УДК 517.955.8

© *Д. А. Турсунов, У. З. Эркебаев, Э. А. Турсунов*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА С КВАДРАТИЧНЫМИ РОСТАМИ НА ГРАНИЦАХ

Исследуется асимптотическое поведение решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца с квадратичными ростами сингулярностей на границах кольцах. Для построения асимптотического разложения решения задачи применяется модифицированная схема классического метода пограничных функций. Предлагаемый метод отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью регуляризующих асимптотических рядов полностью вносятся во внутренние разложения. Асимптотическое разложение решения представляет собой ряд Пюизё, главный член асимптотического разложения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру. Полученное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле обосновано принципом максимума.

Ключевые слова: асимптотическое разложение решения, бисингулярная задача, задача Дирихле, ряд Пюизё, малый параметр, метод погранфункций.

Введение

В работе исследуется первая краевая задача в кольце для оператора Лапласа с потенциалом. Особенность задачи состоит в наличии малого параметра перед оператором Лапласа и в обращении в нуль потенциала на границах кольца, при этом неоднородная часть уравнения отлична от нуля. Такая задача, по терминологии А. М. Ильина, называется бисингулярной [1, 2].

При исследовании решений задач с малыми (или большими) параметрами большую роль играют асимптотические методы, так как не всегда удается найти явное решения. Даже для современных компьютеров задача «определить поведение решения в пограничных слоях при достаточно малых значениях параметра» — весьма трудоемкая задача. В связи с этим в настоящее время интенсивно разрабатываются различные асимптотические методы. Нами тоже предлагается аналог метода пограничных функций, который отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательного ряда полностью вносятся во внутренние разложения, а от классического метода пограничных функций тем, что здесь пограничные функций убывают степенным характером. Эта идея была реализована в работах [3–6] для обыкновенных дифференциальных уравнений, а в работах [7–11] исследованы бисингулярные задачи Дирихле для эллиптических уравнений с различными сингулярностями.

Основными результатами нашей работы являются обобщение метода погранфункций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева и полное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с квадратичными ростами на границах.

§ 1. Постановка задачи

Исследуем задачу Дирихле для кольца:

$$\varepsilon\Delta u_\varepsilon(\rho,\varphi)-(\rho-b)^2(\rho-a)^2u_\varepsilon(\rho,\varphi)=f_\varepsilon(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(b,\varphi)=0,\qquad u_\varepsilon(a,\varphi)=0, \tag{2}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial}{\rho\,\partial\rho}+\dfrac{\partial^2}{\rho^2\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа, $0<\varepsilon$ — малый параметр, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,a<\rho<b,\ 0\leqslant\varphi<2\pi\},\ 0<a<b-\mathrm{const},\ f_\varepsilon(\rho,\varphi)=\sum\limits_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_k(\rho,\varphi),\ f_k\in C^\infty(\overline{D}),$ $f_0(a,\varphi)\neq 0,\ \ f_0(b,\varphi)\neq 0,\quad f_\varepsilon(\rho,\varphi)$ — заданная функция, $u_\varepsilon(\rho,\varphi)$ — искомая функция.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что решение предельного уравнения имеет сингулярности на внутренней и на внешней границах кольца, и эти сингулярности растут квадратичным ростом. В работах [8, 9, 11] исследованы случаи, когда решение предельного уравнения имеет сингулярность только на одной границе кольца. Если решение предельного уравнения имеет сингулярности на внутренней и на внешней границах кольца, то регуляризующий (вспомогательный) асимптотический ряд состоит из двух компонент, а также при построении пограничных функций требуется вводить еще дополнительные регуляризующие асимптотические ряды, которые отсутствуют в предыдущих работах [8, 9, 11]. В данной работе развивается идея обобщенного метода погранфункций.

Решение задачи (1), (2) существует и единственно [12]. Требуется построить полное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Задача Дирихле (1), (2) является бисингулярной [1, 2]. Действительно, первая сингулярность — решение предельного уравнения ($\varepsilon = 0$)

$$-(\rho - b)^2(\rho - a)^2 u_0(\rho, \varphi) = f_0(\rho, \varphi)$$

— не удовлетворяет краевым условиям (2).

Чтобы показать вторую сингулярность, рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), которое ищем методом малого параметра:

$$U_\varepsilon(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k u_k(\rho, \varphi), \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений; решив эту систему, имеем

$$U_\varepsilon(\rho, \varphi) = \frac{1}{(\rho - b)^2(\rho - a)^2} \sum_{k \geqslant 0} \frac{\varepsilon^k}{(\rho - b)^{4k}(\rho - a)^{4k}} F_k(\rho, \varphi), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $F_k \in C^\infty(\overline{D})$.

