УДК 517.977, 519.837.3

© *Д. А. Серков, А. Г. Ченцов*

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ В ПАКЕТАХ ПРОСТРАНСТВ

Рассматриваемая игровая задача удержания (в случае ограниченного промежутка управления) является частным случаем задачи сближения при наличии фазовых ограничений с гиперплоскостью, отвечающей терминальному моменту времени (вместе с тем задача удержания с бесконечном горизонтом также вкладывается в предлагаемую постановку). Решение задачи удержания определяется в классе многозначных квазистратегий (неупреждающих откликов на реализации неопределенных факторов процесса). Основным отличием от ранее рассмотренных постановок задачи является возможность вариации пространства траекторий системы и пространства реализаций неопределенных факторов в зависимости от начального момента управления. Показано, что множество начальных позиций, для которых задача не разрешима, есть операторно-выпуклая оболочка пустого множества, построенная на основе оператора программного поглощения. При дополнительных условиях согласованности (пространства траекторий системы и пространства реализаций помехи в различные моменты времени) показано, что множество успешной разрешимости задачи удержания определяется в виде предела итерационной процедуры на пространстве множеств, элементами которых являются позиции игры, а также установлена структура разрешающих квазистратегий.

Ключевые слова: программные итерации, операторная выпуклость, квазистратегии, пакеты пространств.

Введение

Метод программных итераций (МПИ) применяется для решения дифференциальных игр (ДИ) в трех вариантах: построение множества позиционного поглощения (МПП), цены игры и многозначных квазистратегий управления. В настоящей статье обсуждается абстрактный аналог первого варианта, связанного с решением ДИ сближения–уклонения [1, 2] на конечном промежутке времени. Установленная Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным теорема об альтернативе [1, 2] определила дальнейшее развитие теории ДИ (существенное обобщение данной теоремы было получено А. В. Кряжимским [3] в виде решения ДИ для систем, удовлетворяющих условию обобщенной единственности). Важным частным случаем ДИ является игра удержания в множестве позиций, сечения которого реализуют фазовые ограничения. Само МПП есть в данном случае множество успешной разрешимости задачи удержания. Отметим некоторые исследования по МПИ: см. [4–7]. В настоящей работе мы ориентируемся на процедуру [5] построения МПП в ДИ сближения–уклонения и, в частности, в задаче удержания. В связи с последней отметим работы [8–11] (в [10] рассматривалась игра удержания на бесконечном промежутке времени, такая возможность допускалась и в [11]). Задача удержания возникает в приложениях и играет роль важного элемента решения игры сближения–уклонения в виде требования о сохранении траекторий управляемой системы в пределах стабильного моста Н. Н. Красовского [12, § 39]. Применяемый в упомянутых работах подход на основе МПИ связывался в [4, 5, 11] с решением ДИ в классе многозначных обобщенных квазистратегий. Отмечалась связь МПИ и аксиоматической теории выпуклости [13]: итерационная процедура [14], двойственная к МПИ, допускает естественное толкование в виде предоболочки [13]. Упомянутая связь исследовалась в [14] для «обычных» ДИ.

В настоящем исследовании подход [14] распространяется (см. также [15]) на задачи с абстрактной динамикой: на базе схемы [11] для задачи удержания траекторий в фазовых ограничениях конструируется как прямая, так и двойственная итерационная процедура на пространстве множеств; последняя сводится к построению операторно-выпуклой оболочки пустого множества посредством последовательного применения предоболочки. Основным отличием данной работы от [15] является возможная несогласованость пространств траекторий «системы» и реализаций неопределенных факторов для различных «промежутков» времени. Требование согласованности возникает только при построении множества успешной разрешимости задачи удержания в классе квазистратегий. Итогом применения процедуры на основе МПИ является построение данного множества, причем «промежуток» управления не предполагается конечным. Результаты данной работы были анонсированы в [16].

§ 1. Общие понятия

Обозначения и определения общего характера. В дальнейшем используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество); $\triangleq$ — равенство по определению; def заменяет фразу «по определению». Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Если $\mathcal{Z}$ — семейство подмножеств (п/м) множества $\mathbb{Z}$, то обозначим $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}[\mathcal{Z}]$ двойственное к нему семейство:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}[\mathcal{Z}] \triangleq \{\mathbb{Z} \setminus Z \colon Z \in \mathcal{Z}\}.$$

Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) п/м произвольного множества T; семейство $\mathcal{P}(T)$ именуем также булеаном множества T; при этом через $\mathrm{Fin}(T)$ обозначим семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}(\mathrm{T})$. Если A и B — непустые множества, то B^A есть def множество всех отображений из множества A в множество B (см. [17, с. 77]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f \mid C) \in B^C$ есть def сужение f на множество C: $(f \mid C)(x) \triangleq f(x)\ \forall x \in C$. В случае когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $\big(F \mid C\big) \triangleq \{(f \mid C) \colon f \in F\}$. Если z есть упорядоченная пара (УП), то есть $z = (a, b)$ для некоторых объектов a и b, то через $\mathbf{pr}_1(z)$ и $\mathbf{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathbf{pr}_1(z), \mathbf{pr}_2(z))$; при этом ясно, что $\mathbf{pr}_1(z) = a$ и $\mathbf{pr}_2(z) = b$.

Назовем частично упорядоченное множество направленным, если каждое конечное его подмножество имеет мажоранту. Если $(L, \angle)$, $(N, <)$ суть непустые направленные множества, то

$$(\mathrm{Isot})[L; \angle; N; <] \triangleq \{g \in N^L \mid (\forall n \in N\ \exists l \in L \colon\ n < g(l))\ \& \\ \& \,(\forall l \in L\ \forall l' \in L\ (l \angle l') \Rightarrow (g(l) < g(l')))\}.$$

При этом множество $M \in \mathcal{P}(N)$ назовем конфинальным направленному множеству $(N, <)$, если $\forall n \in N\ \exists m \in M$ такой, что $n < m$.

Пусть $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N}$ (тогда $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \ldots\}$); кроме того, обозначим $\overrightarrow{m, \infty} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_0 \mid j \geqslant m\}\ \forall m \in \mathbb{N}_0$.

Если H — непустое множество и $\alpha \in H^H$, то последовательность

$$(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \mapsto H^H \tag{1.1}$$

(степеней α) определяется следующими условиями: 1) $\alpha^0(h) \triangleq h\ \forall h \in H$; 2) $\alpha^k \triangleq \alpha \circ \alpha^{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. В частности, (1.1) определено в случае, когда H — семейство (множеств). В этом случае введем также понятие бесконечной (точнее, счетной) степени, следуя [11, раздел 2]: если $\mathcal{E}$ — непустое семейство, $\alpha \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}}$, то $\overset{\infty}{\alpha} \in \mathcal{P}(\cup_{H \in \mathcal{E}} H)^{\mathcal{E}}$ таково, что

$$\overset{\infty}{\alpha}(M) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \alpha^k(M) \qquad \forall M \in \mathcal{E}. \tag{1.2}$$

Отметим, что для всяких множества E, последовательности $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^{\mathbb{N}}$ и $A \in \mathcal{P}(E)$, как обычно,

$$((A_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow A) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} ((A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) \& (A_{j+1} \subset A_j\ \forall j \in \mathbb{N})). \tag{1.3}$$

В связи с (1.3) отметим очевидное свойство: если $\mathcal{E}$ — непустое подсемейство $\mathcal{P}(E)$, $\alpha \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}}$ и $\alpha(L) \subset L\ \forall L \in \mathcal{E}$, то для $M \in \mathcal{E}$ имеем $(\alpha^k(M))_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}_0}$ и при этом множество $\overset{\infty}{\alpha}(M)$ (см. (1.2)) удовлетворяет соотношению $(\alpha^k(M))_{k \in \mathbb{N}} \downarrow \overset{\infty}{\alpha}(M)$.

Элементы топологии. Если H — множество, то через $(\mathrm{top})[H]$ условимся обозначать множество всех топологий на множестве H; при $\tau \in (\mathrm{top})[H]$ в виде (H, τ) мы имеем топологическое пространство (ТП). Если (V, τ) — ТП и $Z \in \mathcal{P}(V)$, то $\tau|_Z \triangleq \{Z \cap G : G \in \tau\}$ есть топология Z, реализующая в виде ТП $(Z, \tau|_Z)$ подпространство (V, τ); кроме того, будем обозначать $\mathbf{cl}(Z, \tau)$ замыкание Z в (V, τ). Если (Z, τ) и (Z', τ') суть ТП, то через $\tau \otimes \tau'$ обозначаем далее стандартную топологию произведения (Z, τ) и (Z', τ') (см., например, [18, п. 2.3]), базу которой составляют всевозможные прямоугольники $G \times G'$, $G \in \tau$, $G' \in \tau'$. Если (V, τ) — произвольное ТП и $v \in V$, то через $\mathbf{N}_\tau(v)$ ниже обозначается фильтр всех окрестностей v [19, гл. I]. В дальнейшем, в ряде случаев, будет использоваться вариант оснащения множества (метризуемой) дискретной топологией, отождествляемой с булеаном соответствующего множества.

Пространства с выпуклостью. Пространства с выпуклостью соответствуют оснащению того или иного непустого множества специальным семейством его подмножеств (см. [13, с. 9]), что на идейном уровне подобно оснащению топологией. Разумеется, обычная выпуклость, реализуемая в линейных пространствах, «укладывается» в аксиоматическую конструкцию [13]. Другой естественный пример доставляет семейство замкнутых множеств в ТП, то есть замкнутая топология в терминологии П. С. Александрова [20, с. 98]. Известны и другие примеры. Весьма важными элементами аксиоматической теории выпуклости представляются понятия выпуклой оболочки, а также предоболочки. Оказалось [14], что схема на основе МПИ исчерпывающим образом характеризуется двойственной процедурой на основе варианта предоболочки для так называемой операторной выпуклости (см. [13, с. 11]). По существу, конструкцию на основе МПИ можно (и в [14] это было сделано для случая нелинейной дифференциальной игры общего вида) истолковать в терминах предоболочки и на этой основе реализовать одно из множеств, отвечающих альтернативному разбиению в игре сближения–уклонения, в виде выпуклой оболочки пустого множества. В данной работе это представление распространяется на случай игровой задачи удержания для системы с абстрактной динамикой.

Напомним (см. [13, с. 9]), что выпуклостью произвольного непустого множества $\mathbb{H}$ называется всякое семейство $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$, для которого

$$(\mathbb{H} \in \mathcal{H})\&(\bigcap_{H \in \mathcal{C}} H \in \mathcal{H} \ \forall \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H})).$$

Через $(\mathrm{CONV})[\mathbb{H}]$ обозначим множество всех выпуклостей $\mathbb{H}$, то есть

$$(\mathrm{CONV})[\mathbb{H}] \triangleq \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H})) \mid (\mathbb{H} \in \mathcal{H})\&(\bigcap_{H \in \mathcal{C}} H \in \mathcal{H} \ \forall \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}))\}. \tag{1.4}$$

Если $\mathcal{H} \in (\mathrm{CONV})[\mathbb{H}]$, то всякому множеству $S \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$ сопоставляется непустое (см. (1.4)) семейство $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\}$ всех множеств из $\mathcal{H}$, содержащих S, а стало быть, определено пересечение

$$(\mathcal{H}\text{–hull})[S] \triangleq \bigcap_{H \in [\mathcal{H}](S)} H \in \mathcal{P}(\mathbb{H}), \tag{1.5}$$

которое: 1) содержится в $\mathcal{H}$; 2) содержит S. Множество в левой части (1.5) будем называть $\mathcal{H}$-выпуклой оболочкой S. Ясно, что

$$(\mathcal{H}\text{–hull})[S] \subset \Lambda \qquad \forall \Lambda \in [\mathcal{H}](S).$$

Если $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$ и $J \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathcal{Q}}$, то определена соответствующая J-операторная выпуклость множества $\mathbb{H}$:

$$(J\text{–conv})[\mathbb{H}] \triangleq \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid \forall B \in \mathcal{Q} \ \ (B \subset A) \Rightarrow (J(B) \subset A)\}; \tag{1.6}$$

согласно [13, теорема 1.3] $(J\text{–conv})[\mathbb{H}] \in (\mathrm{CONV})[\mathbb{H}]$ (семейство $\mathcal{Q}$ есть область определения J и, следовательно, определяется по J однозначно).

Следуя [13, с. 12], введем понятие (выпуклой) предоболочки, определяя множество

$$\begin{aligned}(\mathrm{p\text{–}HULL})[\mathbb{H}] \triangleq \{g \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathcal{P}(\mathbb{H})} \mid (E \subset g(E) \ \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{H}))\,\& \\ \&(\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \ \forall E' \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \ (E \subset E') \Rightarrow (g(E) \subset g(E')))\}; \end{aligned}\tag{1.7}$$

отображения из множества (1.7) называем предоболочками $\mathbb{H}$.

