Н. Колмогоровым и П. С. Александровым. По результатам зачетов его отбирают в числе девятнадцати первых выпускников в 11-й класс физико-математической школы-интерната № 18 города Москвы, где преподавателями математики были, в частности, А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд — его будущий научный руководитель. Так в 17 лет Николай покидает родной Курск. В сентябре того же года он получает 3-ю премию на Второй физико-математической олимпиаде Европейской части СССР и Закавказья, организованной сотрудниками МГУ и МФТИ (профессора В. А. Ильин, Ф. Р. Гантмахер, и другие).

В 1964 году выпускник физико-математической школы-интерната № 18 Н. Н. Нехорошев поступил на механико-математический факультет МГУ. С этого времени он всю жизнь был связан с механико-математическим факультетом. Здесь, окончив университет в 1969 году, с октября того же года по март 1972-го, он учится в аспирантуре на кафедре дифференциальных уравнений под руководством В. И. Арнольда. В апреле 1972 года Н. Н. Нехорошев — ассистент на этой же кафедре, а в сентябре 1973 года он защитил кандидатскую диссертацию. Его дальнейший путь можно проследить по некрологу [62], по его работам, принесшим ему всемирную известность, и по нескольким отзывам, собранным нами в разделе 1.4.

1.4. Отзывы прошлых лет

1.4.1. О работах Н. Н. Нехорошева, представляемого к избранию в члены-корреспонденты Российской академии наук

Работы Николая Николаевича Нехорошева об экспоненциальной медленности эволюции переменных действия в слабо возмущенных интегрируемых гамильтоновых системах пользуются заслуженной известностью во всем мире и были продолжены многими математиками, механиками и физиками, занимавшимися приложениями теории возмущений. В качестве гипотезы подобные оценки рассматривал уже Литтльвуд (а возможно, и Д. Биркгоф); сегодня они являются самым сильным достижением в многомерной КАМ-теории, где колмогоровские торы не делят фазовое пространство и где возможен медленный уход фазовых кривых в щелях между ними (в терминах астрономических такой уход мог бы соответствовать, скажем, падению Луны на Землю или развалу Солнечной системы; КАМ-теория утверждает, что эти события маловероятны, а теория Нехорошева — что даже если они и реализуются, то крайне медленно, обычно даже и за космологические времена). В последнее время Н. Н. Нехорошев получил аналогичные результаты для гамильтоновых уравнений с частными производными, что также является замечательным достижением. По моему мнению, Н. Н. Нехорошев давно заслуживает избрание в члены-корреспонденты РАН.

Академик *В. И. Арнольд*, 1999 год

1.4.2. Рекомендация на избрание в РАН

Настоящим рекомендую к избранию в члены-корреспонденты Академии по отделению математики Николая Николаевича Нехорошева. Николаем Николаевичем Нехорошевым создана признанная во всем мире теория экспоненциально медленной эволюции гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. В гамильтоновых системах с тремя и более степенями свободы фазовая точка может уходить далеко от исходного инвариантного тора невозмущенной системы. В применении к Солнечной системе возмущения кеплерова движения примерно в тысячу раз меньше влияния Солнца. Если бы эти возмущения накапливались, то, скажем, орбита Земли могла бы измениться вдвое за несколько тысяч лет и наша цивилизация погибла бы. Успеху Нехорошева способствовало выделение им важного класса невозмущенных гамильтоновых систем, названных им крутыми. Каждое аналитическое подмногообразие евклидова пространства, не лежащее ни в какой гиперплоскости, автоматически оказывается крутым. Оценки Нехорошева даются в терминах рациональных чисел, названных им показателями крутизны и характеризующих степень искривленности многообразия (подобно тому, как это происходит в построенной Малером и Спринджуком теории диофантовых приближений на подмногообразиях размерности один в евклидовом пространстве). Теория Нехорошева быстро стала знаменитой, он был приглашенным докладчиком на Международном математическом конгрессе в Ванкувере в 1974 году. В дальнейшем оценки Нехорошева неоднократно обобщались известными исследователями в разных странах (в США, Германии, Франции, Швейцарии, России). Сейчас они являются признанным краеугольным камнем теории гамильтоновых систем, вошли в учебники и монографии. Экспоненциально малая скорость накопления возмущений, доказанная Нехорошевым, только и обеспечивает длительное существование планет, астероидов и комет вблизи так называемой хаотической области. Сущность этих оценок состоит в том, что время значительного изменения параметров основного возмущаемого движения превосходит экспоненту некоторой степени обратной величины возмущения. Первым доказал экспоненциальную оценку Литтльвуд, но только в случае двух степеней свободы, в котором на самом деле (по теореме Колмогорова, которой Литтльвуд не знал) значительное изменение параметров невозмущенного движения не наступает вообще никогда («вечная устойчивость»). Теория Нехорошева значительно глубже теории Литтльвуда. Она основана на замечательной комбинации идей теории диофантовых приближений на подмногообразиях евклидова пространства с топологическими соображениями и с оценками сумм рядов Фурье. Очевидным недостатком Нехорошева является отсутствие у него докторской степени. Я объясняю это его чрезвычайной требовательностью к себе: ведь его кандидатская диссертация по своему уровню далеко превосходит большинство докторских диссертаций. Я горячо рекомендую Н. Н. Нехорошева к избранию в члены-корреспонденты РАН.

