



---

ПЕРЕВОДНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 531.38  
MSC 2010: 37J60, 37C10

## Динамика саней Чаплыгина на цилиндре\*

И. А. Бизяев, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В данной работе рассмотрено движение саней Чаплыгина по поверхности кругового цилиндра. В случае движения по инерции задача сводится к изучению динамической системы на (двумерном) торе и классификации особых точек. Указаны частные случаи, в которых система обладает инвариантной мерой. При движений уравновешенных и динамически симметричных саней Чаплыгина в поле тяжести показано, что в среднем система не имеет дрейфа по вертикали.

Ключевые слова: сани Чаплыгина, инвариантная мера, неголономная механика

---

\*Перевод статьи “Dynamics of the Chaplygin Sleigh on a Cylinder”, опубликованной в журнале *Regular and Chaotic Dynamics*, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 136–146.

Получено 16 октября 2015 года  
После доработки 28 декабря 2015 года

---

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания вузам.

---

Бизяев Иван Алексеевич  
[bizaev\\_90@mail.ru](mailto:bizaev_90@mail.ru)  
Мамаев Иван Сергеевич  
[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)  
Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Борисов Алексей Владимирович  
[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)  
Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141700, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Россия, г. Москва, Каширское ш., д. 31

## 1. Введение

В этом году исполняется 150 лет с выхода первого номера старейшего российского журнала *Математический сборник*. За эти годы в журнале были изданы замечательные работы не только российских, но и зарубежных ученых (в частности, работы Э. Ж. Картана). Особо следует отметить классиков российской механики А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, Г. К. Сулова, А. Д. Билимовича, работы которых составляют золотой фонд современной теории динамических систем. Предметом настоящей работы является один вопрос из теории неголономных систем. Вопрос этот непосредственно связан со всемирно известными и регулярно цитируемыми работами С. А. Чаплыгина по неголономной механике, почти все они были опубликованы именно в *Математическом сборнике* (как и работы Э. Ж. Картана и В. Вагнера по неголономной геометрии; ее связь с неголономной механикой обсуждается, например, в работе [20]). Встречающиеся во всех курсах механики уравнения П. В. Воронца также впервые опубликованы в *Математическом сборнике*.

В связи с анализом вопросов управления сферороботом с помощью гироскопов отметим известную работу Д. К. Бобылева [17] о качении шара с гироскопом внутри, которая была опубликована в *Математическом сборнике* и недавно снова привлекла к себе внимание (см. [2]). Можно выделить также известную работу Х. М. Муштари [24], развивающую исследования Чаплыгина о качении тела вращения на плоскости. Для динамики твердого тела особое значение имеют работы П. А. Некрасова [25, 26], Д. Н. Горячева [21], Г. Г. Аппельрота [14, 15]; небесная механика получила развитие, например, в достаточно часто цитируемой работе Ф. А. Слудского [28]. Работа А. Д. Билимовича [16] посвящена задаче о неголономном маятнике, который является одним из примеров системы с нестационарными неголономными связями.

Заметим, что до первой половины 20 века в журнале *Математический сборник* в равной мере были представлены работы по чистой математике и классической механике. Постепенно эта традиция утратилась (уже в первой половине 20 века интересы журнала сместились в сторону общей теории функций) и в настоящее время, несмотря на активное развитие теории динамических систем, публикации в этой области носят эпизодический характер, а их уровень оставляет желать лучшего (при всем обилии теорем, лемм и т. д.).

В работе [29] 1912 года С. А. Чаплыгин предложил задачу о движении твердого тела по плоскости под действием неголономной связи, реализуемой с помощью колесика (лезвия), запрещающего твердому телу проскальзывать в перпендикулярном его плоскости направлении. Эта динамическая система получила в дальнейшем название саней Чаплыгина, хотя несколько ранее аналогичная конструкция исследовалась А. Бриллоном [5], а позже (и значительно подробнее) К. Каратеодори [6] (см. также [19]).

В работе С. А. Чаплыгина [29] отмеченная задача приводится для иллюстрации метода приводящего множителя, хотя для его формального использования необходимо было ввести дополнительную квазиординату. Наиболее естественные неголономные системы, интегрируемые с помощью теории приводящего множителя, описаны, например, в [4]. В работе [1] рассмотрена общая геометрическая конструкция метода приводящего множителя, позволяющего гамильтонизовать другую известную задачу Чаплыгина о движении динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости (задача была предложена в 1903 году в работе [30], опубликованной в *Математическом сборнике*). Качественный и топологический анализ движения точки контакта шара Чаплыгина был выполнен недавно [3].