Отметим, что

$$u_k(\rho, \varphi) = O\Big(1/(\rho - b)^{4k+2}\Big), \quad \rho \to b,$$
$$u_k(\rho, \varphi) = O\Big(1/(\rho - a)^{4k+2}\Big), \quad \rho \to a, \quad k \in N_0 = N \cup \{0\}.$$

Заметим, что асимптотический ряд (3) теряет асимптотический характер при $b - \rho \leqslant \sqrt[4]{\varepsilon}$ или когда $\rho - a \leqslant \sqrt[4]{\varepsilon}$.

§ 2. Основной результат

Т е о р е м а 1. *Для решения задачи* (1), (2) *справедливо асимптотическое разложение*

$$u_\varepsilon(\rho, \varphi) = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \sum_{k \geqslant -2} \varepsilon^{\frac{k}{4}} \Big(w_k^b(\tau, \varphi) + w_k^a(\eta, \varphi)\Big), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

где $v_k \in C^\infty(\overline{D})$, $w_k^b \in C^\infty(D_\tau)$, $w_k^a \in C^\infty(D_\eta)$, $\tau = (b - \rho)/\mu$, $\eta = (\rho - a)/\mu$, $\mu = \sqrt[4]{\varepsilon}$, $w_{4m-j}^b(\tau, \varphi) = O(1/\tau^j)$, $w_{4m-j}^a(\eta, \varphi) = O(1/\eta^j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, $m \in N_0$ *при* τ, $\eta \to +\infty$, $D_\tau = \{(\tau, \varphi) \,|\, 0 < \tau < +\infty, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы состоит из двух частей: построения формального асимптотического разложения решения (ФАРР) задачи (1), (2) и обоснования этого ФАРР.

ФАРР ищем в виде (4), где $v_k(\rho, \varphi)$, $w_k^a(\eta, \varphi)$, $w_k^b(\tau, \varphi)$ — пока неизвестные функции.

Подставляя соотношение (4) в уравнение (1), получим

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\Big(\varepsilon\Delta v_k(\rho,\varphi)-(b-\rho)^2(\rho-a)^2v_k(\rho,\varphi)\Big)=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\Big(f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)\Big), \tag{5}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\mu^k\Big(\frac{\partial^2 w^b_{k-2}(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\frac{\mu}{(b-\mu\eta)}\frac{\partial w^b_{k-2}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}+\frac{\mu^2}{(b-\mu\eta)^2}\frac{\partial^2 w^b_{k-2}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}-$$
$$-\tau^2(c-\mu\tau)w^b_{k-2}(\tau,\varphi)\Big)=\sum_{k\geqslant 0}\mu^{4k}h^b_k(b-\tau\mu,\varphi), \tag{6}$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\mu^k\Big(\frac{\partial^2 w^a_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}+\frac{\mu}{(a+\mu\eta)}\frac{\partial w^a_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\eta}+\frac{\mu^2}{(a+\mu\eta)^2}\frac{\partial^2 w^a_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}-$$
$$-\eta^2(c-\mu\eta)w^a_{k-2}(\eta,\varphi)\Big)=\sum_{k\geqslant 0}\mu^{4k}h^a_k(a+\eta\mu,\varphi),\quad c=b-a. \tag{7}$$

В равенствах (5)–(7) мы ввели пока неизвестные регуляризующие асимптотические ряды

$$\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k h_k(\rho,\varphi)=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\big(h^b_k(\rho,\varphi)+h^a_k(\rho,\varphi)\big),$$

их конкретизируем ниже.

Равенства (2) порождают граничные условия

$$w^b_{4k}(0,\varphi)=-v_k(b,\varphi),\quad w^b_{4k-j}(0,\varphi)=0,\quad j=1,2,3,\quad k\in N_0, \tag{8}$$

$$w^a_{4k}(0,\varphi)=-v_k(a,\varphi),\quad w^a_{4k-j}(0,\varphi)=0,\quad j=1,2,3,\quad k\in N_0. \tag{9}$$

Регулярное внешнее решение. Из равенства (5) получаем

$$\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-(b-\rho)^2(\rho-a)^2v_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi),\quad(\rho,\varphi)\in D,\quad k\in N_0,$$

или

$$v_k(\rho,\varphi)=-\frac{f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-h_k(\rho,\varphi)}{(b-\rho)^2(\rho-a)^2},\quad v_{-1}(\rho,\varphi)\equiv 0,\quad k\in N_0.$$

Определим теперь неизвестные функции $h_k(\rho,\varphi)$ так, чтобы $v_k\in C^\infty(\overline{D})$.