Определение (1.6) применимо, в частности, в случае, когда $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(\mathbb{H})$ и $J \in (\mathrm{p\text{–}HULL})[\mathbb{H}]$. Согласно [13, лемма 1.1] в этом случае

$$(J\text{–conv})[\mathbb{H}] = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid A = J(A)\} \qquad \forall J \in (\mathrm{p\text{–}HULL})[\mathbb{H}]. \tag{1.8}$$

Абстрактная динамическая система. Всюду в дальнейшем фиксируем непустое п/м I вещественной прямой $\mathbb{R}$ в качестве аналога временно́го интервала и непустое множество X, соответствующее фазовому пространству. Полагаем $D \triangleq I \times X$, получая пространство позиций. Если $t \in I$, то введем $I_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leqslant t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geqslant t\}$. Если $t \in I$ и $\theta \in \mathbf{I}_t$, то полагаем, что $\mathbb{I}_t^{(\theta)} \triangleq I_\theta \cap \mathbf{I}_t$. Если L — непустое множество, то определен булеан $\mathcal{P}(I \times L)$ непустого множества $I \times L$ и, как следствие, $L^{\mathbf{I}_t} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I \times L))$ (мы отождествляем отображения из $\mathbf{I}_t$ в L с их графиками, получая при этом непустые п/м $I \times L$). С учетом сказанного имеем семейство $\bigcup_{t \in I} L^{\mathbf{I}_t}$ и его булеан. Итак, определено семейство $\mathcal{P}'(\cup_{t\in I} L^{\mathbf{I}_t}) = \mathcal{P}(\cup_{t \in I} L^{\mathbf{I}_t}) \setminus \{\varnothing\}$; с учетом последнего равенства имеем при $\theta \in I$, что $\mathcal{P}'(\cup_{t\in I} L^{\mathbf{I}_t}) \cap \mathcal{P}'(L^{\mathbf{I}_\theta}) = \mathcal{P}'(L^{\mathbf{I}_\theta})$. Иными словами, для непустого множества L определено отображение $\theta \mapsto L^{\mathbf{I}_\theta} \colon I \mapsto \mathcal{P}'(\cup_{t\in I} L^{\mathbf{I}_t})$, а потому имеем

$$(\mathrm{Pack})[L] \triangleq \prod_{\theta \in I} \mathcal{P}'(L^{\mathbf{I}_\theta}).$$

Фиксируем произвольное непустое множество Y и выберем (непустые по построению) множества $(\mathbf{C}_t)_{t\in I} \in (\mathrm{Pack})[X]$ и $(\Omega_t)_{t \in I} \in (\mathrm{Pack})[Y]$. Тогда имеем при $t \in I$ свойства

$$\mathbf{C}_t \in \mathcal{P}'(X^{\mathbf{I}_t}), \qquad \Omega_t \in \mathcal{P}'(Y^{\mathbf{I}_t}); \tag{1.9}$$

в частности, $\mathbf{C}_t \subset X^{\mathbf{I}_t}$, $\Omega_t \subset Y^{\mathbf{I}_t}$.

Отображения из $\mathbf{I}_t$ в X, лежащие в $\mathbf{C}_t$, рассматриваем в качестве траекторий с начальным моментом $t \in I$. Элементы $\omega \in \Omega_t$ рассматриваем в качестве реализаций неопределенных факторов на «интервале» $\mathbf{I}_t$. Наконец, зададим в качестве системы отображение

$$(\mathcal{S}_t)_{t \in I} \in \prod_{t \in I} \mathcal{P}'(\mathbf{C}_t)^{X \times \Omega_t}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует, конечно, что при $t \in I$ $\mathcal{S}_t : X \times \Omega_t \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}_t)$; для данного оператора определены сечения: при $x \in X$ определено отображение $\mathcal{S}_t(x, \cdot)$ вида $\omega \mapsto \mathcal{S}_t(x, \omega) : \Omega_t \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}_t)$. Поскольку при $z \in D$ у нас $\mathbf{pr}_1(z) \in I$ и $\mathbf{pr}_2(z) \in X$, то определены также множества

$$\mathcal{S}(z, \omega) \triangleq \mathcal{S}_{\mathbf{pr}_1(z)}(\mathbf{pr}_2(z), \omega) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbf{pr}_1(z)}) \qquad \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}.$$

Стало быть, мы при $t \in I$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega_t$ располагаем множеством

$$\mathcal{S}((t, x), \omega) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_t). \tag{1.11}$$

Если $z \in D$ (то есть $z = (t, x)$, где $t \in I$ и $x \in X$) и $\omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}$, то $\mathcal{S}(z, \omega) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbf{pr}_1(z)})$ есть множество всех траекторий системы (1.11), отвечающих начальной позиции z и согласованных с действием ω, где ω — конкретная реализация неопределенных факторов на интервале $\mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$. В этой связи введем при $t \in I$ в рассмотрение множество $\mathbf{M}_t \triangleq \mathcal{P}(\mathbf{C}_t)^{\Omega_t}$ всех мультифункций (м/ф) на Ω_t со значениями в $\mathbf{C}_t$: $\alpha(\omega) \subset \mathbf{C}_t$ при $\omega \in \Omega_t$, $\alpha \in \mathbf{M}_t$.

Если $t \in I$ и $\alpha \in \mathbf{M}_t$, то называем м/ф α неупреждающей, если $\forall \omega \in \Omega_t \ \forall \omega' \in \Omega_t \ \forall \xi \in \mathbf{I}_t$:

$$((\omega \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)})) = ((\omega' \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)})) \Rightarrow \big(\big(\alpha(\omega) \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)}\big) = \big(\alpha(\omega') \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)}\big)\big). \tag{1.12}$$

Мы полагаем, что управляющая сторона может использовать для целей формирования траекторий непустозначные м/ф из $\mathbf{M}_t$ со свойством (1.12). В связи с этим полагаем при $(t, x) \in D$, что

$$\mathbb{M}_{(t,x)} \triangleq \{\alpha \in \prod_{\omega \in \Omega_t} \mathcal{P}'(\mathcal{S}((t, x), \omega)) \mid \forall \omega \in \Omega_t \ \forall \omega' \in \Omega_t \ \forall \xi \in \mathbf{I}_t$$
$$((\omega \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)}) = (\omega' \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)})) \Rightarrow \big(\big(\alpha(\omega) \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)}\big) = \big(\alpha(\omega') \mid \mathbb{I}_t^{(\xi)}\big)\big)\}. \tag{1.13}$$

Следовательно, при $z \in D$ определено множество мультифункций $\mathbb{M}_z$. Элементы (1.13) рассматриваем в качестве допустимых процедур управления — (многозначных) квазистратегий, отвечающих позиции (t,x). Имея ту или иную цель управления, мы будем считать ее достижимой для заданной позиции $(t,x) \in D$, если существует квазистратегия $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t,x)}$, для которой требуемая цель достигается на каждой траектории из объединения всех множеств $\alpha_0(\omega)$, $\omega \in \Omega_t$.

Всюду в дальнейшем фиксируем топологию τ множества X; постулируем при этом, что (X,τ) есть T_2-пространство.

Условимся через $\mathfrak{F}$ обозначать семейство всех п/м X, замкнутых в (X,τ). Оснащаем D топологией $\mathfrak{D}$, определяемой в виде произведения топологий $\mathcal{P}(I)$ (дискретная топология I) и τ: $(D,\mathfrak{D})$ есть произведение ТП $(I,\mathcal{P}(I))$ и (X,τ). Условимся также, что

$$H\langle t\rangle \triangleq \{x \in X \mid (t,x) \in H\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D)\ \forall t \in I \tag{1.14}$$

(в (1.14) определены сечения п/м D, отвечающие идее фиксации момента времени). С учетом (1.14) имеем, кроме того, при $H \in \mathcal{P}(D)$

$$H = \{(t,x) \in D \mid x \in H\langle t\rangle\}. \tag{1.15}$$

Используя (1.14) и определение $\mathfrak{D}$, легко видеть, что семейство $\mathbf{F}$ всех п/м D, замкнутых в ТП $(D,\mathfrak{D})$, допускает представление

$$\mathbf{F} = \{F \in \mathcal{P}(D) \mid F\langle t\rangle \in \mathfrak{F}\ \forall t \in I\} \tag{1.16}$$

(итак, $\mathbf{F}$ — семейство всех п/м D с замкнутыми сечениями).

Если $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(D)^{\mathbb{N}}$ и $H \in \mathcal{P}(D)$, то $(H_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow H$ в соответствии с (1.3) равносильно условиям

$$(H = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i)\&(H_{j+1} \subset H_j\ \forall j \in \mathbb{N}).$$

При каждом $t \in I$ оснащаем множество $X^{\mathbf{I}_t}$ всех отображений из $\mathbf{I}_t$ в X стандартной топологией $\otimes^{\mathbf{I}_t}(\tau)$ тихоновской степени ТП (X,τ) при условии, что $\mathbf{I}_t$ используется в качестве индексного множества. Тогда

$$(X^{\mathbf{I}_t}, \otimes^{\mathbf{I}_t}(\tau)) \tag{1.17}$$

есть T_2-пространство; с учетом (1.9) на непустом множестве $\mathbf{C}_t$ введем топологию $\mathfrak{C}_t$ подпространства ТП (1.17), т. е.

$$\mathfrak{C}_t \triangleq \otimes^{\mathbf{I}_t}(\tau)|_{\mathbf{C}_t} = \{\mathbf{C}_t \cap G\ :\ G \in \otimes^{\mathbf{I}_t}(\tau)\},$$

получая, как следствие, T_2-пространство

$$(\mathbf{C}_t, \mathfrak{C}_t). \tag{1.18}$$

Иными словами, (1.18) есть множество $\mathbf{C}_t$ в топологии поточечной сходимости. Кроме того, для $t \in I$ введем семейства $\mathbb{F}_t \triangleq \mathcal{C}_{\mathbf{C}_t}[\mathfrak{C}_t]$ и $\mathfrak{K}_t \triangleq (\mathfrak{C}_t\text{–comp})[\mathbf{C}_t]$ всех п/м $\mathbf{C}_t$, замкнутых и компактных в смысле (1.18) соответственно. В связи с определением $\mathfrak{K}_t$ отметим представление [21, (2.3.23)].

§ 2. Оператор программного поглощения

При $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$ и $\omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}$ полагаем, что

$$\Pi(\omega \mid z, H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}(z,\omega) \mid (\xi, s(\xi)) \in H\ \forall \xi \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\}. \tag{2.1}$$

С учетом (1.15) выражение (2.1) можно переписать следующим образом: при $z = (t,x)$, где $t \in I$ и $x \in X$,

$$\Pi(\omega \mid (t,x), H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}((t,x),\omega) \mid s(\xi) \in H\langle\xi\rangle\ \forall \xi \in \mathbf{I}_t\}. \tag{2.2}$$

Мы рассматриваем (2.2) как естественную модификацию (2.1). Нетрудно проверить, что для любых $(t,x) \in D$, $\omega \in \Omega_t$ и $H \in \mathcal{P}(D)$ выполняются равенства

$$\Pi(\omega \mid (t,x), H) = \Pi(\omega \mid (t,x), H \cap (\mathbf{I}_t \times X)). \tag{2.3}$$

В терминах (2.1) введем оператор программного поглощения (ОПП):

$$\mathbf{A}\colon \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(D), \tag{2.4}$$

а именно, полагаем, что $\forall H \in \mathcal{P}(D)$

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \{z \in H \mid \Pi(\omega \mid z, H) \neq \varnothing \ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}\}. \tag{2.5}$$

Следуя (2.2), выражение (2.5) можно представить в виде

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \{(t,x) \in H \mid \Pi(\omega \mid (t,x), H) \neq \varnothing \ \forall \omega \in \Omega_t\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{2.6}$$

Заметим, что согласно (1.14), (2.4) при $H \in \mathcal{P}(D)$ и $t \in I$ определено сечение

$$\mathbf{A}(H)\langle t\rangle = \{x \in X \mid (t,x) \in \mathbf{A}(H)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Л е м м а 2.1. *Если* $H \in \mathcal{P}(D)$ *и* $t \in I$, *то*

$$\mathbf{A}(H)\langle t\rangle = \{x \in H\langle t\rangle \mid \Pi(\omega \mid (t,x), H) \neq \varnothing \ \forall \omega \in \Omega_t\}.$$

Доказательство следует сразу из (2.6).

Мы рассматриваем (2.4), (2.5) как своеобразный игровой оператор, который, однако, можно связать с системой неигровых отображений: если $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$, то оператор $\mathbb{A}_\omega[t] : \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(X)$ определяется тем условием, что

$$\mathbb{A}_\omega[t](H) \triangleq \{x \in H\langle t\rangle \mid \Pi(\omega \mid (t,x), H) \neq \varnothing\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{2.7}$$

В силу (2.3) для всех $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$ и $H \in \mathcal{P}(D)$ имеем равенства

$$\mathbb{A}_\omega[t](H) = \mathbb{A}_\omega[t](H \cap (\mathbf{I}_t \times X)). \tag{2.8}$$

Связь ОПП и системы $\mathbb{A}_\omega[t]$, $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$, определяемой в (2.7), дается следующими утверждениями.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если* $t \in I$ *и* $H \in \mathcal{P}(D)$, *то*

$$\mathbf{A}(H)\langle t\rangle = \bigcap_{\omega \in \Omega_t} \mathbb{A}_\omega[t](H). \tag{2.9}$$

С л е д с т в и е 2.1. *Если* $H \in \mathcal{P}(D)$, *то* $\mathbf{A}(H) = \{(t,x) \in H \mid x \in \bigcap_{\omega \in \Omega_t} \mathbb{A}_\omega[t](H)\}$.