Академик *В. И. Арнольд*, 10 февраля 1997 года

1.4.3. О научной деятельности кандидата физ.-мат. наук, доцента кафедры дифференциальных уравнений МГУ Николая Николаевича Нехорошева

Н. Н. Нехорошев является известным специалистом в области дифференциальных уравнений, в частности, интегрируемых и неинтегрируемых гамильтоновых систем. Хорошо известны его работы об экспоненциальной оценке снизу времени устойчивости близких к интегрируемым гамильтоновых систем. Эта оценка является кульминацией целого ряда проводившихся более двух столетий исследований поведения решения таких систем, инициированных Лапласом, Лагранжем, Гамильтоном, Пуанкаре, Колмогоровым. Н. Н. Нехорошев показал, что разрушение устойчивости в таких системах может быть только чрезвычайно медленным. Более того, он выделил свойства невозмущенного гамильтониана, которые определяют скорость такого разрушения. Это позволяет сравнивать степени устойчивости разных систем, что важно для приложений.

Теорема Нехорошева первоначально предназначалась для изучения проблем классической механики. (Сам Нехорошев использовал свою теорию для изучения проблемы устойчивости Солнечной системы.) Другие применения были найдены позже. Замечательно, что в последнее десятилетие его теорема была неоднократно с успехом применена в теоретической физике, например, для объяснения парадокса Больцмана ультрафиолетовой катастрофы.

Н. Н. Нехорошев получил также важные результаты в проблеме интегрируемости и частичной интегрируемости гамильтоновых систем. Он доказал интегрируемость и существование расслоения фазового пространства на инвариантные торы при более слабых условиях на первые интегралы, чем условия Лиувилля. Более того, он построил обобщение переменных действие – угол, которые удобны для исследования таких систем, и показал, что ограничение системы на объединение торов продолжения будет интегрируемым.

В последнее время Н. Н. Нехорошев применяет к исследованию уравнений в частных производных качественные и количественные методы, первоначально развитые для изучения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Н. Н. Нехорошев является педагогом с большим стажем — он работает на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультете МГУ с 1972 года.

Декан механико-математического
факультета МГУ
О. Б. Лупанов

Список дополнительной литературы

[46] Bates L. M. Monodromy in the champagne bottle // Z. Angew. Math. Phys., 1991, vol. 42, no. 6, pp. 837–847.

[47] Broer H., Efstathiou K., Lukina O. A geometric fractional monodromy theorem // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 517–532.

[48] Cushman R., Knörrer H. The energy momentum mapping of the Lagrange top // Differential geometric methods in mathematical physics (Clausthal, 1983) / H.-D. Doebner, J.-D. Hennig (Eds.). (Lecture Notes in Math., vol. 1139.) Berlin: Springer, 1985. P. 12–24.

[49] Cushman R. H., Dullin H. R., Giacobbe A., Holm D. D., Joyeux M., Lynch P., Sadovskií D. A., Zhilinskií B. I. CO_2 molecule as a quantum realization of the 1 : 1 : 2 resonant swing-spring with monodromy // Phys. Rev. Lett., 2004, vol. 93, no. 2, 024302, 4 pp.

[50] Cushman R. H., Sadovskií D. A. Monodromy in the hydrogen atom in crossed fields // Phys. D, 2000, vol. 142, nos. 1–2, pp. 166–196.