Пусть $g_k(\rho,\varphi)=f_k(\rho,\varphi)-\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)$. Тогда $v_k\in C^\infty(\overline{D})$, если

$$h_k(\rho,\varphi)=h^b_k(\rho,\varphi)+h^a_k(\rho,\varphi),\ q^{b,i}=\Big(\frac{b-\rho}{c}\Big)^i,\quad q^{a,i}=\Big(\frac{\rho-a}{c}\Big)^i,$$
$$h^b_k(\rho,\varphi)=g^b_{k,0}(\varphi)-cg^b_{k,1}q^{b,1}-\big(3g^b_{k,0}(\varphi)-2cg^b_{k,1}(\varphi)\big)q^{b,2}+\big(2g^b_{k,0}(\varphi)-cg^b_{k,1}(\varphi)\big)q^{b,3},$$
$$h^a_k(\rho,\varphi)=g^a_{k,0}(\varphi)+cg^a_{k,1}(\varphi)q^{a,1}-\big(3g^a_{k,0}(\varphi)+2cg^a_{k,1}(\varphi)\big)q^{a,2}+\big(2g^a_{k,0}(\varphi)+cg^a_{k,1}(\varphi)\big)q^{a,3},$$

так как

$$h^b_k(b,\varphi)=g^b_{k,0}(\varphi),\ h^a_k(b,\varphi)\equiv 0,\ \ h^b_k(a,\varphi)\equiv 0,\ h^a_k(a,\varphi)=g^a_{k,0}(\varphi),$$
$$\frac{\partial h^b_k(b,\varphi)}{\partial\rho}=g^b_{k,1}(\varphi),\ \frac{\partial h^a_k(b,\varphi)}{\partial\rho}\equiv 0,\ \frac{\partial h^b_k(a,\varphi)}{\partial\rho}\equiv 0,\ \frac{\partial h^a_k(a,\varphi)}{\partial\rho}=g^a_{k,1}(\varphi),$$

где $g^b_{k,j}(\varphi)=\frac{\partial^j g_k(b,\varphi)}{\partial\rho^j},\ g^a_{k,j}(\varphi)=\frac{\partial^j g_k(a,\varphi)}{\partial\rho^j},\ j=0,1.$

Таким образом, мы построили регулярное внешнее решение в области $\overline{D}$, а также определили коэффициенты асимптотического ряда $h_k(\rho,\varphi)$.

Погранслойные решения. Теперь перейдем к определению членов асимптотических рядов $\sum\limits_{k\geqslant -2}\mu^k w^b_k(\tau,\varphi)$, $\sum\limits_{k\geqslant -2}\mu^k w^a_k(\eta,\varphi)$. Соотношения (6) и (7) запишем в виде

$$\sum_{k\geqslant 0}\mu^k\Big(\frac{\partial^2 w^b_{k-2}(\tau,\varphi)}{\partial\tau^2}-\frac{\partial w^b_{k-3}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 w^b_{k-4}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}-\tau^2(c-\mu\tau)w^b_{k-2}(\tau,\varphi)\Big)=$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}\mu^{4k}\left(g^b_{k,0}(\varphi)-g^b_{k,1}(\varphi)\mu\tau-\left(\frac{\mu\tau}{c}\right)^2\left(3g^b_{k,0}(\varphi)-2cg^b_{k,1}(\varphi)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mu\tau}{c}\right)^3\left(2g^b_{k,0}(\varphi)-cg^b_{k,1}(\varphi)\right)\right)+\sum_{k\geqslant 1}\mu^{4k}\Big(A_{k,0}(\varphi)+\mu\tau A_{k,1}(\varphi)+(\mu\tau)^2A_{k,2}(\varphi)\Big),\quad (10)$$

$$\sum_{k\geqslant 0}\mu^k\Big(\frac{\partial^2 w^a_{k-2}(\eta,\varphi)}{\partial\eta^2}-\frac{\partial w^a_{k-3}(\eta,\varphi)}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 w^a_{k-4}(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}-\eta^2(c-\mu\eta)w^a_{k-2}(\eta,\varphi)\Big)=$$

$$=\sum_{k\geqslant 0}\mu^{4k}\left(g^a_{k,0}(\varphi)+g^a_{k,1}(\varphi)\eta\mu-\left(\frac{\eta\mu}{c}\right)^2\left(3g^a_{k,0}(\varphi)+2cg^a_{k,1}(\varphi)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\eta\mu}{c}\right)^3\left(2g^a_{k,0}(\varphi)+cg^a_{k,1}(\varphi)\right)\right)+\sum_{k\geqslant 1}\mu^{4k}\Big(B_{k,0}(\varphi)+\mu\eta B_{k,1}(\varphi)+(\mu\eta)^2B_{k,2}(\varphi)\Big).\quad (11)$$