Для $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$ обозначим $\Gamma_t(\omega) \triangleq \{(x,h) \in X \times \mathbf{C}_t \mid h \in \mathcal{S}((t,x),\omega)\}$. Из данного определения следует, что при всех $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$ и $x \in X$ имеет место равенство

$$\mathcal{S}((t,x),\omega) = \{h \in \mathbf{C}_t \mid (x,h) \in \Gamma_t(\omega)\}. \tag{2.10}$$

Введем

$$(\mathbf{A}^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \colon \mathbb{N}_0 \mapsto \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)} \tag{2.11}$$

традиционным образом:

$$(\mathbf{A}^0(H) \triangleq H \ \forall H \in \mathcal{P}(D)) \& (\mathbf{A}^{k+1} \triangleq \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^k \ \ \forall k \in \mathbb{N}). \tag{2.12}$$

Теперь введем также в рассмотрение оператор $\overset{\infty}{\mathbf{A}}\colon \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(D)$, полагая, что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(H) \qquad \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{2.13}$$

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Если* $F \in \mathcal{P}(D)$, *то* $\forall H \in \mathcal{P}(F)$

$$(H = \mathbf{A}(H)) \Rightarrow (H \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)). \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $F \in \mathcal{P}(D)$ и $H \in \mathcal{P}(F)$. Тогда $H \in \mathcal{P}(D)$. Пусть $H = \mathbf{A}(H)$. При этом согласно (2.12)

$$H \subset \mathbf{A}^0(F). \tag{2.15}$$

Пусть вообще $m \in \mathbb{N}_0$ таково, что $H \subset \mathbf{A}^m(F)$. Тогда из (2.1), (2.5) вытекает (см. (2.12)), что

$$H = \mathbf{A}(H) \subset \mathbf{A}(\mathbf{A}^m(F)) = \mathbf{A}^{m+1}(F).$$

Итак, имеем, что $(H \subset \mathbf{A}^m(F)) \Rightarrow (H \subset \mathbf{A}^{m+1}(F))$. Поскольку выбор $m \in \mathbb{N}_0$ был произвольным, получаем с учетом (2.15), что $H \subset \mathbf{A}^k(F)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Тогда (см. (2.13)) имеем вложение $H \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)$. Импликация (2.14) установлена.

У с л о в и е 2.1 (замкнутость образа). Если $t \in I$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega_t$, то $\mathcal{S}((t,x),\omega) \in \mathbb{F}_t$.

У с л о в и е 2.2 (замкнутость графика). Если $t \in I$ и $\omega \in \Omega_t$, то $\Gamma_t(\omega) \in \mathcal{C}_{X \times \mathbf{C}_t}[\tau \otimes \mathfrak{C}_t]$.

У с л о в и е 2.3 (Предкомпактность множеств–значений). Если $t \in I$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega_t$, то $\exists H \in \mathbf{N}_\tau(x)$ $\exists K \in \mathfrak{K}_t$: $\mathcal{S}((t,y),\omega) \subset K$ $\forall y \in H$.

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Из условия* 2.2 *следует условие* 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие 2.2. Фиксируем $t \in I$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega_t$. Воспользуемся теоремой Биркгофа. Пусть $(E, \preccurlyeq, \varphi)$, $\varphi\colon E \mapsto \mathcal{S}((t,x),\omega)$ — направленность в $\mathcal{S}((t,x),\omega)$, и пусть

$$(E, \preccurlyeq, \varphi) \overset{\mathfrak{C}_t}{\to} h_*. \tag{2.16}$$

Определим отображение $\psi\colon E \mapsto D \times \mathfrak{C}_t$ вида $\psi(\delta) \triangleq (x, \varphi(\delta))$ $\forall \delta \in E$. Тогда, в силу определения $\Gamma_t(\omega)$, имеем $\psi(\delta) \in \Gamma_t(\omega)$ $\forall \delta \in E$ (напомним, что $\varphi(e) \in \mathcal{S}((t,x),\omega)$ при $e \in E$). Таким образом, $(E, \preccurlyeq, \psi)$ есть направленность в $\Gamma_t(\omega)$. Из (2.16) легко получим, что

$$(E, \preccurlyeq, \psi) \overset{\tau \otimes \mathfrak{C}_t}{\to} (x, h_*). \tag{2.17}$$

По условию 2.2, множество $\Gamma_t(\omega)$ замкнуто в $(X \times \mathbf{C}_t, \tau \otimes \mathfrak{C}_t)$. Тогда, по теореме Биркгофа, из (2.17) следует включение $(x, h_*) \in \Gamma_t(\omega)$. Из этого включения получаем (см. (2.10)) $h_* \in \mathcal{S}((t,x),\omega)$. Так как направленность $(E, \preccurlyeq, \varphi)$ была выбрана произвольно, из теоремы Биркгофа следует включение $\mathcal{S}((t,x),\omega) \in \mathbb{F}_t$. В силу произвольного выбора $t \in I$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega_t$ выполняется условие 2.1. Доказательство завершено.

П р е д л о ж е н и е 2.4. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда для любых* $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$ *и* $F \in \mathbf{F}$ *выполняется*

$$\mathbb{A}_\omega[t](F) \in \mathfrak{F}. \tag{2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t_* \in I$, $\omega \in \Omega_{t_*}$ и $F \in \mathbf{F}$. Тогда из (1.16) следует, в частности, что $F\langle t_* \rangle \in \mathfrak{F}$. При этом

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F) = \{x \in F\langle t_* \rangle \mid \Pi(\omega \mid (t_*, x), F) \neq \varnothing\}. \tag{2.19}$$

Заметим, что

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F) \subset \mathbf{cl}(\mathbb{A}_\omega[t_*](F), \tau). \tag{2.20}$$

Выберем произвольно $x_* \in \mathbf{cl}(\mathbb{A}_\omega[t_*](F), \tau)$. Тогда, по теореме Биркгофа, имеем, что $x_* \in X$, и для некоторой направленности $(\mathbf{D}, \preccurlyeq, h)$ в $\mathbb{A}_\omega[t_*](F)$ имеет место сходимость

$$(\mathbf{D}, \preccurlyeq, h) \overset{\tau}{\to} x_*. \tag{2.21}$$

Здесь $(\mathbf{D}, \preccurlyeq)$ — (непустое) направленное множество и $h \in \mathbb{A}_\omega[t_*](F)^{\mathbf{D}}$. Тогда

$$h(\delta) \in \mathbb{A}_\omega[t_*](F) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.22}$$

Из (2.19), (2.22) имеем, в частности, что

$$h(\delta) \in F\langle t_* \rangle \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.23}$$

Из (1.14), (2.23) следует $h(\delta) \in X \ \forall \delta \in \mathbf{D}$. Тогда, в частности, имеем, что $(\mathbf{D}, \preccurlyeq, h)$ есть направленность в $F\langle t_* \rangle$ и $x_* \in X$. Из (2.21), поскольку $F\langle t_* \rangle \in \mathfrak{F}$, следует, что

$$x_* \in F\langle t_* \rangle. \tag{2.24}$$

Кроме того, из (2.19), (2.22) вытекает, что

$$\Pi(\omega \mid (t_*, h(\delta)), F) \neq \varnothing \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}. \tag{2.25}$$

Напомним, что согласно (2.1) $\forall \delta \in \mathbf{D}$

$$\Pi(\omega \mid (t_*, h(\delta)), F) = \{s \in \mathcal{S}((t_*, h(\delta)), \omega) \mid (t, s(t)) \in F \ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}\}, \tag{2.26}$$

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F) = \{s \in \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega) \mid (t, s(t)) \in F \ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}\}. \tag{2.27}$$

С учетом условия 2.3 можно указать $H_* \in \mathbf{N}_\tau(x_*)$ и $K_* \in \mathfrak{K}_{t_*}$, для которых

$$\mathcal{S}((t_*, y), \omega) \subset K_* \qquad \forall y \in H_*. \tag{2.28}$$

Тогда из (2.21) вытекает, что для некоторого $\delta_* \in \mathbf{D}$ имеет место свойство $\forall \delta \in \mathbf{D}$

$$(\delta_* \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (h(\delta) \in H_*). \tag{2.29}$$

В силу (2.28) и (2.29) имеем теперь, что $\forall \delta \in \mathbf{D}$

$$(\delta_* \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (\mathcal{S}((t_*, h(\delta)), \omega) \subset K_*). \tag{2.30}$$

Из (2.25), (2.26) и (2.30) получаем, что $\forall \delta \in \mathbf{D}$

$$(\delta_* \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (\Pi(\omega \mid (t_*, h(\delta)), F) \in \mathcal{P}'(K_*)). \tag{2.31}$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathbf{D}_* \triangleq \{\delta \in \mathbf{D} \mid \delta_* \preccurlyeq \delta\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}). \tag{2.32}$$

Понятно, что $\mathbf{D}_*$ конфинально с $(\mathbf{D}, \preccurlyeq)$, то есть

$$\forall \delta \in \mathbf{D} \ \exists \delta' \in \mathbf{D}_* : \ \delta \preccurlyeq \delta'. \tag{2.33}$$

Напомним, что (строго говоря) $\preccurlyeq \in \mathcal{P}(\mathbf{D} \times \mathbf{D})$ и в силу (2.33) бинарное отношение

$$\sqsubseteq \triangleq \preccurlyeq \cap (\mathbf{D}_* \times \mathbf{D}_*) \tag{2.34}$$

есть направление на $\mathbf{D}_*$. Итак, $(\mathbf{D}_*, \sqsubseteq)$ есть направленное множество, $\mathbf{D}_* \neq \varnothing$. При этом $\bar{h} \triangleq (h \mid \mathbf{D}_*) \in \mathbb{A}_\omega[t_*](F)^{\mathbf{D}_*}$, в частности, $\bar{h} \in X^{\mathbf{D}_*}$. Тогда, конечно,

$$\bar{h}(\delta) = h(\delta) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}_*, \tag{2.35}$$

и с учетом (2.34) имеем, что $\forall \delta \in \mathbf{D}_* \ \forall \delta' \in \mathbf{D}_*$

$$(\delta \sqsubseteq \delta') \Leftrightarrow (\delta \preccurlyeq \delta'). \tag{2.36}$$

Из (2.21) и (2.36) вытекает, что
$$(\mathbf{D}_*, \sqsubseteq, \bar{h}) \xrightarrow{\tau} x_*. \tag{2.37}$$

Согласно (2.30), (2.32) и (2.35) $\mathcal{S}((t_*, \bar{h}(\delta)), \omega) \subset K_* \ \forall \delta \in \mathbf{D}_*$. Из (2.31), (2.32) и (2.35) имеем также
$$\Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) \in \mathcal{P}'(K_*) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}_*. \tag{2.38}$$

По аксиоме выбора, имеем, что
$$\prod_{\delta \in \mathbf{D}_*} \Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) = \{g \in (\mathbf{C}_{t_*})^{\mathbf{D}_*} \mid g(\delta) \in \Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) \ \forall \delta \in \mathbf{D}_*\} \neq \varnothing. \tag{2.39}$$

С учетом этого выберем произвольно $\varphi \in \prod_{\delta \in \mathbf{D}_*} \Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F)$. Тогда имеем, что
$$\varphi : \mathbf{D}_* \mapsto \mathbf{C}_{t_*} \tag{2.40}$$
и при этом
$$\varphi(\delta) \in \Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}_*. \tag{2.41}$$

Из (2.38) и (2.41) вытекает, что $\varphi(\delta) \in K_* \ \forall \delta \in \mathbf{D}_*$. Иными словами, $\varphi : \mathbf{D}_* \mapsto K_*$, а триплет $(\mathbf{D}_*, \sqsubseteq, \varphi)$ есть направленность в K_*. Тогда [21, (2.3.23)] с учетом компактности K_* в $(\mathbf{C}_{t_*}, \mathfrak{C}_{t_*})$ для некоторых непустого направленного множества $(\mathbb{E}, \prec)$, оператора
$$\rho \in (\mathrm{Isot})[\mathbb{E}; \prec; \mathbf{D}_*; \sqsubseteq] \tag{2.42}$$
и $\lambda_* \in K_*$
$$(\mathbb{E}, \prec, \varphi \circ \rho) \xrightarrow{\mathfrak{C}_{t_*}} \lambda_*. \tag{2.43}$$

Кроме того, из (2.37) и (2.42) вытекает, что
$$(\mathbb{E}, \prec, \bar{h} \circ \rho) \xrightarrow{\tau} x_*. \tag{2.44}$$