[51] Cushman R., Vũ Ngọc S. Sign of the monodromy for Liouville integrable systems // Ann. Henri Poincaré, 2002, vol. 3, no. 5, pp. 883–894.

[52] Efstathiou K., Broer H. W. Uncovering fractional monodromy // Comm. Math. Phys., 2013, vol. 324, no. 2, pp. 549–588.

[53] Efstathiou K., Sadovskií D. A., Zhilinskií B. I. Classification of perturbations of the hydrogen atom by small static electric and magnetic fields // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2007, vol. 463, no. 2083, pp. 1771–1790.

[54] Greuel G.-M., Lossen C., Shustin E. Introduction to singularities and deformations. (Springer Monogr. Math.) Berlin: Springer, 2007. 471 pp.

[55] Kontsevich M., Soibelman Y. Affine structures and non-Archimedean analytic spaces // The unity of mathematics: In honor of the 90th birthday of I. M. Gelfand / P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer (Eds.). (Progr. Math., vol. 244.) Boston, Mass.: Birkhäuser, 2006. P. 321–385.

[56] Nekhoroshev N. Fuzzy fractional monodromy and the section-hyperboloid // Milan J. Math., 2008, vol. 76, pp. 1–14.

[57] Sugny D., Mardešić P., Pelletier M., Jebrane A., Jauslin H. R. Fractional Hamiltonian monodromy from a Gauss – Manin monodromy // J. Math. Phys., 2008, vol. 49, no. 4, 042701, 35 pp.

[58] Symington M. Four dimensions from two in symplectic topology // Topology and geometry of manifolds (Athens, Ga., 2001) / G. Matić, C. McCrory (Eds.). (Proc. Sympos. Pure Math., vol. 71.) Providence, R.I.: AMS, 2003. P. 153–208.

[59] Vũ Ngọc S. Moment polytopes for symplectic manifolds with monodromy // Adv. Math., 2007, vol. 208, no. 2, pp. 909–934.

[60] Winnewisser M., Winnewisser B. P., Medvedev I. R., De Lucia F. C., Ross S. C., Bates L. M. The hidden kernel of molecular quasi-linearity: Quantum monodromy // J. Mol. Struct., 2006, vol. 798, nos. 1–3, pp. 1–26.

[61] Zhilinskií B. Interpretation of quantum Hamiltonian monodromy in terms of lattice defects // Acta Appl. Math., 2005, vol. 87, nos. 1–3, pp. 281–307.

[62] Абрамов А. М., Арнольд В. И., Болсинов А. В., Варченко А. Н., Галгани Л., Жилинский Б. И., Ильяшенко Ю. С., Козлов В. В., Нейштадт А. И., Питербарг В. И., Хованский А. Г., Яшенко В. В. Николай Николаевич Нехорошев (некролог) // УМН, 2009, т. 64, № 3(387), с. 174–178.

[63] Арнольд В. И., Васильев В. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности: 1. Локальная и глобальная теория // Динамические системы 6 / В. И. Арнольд (ред.). (Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 6.) Москва: ВИНИТИ, 1983. С. 5–250.

[64] Тонконог Д. И. Простое доказательство «геометрической теоремы о дробной монодромии» // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ., 2013, № 2, с. 53–57.

Afterword to the paper by N. N. Nekhoroshev

Dmitrii A. Sadovskii

Département de physique, Université du Littoral — Côte d'Opale, 59140 Dunkerque, France
sadovski@univ-littoral.fr

This afterword accompanies the last, previously unpublished work by N. N. Nekhoroshev (pp. 413–541 of this volume). In order to explain Nekhoroshev's motivations and objectives, we describe briefly the background of his involvement in the theory of Hamiltonian monodromy during the last years of his life and his role in the discovery of fractional monodromy which is the subject of this last paper. We tell the history of the manuscript. In order to further the understanding of Nekhoroshev's point of view include excerpts from Nekhoroshev's exchanges with the editors of "Izvestia RAN". We end with a brief biographic commentary which accompanies photographs and materials from the archive of N. N. Nekhoroshev. Together with the manuscript, they were kindly provided by Irina Vasil'eva, the late widow of N. N. Nekhoroshev.

MSC 2010: 37J35, 58K10
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 413–552 (Russian)