Здесь ввели еще вспомогательные асимптотические ряды

$$\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{2}A_{k,j}(\varphi)(b-\rho)^j,\quad \sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{2}B_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j,$$

где $A_{k,j}(\varphi)$, $B_{k,j}(\varphi)$ — пока неизвестные функции.

Потребуем, чтобы сумма этих асимптотических рядов тождественно равнялось нулю, т. е.

$$\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{2}A_{k,j}(\varphi)(b-\rho)^j+\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{2}B_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j\equiv 0\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} A_{k,0}(\varphi)+bA_{k,1}(\varphi)+b^2A_{k,2}(\varphi)+B_{k,0}(\varphi)-aB_{k,1}(\varphi)+a^2B_{k,2}(\varphi)=0,\\ -A_{k,1}(\varphi)-2bA_{k,2}(\varphi)+B_{k,1}(\varphi)-2aB_{k,2}(\varphi)=0,\\ A_{k,2}(\varphi)+B_{k,2}(\varphi)=0\ \forall k\in N. \end{array}\right.\quad (12)$$

Неизвестные функции $A_{k,j}(\varphi)$, $B_{k,j}(\varphi)$ асимптотических рядов выберем так, чтобы они удовлетворяли системе и выполнялись условия

$$\lim_{\tau\to+\infty}w^b_{k-2}(\tau,\varphi)=0,\quad \lim_{\eta\to+\infty}w^a_{k-2}(\eta,\varphi)=0,\ k\in N_0.\quad (13)$$

Из соотношения (6), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим рекуррентную систему уравнений:

$$Lw^b_{-2}\equiv\frac{\partial^2 w^b_{-2}}{\partial\tau^2}-c^2\tau^2w^b_{-2}=g^b_{0,0},\quad (\tau,\varphi)\in D_\tau,\quad (14)$$

$$Lw^b_{4k-1}=\Psi_{4k-1}-2c\tau^3w^b_{4k-2}+\tau^4w^b_{4k-3}-\tau g^b_{k,1}\tau+A_{k,1}(\varphi)\tau,\quad (\tau,\varphi)\in D_\tau,\quad (15)$$

$$Lw^b_{4k}=\Psi_{4k}-2c\tau^3w^b_{4k-1}+\tau^4w^b_{4k-2}-\frac{\tau^2}{c^2}(3g^b_{k,0}-2cg^b_{k,1})+A_{k,2}(\varphi)\tau^2,\quad (\tau,\varphi)\in D_\tau,\quad (16)$$

$$Lw^b_{4k+1}=\Psi_{4k+1}-2c\tau^3w^b_{4k}+\tau^4w^b_{4k-1}+\frac{\tau^3}{c^3}(2g^b_{k,0}-cg^b_{k,1})+A_{k,3}(\varphi)\tau^3,\quad (\tau,\varphi)\in D_\tau,\quad (17)$$

$$Lw^b_{4k+2}=\Psi_{4k+2}-2c\tau^3w^b_{4k+1}+\tau^4w^b_{4k}+g^b_{k+1,0}+A_{k+1,0}(\varphi),\quad (\tau,\varphi)\in D_\tau,\quad (18)$$

где $\Psi_s=\frac{\partial w^b_{s-1}}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 w^b_{s-2}}{\partial\varphi^2}$.

Решения уравнений (14)–(18) должны удовлетворять условиям (8) соответственно. Аналогичные задачи получаются из соотношения (11) для функции $w_k^a(\eta,\varphi)$.

Из леммы 1 работы [11] следует существование, единственность и бесконечно дифференцируемость решений задач (10)–(18), (8) и задач для $w_k^a(\eta,\varphi)$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ и η соответственно.

Теперь перейдем к доказательству существования функций $A_{k,j}$, $B_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$, $j=0,1,2$, при которых решения задач (10)–(18), (8) и задач для $w_k^a(\eta,\varphi)$ принадлежат классу функций, убывающих степенным ростом по τ и η соответственно.

Докажем следующую лемму.