Напомним (см. (2.24)), что $(t_*, x_*) \in F$. При этом имеем ТП $(X \times \mathbf{C}_{t_*}, \tau \otimes \mathfrak{C}_{t_*})$; вместе с тем $\lambda_* \in \mathbf{C}_{t_*}$, $(x_*, \lambda_*) \in X \times \mathbf{C}_{t_*}$ и $((\bar{h} \circ \rho)(\xi), (\varphi \circ \rho)(\xi)) \in X \times \mathbf{C}_{t_*} \ \forall \xi \in \mathbb{E}$. Введем теперь в рассмотрение оператор $\psi\colon \mathbb{E} \mapsto X \times \mathbf{C}_{t_*}$, определяемый по правилу
$$\psi(\xi) \triangleq ((\bar{h} \circ \rho)(\xi), (\varphi \circ \rho)(\xi)) \qquad \forall \xi \in \mathbb{E}. \tag{2.45}$$

В силу условия 2.2 имеем
$$\mathbf{Y} \triangleq \Gamma_{t_*}(\omega) \in \mathcal{C}_{X \times \mathbf{C}_{t_*}}[\tau \otimes \mathfrak{C}_{t_*}]. \tag{2.46}$$

Учитывая (2.26), (2.32) и (2.35), получаем, что
$$\Pi(\omega \mid (t_*, \bar{h}(\delta)), F) \subset \mathcal{S}((t_*, \bar{h}(\delta)), \omega) \qquad \forall \delta \in \mathbf{D}_*. \tag{2.47}$$

В частности, из (2.47) вытекает, что
$$\Pi(\omega \mid (t_*, (\bar{h} \circ \rho)(\xi)), F) \subset \mathcal{S}((t_*, (\bar{h} \circ \rho)(\xi)), \omega) \qquad \forall \xi \in \mathbb{E}. \tag{2.48}$$

Из (2.41) и (2.48) имеем по выбору φ и ρ, что
$$\mathbf{pr}_2(\psi(\xi)) = (\varphi \circ \rho)(\xi) \in \mathcal{S}((t_*, (\bar{h} \circ \rho)(\xi)), \omega) \qquad \forall \xi \in \mathbb{E}. \tag{2.49}$$

Из (2.10), (2.45), (2.46) и (2.49) получаем, что $\psi(\xi) \in \mathbf{Y} \ \forall \xi \in \mathbb{E}$. Иными словами,
$$\psi : \mathbb{E} \mapsto \mathbf{Y}. \tag{2.50}$$

Итак, имеем направленность $(\mathbb{E}, \prec, \psi)$ в подмножестве $\mathbf{Y}$. Из (2.43), (2.44), (2.45) вытекает, что (по определению топологии произведения) имеет место [18, п. 2.3.34] сходимость
$$(\mathbb{E}, \prec, \psi) \xrightarrow{\tau \otimes \mathfrak{C}_{t_*}} (x_*, \lambda_*).$$

С учетом (2.46) и того, что (2.50) определяет направленность в $\mathbf{Y}$, следует

$$(x_*, \lambda_*) \in \mathbf{Y}. \qquad (2.51)$$

Из (2.46), (2.51) получим

$$\lambda_* \in \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega). \qquad (2.52)$$

Покажем, что

$$\lambda_*(t) \in F\langle t\rangle \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \qquad (2.53)$$

Для этого напомним, что $(\mathbf{C}_{t_*}, \mathfrak{C}_{t_*})$ есть подпространство $(X^{\mathbf{I}_{t_*}}, \otimes^{\mathbf{I}_{t_*}}(\tau))$, а потому в силу (2.43) реализуется сходимость $(\mathbb{E}, \prec, \varphi \circ \rho) \overset{\otimes^{\mathbf{I}_{t_*}}(\tau)}{\to} \lambda_*$. Тогда, как следствие [18, п. 2.3.34],

$$(\mathbb{E}, \prec, (\varphi \circ \rho)(\cdot)(t)) \overset{\tau}{\to} \lambda_*(t) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \qquad (2.54)$$

Фиксируем $t^* \in \mathbf{I}_{t_*}$. Тогда из (2.54) получаем

$$(\mathbb{E}, \prec, (\varphi \circ \rho)(\cdot)(t^*)) \overset{\tau}{\to} \lambda_*(t^*). \qquad (2.55)$$

Напомним, что (см. (2.40)) $\varphi(\delta)(t^*) \in X$ $\forall \delta \in \mathbf{D}_*$. Как следствие, имеем, что $\varphi(\rho(\xi))(t^*) \in X$ $\forall \xi \in \mathbb{E}$. Иными словами, $(\varphi \circ \rho)(\xi)(t^*) \in X$ $\forall \xi \in \mathbb{E}$. С учетом (2.26), (2.32), (2.39) и (2.41) получаем, что при $\delta \in \mathbf{D}_*$ $(t^*, \varphi(\delta)(t^*)) \in F$, или, что то же самое, $\varphi(\delta)(t^*) \in F\langle t^*\rangle$. Как следствие (см. (2.42)), $(\varphi \circ \rho)(\xi)(t^*) \in F\langle t^*\rangle$ $\forall \xi \in \mathbb{E}$. Значит, $(\mathbb{E}, \prec, (\varphi \circ \rho)(\cdot)(t^*))$ есть направленность в $F\langle t^*\rangle$, для которой верно (2.55). Из (1.16) по выбору F и t^* имеем $F\langle t^*\rangle \in \mathfrak{F}$. Тогда из (2.55), по теореме Биркгофа, получаем свойство $\lambda_*(t^*) \in F\langle t^*\rangle$. Поскольку выбор t^* был произвольным, установлено (2.53), а потому

$$(t, \lambda_*(t)) \in F \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \qquad (2.56)$$

Из (2.27), (2.52) и (2.56) вытекает, что $\lambda_* \in \Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F)$. В частности,

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F) \neq \varnothing. \qquad (2.57)$$

Из (2.7), (2.24) и (2.57) получим $x_* \in \mathbb{A}_{t_*}[\omega](F)$. Следовательно, поскольку выбор x_* был произвольным, установлено, что $\mathbf{cl}(\mathbb{A}_{t_*}[\omega](F), \tau) \subset \mathbb{A}_{t_*}[\omega](F)$, откуда (см. (2.20)) имеем равенство $\mathbb{A}_{t_*}[\omega](F) = \mathbf{cl}(\mathbb{A}_{t_*}[\omega](F), \tau)$. Следовательно, $\mathbb{A}_{t_*}[\omega](F) \in \mathfrak{F}$. Так как выбор t_*, ω и $F \in \mathbf{F}$ был произвольным, получаем искомое соотношение (2.18). Доказательство завершено.

С учетом (2.9) и предложения 2.4, по аксиомам семейства замкнутых множеств, имеем

$$\mathbf{A}(F)\langle t\rangle \in \mathfrak{F} \qquad \forall F \in \mathbf{F}\ \forall t \in I. \qquad (2.58)$$

Из (1.16), (2.4) и (2.58) получаем

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда* $\mathbf{A}(F) \in \mathbf{F}$ $\forall F \in \mathbf{F}$.

Л е м м а 2.2. *Пусть выполнено условие* 2.1. *Тогда для любых* $(t, x) \in D$, $\omega \in \Omega_t$ *и* $F \in \mathbf{F}$ *множество* $\Pi(\omega \mid (t, x), F)$ *замкнуто в ТП* $(\mathbf{C}_t, \mathfrak{C}_t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(t_*, x_*) \in D$, $\omega \in \Omega_{t_*}$ и $F \in \mathbf{F}$. Из (1.14) и (2.2) вытекает, что $\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F) = \{s \in \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega) \mid s(t) \in F\langle t\rangle\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}\}$. При этом $F\langle t\rangle \in \mathfrak{F}$ $\forall t \in \mathbf{I}_{t_*}$. В силу условия 2.1

$$\mathcal{S}((t_*, x_*), \omega) \in \mathbb{F}_{t_*}. \qquad (2.59)$$

Если $t \in \mathbf{I}_{t_*}$, то отображение $\varphi[t]\colon \mathbf{C}_{t_*} \mapsto X$ вида $\varphi[t](s) \triangleq s(t)$ непрерывно как отображение из $(\mathbf{C}_{t_*}, \mathfrak{C}_{t_*})$ в (X, τ). Тогда

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F) = \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega) \bigcap \left(\bigcap_{t \in \mathbf{I}_{t_*}} \varphi[t]^{-1}(F\langle t\rangle) \right)$$

и, в силу непрерывности, $\varphi[t]^{-1}(F\langle t\rangle) \in \mathbb{F}_{t_*}$ $\forall t \in \mathbf{I}_{t_*}$. Тогда, как следствие, по аксиомам семейства замкнутых множеств,

$$\bigcap_{t\in\mathbf{I}_{t_*}} \varphi[t]^{-1}(F\langle t\rangle) \in \mathbb{F}_{t_*}. \tag{2.60}$$

Из (2.59)–(2.60) вытекает, что

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F) \in \mathbb{F}_{t_*}.$$

Последнее означает справедливость требуемого положения. Доказательство завершено.

В следующем утверждении обосновывается секвенциальная непрерывность семейства операторов $\mathbb{A}_\omega[t]$ при $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$.

П р е д л о ж е н и е 2.5. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.3. *Тогда для любых* $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ *и* $F \in \mathcal{P}(D)$ *истинна импликация*

$$((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbb{A}_\omega[t](F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}_\omega[t](F) \quad \forall t \in I\ \forall \omega \in \Omega_t). \tag{2.61}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(D)$, для которых $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F$. По определению, получим, что

$$(F_{j+1} \subset F_j\ \forall j \in \mathbb{N})\&(F = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i). \tag{2.62}$$

Из (2.62), по аксиомам семейства замкнутых множеств, следует, что

$$F \in \mathbf{F}. \tag{2.63}$$

Пусть $t_* \in I$ и $\omega \in \Omega_{t_*}$. С учетом (2.7) получаем, что

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F_i) \triangleq \{x \in F_i\langle t_*\rangle \mid \Pi(\omega \mid (t_*, x), F_i) \neq \varnothing\} \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \tag{2.64}$$

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F) \triangleq \{x \in F\langle t_*\rangle \mid \Pi(\omega \mid (t_*, x), F) \neq \varnothing\}. \tag{2.65}$$

При этом из определения $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$, условия 2.1 и (2.63), используя лемму 2.2, получим, что

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x), F_i) = \{s \in \mathcal{S}((t_*, x), \omega) \mid s(t) \in F_i\langle t\rangle\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}\} \in \mathbb{F}_{t_*} \qquad \forall x \in X\ \forall i \in \mathbb{N}, \tag{2.66}$$

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x), F) = \{s \in \mathcal{S}((t_*, x), \omega) \mid s(t) \in F\langle t\rangle\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}\} \in \mathbb{F}_{t_*} \qquad \forall x \in X. \tag{2.67}$$

Из (2.62), (2.66), (2.67) вытекают следующие свойства:

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x), F_{j+1}) \subset \Pi(\omega \mid (t_*, x), F_j) \qquad \forall x \in X\ \forall j \in \mathbb{N}, \tag{2.68}$$

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x), F) \subset \Pi(\omega \mid (t_*, x), F_i) \qquad \forall x \in X\ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.69}$$

В свою очередь, из (2.64), (2.65), (2.68) и (2.69) следует

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F_{j+1}) \subset \mathbb{A}_\omega[t_*](F_j) \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{2.70}$$

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F) \subset \mathbb{A}_\omega[t_*](F_i) \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.71}$$

Как следствие из (2.71), получим, что

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_\omega[t_*](F_i). \tag{2.72}$$

Покажем, что выполняется и обратное вложение

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_\omega[t_*](F_i) \subset \mathbb{A}_\omega[t_*](F). \tag{2.73}$$

В самом деле, пусть

$$x_* \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{A}_\omega[t_*](F_i). \tag{2.74}$$

Тогда согласно (2.64) имеем, в частности, $x_* \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i\langle t_*\rangle$, а потому $(t_*, x_*) \in F_i \ \forall i \in \mathbb{N}$. С учетом (2.62) получаем, что $(t_*, x_*) \in F$ или (см. (1.14))

$$x_* \in F\langle t_*\rangle. \tag{2.75}$$

Возвращаясь к (2.74), отметим с учетом (2.64), что

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_j) \neq \varnothing \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.76}$$

Согласно лемме 2.2 из определения $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ имеем

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_j) \in \mathbb{F}_{t_*} \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.77}$$

С учетом условия 2.3 выберем $H_* \in \mathbf{N}_\tau(x_*)$ и $K_* \in \mathfrak{K}_{t_*}$ такие, что

$$\mathcal{S}((t_*, y), \omega) \subset K_* \ \forall y \in H_*. \tag{2.78}$$

Так как $x_* \in H_*$, с учетом (2.78) получим, что

$$\mathcal{S}((t_*, x_*), \omega) \subset K_*. \tag{2.79}$$

Из (2.66), (2.79) вытекает, что

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_j) \subset K_* \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.80}$$

С другой стороны, из (2.68) имеем

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_l) \subset \Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_k) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ \forall l \in \overrightarrow{k, \infty}. \tag{2.81}$$