В этой работе мы рассматриваем движение саней Чаплыгина по поверхности кругового цилиндра (см. также [22, 27]). Подробно рассмотрен случай движения по инерции, где задача сводится к изучению динамической системы на торе и классификации особых точек. Обсуждаются вопросы существования инвариантной меры. В случае движения уравновешенных и динамически симметричных саней в поле тяжести показано, что в среднем система не имеет дрейфа по вертикали, а движение саней ограничено двумя горизонтальными плоскостями (аналогичная ситуация имеет место в родственной задаче Штюблера [18]).

Рассматриваемая в данной работе система и подобные ей возникают в прикладных задачах, связанных с движением мобильных роботов по искривленной поверхности (например, по внутренней и внешней поверхности трубопроводов [13]).

## 2. Уравнения движения

Сани Чаплыгина [29] представляют собой твердое тело, опирающееся на поверхность острым невесомым колесиком (см. рис. 1а). Острый край колесика препятствует скольжению колесика в направлении, перпендикулярном его плоскости. Рассмотрим движение саней Чаплыгина на *круговом цилиндре*.

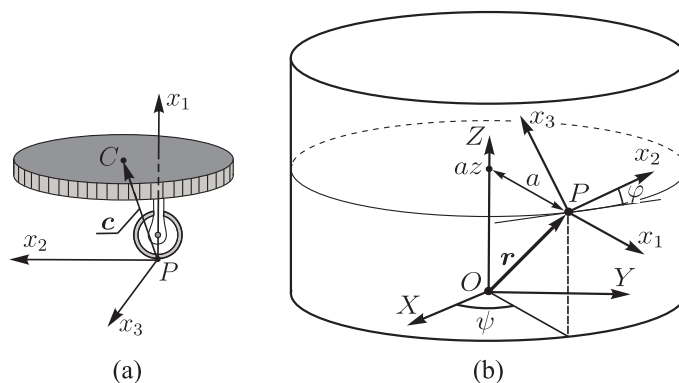


Рис. 1. Сани Чапыгина на цилиндре.

Определим две системы координат:

- *инерциальную* систему координат  $OXYZ$ , в которой ось  $OZ$  совпадает с осью цилиндра (см. рис. 1b);
- *неинерциальную* (подвижную) систему координат  $Px_1x_2x_3$ , жестко связанную с санями Чаплыгина и началом отсчета  $P$  в точке контакта колесика с цилиндром. Ось  $Px_1$  направим по нормали к поверхности цилиндра, а ось  $Px_2$  вдоль плоскости колесика.

Будем также предполагать, что сани движутся так, что ось колесика остается параллельной касательной плоскости к цилиндру в точке контакта  $P$ , при этом вектор  $\mathbf{c}$  из точки контакта  $P$  в центр масс  $C$  остается постоянным в системе  $Px_1x_2x_3$ . В этом случае конфигурация системы характеризуется положением точки  $P$  и поворотом саней относительно нормали к поверхности цилиндра в точке  $P$ .

Введем (обобщенные) координаты, параметризующие конфигурационное пространство. Пусть  $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$  — радиус-вектор точки контакта  $P$  в системе координат  $OXYZ$ , а  $(\psi, z)$  — ее (безразмерные) цилиндрические координаты

$$X = a \cos \psi, \quad Y = a \sin \psi, \quad Z = az,$$

где  $a$  — радиус цилиндра и  $\psi \in [0, 2\pi)$ ,  $z \in (-\infty, \infty)$ . Поворот саней относительно нормали  $Px_1$  зададим посредством угла  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , образованного осью  $Px_2$  с касательной к линии уровня  $z = \text{const}$  (см. рис.1б). Таким образом, конфигурационное пространство  $\mathcal{N}$  представляет собой прямое произведение:

$$\mathcal{N} = \{\mathbf{q} = (\varphi, \psi, z), \varphi, \psi \bmod 2\pi\} \approx \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^1.$$

Уравнение связи в этих переменных представляется в виде

$$-\dot{\psi} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi = 0$$

(эта связь совпадает со связью Чаплыгина на развертке цилиндра [29]).

Лагранжиан системы имеет стандартную форму

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}),$$

где  $U(\mathbf{q})$  — потенциальная энергия внешних сил, а  $T$  — кинетическая энергия саней, которая представляется в виде

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - m(\mathbf{v}, \mathbf{c} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость точки контакта  $P$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость саней,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  — вектор из точки контакта  $P$  в центр масс  $C$ ,  $\mathbf{I}$  — тензор инерции саней относительно точки  $P$ .