Л е м м а 1. *Существуют такие функции $A_{k,j}$, $B_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$, $j=0,1,2$, $k\in N$, удовлетворяющие равенствам* (12), *и при которых справедливы соотношения*

$$w^b_{4k-m}(\tau,\varphi)=\sum_{j\geqslant 0}\frac{w^b_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\tau^{4j+m}},\quad \tau\to+\infty,\quad m=1,2,3,4,\quad k\in N_0, \tag{19}$$

$$w^a_{4k-m}(\eta,\varphi)=\sum_{j\geqslant 0}\frac{w^a_{4k-m,4j+m}(\varphi)}{\eta^{4j+m}},\quad \eta\to+\infty,\quad m=1,2,3,4,\quad k\in N_0, \tag{20}$$

где $w^b_{k,j}$, $w^a_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\forall k\in N$

$$\sum_{k\geqslant1}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{2}A_{k,j}(\varphi)(b-\rho)^j+\sum_{k\geqslant1}\varepsilon^k\sum_{j=0}^{2}B_{k,j}(\varphi)(\rho-a)^j\equiv 0,$$

то введенные асимптотические ряды не влияют на регулярное внешнее решение.

Применяя лемму 2 работы [11] к уравнениям (10)–(18), получаем

$$w^b_{s-2}(\tau,\varphi)=\sum_{j\geqslant0}\frac{w^b_{s-2,4j+2-s}(\varphi)}{\tau^{4j+2-s}},\quad w^b_s(\tau,\varphi)=\sum_{j\geqslant0}\frac{w^b_{s,4j+4-s}(\varphi)}{\tau^{4j+4-s}},\quad \tau\to+\infty,\quad s=0,1;$$

аналогично имеем

$$w^a_{s-2}(\eta,\varphi)=\sum_{j\geqslant0}\frac{w^a_{s-2,4j+2-s}(\varphi)}{\eta^{4j+2-s}},\quad w^a_s(\eta,\varphi)=\sum_{j\geqslant0}\frac{w^a_{s,4j+4-s}(\varphi)}{\eta^{4j+4-s}},\quad \eta\to+\infty,\quad s=0,1.$$

Допустим, что $\forall k\in N$ справедливы соотношения (19), (20). Тогда при $k=s+1$ имеем

$$Lw^b_{4s+2+m}=\Psi_{4s+2+m}-2c\tau^3w^b_{4s+1+m}+\tau^4w^b_{4s+m}-\tau^m g^b_{s+1,m}(\varphi)+A_{s+1,m}(\varphi)\tau^m,\quad m=0,1,$$

$$Lw^b_{4s+4}=\Psi_{4s+4}-2c\tau^3w^b_{4s+3}+\tau^4w^b_{4s+2}-\frac{\tau^2}{c^2}(3g^b_{s+1,0}(\varphi)-2cg^b_{s+1,1}(\varphi))+A_{s+1,2}(\varphi)\tau^2,$$

$$Lw^b_{4s+5}=\Psi_{4s+5}-2c\tau^3w^b_{4s+4}+\tau^4w^b_{4s+3}+\frac{\tau^3}{c^3}(2g^b_{s+1,0}(\varphi)-cg^b_{s+1,1}(\varphi))+A_{s+1,3}(\varphi)\tau^3.$$

Отсюда при $\tau\to+\infty$ получаем

$$w^b_{4s+2}(\tau,\varphi)=\frac{2cw^b_{4s+1,3}(\varphi)-w^b_{4s,4}(\varphi)-g^b_{s+1,0}(\varphi)-A_{s+1,0}(\varphi)}{c^2\tau^2}+\sum_{j\geqslant1}\frac{w^b_{4s+2,4j+2}(\varphi)}{\tau^{4j+2}},$$

$$w^b_{4s+3}(\tau,\varphi)=\frac{2cw^b_{4s+2,2}(\varphi)-w^b_{4s+1,3}(\varphi)+g^b_{s+1,1}(\varphi)-A_{s+1,1}(\varphi)}{c^2\tau}+\sum_{j\geqslant1}\frac{w^b_{4s+3,4j+1}(\varphi)}{\tau^{4j+1}},$$

$$w^b_{4s+4}(\tau,\varphi)=\sum_{j\geqslant1}\frac{w^b_{4s+4,4j}(\varphi)}{\tau^{4j}},\quad w^b_{4s+5}(\tau,\varphi)=\sum_{j\geqslant0}\frac{w^b_{4s+5,4j+3}(\varphi)}{\tau^{4j+3}},$$