Из (2.76), (2.81) вытекает, что $\pi \triangleq \{\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_i) : i \in \mathbb{N}\}$ есть центрированное семейство замкнутых п/м K_*. Вместе с тем в силу компактности K_* в $(\mathbf{C}_{t_*}, \mathfrak{C}_{t_*})$ следует, что $\mathfrak{C}_{t_*}|_{K_*} = \{K_* \cap G \colon G \in \mathfrak{C}_{t_*}\}$ есть топология K_*, превращающая K_* в компактное ТП. С учетом [21, (2.3.12)] $\mathbb{F}_{t_*}|_{K_*} = \{K_* \cap Q : Q \in \mathbb{F}_{t_*}\}$ есть семейство всех п/м K_*, замкнутых в $(K_*, \mathfrak{C}_{t_*}|_{K_*})$. Из (2.77), (2.80) получаем $\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_j) \in \mathbb{F}_{t_*}|_{K_*} \ \forall j \in \mathbb{N}$. Значит, $\pi \subset \mathbb{F}_{t_*}|_{K_*}$. Тогда π является центрированным семейством замкнутых множеств в компактном ТП $(K_*, \mathfrak{C}_{t_*}|_{K_*})$, а потому имеет непустое пересечение. Выберем и зафиксируем

$$s_* \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_j). \tag{2.82}$$

Из (2.66) и (2.82) вытекает, что $s_*(t) \in F_j\langle t\rangle \ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*} \ \forall j \in \mathbb{N}$. Иными словами,

$$s_*(t) \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j\langle t\rangle \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{2.83}$$

С учетом (2.83), (2.62) и (1.14) имеем, что

$$s_*(t) \in F\langle t\rangle \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{2.84}$$

Из (2.82) следует, в частности, что $s_* \in \Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F_1)$, а потому согласно (2.66)

$$s_* \in \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega). \tag{2.85}$$

Из (2.66), (2.84) и (2.85) получаем, что $s_* \in \Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F)$ и, в частности,

$$\Pi(\omega \mid (t_*, x_*), F) \neq \varnothing. \tag{2.86}$$

Из (2.65), (2.75) и (2.86) получаем, что $x_* \in \mathbb{A}_\omega[t_*](F)$. Поскольку x_* выбиралось произвольно, установлено вложение (2.73), а вместе с ним (см. (2.72)) и равенство

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_\omega[t_*](F_i). \tag{2.87}$$

Из (2.70), (2.87) вытекает следствие импликации (2.61). Итак,

$$((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbb{A}_\omega[t_*](F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}_\omega[t_*](F)).$$

Коль скоро выбор t_* и ω был произвольным, предложение доказано.

Следствие 2.3. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.3. *Тогда для произвольных*

$$(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}, \qquad F \in \mathcal{P}(D)$$

истинна импликация $((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbf{A}(F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}(F))$.

Доказательство. Фиксируем $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(D)$, для которых

$$(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F. \tag{2.88}$$

Это означает, что

$$(F_{j+1} \subset F_j \ \forall j \in \mathbb{N}) \,\&\, (F = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i). \tag{2.89}$$

Из (2.1), (2.5) и (2.89) вытекает, что

$$\mathbf{A}(F_{j+1}) \subset \mathbf{A}(F_j) \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{2.90}$$

$$\mathbf{A}(F) \subset \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{A}(F_j). \tag{2.91}$$

Выберем произвольно $(t_*, x_*) \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{A}(F_j)$. Тогда согласно следствию 2.1

$$x_* \in \mathbb{A}_\omega[t_*](F_j) \qquad \forall \omega \in \Omega_{t_*} \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.92}$$

Вместе с тем из (2.88) в силу предложения 2.5

$$\mathbb{A}_\omega[t_*](F) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_\omega[t_*](F_j) \qquad \forall \omega \in \Omega_{t_*}. \tag{2.93}$$

Из (2.92), (2.93) получим, что $x_* \in \bigcap_{\omega \in \Omega_{t_*}} \mathbb{A}_\omega[t_*](F)$. Теперь с учетом следствия 2.1 имеем, что

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{A}(F). \tag{2.94}$$

Так как выбор (t_*, x_*) был произвольным, из (2.94) получаем вложение

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{A}(F_j) \subset \mathbf{A}(F). \tag{2.95}$$

Из (2.91), (2.95) получим равенство

$$\mathbf{A}(F) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{A}(F_j). \tag{2.96}$$

Из (2.90) и (2.96) следует, что

$$(\mathbf{A}(F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}(F). \tag{2.97}$$

Итак (см. (2.88), (2.97)), имеем импликацию $((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbf{A}(F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}(F))$. Поскольку выбор $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и F был произвольным, предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 2.6. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда* $\forall F \in \mathbf{F}$

$$(\mathbf{A}^k(F) \in \mathbf{F}\ \forall k \in \mathbb{N}_0)\,\&\,(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \in \mathbf{F}).$$

Доказательство утверждения получается индукцией на основе следствия 2.2.

П р е д л о ж е н и е 2.7. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.3. *Тогда для произвольных*

$$F \in \mathcal{P}(D), \qquad (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$$

истинна импликация

$$((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\mathbf{A}^k(F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}^k(F)\ \forall k \in \mathbb{N}_0).$$

Доказательство получается индукцией по $k \in \mathbb{N}_0$ на основе следствия 2.3.

П р е д л о ж е н и е 2.8. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и* 2.3. *Тогда для произвольных*

$$F \in \mathcal{P}(D), \qquad (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$$

истинна импликация

$$((F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow ((\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)). \tag{2.98}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(D)$ такие, что $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} \downarrow F$. Тогда $F \in \mathbf{F}$ и из предложения 2.7 следует, что $(\mathbf{A}^k(F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}^k(F)\ \forall k \in \mathbb{N}_0$ и, в частности,

$$\mathbf{A}^k(F_{i+1}) \subset \mathbf{A}^k(F_i) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0\ \forall i \in \mathbb{N}, \tag{2.99}$$

$$\mathbf{A}^k(F) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^k(F_i) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.100}$$

Из (2.99) получим (см. (2.13)), что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F_{i+1}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(F_{i+1}) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(F_i) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F_i) \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.101}$$

Из (2.100) следуют (см. (2.13)) соотношения

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(F) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^k(F_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(F_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F_i). \tag{2.102}$$

Из (2.101) и (2.102) получим, что

$$(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F_i))_{i\in\mathbb{N}} \downarrow \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F). \tag{2.103}$$

Так как $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и F выбирались произвольно, из (2.103) следует импликация (2.98). Доказательство завершено.

П р е д л о ж е н и е 2.9. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда*

$$\mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \qquad \forall F \in \mathbf{F}. \tag{2.104}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $F \in \mathbf{F}$. Из (2.12) и предложения 2.6 получаем, что

$$(\mathbf{A}^k(F))_{k\in\mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbf{F}. \tag{2.105}$$

При этом $\mathbf{A}^0(F) = F$ и, кроме того,

$$\mathbf{A}^{k+1}(F) \subset \mathbf{A}^k(F) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.106}$$

Из (2.13) и (2.106) имеем, в частности,

$$(\mathbf{A}^k(F))_{k\in\mathbb{N}} \downarrow \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F). \tag{2.107}$$

Из (2.13), (2.105), (2.106) и следствия 2.3 получаем (см. предложение 2.3), что

$$(\mathbf{A}(\mathbf{A}^k(F)))_{k\in\mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)). \tag{2.108}$$

Из (2.107), (2.108) имеем цепочку равенств

$$\mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{A}(\mathbf{A}^k(F)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^{k+1}(F) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^k(F) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F).$$

Доказательство завершено.

П р е д л о ж е н и е 2.10. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Пусть* $F \in \mathbf{F}$ *и* $H \in \mathcal{P}(F)$. *Тогда* $(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset H) \Rightarrow (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(H))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset H$. Тогда имеем $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset H \subset F$. Это означает, что (см. 2.12)

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset \mathbf{A}^0(H) \subset \mathbf{A}^0(F). \tag{2.109}$$

Пусть вообще $m \in \mathbb{N}_0$ таково, что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset \mathbf{A}^m(H) \subset \mathbf{A}^m(F). \tag{2.110}$$

Тогда из (2.1), (2.5) и предложения 2.9 получаем, что (см. 2.12)

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) = \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)) \subset \mathbf{A}(\mathbf{A}^m(H)) = \mathbf{A}^{m+1}(H) \subset \mathbf{A}(\mathbf{A}^m(F)) = \mathbf{A}^{m+1}(F),$$

откуда, в частности, следует, что

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset \mathbf{A}^{m+1}(H) \subset \mathbf{A}^{m+1}(F). \tag{2.111}$$

Итак (см. (2.111), (2.110)),

$$(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset \mathbf{A}^m(H) \subset \mathbf{A}^m(F)) \Rightarrow (\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset \mathbf{A}^{m+1}(H) \subset \mathbf{A}^{m+1}(F)).$$

Поскольку выбор $m \in \mathbb{N}_0$ был произвольным, установлено (см. (2.109)) $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset \mathbf{A}^k(H) \subset \mathbf{A}^k(F)$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Поэтому согласно (2.13)

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(F) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(H) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(H) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbf{A}^k(F) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F),$$

то есть $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(H) = \overset{\infty}{\mathbf{A}}(F)$. Доказательство завершено.

§ 3. Связь с операторной выпуклостью

Всюду в дальнейшем фиксируем множество $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$ (в содержательной задаче удержания траекторий управляемой системы сечения $\mathcal{N}$ используются в качестве фазовых ограничений). Введем в рассмотрение оператор

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{N}), \tag{3.1}$$

для которого

$$\mathcal{A}(H) \triangleq \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus H) \qquad \forall H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}). \tag{3.2}$$

В связи с (3.1), (3.2) рассмотрим семейство

$$(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mid \forall B \in \mathcal{P}(\mathcal{N})\ (B \subset H) \Rightarrow (\mathcal{A}(B) \subset H)\},$$

получая соответствующую (1.6) операторную выпуклость:

$$(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}] \in (\mathrm{CONV})[\mathcal{N}]. \tag{3.3}$$

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Отображение* $\mathcal{A}$ *является предоболочкой:* $\mathcal{A} \in (\text{p–HULL})[\mathcal{N}]$.

Доказательство следует из (3.2) и очевидных свойств оператора $\mathbf{A}$ (изотонности и экстенсивности); см. также (1.7).

Из предложения 3.1 в силу [13, лемма 1.1] следует свойство (см. (1.8))

$$(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}] = \{H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) \mid \mathcal{A}(H) = H\}. \tag{3.4}$$

С учетом (1.5) и (3.3) в связи с представлением выпуклой оболочки получаем, что $\forall S \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$

$$((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[S] = \bigcap_{H \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](S)} H \in (\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]. \tag{3.5}$$

Приводимые ниже общие положения согласуются с [14] в случае позиционных дифференциальных игр. В частности, (3.5) определено при $S = \varnothing$. В этой связи напомним, что $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ (см. (2.12), (2.13)). Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathcal{N} \in \mathbf{F}. \tag{3.6}$$

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда множество* $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ *выпукло:*

$$\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \in (\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 2.9 согласно (3.2) имеем

$$\mathcal{A}(\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) = \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus (\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))) = \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) = \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}).$$

Поэтому в силу (3.4) выполняется (3.7). $\square$

Из предложения 3.2 следует, в частности, что (см. (1.5))

$$((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[\varnothing] \subset \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}). \tag{3.8}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда справедливо равенство*

$$((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[\varnothing] = \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}). \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $H \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](\varnothing)$. Тогда $H \in (\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]$, а потому (см. (3.4)) $H = \mathcal{A}(H)$. Отсюда, в силу определения $\mathcal{A}$, $H = \mathcal{N} \setminus \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus H)$ и, следовательно, $\mathcal{N} \setminus H = \mathbf{A}(\mathcal{N} \setminus H)$. С учетом (2.14) получаем $\mathcal{N} \setminus H \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$. Тогда $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N} \setminus (\mathcal{N} \setminus H) = H$. Поскольку выбор H был произвольным, установлено, что $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset M \ \forall M \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](\varnothing)$. С учетом (1.5) получаем, что

$$\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset \bigcap_{M \in [(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]](\varnothing)} M = ((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[\varnothing]. \tag{3.10}$$

Из (3.8), (3.10) вытекает искомое равенство (3.9). $\square$

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда* $\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ *есть наименьший по включению элемент выпуклости* $(\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]$.

С л е д с т в и е 3.2. *Пусть выполнены условия* 2.2 *и* 2.3. *Тогда при* $H \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$

$$(H \in \mathcal{P}(\mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))) \Rightarrow (((\mathcal{A}\text{–conv})[\mathcal{N}]\text{–hull})[H] = \mathcal{N} \setminus \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})).$$

§ 4. Согласованность пакетов пространств и квазистратегии, разрешающие задачу удержания

Напомним, что во всех предыдущих построениях не предполагалось какой-либо согласованности множеств $\mathbf{C}_{t_1}$, $\mathbf{C}_{t_2}$ при $t_1 \in I$, $t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$. Аналогичное замечание справедливо в отношении множеств Ω_t, $t \in I$.