В случае, когда цилиндр находится в поле тяжести, действующем параллельно образующим цилиндра, имеем

$$U = mg(az + c_2 \sin \varphi + c_3 \cos \varphi).$$

В системе координат  $Px_1x_2x_3$  тензор инерции  $\mathbf{I}$  представляется постоянной симметричной матрицей, поэтому чтобы выразить кинетическую энергию через  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{q}$ , найдем  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  в проекции на эти оси. Для скорости точки контакта получим очевидные соотношения

$$v_1 = 0, \quad v_2 = a\dot{\psi} \cos \varphi + a\dot{z} \sin \varphi, \quad v_3 = -a\dot{\psi} \sin \varphi + a\dot{z} \cos \varphi. \quad (2.2)$$

Чтобы вычислить угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$ , определим матрицу направляющих косинусов  $\mathbf{Q} \in SO(3)$ , по столбцам которой стоят орты инерциальной системы координат  $OXYZ$ , спроецированные на подвижные оси  $Px_1x_2x_3$ :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T, \quad (2.3)$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \dot{\psi} \sin \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\psi} \cos \varphi.$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), получим  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .



Оказывается, в данном случае вместо обобщенных скоростей  $\mathbf{q} = (\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{z})$  параметризовать касательное пространство  $T\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$  удобнее при помощи квазикоординат  $(\omega_1, v_2, v_3)$ . При этом

$$\dot{\mathbf{q}} = \omega_1 \boldsymbol{\tau}_1 + v_2 \boldsymbol{\tau}_2 + v_3 \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — трансверсальное и  $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$  — касательные к связи (2.5) векторные поля, которые в координатном базисе могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 &= \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = k \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \psi} + k \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{n} &= -k \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \psi} + k \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z}, \quad k = a^{-1}. \end{aligned}$$

Вследствие неголономности связи находим

$$[\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2] = \mathbf{n}.$$

Уравнения движения данной неголономной системы представляются в следующей форме [9]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial \omega_1} \right) - \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial \varphi} &= - \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_3} \right)^* v_2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial v_2} \right) - k \cos \varphi \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial \psi} - k \sin \varphi \frac{\partial \tilde{L}^*}{\partial z} &= \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_3} \right)^* \omega_1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1 \quad \dot{\psi} = kv_2 \cos \varphi, \quad \dot{z} = kv_2 \sin \varphi,$$

где  $\tilde{L}(\mathbf{q}, \omega_1, v_2, v_3) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \omega_1, v_2, v_3))$ , а обозначение  $( )^*$  используется для операции ограничения функции на связь.

Уравнение связи в новых переменных представляется в форме

$$v_3 = 0. \tag{2.5}$$

Для функции Лагранжа получим

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{1}{2} m(v_2^2 + v_3^2) + m\omega_1(c_2 v_3 - c_3 v_2) + \frac{1}{2} I_{11} \omega_1^2 + \\ &+ \Phi_1(v_2 \cos \varphi - v_3 \sin \varphi)^2 + \omega_1 \Phi_2(v_2 \cos \varphi - v_3 \sin \varphi) - U(\mathbf{q}), \\ \Phi_1 &= \frac{k^2}{2}(I_{22} \sin^2 \varphi + I_{23} \sin(2\varphi) + I_{33} \cos^2 \varphi) + kmc_1, \\ \Phi_2 &= k(I_{12} \sin \varphi + I_{13} \cos \varphi). \end{aligned}$$

Окончательно, разрешив систему (2.4) относительно первых производных, представим уравнения движения на  $\mathcal{M}^5 = \{\omega_1, v_2, \varphi, \psi, z\}$  в форме

$$\begin{aligned} \Phi_3 \dot{\omega}_1 &= \omega_1 (mc_3 - \Phi_2 \cos \varphi) (2v_2 \Phi_1' \cos^2 \varphi - \omega_1 (mc_2 - \Phi_1' \cos \varphi)) - \\ &- v_2 (m + 2\Phi_1 \cos^2 \varphi) (v_2 \Phi_1' \cos^2 \varphi - mc_2 \omega_1) - m\omega_1 v_2 \sin \varphi (\Phi_1 + 2c_3 \Phi_2 \cos \varphi) + \\ &+ mg(m + 2\Phi_1 \cos^2 \varphi) (c_2 \cos \varphi - c_3 \sin \varphi) + mg \sin \varphi (mc_3 - \Phi_2 \cos \varphi), \\ \Phi_3 \dot{v}_2 &= v_2 \Phi_1' \cos^2 \varphi (2I_{11} \omega_1 - v_2 (mc_3 - \Phi_2 \cos \varphi)) - I_{11} \omega_1 (v_2 \Phi_1 \sin(2\varphi) + \\ &+ \omega_1 (mc_2 - \Phi_2' \cos \varphi)) + \omega_1 v_2 (mc_2 - \Phi_2 \sin \varphi) (mc_3 - \Phi_2 \cos \varphi) + \\ &+ mg(mc_3 - \Phi_2 \cos \varphi) (c_2 \cos \varphi - c_3 \sin \varphi) + mg I_{11} \sin \varphi, \end{aligned} \tag{2.6}$$



$$\begin{aligned}\Phi_3 &= I_{11}(m + \Phi_1 \cos^2 \varphi) - (mc_3 - \Phi_2 \cos^2 \varphi)^2, \\ \dot{\varphi} &= \omega_1, \quad \dot{\psi} = kv_2 \cos \varphi, \quad \dot{z} = kv_2 \sin \varphi.\end{aligned}$$