если

$$-2cw^b_{4s+3,1}(\varphi)+w^b_{4s+2,2}(\varphi)+A_{s+1,2}(\varphi)=0,\quad w^b_{4s+3,1}(\varphi)+A_{s+1,3}(\varphi)=0\quad\forall\varphi\in[0,2\pi].$$

Аналогично: если при $\eta\to+\infty$

$$-2cw^a_{4s+3,1}(\varphi)+w^a_{4s+2,2}(\varphi)+B_{s+1,2}(\varphi)=0,\quad w^a_{4s+3,1}(\varphi)+B_{s+1,3}(\varphi)=0\quad\forall\varphi\in[0,2\pi],$$

то $w^a_{4s+m}(\tau,\varphi)=\sum\limits_{j\geqslant 1}\frac{w^a_{4s+m,4j-m}(\varphi)}{\tau^{4j-m}}$, $m=0,1,2,3$.

В результате получаем линейную систему алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными — $A_{s+1,0}$, $A_{s+1,1}$, $B_{s+1,0}$, $B_{s+1,1}$ ($A_{k,j}=A_{k,j}(\varphi)$, $B_{k,j}=B_{k,j}(\varphi)$, $w^{b,a}_{k,j}=w^{b,a}_{k,j}(\varphi)$):

$$\begin{cases} A_{s+1,0}+cA_{s+1,1}+c^2A_{s+1,2}+c^3A_{s+1,3}+B_{s+1,0}=0,\\ A_{s+1,1}+2cA_{s+1,2}+3c^2A_{s+1,3}-B_{s+1,1}=0,\\ 2A_{s+1,2}+6cA_{s+1,3}+2B_{s+1,2}=0,\\ A_{s+1,3}-B_{s+1,3}=0,\end{cases}$$

где $A_{s+1,2}=4w^b_{4s+1,3}/c-3w^b_{4s,4}/c^2-3A_{s+1,0}/c^2-2A_{s+1,1}/c$, $\quad A_{s+1,3}=-w^b_{4s+3,1}=-3w^b_{4s+1,3}/c^2+$ $+2w^b_{4s,4}/c^3+2A_{s+1,0}/c^3+A_{s+1,1}/c^2$, $\quad B_{s+1,2}=4w^a_{4s+1,3}/c-3w^a_{4s,4}/c^2-3B_{s+1,0}/c^2-2B_{s+1,1}/c$, $B_{s+1,3}=-w^a_{4s+3,1}=-3w^a_{4s+1,3}/c^2+2w^a_{4s,4}/c^3+2B_{s+1,0}/c^3+B_{s+1,1}/c^2$.

Упростив линейную систему алгебраических уравнений, имеем

$$B_{s+1,0}=-c^2(c_1+cc_2),\ B_{s+1,1}=2cc_1+3c^2c_2,\ A_{s+1,0}=-c^2(c_3+cc_4),\ A_{s+1,1}=2cc_3+3c^2c_4,$$

где $c_1=4w^b_{4s+1,3}/c-3w^b_{4s,4}/c^2$, $\quad c_2=-3w^b_{4s+1,3}/c^2+2w^b_{4s,4}/c^3$, $\quad c_3=4w^a_{4s+1,3}/c-3w^a_{4s,4}/c^2$, $c_4=-3w^a_{4s+1,3}/c^2+2w^a_{4s,4}/c^3$.

Таким образом, мы доказали, что система линейных алгебраических уравнений имеем единственное решение, т. е. существуют функции $A_{k,j}$, $B_{k,j}\in C^\infty[0,2\pi]$, $j=0,1,2,3$, $k\in N$, удовлетворяющие равенствам (63).

Следовательно, для $\forall k\in N$ справедливы соотношения (19), (20), т. е. имеют место соотношения (13). Лемма доказана. □

Обоснование формального асимптотического разложения решения. Приведем равномерную оценку оператора, обратного к дифференциальному оператору (1) с условиями (2).

Л е м м а 2. *Пусть функция $u_\varepsilon(\rho,\varphi)\in C^2(\overline{D})$ и удовлетворяет уравнению* (1). *Тогда справедлива оценка*

$$|u_\varepsilon(\rho,\varphi)|\leqslant\frac{M}{\varepsilon}\max_{(\rho,\varphi,\varepsilon)\in\overline{D}\times[0,\varepsilon_0]}f_\varepsilon(\rho,\varphi),\ \varepsilon<\varepsilon_0-\mathrm{const},\quad 0<M-\mathrm{const}.\tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. К задаче (1), (2) применяем преобразование $u_\varepsilon(\rho,\varphi)=z(\rho)\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)$, где $z(\rho)=b^2-\rho^2/2>0$, относительно $\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)$ получаем задачу

$$\varepsilon\Delta\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)-\frac{2\varepsilon\rho}{z(\rho)}\frac{\partial\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-\left((\rho-b)^2(\rho-a)^2+\frac{2\varepsilon}{z(\rho)}\right)\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)=\frac{f_\varepsilon(\rho,\varphi)}{z(\rho)},\quad(\rho,\varphi)\in D,$$

$$\widetilde{u}_\varepsilon(b,\varphi)=0,\quad\widetilde{u}_\varepsilon(a,\varphi)=0.$$

Из принципа максимума следует, что

$$|\widetilde{u}_\varepsilon(\rho,\varphi)|\leqslant\frac{M_1}{\varepsilon}\max_{(\rho,\varphi,\varepsilon)\in\overline{D}\times[0,\varepsilon_0]}\frac{f_\varepsilon(\rho,\varphi)}{z(\rho)},\quad 0<M_1-\mathrm{const}.$$

Отсюда вытекает оценка (21). Лемма 2 доказана. □

Следствие 1. *Если для неоднородной части $f_\varepsilon(\rho,\varphi)$ имеет место оценка*

$$f_\varepsilon(\rho,\varphi)=O(\varepsilon^{m+1}),\quad (\rho,\varphi)\in\overline{D},\quad \varepsilon\to 0,$$

то для решения $u_\varepsilon(\rho,\varphi)$ справедлива оценка

$$u_\varepsilon(\rho,\varphi)=O(\varepsilon^{m}),\quad (\rho,\varphi)\in\overline{D},\quad \varepsilon\to 0.$$

Пусть $R_\varepsilon(\rho,\varphi)=u_\varepsilon(\rho,\varphi)-u_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)$,
где $u_{\varepsilon,n}(\rho,\varphi)=\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)+\sum\limits_{k=-2}^{4n+1}\mu^k(w_k^b(\tau,\varphi)+w_k^a(\eta,\varphi))$.
Тогда получаем

$$\varepsilon\Delta R_\varepsilon(\rho,\varphi)-(\rho-b)^2(\rho-a)^2R_\varepsilon(\rho,\varphi)=\varepsilon^{n+1}\Phi,\quad (\rho,\varphi)\in D,$$
$$R_\varepsilon(b,\varphi)=0,\quad R_\varepsilon(a,\varphi)=0,$$

где

$$\Phi=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_{n+1+k}(\rho,\varphi)-\Delta v_n(\rho,\varphi)+\tau^4 w_{4k}^b(\tau,\varphi)-2c\tau^3 w_{4k+1}^b(\tau,\varphi)+\frac{\partial w_{4k+1}^b(\tau,\varphi)}{\partial\tau}-$$
$$-\frac{\partial^2 w_{4k}^b(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\mu\tau^4 w_{4k+1}^b(\tau,\varphi)-\mu\frac{\partial^2 w_{4k+1}^b(\tau,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\eta^4 w_{4k}^a(\eta,\varphi)-2c\eta^3 w_{4k+1}^a(\eta,\varphi)+$$
$$+\frac{\partial w_{4k+1}^a(\eta,\varphi)}{\partial\eta}-\frac{\partial^2 w_{4k}^a(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\mu\eta^4 w_{4k+1}^a(\eta,\varphi)-\mu\frac{\partial^2 w_{4k+1}^a(\eta,\varphi)}{\partial\varphi^2}.$$

Заметим, что $\|\Phi\|_C\leqslant M$; $0<M$ — const.

Применяя следствие 1, получаем $R_\varepsilon(\rho,\varphi)=O(\varepsilon^n)$, $(\rho,\varphi)\in\overline{D}$, $\varepsilon\to 0$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Исследованную задачу можно обобщить на n-мерный шаровой слой.

Заключение. Обобщенным методом пограничных функций построено полное равномерное асимптотическое разложение решения бисингулярной задачи Дирихле для кольца с квадратичным ростом на границах. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пюйзё (V. A. Puiseux), главный член асимптотического разложения имеет отрицательную дробную степень по малому параметру, что свойственно бисингулярным задачам.

Следует отметить, что если задачу Дирихле (1), (2) исследовать методом согласования (сращивания), то вычисления будут сравнительно громоздкими.