Всюду в пределах настоящего пункта полагаем, что

$$\big(\mathbf{C}_t \mid \mathbf{I}_{t'}\big) \subset \mathbf{C}_{t'} \qquad \forall t \in I\ \forall t' \in \mathbf{I}_t \tag{4.1}$$

и, кроме того,

$$\big(\Omega_t \mid \mathbf{I}_{t'}\big) \subset \Omega_{t'} \qquad \forall t \in I\ \forall t' \in \mathbf{I}_t. \tag{4.2}$$

В дальнейшем потребуется аналог полугруппового свойства. При $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$, $t' \in \mathbf{I}_t$ и $x' \in X$ с учетом условия (4.2) определено (см. (1.10)) множество $\mathcal{S}((t', x'), (\omega \mid \mathbf{I}_{t'})) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{t'})$.

Условие 4.1 (полугрупповое свойство). $\forall (t, x) \in D$, $\forall \omega \in \Omega_t$, $\forall h \in \mathcal{S}((t, x), \omega)$, $\forall t' \in \mathbf{I}_t$

$$(h \mid \mathbf{I}_{t'}) \in \mathcal{S}((t', h(t')), (\omega \mid \mathbf{I}_{t'})).$$

Предложение 4.1. *Пусть выполнено условие* 4.1. *Тогда для любых* $t_* \in I$, $\omega_* \in \Omega_{t_*}$ *и* $H \in \mathcal{P}(D)$

$$\mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](H) = \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](\{(t, x) \in \mathbf{I}_{t_*} \times X \mid x \in \mathbb{A}_{(\omega_* \mid \mathbf{I}_t)}[t](H)\}). \tag{4.3}$$

Доказательство. Фиксируем $t_* \in I$, $\omega_* \in \Omega_{t_*}$ и $H \in \mathcal{P}(D)$. Тогда в силу (4.2) $(\omega_* \mid \mathbf{I}_t) \in \Omega_t\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}$. С учетом этого определим

$$\mathbf{H} \triangleq \{(t, x) \in \mathbf{I}_{t_*} \times X \mid x \in \mathbb{A}_{(\omega_* \mid \mathbf{I}_t)}[t](H)\} \in \mathcal{P}(D). \tag{4.4}$$

В терминах (4.4) доказываемое равенство (4.3) записывается следующим образом:

$$\mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](H) = \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](\mathbf{H}). \tag{4.5}$$

Для доказательства (4.5) отметим (см. (2.1), (2.7)), что

$$\mathbb{A}_{(\omega_* \mid \mathbf{I}_t)}[t](H) \subset H\langle t\rangle \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{4.6}$$

Из (4.4), (4.6), учитывая изотонность $\mathbb{A}_{\omega_*}[t_*]$ (см. (2.1), (2.7)), получаем, что

$$\mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](\mathbf{H}) \subset \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](\{(t, x) \in \mathbf{I}_{t_*} \times X \mid x \in H\langle t\rangle\}). \tag{4.7}$$

Кроме того (см. (1.15)), $\{(t, x) \in \mathbf{I}_{t_*} \times X \mid x \in H\langle t\rangle\} \subset \{(t, x) \in D \mid x \in H\langle t\rangle\} = H$. Поэтому из (4.7) вытекает, что

$$\mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](\mathbf{H}) \subset \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](H). \tag{4.8}$$

Покажем обратное вложение. Фиксируем $y_* \in \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](H)$. Тогда с учетом (2.7) $y_* \in H\langle t_*\rangle$ и

$$\Pi(\omega_* \mid (t_*, y_*), H) \neq \varnothing. \tag{4.9}$$

Пусть $h_* \in \Pi(\omega_* \mid (t_*, y_*), H)$. Для h_* имеем (см. (2.1)), что

$$h_* \in \mathcal{S}((t_*, y_*), \omega_*), \tag{4.10}$$

где $\mathcal{S}((t_*, y_*), \omega_*) \subset \mathbf{C}_{t_*}$, а тогда $h_* \in \mathbf{C}_{t_*}$. При этом

$$h_*(\xi) \in H\langle \xi\rangle \qquad \forall \xi \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{4.11}$$

Из определения (4.4) получаем (см. (1.14)), что

$$\mathbf{H}\langle t\rangle = \mathbb{A}_{(\omega_* \mid \mathbf{I}_t)}[t](H) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{4.12}$$

В частности, при $t = t_*$ имеем из (4.12)

$$\mathbf{H}\langle t_*\rangle = \mathbb{A}_{(\omega_*|\mathbf{I}_{t_*})}[t_*](H) = \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](H). \tag{4.13}$$

По выбору y_* из (4.13) имеем включение

$$y_* \in \mathbf{H}\langle t_*\rangle. \tag{4.14}$$

Покажем, что

$$h_* \in \Pi(\omega_* \mid (t_*, y_*), \mathbf{H}). \tag{4.15}$$

Напомним, что согласно (2.2)

$$\Pi(\omega_* \mid (t_*, y_*), \mathbf{H}) = \{s \in \mathcal{S}((t_*, y_*), \omega_*) \mid s(t) \in \mathbf{H}\langle t\rangle \ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}\}. \tag{4.16}$$

Выберем $\theta \in \mathbf{I}_{t_*}$. Тогда для (t_*, y_*), ω_*, h_* и θ, по условию 4.1, имеем при $g \triangleq (h_* \mid \mathbf{I}_\theta)$, что

$$g \in \mathcal{S}((\theta, h_*(\theta)), (\omega_* \mid \mathbf{I}_\theta)). \tag{4.17}$$

Из (4.11) получим

$$g(\xi) \in H\langle \xi\rangle \qquad \forall \xi \in \mathbf{I}_\theta. \tag{4.18}$$

С учетом (2.2) из (4.17) и (4.18) получим $g \in \Pi((\omega_* \mid \mathbf{I}_\theta) \mid (\theta, h_*(\theta)), H)$ и, в частности, $\Pi((\omega_* \mid \mathbf{I}_\theta) \mid (\theta, h_*(\theta)), H) \neq \varnothing$. Поскольку $h_*(\theta) \in H\langle\theta\rangle$, то $h_*(\theta) \in \mathbb{A}_{(\omega_*|\mathbf{I}_\theta)}[\theta](H)$ (см. (2.7)), в силу (4.12) $h_*(\theta) \in \mathbf{H}\langle\theta\rangle$. Таким образом,

$$h_*(\xi) \in \mathbf{H}\langle\xi\rangle \qquad \forall \xi \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{4.19}$$

Из (4.10), (4.19) с учетом (4.16) получим (4.15). В частности, $\Pi(\omega_* \mid (t_*, y_*), \mathbf{H}) \neq \varnothing$. Следовательно (см. (2.7), (4.14)), $y_* \in \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](\mathbf{H})$. Так как y_* было выбрано произвольно, имеем вложение

$$\mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](H) \subset \mathbb{A}_{\omega_*}[t_*](\mathbf{H}). \tag{4.20}$$

Из (4.8), (4.20) получаем требуемое равенство (4.5), означающее с учетом (4.4) справедливость (4.3). $\square$

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Пусть выполнено условие* 4.1. *Тогда для любых* $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$, $F \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$

$$(F = \mathbf{A}(F)) \Leftrightarrow (\exists H \in \mathcal{P}(\mathcal{N})\colon F\langle t\rangle = \mathbb{A}_\omega[t](H) \ \forall t \in I \ \forall \omega \in \Omega_t). \tag{4.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$ и $F \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$. Пусть $F = \mathbf{A}(F)$. Тогда для $H \triangleq F$ и $t \in I$ имеем (см. (1.14), (2.9)) $H \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ и $F\langle t\rangle = \mathbf{A}(H)\langle t\rangle = \bigcap_{\omega\in\Omega_t} \mathbb{A}_\omega[t](H)$. Следовательно,

$$F\langle t\rangle \subset \mathbb{A}_\omega[t](H) \qquad \forall \omega \in \Omega_t. \tag{4.22}$$

С другой стороны (см. (2.7) и определение H),

$$\mathbb{A}_\omega[t](H) \subset H\langle t\rangle = F\langle t\rangle \qquad \forall \omega \in \Omega_t. \tag{4.23}$$

Из (4.22), (4.23) получим, что для любых $t \in I$ и $\omega \in \Omega_t$ выполняется равенство $F\langle t\rangle = \mathbb{A}_\omega[t](H)$. Так как F было выбрано произвольно, имеем импликацию

$$(F = \mathbf{A}(F)) \Rightarrow (\exists H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}): \ F\langle t\rangle = \mathbb{A}_\omega[t](H) \ \forall t \in I \ \forall \omega \in \Omega_t). \tag{4.24}$$

Докажем обратную импликацию. Пусть (для $F \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$) при некотором $H \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ и произвольно выбранных $t \in I$, $\omega \in \Omega_t$ выполняется равенство $F\langle t\rangle = \mathbb{A}_\omega[t](H)$. Поэтому в силу вложений (4.2) имеем при $t \in I$ и $\omega \in \Omega_t$, что

$$F\langle\xi\rangle = \mathbb{A}_{(\omega|\mathbf{I}_\xi)}[\xi](H) \qquad \forall \xi \in \mathbf{I}_t. \tag{4.25}$$

В силу предложения 4.1 из (1.15), (2.7), (2.8) и (4.25) следует, что

$$\mathbb{A}_\omega[t](F) = \mathbb{A}_\omega[t](\{(\xi, x) \in \mathbf{I}_t \times X \mid x \in \mathbb{A}_{(\omega|\mathbf{I}_\xi)}[\xi](H)\}) = \mathbb{A}_\omega[t](H \cap (\mathbf{I}_t \times X)) = \mathbb{A}_\omega[t](H). \quad (4.26)$$

Воспользовавшись (4.25) при $\xi = t$ и учитывая, что $(\omega \mid \mathbf{I}_t) = \omega$, получаем из (4.26) равенства $F\langle t\rangle = \mathbb{A}_\omega[t](F)$ при $\omega \in \Omega_t$. Отсюда следует (см. (2.9)) $F\langle t\rangle = \bigcap_{\omega\in\Omega_t} \mathbb{A}_\omega[t](F) = \mathbf{A}(F)\langle t\rangle$. Так как t выбиралось произвольно, с учетом (1.15) имеем $F = \mathbf{A}(F)$. Таким образом, для $F \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ выполняется импликация

$$(\exists H \in \mathcal{P}(\mathcal{N}) : \ F\langle t\rangle = \mathbb{A}_\omega[t](H) \ \forall t \in I \ \forall \omega \in \Omega_t) \Rightarrow (F = \mathbf{A}(F)). \quad (4.27)$$

Из (4.24), (4.27) получим требуемое соотношение (4.21). □

Рассмотрим вопрос о решении задачи удержания в классе многозначных квазистратегий, имея в виду конструкции [11]. Всюду в дальнейшем при $(t, x) \in D$ полагаем

$$\mathcal{S}((t,x),\cdot) \triangleq (\mathcal{S}((t,x),\omega))_{\omega\in\Omega_t} : \Omega_t \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}_t).$$

Далее будем придерживаться следующего соглашения: если $t \in I$, $t' \in \mathbf{I}_t$, $h \in \mathbf{C}_t$ и $h' \in \mathbf{C}_{t'}$, то отображение $h\Box h' \colon \mathbf{I}_t \mapsto X$ (склейка h и h') определяется соотношениями

$$((h\Box h')(\xi) \triangleq h(\xi) \ \forall \xi \in \mathbb{I}_t^{(t')}) \,\&\, ((h\Box h')(\zeta) \triangleq h'(\zeta) \ \forall \zeta \in \mathbf{I}_{t'} \setminus \{t'\}).$$

Отметим, что в следующем условии 4.2 используется предположение (4.2).

У с л о в и е 4.2 (допустимость склейки движений). $\forall (t,x) \in D$, $\forall t' \in \mathbf{I}_t$, $\forall \omega \in \Omega_t$, $\forall \omega' \in \Omega_t$:

$$((\omega \mid \mathbb{I}_t^{(t')}) = (\omega' \mid \mathbb{I}_t^{(t')})) \Rightarrow (h\Box h' \in \mathcal{S}((t,x),\omega') \ \forall h \in \mathcal{S}((t,x),\omega) \ \forall h' \in \mathcal{S}((t', h(t')), (\omega' \mid \mathbf{I}_{t'}))).$$

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Пусть выполнено условие* 4.2. *Тогда динамика* $\mathcal{S}$ *обладает свойством неупреждаемости:* $\forall (t,x) \in D$, $\forall t' \in \mathbf{I}_t$, $\forall \omega \in \Omega_t$ *и* $\forall \omega' \in \Omega_t$

$$((\omega \mid \mathbb{I}_t^{(t')}) = (\omega' \mid \mathbb{I}_t^{(t')})) \Rightarrow (\big(\mathcal{S}((t,x),\omega) \mid \mathbb{I}_t^{(t')}\big) = \big(\mathcal{S}((t,x),\omega') \mid \mathbb{I}_t^{(t')}\big)). \quad (4.28)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольно $(t,x) \in D$. Пусть $\omega \in \Omega_t$, $\omega' \in \Omega_t$ и $t' \in \mathbf{I}_t$ таковы, что $(\omega \mid \mathbb{I}_t^{(t')}) = (\omega' \mid \mathbb{I}_t^{(t')})$. Покажем, что для множеств $\Gamma \triangleq \big(\mathcal{S}((t,x),\omega) \mid \mathbb{I}_t^{(t')}\big)$, $\Gamma' \triangleq \big(\mathcal{S}((t,x),\omega') \mid \mathbb{I}_t^{(t')}\big)$ справедливо вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. Пусть $\gamma \in \Gamma$; тогда для некоторого $h \in \mathcal{S}((t,x),\omega)$ имеем равенство $\gamma = (h \mid \mathbb{I}_t^{(t')})$. По определению (см. (1.10)), найдется $h' \in \mathcal{S}((t', h(t')), (\omega' \mid \mathbf{I}_{t'}))$. Тогда из условия 4.2 следует, что $h\Box h' \in \mathcal{S}((t,x),\omega')$. Значит, $\gamma = (h\Box h' \mid \mathbb{I}_t^{(t')}) \in \Gamma'$. Так как γ выбиралось произвольно, получаем вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. В силу симметрии определения множеств Γ и Γ' имеем $\Gamma = \Gamma'$. Из произвольности в выборе t', ω и ω' следует импликация (4.28). Так как позиция (t,x) выбрана произвольно, получаем искомое утверждение. □

Напомним, что согласно (2.1) $\Pi(\omega \mid z, H) \subset \mathcal{S}(z,\omega) \ \forall H \in \mathcal{P}(D) \ \forall z \in D \ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}$. Кроме того, из (2.1) следует, что при $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$, $\omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}$ и $s \in \Pi(\omega \mid z, H)$ $(t, s(t)) \in H$ $\forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$.