Система (2.6) допускает интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} I_{11} \omega_1^2 - mc_3 \omega_1 v_2 + v_2 \cos \varphi (\omega_1 \Phi_1 + v_2 \Phi_2 \cos \varphi) + U. \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6) инвариантны относительно переносов вдоль оси  $OZ$  и поворотов вокруг этой же оси, которым соответствуют поля симметрии

$$\mathbf{u}_\psi = \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \mathbf{u}_z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Вследствие этого в (2.6) отделяется замкнутая (редуцированная) система уравнений, описывающая эволюцию  $\omega_1$ ,  $v_2$ ,  $\varphi$ . Свойства редуцированной системы во многом определяют свойства динамики всей системы.

Согласно (2.7), интеграл энергии в общем случае явно содержит переменную  $z$ , а значит, не является интегралом редуцированной системы, поэтому для интегрируемости (по теореме Эйлера–Якоби [12]) системы (2.6) в поле тяжести необходимо указать еще один дополнительный интеграл (зависящий лишь от переменных  $\omega_1$ ,  $v_2$ ,  $\varphi$ ) и инвариантную меру. Если же поле тяжести отсутствует, требуется наличие лишь инвариантной меры.

Далее будет показано, что в общем случае в системе (2.6) отсутствует гладкая инвариантная мера, так как в ней встречаются простые аттракторы (неподвижные точки и предельные циклы).

### 3. Движение по инерции

В данном разделе рассмотрим движение по инерции саней Чаплыгина (то есть  $U = 0$ ). Будем полагать, что центр масс твердого тела находится в плоскости (колесика)  $Px_1x_2$ , то есть  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, 0)$ , а также ось  $Px_1$  (направленная по нормали к поверхности цилиндра) совпадает с его главной осью инерции

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае  $\Phi_2 = 0$  и уравнения движения (2.6) представляются в форме

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= v_2^2 \frac{\Phi_1'}{I_{11}} \cos^2 \varphi - \omega_1 v_2 \frac{mc_2}{I_{11}}, \\ \dot{v}_2 &= 2\omega_1 v_2 \frac{\Phi_1 \sin \varphi - \Phi_1' \cos \varphi}{m + 2\Phi_1 \cos^2 \varphi} \cos \varphi + \frac{\omega_1^2 mc_2}{m + 2\Phi_1 \cos^2 \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \omega_1, \\ \Phi_1 &= \frac{k^2}{2} (I_{22} \sin^2 \varphi + I_{23} \sin(2\varphi) + I_{33} \cos^2 \varphi) + kmc_1, \\ \Phi_1' &= k^2 (I_{23} \cos 2\varphi + (I_{22} - I_{33}) \sin \varphi \cos \varphi),\end{aligned}$$

а интеграл энергии имеет вид

$$E = \frac{1}{2} I_{11} \omega_1^2 + \frac{1}{2} (m + 2\Phi_1 \cos^2 \varphi) v_2^2.$$



Будем полагать, что кривизна цилиндра  $k$  и параметры  $m$ ,  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{c}$  выбраны таким образом, что всюду  $m + 2\Phi_1 \cos^2 \varphi > 0$ .

Можно показать, что уровень энергии  $E = \text{const}$  в трехмерном пространстве, задаваемом переменными  $(\varphi, \omega_1, v_2)$ , представляет собой двумерный тор  $\mathbb{T}^2$ . Введем на нем локальные координаты  $(\varphi, \vartheta)$  следующим образом:

$$\omega_1 = \frac{h}{\sqrt{I_{11}}} \sin \vartheta, \quad v_2 = \frac{h \cos \vartheta}{\sqrt{m + 2\Phi_1 \cos^2 \varphi}}, \quad E = \frac{h^2}{2}.$$

Заметим, что правые части уравнений описывающих эволюцию  $\omega_1$  и  $v_2$  периодичны по  $\varphi$  с периодом, равным  $\pi$ . Учтем это с помощью замены  $\phi = 2\varphi$ .

Окончательно, выполнив замену времени  $dt = I_{11}^{-1/2} h d\tau$ , получим систему на торе  $\mathbb{T}^2$ , траектории которой в угловых переменных  $\mathbf{x} = (\phi, \vartheta) \bmod 2\pi$  задаются с помощью уравнений

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{2} \sin \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\cos \vartheta}{f(\phi)} (1 + \cos \phi) (\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi) - \delta \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{f(\phi)}}, \quad (3.1)$$

$$f(\phi) = 2 + (1 + \cos \phi) (\alpha \sin \phi + \beta \cos \phi + \gamma),$$

$$\alpha = \frac{k^2}{m} I_{23}, \quad \beta = \frac{k^2}{2m} (I_{33} - I_{22}), \quad \gamma = \frac{k^2}{2m} (I_{22} + I_{33}) + 2kc_1, \quad \delta = \frac{\sqrt{2mc_2}}{\sqrt{I_{11}}}.$$

Система (3.1) обладает инволюцией (то есть является обратимой)

$$R: \quad \vartheta \rightarrow \vartheta + \pi, \quad t \rightarrow -t.$$

Следовательно, все траектории на торе оказываются симметричными относительно  $\vartheta = \pi$  (при этом направление движения меняется на обратное).