Список литературы

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
3. Алымкулов К., Халматов А.А. Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // Математические заметки. 2012. Т. 92. Вып. 6. С. 819–824. DOI: 10.4213/mzm10147
4. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Математические заметки. 2013. Т. 94. Вып. 4. С. 483–487. DOI: 10.4213/mzm10317
5. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 34–40.
6. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 271–281.
7. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе // Известия Томского политехнического университета. 2014. Т. 324. № 2. С. 31–35.

8. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 4. С. 517–525. DOI: 10.20537/vm150408
9. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. № 1. С. 102–112.
10. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 1 (39). С. 42–52.
11. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8. № 2. С. 52–61.
12. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 28.09.2016

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра информатики, Ошский государственный университет, 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.
E-mail: d_osh@rambler.ru

Эркебаев Улукбек Заирбекович, старший преподаватель, кафедра информатики, Ошский государственный университет, 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.
E-mail: uluk3188@mail.ru

Турсунов Элмурод Абдиллажанович, преподаватель, кафедра математических методов в экономике, Ошский государственный университет, 723500, Кыргызстан, г. Ош, ул. Ленина, 331.
E-mail: emrah812@mail.ru

D. A. Tursunov, U. Z. Erkebaev, E. A. Tursunov

Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a ring with quadratic growths on the boundaries

Keywords: asymptotic expansion of solution, bisingular perturbation, Dirichlet problem, Puiseux series, small parameter, method of boundary functions.

MSC2010: 35J15, 35J25, 35B25, 35B40, 35C20

The paper refers to the asymptotic behavior of the Dirichlet bisingular problem solution for a ring with quadratic growths on the boundaries. To construct the asymptotic expansion of the solution the authors apply the modified scheme of the classical method of boundary functions. The proposed method differs from the matching method by the fact that growing features of the outer expansion are in fact removed from it and with the help of an auxiliary asymptotic series are placed entirely in the internal expansion. An asymptotic expansion of the solution is a series of Puiseux, the basic term of the asymptotic expansion of the solution has a negative fractional degree of the small parameter. The resulting asymptotic expansion of the Dirichlet problem solution is justified by the maximum principle.

REFERENCES

1. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 102, Providence R.I.: Amer. Math. Soc., 1992, 281 p.
2. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic methods in analysis), Moscow: Fizmatlit, 2009, 248 p.
3. Alymkulov K., Khalmatov A.A. A boundary function method for solving the model lighthill equation with a regular singular point, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 92, no. 5, pp. 751–755. DOI: 10.1134/S0001434612110193
4. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Generalization of the boundary function method for solving boundary-value problems for bisingularly perturbed second-order differential equations, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, no. 3, pp. 451–454. DOI: 10.1134/S0001434613090162
5. Tursunov D.A. Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed ordinary second-order differential equation with two turning points, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2013, no. 1 (21), pp. 34–40 (in Russian).
6. Tursunov D.A. Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, no. 1 (22), pp. 271–281 (in Russian).

7. Tursunov D.A. Asymptotic solutions of the bisingular perturbed elliptic equation. Case of a singular point on the boundary, *Izv. Tomsk. Politekh. Univ.*, 2014, no. 2 (324), pp. 31–35 (in Russian).
8. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed equation in the ring, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, no. 4 (25), pp. 517–525 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150408
9. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities, *Ufa Mathematical Journal*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 97–107. DOI: 10.13108/2016-8-1-97
10. Tursunov D.A. Asymptotic expansions of the solution of the Dirichlet problem for a ring with a singularity on the boundary, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2016, no. 1 (39), pp. 42–52 (in Russian).
11. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotics of the solution to the bisingular perturbed Dirichlet problem in the ring with quadratic growth on the boundary, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh. Fiz.*, 2016, vol. 8, no. 2, pp. 52–61 (in Russian).
12. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* (Elliptic partial differential equations of second order), Moscow: Nauka, 1989, 336 p.

Received 28.09.2016

Tursunov Dilmurat Abdillajanovich, Professor, Department of Informatics, Osh State University, ul. Lenina, 331, Osh, 723500, Kyrgyzstan.
E-mail: d_osh@rambler.ru

Erkebaev Ulukbek Zairbekovich, Senior Lecturer, Department of Informatics, Osh State University, ul. Lenina, 331, Osh, 723500, Kyrgyzstan.
E-mail: uluk3188@mail.ru

Tursunov Elmurod Abdillajanovich, Lecturer, Department of Mathematical Methods in Economics, Osh State University, ul. Lenina, 331, Osh, 723500, Kyrgyzstan.
E-mail: emrah812@mail.ru