Отметим, что в следующем предложении отсутствует вводимое ниже требование 4.3 «склеиваемости» помех. Это расширяет возможность применения данной конструкции квазистратегии на практически важные случаи, например на случай непрерывных помех.

П р е д л о ж е н и е 4.4. *Пусть выполнены условия* 2.2, 2.3 *и* 4.2. *Тогда*

$$\Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) \in \mathbb{M}_z \qquad \forall z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}). \quad (4.29)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$; тогда для некоторых $t_* \in I$ и $x_* \in X$ имеем $z = (t_*, x_*)$. Для краткости полагаем, что

$$\alpha \triangleq \Pi(\cdot \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})). \tag{4.30}$$

Это означает, что $\alpha : \Omega_{t_*} \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{C}_{t_*})$ удовлетворяет условию

$$(t, s(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall \omega \in \Omega_{t_*}\ \forall s \in \alpha(\omega)\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}; \tag{4.31}$$

итак, $\alpha(\omega) = \Pi(\omega \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$ при $\omega \in \Omega_{t_*}$. В частности (см. (2.1)),

$$\alpha(\omega) \subset \mathcal{S}((t_*, x_*), \omega) \qquad \forall \omega \in \Omega_{t_*}. \tag{4.32}$$

С учетом условий 2.2, 2.3 из (2.104) и (3.6) имеем $z \in \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$. Поэтому (см. (2.5), (4.30)) $\alpha(\omega) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega_{t_*}$. Отсюда, с учетом (4.32) получим

$$\alpha \in \prod_{\omega \in \Omega_{t_*}} \mathcal{P}'(\mathcal{S}((t_*, x_*), \omega)). \tag{4.33}$$

Пусть $\omega \in \Omega_{t_*}$, $\omega' \in \Omega_{t_*}$ и $\theta \in \mathbf{I}_{t_*}$ таковы, что

$$(\omega \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}) = (\omega' \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}). \tag{4.34}$$

Покажем, что для множеств $\Gamma \triangleq \big(\alpha(\omega) \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}\big)$, $\Gamma' \triangleq \big(\alpha(\omega') \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}\big)$ справедливо вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. Пусть $\gamma \in \Gamma$; тогда для некоторого $h \in \alpha(\omega)$ имеем равенство $\gamma = (h \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)})$. При этом согласно (4.31)

$$(t, h(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{4.35}$$

В частности, учитывая (2.104), получаем, что (поскольку $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) = \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$)

$$(\theta, h(\theta)) \in \mathbf{A}(\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})). \tag{4.36}$$

Из (4.36) и (2.5) получаем, как следствие, что $\Pi(\nu \mid (\theta, h(\theta)), \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) \neq \varnothing\ \forall \nu \in \Omega_\theta$. В частности, множество $\Pi((\omega' \mid \mathbf{I}_\theta) \mid (\theta, h(\theta)), \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))$ корректно определено (см. вложение (4.2)) и $\Pi((\omega' \mid \mathbf{I}_\theta) \mid (\theta, h(\theta)), \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})) \neq \varnothing$. Пусть

$$\tilde{h} \in \Pi((\omega' \mid \mathbf{I}_\theta) \mid (\theta, h(\theta)), \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})). \tag{4.37}$$

Имеем $h \in \mathcal{S}(z, \omega)$, $\tilde{h} \in \mathcal{S}((\theta, h(\theta)), (\omega' \mid \mathbf{I}_\theta))$. С учетом (4.34) из условия 4.2 получим, что

$$h' \triangleq h \square \tilde{h} \in \mathcal{S}(z, \omega'). \tag{4.38}$$

Отметим, что согласно (2.1), (4.37) и (4.38)

$$(t, h'(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_\theta \setminus \{\theta\}. \tag{4.39}$$

Кроме того, из (4.35) и (4.38) следует

$$(t, h'(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}. \tag{4.40}$$

В совокупности (4.40) и (4.39) дают соотношения

$$(t, h'(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}. \tag{4.41}$$

Из (2.1), (4.30), (4.38) и (4.41) получим, что $h' \in \alpha(\omega')$. Следовательно, опять в силу (4.38) и определения Γ' выполняется $\gamma = (h' \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}) \in \Gamma'$. Так как γ выбиралось произвольно, получаем вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. В силу симметрии в определении множеств Γ, Γ' имеем $\Gamma = \Gamma'$ и, так как выбор θ, ω, ω' был произволен, окончательно получаем, что $\forall \omega_1 \in \Omega_{t_*}$ $\forall \omega_2 \in \Omega_{t_*}$ $\forall t \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$((\omega_1 \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)}) = (\omega_2 \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)})) \Rightarrow (\big(\alpha(\omega_1) \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)}\big) = \big(\alpha(\omega_2) \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)}\big)). \tag{4.42}$$

Из (1.13), (4.33), (4.42) получим $\alpha \in \mathbb{M}_{(t_*,x_*)}$ и, следовательно (см. (4.30)), включение (4.29). □

Из вложения $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$ (см. (2.13)) с учетом (4.29) получаем, что при выполнении условий 2.2, 2.3, 4.2 (и вложений (4.2)) справедливо соотношение

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \subset \{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t, s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall s \in \alpha(\omega)\}. \tag{4.43}$$

Из предложения 4.4 и определения (2.1) следует, что

$$(t, s(t)) \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) \qquad \forall z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})\ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall s \in \Pi(\omega \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}. \tag{4.44}$$

Таким образом, из (2.12), (2.13) и (4.44) вытекает, что

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \qquad \forall z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})\ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall s \in \Pi(\omega \mid z, \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}))\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}. \tag{4.45}$$

Мы получили для $z \in \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ явный вид квазистратегии, разрешающей для позиции z задачу удержания в $\mathcal{N}$.

Далее будем придерживаться следующего соглашения: если $t \in I$, $t' \in \mathbf{I}_t$, $\omega \in \Omega_t$ и $\omega' \in \Omega_{t'}$, то отображение $\omega \square \omega' : \mathbf{I}_t \mapsto Y$ (склейка ω и ω') определяется соотношениями

$$((\omega \square \omega')(\xi) \triangleq \omega(\xi)\ \forall \xi \in \mathbb{I}_t^{(t')})\, \&\, ((\omega \square \omega')(\zeta) \triangleq \omega'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_{t'} \setminus \{t'\}). \tag{4.46}$$

Условие 4.3 (допустимость склейки помех). $\omega \square \omega' \in \Omega_t$ $\forall t \in I$ $\forall t' \in \mathbf{I}_t$ $\forall \omega \in \Omega_t$ $\forall \omega' \in \Omega_{t'}$.

Заметим, что при условии 4.3 имеют место вложения, обратные вложениям (4.2), т. е. (4.2) обращается в систему равенств: $\big(\Omega_t \mid \mathbf{I}_{t'}\big) = \Omega_{t'}$ $\forall t \in I$ $\forall t' \in \mathbf{I}_t$.

Предложение 4.5. *Пусть выполнены условия* 4.1 *и* 4.3. *Тогда* $\forall (t,x) \in D$, $\forall t' \in \mathbf{I}_t$, $\forall \omega \in \Omega_t$, $\forall \omega' \in \Omega_{t'}$, $\forall h \in \mathcal{S}((t,x), \omega \square \omega')$

$$(h \mid \mathbf{I}_{t'}) \in \mathcal{S}((t', h(t')), \omega'). \tag{4.47}$$

Доказательство. Фиксируем $(t,x) \in D$, $t' \in \mathbf{I}_t$, $\omega \in \Omega_t$, $\omega' \in \Omega_{t'}$. Из условия 4.3 тогда следует, что $\bar{\omega} \triangleq \omega \square \omega'$ является допустимой помехой из Ω_t. Выберем произвольно $h \in \mathcal{S}((t,x), \bar{\omega})$ (см. (1.10)). Из условия 4.1 тогда получим $(h \mid \mathbf{I}_{t'}) \in \mathcal{S}((t', h(t')), (\bar{\omega} \mid \mathbf{I}_{t'}))$. С учетом равенства $(\bar{\omega} \mid \mathbf{I}_{t'}) = \omega'$ из последнего включения следует соотношение (4.47), и, так как (t,x), t', ω, ω' и h выбирались произвольно, утверждение доказано полностью. □

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* 2.2–4.3. *Тогда имеет место равенство*

$$\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N}) = \{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t, s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall s \in \alpha(\omega)\}. \tag{4.48}$$

Доказательство. Обозначим через Λ множество в правой части (4.48). Тогда $\Lambda \subset \mathcal{N}$, а потому (см. (2.12))

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^0(\mathcal{N}). \tag{4.49}$$

Пусть вообще $n \in \mathbb{N}_0$ таково, что

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^n(\mathcal{N}). \tag{4.50}$$

Покажем, что тогда $\Lambda \subset \mathbf{A}^{n+1}(\mathcal{N})$. Предположим противное: нашлась позиция z_* такая, что

$$z_* \in \Lambda \setminus \mathbf{A}^{n+1}(\mathcal{N}). \tag{4.51}$$

Тогда (см. (2.11)) из (4.50) и (4.51) следует, что $z_* \in \mathbf{A}^n(\mathcal{N}) \setminus \mathbf{A}(\mathbf{A}^n(\mathcal{N}))$. Напомним, что $\mathbf{A}(\mathbf{A}^n(\mathcal{N})) = \{z \in \mathbf{A}^n(\mathcal{N}) \mid \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^n(\mathcal{N})) \neq \varnothing \ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z)}\}$. Следовательно, найдется $\omega_* \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$ такая, что

$$\Pi(\omega_* \mid z_*, \mathbf{A}^n(\mathcal{N})) = \varnothing. \tag{4.52}$$

Из (2.1) и (4.52) получим, что

$$\forall s \in \mathcal{S}(z_*, \omega_*) \ \exists t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}: \quad (t, s(t)) \notin \mathbf{A}^n(\mathcal{N}). \tag{4.53}$$

Вместе с тем (см. (4.51)) $z_* \in \Lambda$, и, значит, найдется квазистратегия

$$\alpha_* \in \mathbb{M}_{z_*}, \tag{4.54}$$

для которой, по определению Λ,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)} \ \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z_*)} \ \forall s \in \alpha_*(\omega). \tag{4.55}$$

В частности,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \qquad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)} \ \forall s \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.56}$$

Выберем произвольно (см. (1.13))

$$s_* \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.57}$$

Тогда $s_* \in \mathbf{C}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$ и (см. (1.13)), более того, $s_* \in \mathcal{S}(z_*, \omega_*)$. Согласно (4.53) имеем для некоторого момента $t_* \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$ соотношение $(t_*, s_*(t_*)) \notin \mathbf{A}^n(\mathcal{N})$, а потому выполнено

$$z^* \triangleq (t_*, s_*(t_*)) \notin \mathbf{A}^n(\mathcal{N}). \tag{4.58}$$

Из (4.50) и (4.58) имеем, что $z^* \notin \Lambda$. При этом (см. (4.56)) $z^* \in \mathcal{N}$. Тогда, по определению Λ, имеем, что

$$\forall \alpha \in \mathbb{M}_{z^*} \ \exists \omega \in \Omega_{t_*} \ \exists s \in \alpha(\omega) \ \exists t \in \mathbf{I}_{t_*}: \ (t, s(t)) \notin \mathcal{N}. \tag{4.59}$$

С учетом условия 4.3 определим $\beta : \Omega_{t_*} \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{C}_{t_*})$ по правилу

$$\beta(\omega) \triangleq \{h \in \mathbf{C}_{t_*} \mid \exists \hat{h} \in \alpha_*(\omega_* \square \omega): \ (h = (\hat{h} \mid \mathbf{I}_{t_*})) \,\&\, ((\hat{h} \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (s_* \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}))\} \qquad \forall \omega \in \Omega_{t_*}. \tag{4.60}$$

Докажем включение $\beta \in \mathbb{M}_{z^*}$. Для этого сначала проверим, что

$$\beta(\omega) \neq \varnothing \qquad \forall \omega \in \Omega_{t_*}. \tag{4.61}$$

Из (1.13), (4.54) и (4.57) следует, что для произвольного $\omega' \in \Omega_{t_*}$ найдется $h' \in \alpha_*(\omega_* \square \omega')$ такое, что $(h' \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (s_* \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)})$. Пусть $g \triangleq (h' \mid \mathbf{I}_{t_*})$. В силу вложения $\mathbf{C}_{t_*} \supset \big(\mathbf{C}_{\mathbf{pr}_1(z_*)} \mid \mathbf{I}_{t_*}\big)$ (см. (4.1)) получим $g \in \mathbf{C}_{t_*}$. Тогда по построению имеем

$$h' \in \alpha_*(\omega_* \square \omega'): \ (g \triangleq (h' \mid \mathbf{I}_{t_*})) \,\&\, ((h' \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (s_* \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)})).$$

Это означает (см. (4.60)), что $g \in \beta(\omega')$. Так как выбор ω' был произвольным, имеем (4.61).