### 3.1. Динамика неуровновешенных саней

При  $\alpha \neq 0$  система (3.1) обладает набором изолированных положений равновесия, которые мы разделим на две группы в зависимости от характера движения точки контакта саней.

1. Точки  $\mathbf{x}^{(1)} = (\pi, 0)$  и  $\mathbf{x}^{(2)} = (\pi, \pi)$ , при этом точка контакта  $P$  в обоих случаях движется вдоль образующей цилиндра (так как  $\dot{\psi} = 0$ ).

2. Точки  $\mathbf{x}^{(3)} = (\tilde{\phi}, 0)$ ,  $\mathbf{x}^{(4)} = (\tilde{\phi}, \pi)$  и  $\mathbf{x}^{(5)} = (\tilde{\phi} + \pi, 0)$ ,  $\mathbf{x}^{(6)} = (\tilde{\phi} + \pi, \pi)$ , где  $\tilde{\phi} = \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ .

Для  $\mathbf{x}^{(3)}$  и  $\mathbf{x}^{(4)}$  траектория точки контакта  $P$  в цилиндрических координатах имеет вид

$$z(\psi) = \frac{\alpha}{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \psi + z(0),$$

а для  $\mathbf{x}^{(5)}$  и  $\mathbf{x}^{(6)}$  получаем

$$z(\psi) = \frac{\alpha}{\beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \psi + z(0).$$

Отметим, что вследствие инволюции  $R$  достаточно рассмотреть устойчивость  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(3)}$  и  $\mathbf{x}^{(5)}$ .



В состоянии равновесия  $\mathbf{x}^{(1)}$  характеристический полином всегда имеет одно нулевое собственное значение, а другое —

$$\lambda^{(1)} = \frac{\delta}{\sqrt{2}}.$$

Характеристический полином для  $\mathbf{x}^{(3)}$  и  $\mathbf{x}^{(4)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} P^{(3)}(\lambda) &= a_1\lambda^2 + \delta\sqrt{a_1}\lambda + b_1, \\ a_1 &= 2 + \beta + \gamma + \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad b_1 = \frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \\ P^{(4)}(\lambda) &= a_2\lambda^2 + \delta\sqrt{a_2}\lambda + b_2, \\ a_2 &= 2 + \beta + \gamma - \frac{\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad b_2 = \frac{1}{2}(\beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}). \end{aligned}$$

Таким образом, узловые состояния равновесия при  $\delta \neq 0$  являются асимптотически устойчивыми либо асимптотически неустойчивыми, следовательно, в этом случае отсутствует гладкая инвариантная мера [23]. Характерный фазовый портрет приведен на рисунке 2.

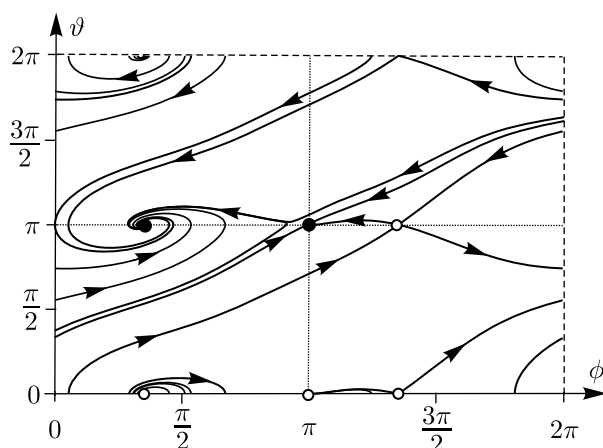


Рис. 2. Фазовый портрет системы (3.1) при фиксированных параметрах  $\alpha = 0.6$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\delta = -0.3$ ,  $\gamma = 0.8$ .

Движение саней Чаплыгина в неподвижной системе координат  $OXYZ$  в промежутке времени  $t \in (-\infty, +\infty)$  носит асимптотический характер, то есть при  $t \rightarrow -\infty$  сани начинают движение с неустойчивого стационарного решения системы (2.6) и далее при  $t \rightarrow +\infty$  стремятся к устойчивому стационарному решению (2.6).

### 3.2. Динамика уравновешенных саней

Рассмотрим отдельно случай, в котором  $\mathbf{c} = (c_1, 0, 0)$  (то есть центр масс лежит на нормали к цилиндру в точке контакта). В этом случае  $\delta = 0$  и, следовательно, положения равновесия  $\mathbf{x}^{(1)}$  и  $\mathbf{x}^{(2)}$  оказываются вырожденными, причем линеаризованная система имеет вид

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}\vartheta, \quad \dot{\vartheta} = 0.$$



Состояния равновесия  $\mathbf{x}^{(3)}$ ,  $\mathbf{x}^{(4)}$  и  $\mathbf{x}^{(5)}$ ,  $\mathbf{x}^{(6)}$  становятся консервативными (седлом или центром).

Оказывается, в этом случае система (3.1) обладает инвариантной мерой с плотностью

$$\rho(\vartheta) = \frac{1}{\cos \vartheta}.$$

Отметим, что система (3.1), помимо неподвижных точек, обладает *периодическими решениями*

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi = t \quad \text{и} \quad \vartheta = \frac{3\pi}{2}, \quad \phi = t, \tag{3.2}$$

в которых точка контакта  $P$  покоится, а сани вращаются вокруг нее с постоянной угловой скоростью.

Решения (3.2) являются предельными циклами системы (3.1) (так как в них  $\rho = 0$ ). Характерный фазовый портрет системы (3.1) представлен на рисунке 3.

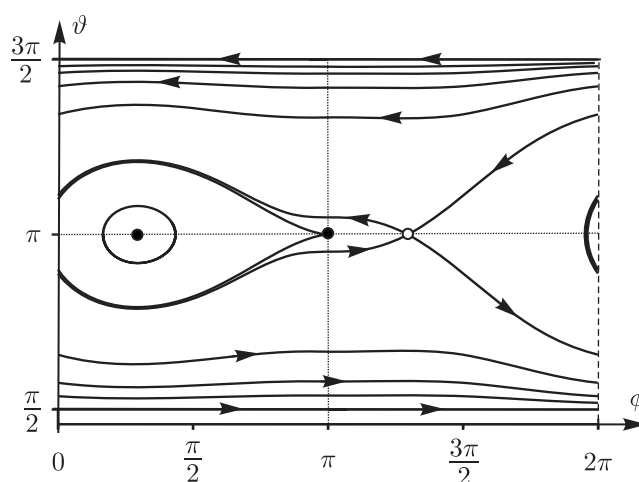


Рис. 3. Фазовый портрет системы (3.1) при фиксированных параметрах  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 1/4$ ,  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 1/2$ .

Особо выделяется случай  $\alpha = 0$ , в котором система обладает (второй) инвариантной мерой с плотностью

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\phi) &= (2 + (1 + \cos \phi)(\beta \cos \phi + \gamma))e^{\mu(\phi)}, \\ \mu(\phi) &= \frac{2(\gamma - \beta)}{\sqrt{8\beta - (\beta - \gamma)^2}} \arctan \left( \frac{2\beta \cos \phi + \gamma + \beta}{\sqrt{8\beta - (\beta - \gamma)^2}} \right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

При этом траектории системы (3.1) (за исключением неподвижных точек) оказываются замкнутыми, а дополнительный первый интеграл имеет вид

$$F = \frac{\tilde{\rho}(\phi)}{\rho(\vartheta)}.$$

#### 4. Движение в поле тяжести

В данном разделе мы рассмотрим наиболее простой случай уравновешенных саней:

$$\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3), \quad \mathbf{c} = (c_1, 0, 0).$$

Приведенная система в этом случае записывается в форме

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega_1, & \dot{\omega}_1 &= \frac{2m\beta}{I_1} \sin \varphi \cos^3 \varphi v_3^2, \\ \dot{v}_2 &= \frac{\sin \varphi (\omega_1 v_2 \cos \varphi (\gamma - \beta + 6\beta \cos^2 \varphi) - g)}{1 + \gamma \cos^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi (2 \cos^2 \varphi - 1)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где параметры  $\gamma, \beta$  определены в (3.1).

В разделе 3.2 было показано, что эта система при  $g = 0$  допускает инвариантную меру; это остается справедливым и в данном случае (как правило, добавление потенциальных сил не влияет на существование инвариантной меры, плотность которой зависит от позиционных переменных). Для используемых здесь переменных инвариантная мера имеет вид  $\rho_0(\varphi) d\varphi d\omega_1 dv_2$ , где

$$\rho_0(\varphi) = (1 + \gamma \cos^2 \varphi + \beta \cos^2 \varphi (2 \cos^2 \varphi - 1))^{3/4} e^{\mu(\varphi)},$$

$\mu(\varphi)$  задается соотношением (3.3) с учетом замены  $\phi = 2\varphi$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Как было показано выше (см. раздел 3.1), без потенциала в случае неуравновешенных саней система не обладает инвариантной мерой. Добавление поля тяжести в этом случае может привести к достаточно сложной динамике, в частности, в фазовом пространстве системы могут возникнуть странные аттракторы.

Уравнения (4.1) допускают следующие частные решения:

1) *семейство неподвижных точек:*

$$\varphi = 0, \pi, \quad \omega_1 = 0, \quad v_2 = \text{const}, \quad (4.2)$$

при этом сани равномерно движутся по окружности, перпендикулярной образующей цилиндра;

2) *вертикальные падения:*

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \quad \omega_1 = 0, \quad v_2 = V_0 - gt, \quad V_0 = \text{const}, \quad (4.3)$$

при этом сани равноускоренно движутся вдоль вертикали.

Система (4.1) допускает также простейший интегрируемый случай (который при дополнительном ограничении  $c_1 = 0$  был указан в [22]); при этом выполняется условие динамической симметрии

$$I_2 = I_3,$$

то есть  $\beta = 0$ . Дополнительный первый интеграл:

$$F = \omega_1.$$



На уровне  $\omega_1 = \Omega_0 = \text{const}$ ,  $\Omega_0 \neq 0$  зависимость  $v_2(\varphi)$  определяется выражением

$$v_2 = \frac{g}{\sqrt{|\gamma|\Omega_0}\sqrt{1+\gamma\cos^2\varphi}} \cdot \begin{cases} \ln(\sqrt{\gamma\cos^2\varphi} + \sqrt{1+\gamma\cos^2\varphi}) + C_0, & \gamma > 0, \\ \arcsin(\sqrt{|\gamma|\cos^2\varphi}) + C_0, & \gamma < 0, \end{cases}$$

где  $C_0$  — постоянная интегрирования. При этом  $\varphi$  меняется равномерно

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Omega_0 t.$$

Отсюда видно, что  $v_2$  во все моменты времени остается ограниченной функцией.

Теперь заметим, что интеграл энергии в данном случае принимает вид

$$E = E_0(\varphi, \omega_1, v_2) + mgaz,$$

где  $E_0$  — энергия системы без поля тяжести. Отсюда следует что если все величины  $\varphi$ ,  $\omega_1$ ,  $v_2$  ограничены, то на всяком уровне энергии  $E = h = \text{const}$  функция  $z(t)$  также остается ограничена во все моменты времени. Следовательно, при всех начальных условиях, за исключением условий, соответствующих решениям (4.3), уравновешенные ( $c_2 = c_3 = 0$ ) динамически симметричные ( $I_2 = I_3$ ) сани Чаплыгина на вертикальном цилиндре в поле тяжести движутся в ограниченном интервале  $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$ .

#### 4.1. Заключение

Обсудим в заключение некоторые открытые проблемы. При условии  $I_2 \neq I_3$ , вследствие наличия инвариантной меры, система (4.1) аналогична гамильтоновым системам с полутора степенями свободы, для которых в общем случае характерно наличие стохастических слоев в фазовом пространстве. Тем не менее, по-видимому, утверждение об ограниченности движения по вертикали остается открытым.

**Гипотеза.** Для уравновешенных саней (то есть  $c_2 = c_3 = 0$ ) при  $I_2 \neq I_3$  для почти всех начальных условий траектория саней также ограничена по вертикали.

Доказательство этой гипотезы является открытой проблемой. Отметим, что в случае неуравновешенных саней, как показывают численные эксперименты, почти все траектории не являются ограниченными. В задаче о санях, движущихся по наклонной плоскости, при смещении центра масс также наблюдается уход (вниз) [19]. Существенно более сложной задачей является исследование динамики однородного тяжелого диска (обруча), катящегося без проскальзывания по внешней или внутренней поверхности кругового цилиндра. В первом случае задача тесно связана с необыкновенной устойчивостью в задаче о хула-хупе (см. подробнее, например, [7, 10]). Исследование движения диска по поверхности цилиндра представляет интерес также с точки зрения существования инвариантной меры. По-видимому, в более общей задаче, связанной с качением динамически симметричного тела вращения по поверхности цилиндра в общем случае отсутствует инвариантная мера, зависящая от позиционных переменных (см. подробнее [8]). Открытым остается вопрос об ограниченности (по вертикали цилиндра) траектории диска. Отметим, что строгие результаты об ограниченности траекторий известны лишь для интегрируемых систем (см., например, задачу Штюблера [18] и задачу о движении шара Чаплыгина [3]). Вопросы об ограниченности траектории для неинтегрируемых систем являются существенно более сложными. Другие открытые проблемы для различных систем (в том числе неинтегрируемых) указаны в работе [11].

## Список литературы

- [1] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Geometrisation of Chaplygin's reducing multiplier theorem // *Nonlinearity*, 2015, vol. 28, no. 7, pp. 2307–2318.
- [2] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [3] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 832–859.
- [4] Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.
- [5] von Brill A. *Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen*. Leipzig: Teubner, 1909. 236 pp.
- [6] Carathéodory C. Der Schlitten // *Z. Angew. Math. Mech.*, 1933, vol. 13, no. 2, pp. 71–76.
- [7] Caughey T. K. Hula-hoop: an example of heteroparametric excitation // *Am. J. Phys.*, 1960, vol. 28, no. 2, pp. 104–109.
- [8] Fedorov Yu. N., García-Naranjo L. C., Marrero J. C. Unimodularity and preservation of volumes in nonholonomic mechanics // *J. Nonlinear Sci.*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 203–246.
- [9] Hamel G. Die Lagrange–Eulerschen Gleichungen der Mechanik // *Z. Math. u. Phys.* 1904, vol. 50, pp. 1–57.
- [10] Kakehashi Y., Izawa T., Shirai T., Nakanishi Y., Okada K., Inaba M. Achievement of hula hooping by robots through deriving principle structure towards flexible spinal motion // *J. Robot. Mechatron.*, 2012, vol. 24, no. 3, pp. 540–546.
- [11] Kozlov V. V. Several problems on dynamical systems and mechanics // *Nonlinearity*, 2008, vol. 21, no. 9, pp. 149–155.
- [12] Kozlov V. V. The Euler–Jacobi–Lie integrability theorem // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2013, no. 18, vol. 4, pp. 329–343.
- [13] Noohi E., Mahdavi S. S., Baghani A., Ahmadabadi M. N. Wheel-based climbing robot: Modeling and control // *Advanced Robotics*, 2010, vol. 24, nos. 8–9, pp. 1313–1343.
- [14] Аппельрот Г. Г. Простейшие случаи движения тяжелого несимметричного гироскопа С. В. Ковалевской (статья первая) // *Матем. сб.*, 1910, т. 27, № 3, с. 262–334.
- [15] Аппельрот Г. Г. Простейшие случаи движения тяжелого несимметричного гироскопа С. В. Ковалевской (статья вторая) // *Матем. сб.*, 1911, т. 27, № 4, с. 477–559.
- [16] Билимович А. Д. Неголономный маятник // *Матем. сб.*, 1914, т. 29, № 2, с. 234–240.
- [17] Бобылев Д. К. О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения // *Матем. сб.*, 1892, т. 16, № 3, с. 544–581.
- [18] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. К одной неголономной динамической проблеме // *Мат. заметки*, 2006, т. 79, № 5, с. 790–796.
- [19] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика саней Чаплыгина // *ПММ*, 2009, т. 73, № 2, с. 219–225.
- [20] Борисов А. В., Мамаев И. С., Цыганов А. В. Неголономная динамика и пуассонова геометрия // *УМН*, 2014, т. 69, № 3, с. 87–144.
- [21] Горячев Д. Н. О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае  $A = B = 4C$  // *Матем. сб.*, 1900, т. 21, № 3, с. 431–438.
- [22] Ифраимов С. В., Кулешов А. С. О движении саней Чаплыгина по выпуклой поверхности // *Автомат. и телемех.*, 2013, № 8, с. 80–90.
- [23] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // *ПММ*, 1987, т. 51, № 4, с. 538–545.
- [24] Муштари Х. М. О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // *Матем. сб.*, 1932, т. 39, № 1–2, с. 105–126.

- [25] Некрасов П. А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Матем. сб., 1896, т. 18, № 2, с. 161–274.
- [26] Некрасов П. А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Матем. сб., 1892, т. 16, № 3, с. 508–517.
- [27] Орешкина Л. Н. Некоторые обобщения задачи о санях Чаплыгина // Механика твердого тела, 1986, № 19, с. 34–39.
- [28] Слудский Ф. А. К задаче многих тел // Матем. сб., 1879, т. 9, № 3, с. 536–545.
- [29] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314.
- [30] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, № 1, с. 139–168.

## Dynamics of the Chaplygin sleigh on a cylinder

Ivan A. Bizyaev<sup>1</sup>, Alexey V. Borisov<sup>2</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Udmurt State University

ul. Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology

Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow, 141700, Russia

National Research Nuclear University “MEPhI”

Kashirskoe sh. 31, Moscow, 115409, Russia

<sup>1</sup>bizaev\_90@mail.ru, <sup>2</sup>borisov@rzd.ru, <sup>3</sup>mamaev@rzd.ru

This paper is concerned with the motion of the Chaplygin sleigh on the surface of a circular cylinder. In the case of inertial motion, the problem reduces to the study of the dynamical system on a (two-dimensional) torus and to the classification of singular points. Particular cases in which the system admits an invariant measure are found. In the case of a balanced and dynamically symmetric Chaplygin sleigh moving in a gravitational field it is shown that on the average the system has no drift along the vertical.

MSC 2010: 37J60, 37C10

Keywords: Chaplygin sleigh, invariant measure, nonholonomic mechanics

Received October 16, 2015, accepted December 28, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 675–687 (Russian)