Для любых $\tilde{\omega} \in \Omega_{t_*}$ и $\tilde{h} \in \beta(\tilde{\omega})$ из определений α_*, β имеем (см. (1.13)), что $\tilde{h} = (h'' \mid \mathbf{I}_{t_*})$ для некоторого $h'' \in \mathcal{S}(z_*, \omega_* \square \tilde{\omega})$ такого, что $(h'' \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (s_* \mid \mathbb{I}^{(t_*)}_{\mathbf{pr}_1(z_*)})$. Тогда в силу предложения 4.5 $(h'' \mid \mathbf{I}_{t_*}) \in \mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \tilde{\omega})$, где $\mathcal{S}((t_*, h''(t_*)), \tilde{\omega}) = \mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \tilde{\omega})$. Таким образом, $h \in \mathcal{S}(z^*, \omega) \ \forall \omega \in \Omega_{t_*} \ \forall h \in \beta(\omega)$. Отсюда с учетом (4.61) получим

$$\beta \in \prod_{\omega \in \Omega_{t_*}} \mathcal{P}'(\mathcal{S}((t_*, s(t_*)), \omega)). \tag{4.62}$$

Выберем и зафиксируем $\omega \in \Omega_{t_*}$, $\omega' \in \Omega_{t_*}$ и $\theta \in \mathbf{I}_{t_*}$ так, что $(\omega \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}) = (\omega' \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)})$. Обозначим $\Gamma \triangleq \big(\beta(\omega) \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}\big)$, $\Gamma' \triangleq \big(\beta(\omega') \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}\big)$ и выберем произвольно $\gamma \in \Gamma$. Пусть $f \in \beta(\omega)$ таково, что $\gamma = (f \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)})$. Тогда в силу (4.60) найдется $h \in \alpha_*(\omega_* \square \omega)$ со свойствами

$$(f = (h \mid \mathbf{I}_{t_*}))\,\&\,((h \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(t_*)}) = (s_* \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(t_*)})).$$

Тогда получаем цепочку равенств

$$\gamma = ((h \mid \mathbf{I}_{t_*}) \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}) = (h \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)}). \tag{4.63}$$

С учетом (4.46) и условия 4.3 получаем, что определены склеенные отображения

$$\omega_* \square \omega \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z_*)}, \qquad \omega_* \square \omega' \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z_*)},$$

причем справедливы равенства

$$(\omega_* \square \omega \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(\theta)}) = (\omega_* \square \omega' \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(\theta)}). \tag{4.64}$$

Из (4.64) в силу (4.54) получим $\big(\alpha_*(\omega_* \square \omega) \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(\theta)}\big) = \big(\alpha_*(\omega_* \square \omega') \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(\theta)}\big)$. Следовательно, найдется $h' \in \alpha_*(\omega_* \square \omega')$ такой, что

$$(h \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(\theta)}) = (h' \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(\theta)}). \tag{4.65}$$

В частности (см. (4.63)), так как $(h \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(t_*)}) = (s_* \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(t_*)})$ и $\theta \geqslant t_*$, получаем, что $(h' \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(t_*)}) = (s_* \mid \mathbb{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}^{(t_*)})$. Следовательно (см. (4.60)), $(h' \mid \mathbf{I}_{t_*}) \in \beta(\omega')$ и при этом в силу (4.63), (4.65) $\gamma = (h' \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(\theta)})$. Отсюда получаем, что $\gamma \in \Gamma'$, и в силу произвольности выбора γ имеем вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. Из соображений симметричности получим $\Gamma = \Gamma'$. В силу произвольного выбора ω, ω' и θ имеем импликацию $\forall \omega_1 \in \Omega_{t_*}\ \forall \omega_2 \in \Omega_{t_*}\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$((\omega_1 \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)}) = (\omega_2 \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)})) \Rightarrow (\big(\beta(\omega_1) \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)}\big) = \big(\beta(\omega_2) \mid \mathbb{I}_{t_*}^{(t)}\big)). \tag{4.66}$$

Из (4.62) и (4.66) получаем, что $\beta \in \mathbb{M}_{z^*}$. Значит (см. (4.59)), для некоторых $\bar{\omega} \in \Omega_{t_*}$, $\bar{s} \in \beta(\bar{\omega})$ и $\bar{t} \in \mathbf{I}_{t_*}$ $(\bar{t}, \bar{s}(\bar{t})) \notin \mathcal{N}$. Но, по построению и условию 4.3, $\bar{t} \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$, $\omega_* \square \bar{\omega} \in \Omega_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$ и $\bar{s} = (\mathbf{h} \mid \mathbf{I}_{t_*})$ для некоторого $\mathbf{h} \in \alpha_*(\omega_* \square \bar{\omega})$. Иначе говоря, $(\bar{t}, \mathbf{h}(\bar{t})) \notin \mathcal{N}$ и $\mathbf{h} \in \alpha_*(\omega_* \square \bar{\omega})$, что противоречит (4.55). Следовательно, предположение (4.51) было ложным и $\Lambda \subset \mathbf{A}^{n+1}(\mathcal{N})$. Тем самым для произвольного $n \in \mathbb{N}_0$ установлена импликация $(\Lambda \subset \mathbf{A}^n(\mathcal{N})) \Rightarrow (\Lambda \subset \mathbf{A}^{n+1}(\mathcal{N}))$. В совокупности с (4.49) получим, что для всякого $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется (4.50). Следовательно, $\Lambda \subset \cap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbf{A}^n(\mathcal{N})$. С учетом (2.13) это завершает обоснование вложения $\Lambda \subset \overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$. Из определения Λ и (4.43) следует искомое равенство (4.48). $\square$

§ 5. Заключительные замечания

В работе построено решение абстрактной задачи удержания (см. предложение 4.4, (4.45), теорему 4.1). В частности (см. (4.48)), в виде $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ имеем множество успешной разрешимости в классе квазистратегий.

Отметим, что данная работа продолжает абстрактные конструкции [11] и вместе с тем отвечает направлению, развиваемому в [10, 22] для конкретных вариантов задачи удержания. В [10] исследовались решения игровой задачи удержания для конфликтно-управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на бесконечном промежутке времени: рассматривалось решение в классах квазистратегий и позиционных контрстратегий (при условии седловой точки в маленькой игре [2] — в классе чистых позиционных стратегий). В [22] исследовалась задача удержания на бесконечном промежутке для системы с дискретным временем (решение — в классе квазистратегий).

Настоящая работа является в некотором смысле объединяющей упомянутые исследования. Вместе с тем представляется, что некоторые вопросы, связанные с конкретными применениями предлагаемой абстрактной процедуры, требуют дополнительного исследования.

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Кряжимский А.В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 779–782.
4. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
5. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
6. Ухоботов В.И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–361.
7. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.
8. Ухоботов В.И. К построению стабильного моста в игре удержания // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. № 2. С. 236–240.
9. Ухоботов В.И. Метод итераций в дифференциальных играх удержания // International Congress of Mathematicians. Short communications (Abstract). Vol. XII. Warszawa. 1983. P. 7.
10. Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Монотонные итерации множеств и их приложения к игровым задачам управления // Кибернетика. 1987. № 2. С. 92–99.
11. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 157–169.
12. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
13. Солтан В.П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости / Под ред. В.И. Арнаутова. Кишинев: Штиинца, 1984. 224 с.
14. Ченцов А.Г. О задаче управления с ограниченным числом переключений / Уральский политехнический институт им. С.М. Кирова. Свердловск: 1987. 45 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4942-В 87.
15. Серков Д.А., Ченцов А.Г. Метод программных итераций и операторная выпуклость в абстрактной задаче удержания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 3. С. 348–366. DOI: 10.20537/vm150305
16. Ченцов А.Г., Серков Д.А. Метод программных итераций в пакетах пространств // Доклады Академии наук. 2016. Т. 470. № 6. С. 637–640. DOI: 10.7868/S0869565216300046
17. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
18. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
19. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 275 с.
20. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 367 с.
21. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Springer Netherlands, 2002. xiv+408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
22. Иванов В.М., Ченцов А.Г. Об управлении дискретными системами на бесконечном промежутке времени // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 12. С. 1780–1789.

Поступила в редакцию 17.10.2016

Серков Дмитрий Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

D. A. Serkov, A. G. Chentsov

Implementation of the programmed iterations method in packages of spaces

Keywords: programmed iterations, operator convexity, quasi-strategies, packages of spaces.

MSC2010: 37N35, 65J15, 47J25, 52A01, 91A25

The problem of retention studied here might be regarded (in the case of a bounded control interval) as a version of the approach problem within given constraints in the phase space and the target set given by the hyperplane of the space positions corresponding to the terminal moment of the process (the retention problem on the infinite horizon also fits to the problem statement in this paper). The essential difference of the paper from the previously considered formulations is the variability of the spaces of the system trajectories and the disturbance realizations depending on the initial moment. It is shown that the unsolvability set of the retention problem is the least element of the convexity constructed on the basis of the programmed absorption operator; under some additional consistency conditions (on the space of system trajectories and on the space of admissible disturbances corresponding to different time moments) the set of successful solvability of the retention problem is constructed as the limit of the iterative procedure in the space of sets, the elements of which are positions of the game, and the structure of resolving quasi-strategies is provided.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence, *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. DOI: 10.1016/0021-8928(70)90158-9
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, xi+517 p.
3. Kryazhimskii A.V. On the theory of positional differential games of approach–evasion, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 239, no. 4, pp. 779–782 (in Russian).
4. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence, *Sov. Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
5. Chentsov A.G. On a game problem of guidance, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
6. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90021-1
7. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 845–852. DOI: 10.1016/0021-8928(77)90167-8
8. Ukhobotov V.I. On the construction of a stable bridge in a retention game, *J. Appl. Math. Mech.*, 1981, vol. 45, no. 2, pp. 169–172. DOI: 10.1016/0021-8928(81)90030-7
9. Ukhobotov V.I. Iterations method in differential games of retention, *International Congress of Mathematicians. Short communications (Abstract)*, vol. XII, Warszawa, 1983, p. 7.
10. Dyatlov V.P., Chentsov A.G. Monotone iterations of sets and their applications to control games, *Cybernetics*, 1987, vol. 23, no. 2, pp. 259–268. DOI: 10.1007/BF01071786
11. Chentsov A.G. An abstract confinement problem: a programmed iterations method of solution, *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 299–310. DOI: 10.1023/B:AURC.0000014727.63912.45
12. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Game problems on the encounter of motions), M.: Nauka, 1970, 420 p.
13. Soltan V.P. *Vvedenie v aksiomaticheskuyu teoriyu vypuklosti* (Introduction to axiomatic theory of convexity), Chisinau: Shtiintsa, 1984, 224 p.
14. Chentsov A.G. On the problem of control with a limited number of switching, Ural Polytechnic Institute, Sverdlovsk, 1987, 45 p. Deposited in VINITI, no. 4942-B 87 (in Russian).
15. Serkov D.A., Chentsov A.G. Programmed iteration method and operator convexity in an abstract retention problem *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, pp. 348–366 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150305
16. Chentsov A.G., Serkov D.A. Programmed iteration method in packages of spaces, *Doklady Mathematics*, 2016, vol. 94, no. 2, pp. 583–586. DOI: 10.1134/S1064562416050264
17. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*, Amsterdam: North-Holland, 1967, 417 p.
18. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN, 1985, 752 p.
19. Burbaki N. *Obshchaya topologiya. Osnovnye structury* (General topology. The main structures), Moscow: Nauka, 1968, 275 p.
20. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to the theory of sets and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004, 367 p.
21. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Springer Netherlands, 2002, xiv+408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
22. Ivanov V.M., Chentsov A.G. On the control of discrete systems on an infinite time interval, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1987, vol. 27, no. 6, pp. 116–121. DOI: 10.1016/0041-5553(87)90201-1

Received 17.10.2016

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru