



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 532.529:541.182

MSC 2010: 76D07, 76D09, 76D17

Об одной модели динамики самодвижущихся агрегатов частиц в вязкой жидкости

С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач

Рассматривается модель агрегата, состоящего из соединенных между собой стержнями сферических частиц и перемещающегося в вязкой жидкости за счет гидродинамической силы, действующей на агрегат со стороны вихревого течения вязкой жидкости. Вихревое течение жидкости образуется в результате вращения пары частиц агрегата в противоположные стороны под действием моментов внутренних сил, сумма которых равна нулю. На остальные частицы агрегата наложены связи, препятствующие их вращению. Для расчета динамики агрегата совместно решается система уравнений течения вязкой жидкости в приближении малых чисел Рейнольдса с соответствующими граничными условиями и уравнений движения частиц под действием приложенных внешних и внутренних сил и моментов сил. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц. Считается, что стержни с жидкостью не взаимодействуют, а роль этих стержней сводится к тому, что они не позволяют соединенным стержнем частицам менять расстояние между ними. Проведено компьютерное моделирование динамики трех агрегатов из 5 частиц, которые отличаются размерами невращающихся частиц. Рассчитаны усилия в стержнях и скорость перемещения для каждого модельного агрегата. Найдено, что одна из рассмотренных моделей перемещается быстрее за счет большей гидродинамической силы, действующей на вращающиеся частицы со стороны вязкой жидкости. На основе предложенного подхода можно создавать модели самодвижущихся агрегатов разной геометрической формы с двумя и более парами вращающихся частиц. Приведены примеры конструирования такого рода агрегатов, динамика которых в вязкой жидкости также была изучена с помощью компьютерного моделирования.

Получено 27 апреля 2016 года

После доработки 10 сентября 2016 года

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007).

Мартынов Сергей Иванович

martynovsi@mail.ru

Ткач Леониλλα Юрьевна

leonilla777@mail.ru

Югорский государственный университет

628012, Россия, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, самодвижущиеся агрегаты частиц, гидродинамическое взаимодействие, внутренние силы взаимодействия

1. Введение

В последние годы активно развивается направление в конструировании миниатюрных самодвижущихся устройств, основанное на применении в их работе принципов движения живых организмов в природе. Одним из самых изучаемых вопросов в этой области является использования для такого рода самодвижущихся устройств принципов плавания живых организмов в жидкости, поэтому проблема моделирования динамики плавания различных организмов является актуальной задачей как для создания новых теоретических моделей, так и для различных прикладных разработок. Например, создание новых типов гидродинамических движителей и гидродинамических насосов, микроаппаратов для обследования сосудов и органов человека и т. п., причем это касается моделирования плавания как макро-, так и микроорганизмов. Моделирование динамики последних представляет интерес также и для биологии, бактериологии, медицины. В настоящее время известно достаточно много микроорганизмов, обитающих как в природной среде, так и в пищеварительных, кровеносных, половых каналах человека и животных. Моделирование движения таких микроорганизмов позволяет разрабатывать методы воздействия, предотвращающие или затрудняющие их проникновение в организм человека или какую-либо его область. Моделирование плавания микроорганизмов в жидкости представляет интерес еще и с точки зрения создания способов управления движением в жидкости агрегатов мелких частиц за счет воздействия на них внешними полями. Последнее позволяет создавать жидкие дисперсные системы, течением которых можно управлять за счет приведения их в движение в результате воздействия на частицы или их агрегаты различными полями. Один из возможных результатов такого внешнего воздействия на агрегаты частиц — это деформация их формы или относительное перемещение содержащихся в них мелких частиц. Требуется определить такие деформации или относительные перемещения частиц, которые приводят к движению агрегата в жидкости как целого объекта. В последнее время растет интерес к изучению такого рода жидких систем именно из-за возможности управления в них процессами массопереноса [1].

В настоящее время имеются обзоры по результатам моделирования плавания макро- и микроорганизмов [2–4]. Имеющиеся в литературе модели движения тела основываются на придании телу таких деформаций, имитирующих реальные движения того или иного организма, которые в результате дают перемещение тела в заданном направлении. Одна из проблем при таком моделировании — это различие свойств материалов, из которых изготовлено самодвижущееся тело по сравнению с материалом живых организмов. Это означает, что имитация деформаций, подобных тем, что приводят живые организмы в движение, представляет собой весьма трудную задачу. Между тем, по мнению авторов, основная сложность рассматриваемой проблемы заключается в том, что жидкость и плавающий организм образуют систему, в которой за счет действия внутренних сил и моментов, создаваемых плавающим организмом, формируется такое течение жидкости, в котором создается гидродинамическая сила, перемещающая организм относительно жидкости. Причем, как во всякой системе, суммы внутренних сил и их моментов должны быть равны нулю. С этой точки зрения, имеющиеся в литературе модели фактически не дают ответа на вопрос, какого рода течения жидкости вне организма необходимо сформировать теми или иными

деформациями, чтобы возникла необходимая движущаяся сила. Так, известная модель волнообразной деформации тела, имитирующей движение различных плавающих организмов, например движение змей в воде, в главном приближении дает нулевую силу, действующую в направлении предполагаемого движения организмов [5, 6]. Другая сложность при моделировании подобных систем заключается в необходимости учитывать гидродинамическое взаимодействие частей организма при его деформации, что, вообще говоря, представляет собой весьма трудную задачу. Опубликованные в разные годы работы по моделированию такого рода движений тел связаны, главным образом, с практической реализацией необходимых деформаций на основе аналогового принципа и не дают анализа структуры течения, которое должно сформироваться в результате этих деформаций [7, 8].

В работах [9, 10] авторы предложили подход, основанный на определении структуры течения, формирование которого приводит реальный организм в движение, и описали моделирование таких относительных перемещений его составных частей, которые и создают это необходимое течение. На основе предложенного подхода рассмотрены два модельных примера динамики агрегатов частиц, движущихся за счет создания в окружающей жидкости вихревого течения. Как показывает анализ [2, 7], такого рода течение образуется при плавании различных организмов и создается движениями каких-либо частей этого организма. Ниже рассматривается дальнейшее развитие такого подхода на основе первого модельного примера из работы [9]. При моделировании учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц агрегатов.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается модель агрегата, состоящего из N твердых сферических частиц, помещенных в несжимаемую жидкость плотности ρ и вязкости η . Частицы могут быть разного радиуса, разной плотности, находиться вблизи или вдали от плоской стенки, вдоль которой может создаваться течение с заданным профилем скорости. Предполагается, что частицы связаны между собой тонкими нерастяжимыми стержнями, которые сами с жидкостью не взаимодействуют, но позволяют частицам совершать поступательное и вращательное движение или движение без вращения. Фактически роль этих стержней сводится к тому, что они не позволяют соединенным стержнем частицам менять расстояние между ними. Часть частиц агрегата моделируют тело плавающего организма (переносимую полезную нагрузку), и на них наложены связи, препятствующие их вращению, а некоторые частицы агрегата моделируют двигательный аппарат плавающего организма, и они могут свободно вращаться вокруг любой оси, проходящей через их центр.

Возможны различные геометрические формы такой структуры. Обычно в природе у плавающего организма имеется пара органов, расположенных симметрично относительно основного тела (плавников или других, подобных им) и приводящих его в движение. Поэтому в дальнейшем будем также рассматривать симметричное расположение пар частиц в агрегате, моделирующих двигательный аппарат. Считаем, что к таким частицам приложены моменты сил, сумма которых равна нулю, как и следует из общих свойств моментов внутренних сил системы. Под действием моментов внутренних сил частицы, моделирующие двигательный аппарат организма, вращаются с угловыми скоростями, что создает вихревое течение в окружающей жидкости, заставляющее всю систему частиц поступательно перемещаться в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой находятся векторы внутренних моментов. Меняя направление приложенных моментов, можно изменять вих-

ревое течение жидкости вокруг системы частиц, а значит, и направление перемещения всей системы. Для расчета течения жидкости вокруг рассматриваемой структуры записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и сил реакции стержневых связей. Рассматривается случай малых чисел Рейнольдса. Система уравнений для скорости \mathbf{u} и давления p в жидкости имеет вид

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

На поверхности частицы с номером k должны выполняться условия прилипания:

$$u_i = V_i^k + \Gamma_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{X}^k| = a. \quad (2.2)$$

Здесь вектор \mathbf{V}^k обозначает абсолютную линейную скорость, Γ_{ij}^k — тензор угловой скорости, \mathbf{X}^k — положение произвольной точки жидкости относительно центра частицы с номером k .

Далеко от частиц имеет место затухание возмущений

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где p_0 — невозмущенное давление в жидкости.

Аналогично работе [14], динамика агрегата моделируется как динамика системы частиц со связями. Записываются уравнения движения каждой частицы с учетом действующих на нее сил реакции стержней и сил гидродинамического взаимодействия, а также уравнения вращательного движения, с учетом моментов всех сил, действующих на частицы. Система уравнений имеет вид

$$\mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^h = 0, \quad \mathbf{T}_k^i + \mathbf{T}_k^e + \mathbf{T}_k^h = 0. \quad (2.4)$$

Здесь \mathbf{F}_k^h — силы, \mathbf{T}_k^h — моменты сил со стороны жидкости, \mathbf{F}_k^i , \mathbf{T}_k^i — внутренние, а \mathbf{F}_k^e , \mathbf{T}_k^e — внешние силы и моменты сил, действующие на частицу с номером k .

Для решения системы уравнений используются полученные ранее результаты работ [11–13]. Из решения системы уравнений динамики жидкости находим распределение скорости и давления в жидкости вокруг агрегата и по полученным результатам — силы и моменты сил \mathbf{F}_k^h , \mathbf{T}_k^h , действующие на каждую частицу агрегата со стороны жидкости. Поступательная скорость частиц агрегата, моделирующих тело плавающего организма, определяется из условия равенства нулю всех сил, действующих на выбранную частицу. Из условия неизменности расстояния между частицами можно найти реакцию связей, наложенных на частицы. Для частиц, моделирующих двигательный аппарат, из условия равенства нулю моментов сил находим угловую скорость их вращения. В общей сложности необходимо найти решение $6N$ уравнений. Так как число частиц в агрегате N может быть большим, то нахождение решения системы уравнений связано с известными трудностями. Для численного решения системы уравнений использовался специальный программный комплекс для персонального компьютера, который в качестве исходных данных получает только желаемую точность вычислений, координаты и радиусы частиц, скорость внешнего потока и приложенные силы и моменты. Программа сама составляет и находит численное решение системы уравнений, а результат выводит в уже обработанном виде. Аналогичная программа использовалась в работах [13, 14]. По найденным числовым значениям находятся скорости частиц, строятся траектории их движения, а также определяются усилия, возникающие в стержнях, соединяющих частицы в рассматриваемой структуре.

3. Моделирование динамики самодвижущихся агрегатов частиц в вязкой жидкости

Поскольку в реальных системах размеры частиц достаточно малы, что затрудняет нахождение численного решения системы уравнений и визуализацию результатов, то применялся метод подобия, аналогичный работе [14], а именно: при компьютерном моделировании динамики цепочек задаются размеры частиц \hat{a} , вязкость несущей жидкости $\hat{\eta}$, величина и направление внешней силы \hat{F}_k , действующей на каждую частицу, а также скорость внешнего модельного потока. Поскольку плотность жидкости явным образом не входит в уравнения (2.1), то она считается одинаковой для модельной и реальной жидкостей.

Так же, как и в работе [14], для динамики агрегата имеем следующие равенства, записанные, соответственно, при моделировании и для реальных параметров a , η , F динамики системы частиц:

$$6\pi\hat{\eta}\hat{a}K\hat{V} = N\hat{F}, \quad 6\pi\eta aKV = NF. \quad (3.1)$$

Здесь K — коэффициент, зависящий только от конфигурации частиц в агрегате, но не от его размеров, V — скорость центра масс системы. Чтобы динамика модельной системы отражала динамику реальной, необходимо, чтобы число Рейнольдса было одинаковым:

$$\frac{\rho\hat{V}\hat{a}}{\hat{\eta}} = \frac{\rho Va}{\eta}. \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1) находим связь между скоростями

$$V = \frac{F\hat{a}\hat{\eta}\hat{V}}{\hat{F}\eta a}. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в условие подобия (3.2), находим связь между параметрами

$$\hat{\eta}^2 = \eta^2 \frac{\hat{F}}{F}. \quad (3.4)$$

С учетом (3.4) выражение (3.3) записывается в виде

$$V = \frac{\hat{a}\hat{\eta}\hat{V}}{\hat{\eta}a}. \quad (3.5)$$

Другими словами, зная реальные значения параметров, при моделировании можно задавать значения двух параметров, а значение третьего находится из условия подобия. Можно рассмотреть и обратную задачу: задавая значения всех трех модельных параметров, можно найти один из трех реальных параметров, зная значения двух из них.

Поскольку используемая программа для моделирования динамики агрегатов использует промежуток времени, то необходимо найти связь между такими параметрами, как характерное время в реальном процессе осаждения $t = a/V$ и при моделировании $\hat{t} = \hat{a}/\hat{V}$. Используя соотношения (3.3), получим связь между этими параметрами:

$$t = \frac{a^2\hat{\eta}\hat{t}}{\hat{a}^2\eta}. \quad (3.6)$$

Зная из моделирования время движения модельного агрегата, можно найти время перемещения в реальном процессе.

Еще один из параметров задачи — сила реакция стержней S — определяется масштабированием. При моделировании получаем численное значение сил реакций \hat{S} и по ним определяем реальные значения S из соотношения

$$S = \hat{S} \frac{F}{\hat{F}}. \quad (3.7)$$

Для угловой скорости Ω частиц из условия подобия модельного и реального течения получим соотношение

$$\Omega = \frac{\hat{\Omega} \hat{a}^2 \eta}{a^2 \hat{\eta}}.$$

При изучении динамики агрегата частиц в потоке в отсутствие внешних сил соотношение между модельной и реальной скоростью находится из подобия течений и имеет вид

$$u = \frac{\hat{u} \hat{a} \eta}{a \hat{\eta}}.$$

Здесь u — скорость частицы в агрегате. Реакция стержней в этом случае находится также из соотношения (3.7), в котором под силой F понимается гидродинамическая сила, действующая на частицу в агрегате с учетом ее взаимодействия с другими частицами в агрегате. Модельное значение \hat{F} находится из решения системы (2.1)–(2.4) так же, как и значение \hat{S} .

4. Результаты моделирования

Рассмотрим три варианта структуры из пяти сферических частиц, соединенных между собой стержнями (рис. 1). По аналогии с реальными плавающими организмами три частицы агрегата A , B и C моделируют тело, а частицы D и E — двигательный аппарат такого организма. Система частиц помещена в вязкую жидкость. К частицам D и E приложены равные по величине и противоположные по направлению моменты T_D и T_E , под действием которых частицы D и E вращаются в противоположные стороны и создают вихревое течение в окружающей жидкости. Расчеты показывают, что в результате созданного вихревого течения вся система перемещается в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой лежат моменты внутренних сил, приложенных к частицам. Направление вектора скорости перемещения агрегата определяется так же, как и направление момента пары сил, если вместо пары сил взять пару моментов сил M_D и M_E . Изменение направления приложенных моментов изменяет и направление перемещения всей системы. Такая динамика агрегата есть результат гидродинамического взаимодействия всех частиц системы [13, 14].

При моделировании динамики самодвижущихся агрегатов задавались следующие значения радиусов частиц: для всех частиц первого агрегата $\hat{a} = 1$; у второго агрегата частицы A , D , E имеют радиус $\hat{a} = 1$, а частицы B и C — радиус $\hat{a} = 0.5$; у третьего агрегата частицы D , E имеют радиус $\hat{a} = 1$, а частицы A , B и C — радиус $\hat{a} = 0.5$. Модельная вязкость жидкости $\hat{\eta} = 1$, величина модельных моментов \hat{T} , действующих на частицы D и E , равна 10. Направление векторов моментов перпендикулярно плоскости рисунка, причем момент частицы E направлен по оси X_3 , а момент частицы D — против направления оси X_3 .

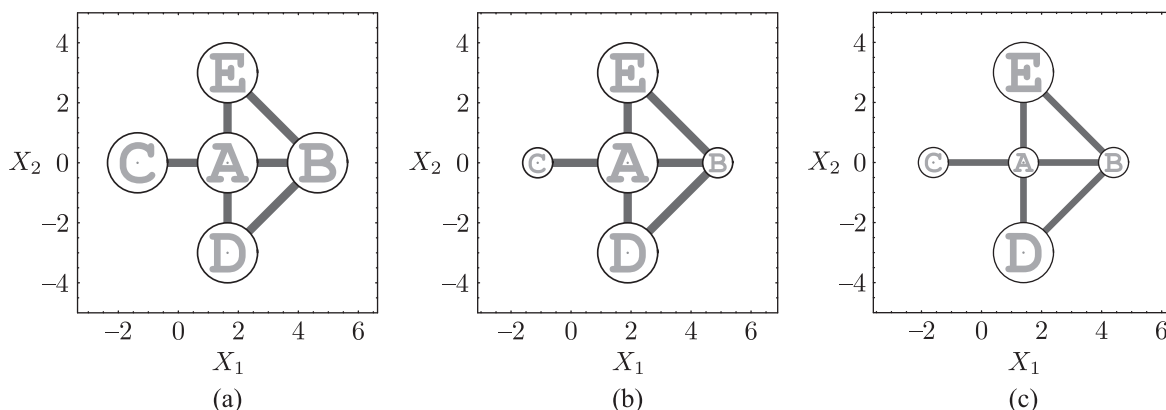


Рис. 1. Модели самодвижущихся агрегатов с одной парой вращающихся частиц.

Численные результаты моделирования движения агрегатов представлены в таблице 1. Как видно из таблицы, быстрее перемещается второй агрегат, а третий агрегат — самый медленный из трех. Объяснение такой динамики агрегатов надо искать в гидродинамике течения, образуемого вокруг каждого агрегата вращением частиц D и E , и в создаваемой этим течением гидродинамической силе, двигающей агрегат. В таблице 2 приведены значения сил, действующих на частицы в агрегате.

Из таблицы 2 видно, что у второго агрегата наибольшее значение сил, действующих со стороны жидкости на частицы D и E , то есть на частицы, являющиеся двигателем агрегата. По всей видимости, именно за счет этих сил второй агрегат и перемещается быстрее. Фактически это означает, что форма этого модельного агрегата более выгодна для такого рода перемещений по сравнению с двумя другими. Величина угловой скорости вращения частиц D и E представлена в таблице 3.

Таблица 1. Результаты моделирования динамики самодвижущихся агрегатов частиц с одной парой вращающихся частиц

Параметры моделирования	Первый агрегат	Второй агрегат	Третий агрегат
Время движения \hat{t}	62	62	62
Перемещение агрегата X_1	1.6398	1.88852	1.39697
Скорость агрегата \hat{V}_1	0.0265	0.03046	0.0225318

Таблица 2. Силы, действующие на частицы агрегата со стороны вязкой жидкости

Сила, действующая на частицу со стороны жидкости	Первый агрегат	Второй агрегат	Третий агрегат
Частица A	-1.80215	-1.5924	-0.707026
Частица B	0.445193	0.199355	0.00632165
Частица C	0.445193	0.199355	0.00632165
Частица D	0.45588	0.596846	0.347191
Частица E	0.45588	0.596846	0.347191

Таблица 3. Угловые скорости вращающихся частиц в агрегате

Угловая скорость Ω_3	Первый агрегат	Второй агрегат	Третий агрегат
Частица E	0.392312	0.392962	0.395963
Частица D	-0.392312	-0.392962	-0.395963

Реакции стержней, соединяющих частицы в каждом агрегате, находятся из решения системы уравнений для динамики частиц и приведены в таблице 4. Наибольшие усилия возникают в стержнях, соединяющих вращающиеся частицы с другими частицами агрегата. При этом у второго агрегата, перемещающегося быстрее двух других, они имеют наибольшее значение.

Таблица 4. Усилия в стержнях, соединяющих частицы в агрегате

Сила реакции стержней	Первый агрегат	Второй агрегат	Третий агрегат
Стержень AB	-1.35695	-1.39305	-0.700704
Стержень AC	0.445193	0.199355	0.00632165
Стержень AE	-0.45588	-0.596846	-0.347191
Стержень AD	-0.45588	-0.596846	-0.347191
Стержень BD	0.644712	0.844068	0.491003
Стержень BE	0.644712	0.844068	0.491003

Предложенный выше подход позволяет конструировать различные агрегаты частиц, самодвижущиеся в вязкой жидкости. В качестве примера на рисунке 2 приведены некоторые модели такого рода агрегатов, динамика которых также была изучена.

В отличие от агрегатов, представленных на рисунке 1, новые агрегаты имеют две пары вращающихся частиц. У первого агрегата на рисунке 2 это частицы D, E, F, G ; у второго и третьего агрегата это частицы D, E, H, G . У первого и третьего агрегатов пары вращающихся частиц находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях. У второго агрегата — в одной плоскости. При моделировании динамики агрегатов задавались следующие значения параметров: для всех частиц радиус $\hat{a} = 1$, модельная вязкость жидкости $\hat{\eta} = 1$, а величина модельных моментов, действующих на вращающиеся частицы, $\hat{T} = 10$. Направление векторов моментов у каждой пары вращающихся частиц аналогично направлению моментов, приложенных к частицам агрегатов, представленных на рисунке 1.

Таблица 5. Результаты моделирования динамики самодвижущихся агрегатов частиц с двумя парами вращающихся частиц

Параметры моделирования	Первый агрегат	Второй агрегат	Третий агрегат
Время движения \hat{t}	62	62	62
Перемещение агрегата X_1	2.93001	2.06566	2.143483
Скорость агрегата \hat{V}_1	0.0472582	0.0333171	0.0345723



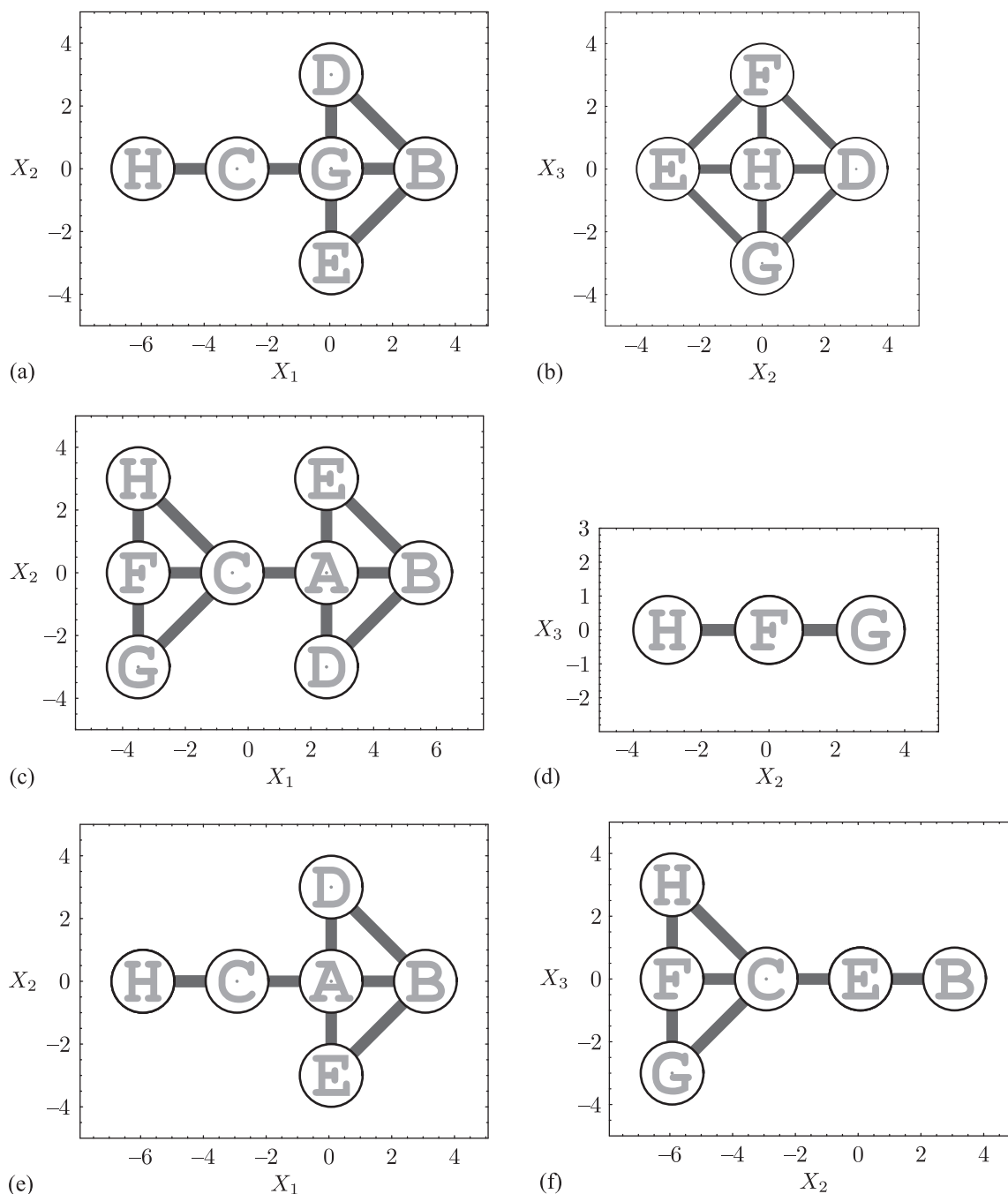


Рис. 2. Модели самодвижущихся агрегатов с двумя парами вращающихся частиц.

Полученные результаты позволяют провести некоторый анализ влияния геометрии конструкции на скорость перемещения агрегата. Агрегаты отличаются только расположением второй пары вращающихся частиц, однако это приводит к тому, что первый агрегат перемещается быстрее, чем остальные (табл. 5). Объяснить такую динамику агрегатов можно только гидродинамическим взаимодействием частиц, образующих агрегат, в течении, формируемом в жидкости вращением частиц.

5. Механизм вращения частиц

Поскольку частицы, приводящие агрегат в движение, вращаются в противоположные стороны, возникает вопрос о реализации такого вращения на практике. Как было сказано выше, деформацию агрегата или относительное движение его частиц может вызывать внешнее поле. Примером активного коллоида, имеющего сильное взаимодействие с внешним магнитным полем, служит магнитная жидкость. Дисперсная частица такого коллоида обладает собственным магнитным моментом, величина которого зависит от диаметра частицы и используемого магнитного материала. Главной особенностью таких жидкостей является их способность взаимодействовать с внешним магнитным полем в сочетании с высокой текучестью. Свойства таких коллоидов интенсивно изучаются уже много лет. В частности, в таких жидкостях теоретически и экспериментально доказана возможность вращения магнитных частиц во внешнем магнитном поле. Поэтому рассмотрим возможность получения необходимого вращения двух частиц D и E в агрегате (рис. 1) в предположении, что они обладают замороженными в них магнитными моментами. Воспользуемся известными результатами по динамике магнитных частиц во внешнем магнитном поле [15].

Взаимодействие частиц, обладающих постоянным магнитным моментом, называется диполь-дипольным. Известно выражение для энергии взаимодействия двух частиц, обладающих дипольным моментом [16]. Влияние внешнего магнитного поля сводится к изменению ориентации вектора магнитного момента каждой частицы и, следовательно, к изменению сил и моментов, действующих между частицами. Будем считать, что частицы обладают замороженными магнитными моментами \mathbf{m}_D и \mathbf{m}_E .

Энергия взаимодействия частиц, обладающих такими моментами, известна [16], и из нее определяются силы и моменты, действующие на частицы. Силу, действующую на частицу D , описывает уравнение

$$\mathbf{F}^D = \frac{3}{r^5}[(\mathbf{m}_D \mathbf{r})\mathbf{m}_E + (\mathbf{m}_E \mathbf{r})\mathbf{m}_D + (\mathbf{m}_D \mathbf{m}_E)\mathbf{r}] - \frac{15}{r^7}(\mathbf{m}_D \mathbf{r})(\mathbf{m}_E \mathbf{r})\mathbf{r}. \quad (5.1)$$

Здесь вектор \mathbf{r} разделяет центры двух сфер. Так как на частицы D и E в агрегате наложены связи, то вектор \mathbf{r} считаем постоянным по величине и направлению.

Выражение для силы, действующей на частицу E , имеет вид

$$\mathbf{F}^E = -\mathbf{F}^D. \quad (5.2)$$

На частицы действуют моменты сил, которые можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1^D &= \frac{3}{r^5}(\mathbf{m}_E \mathbf{r})(\mathbf{m}_D \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^5}(\mathbf{m}_E \times \mathbf{m}_D), \\ \mathbf{T}_1^E &= \frac{3}{r^5}(\mathbf{m}_D \mathbf{r})(\mathbf{m}_E \times \mathbf{r}) + \frac{1}{r^5}(\mathbf{m}_D \times \mathbf{m}_E). \end{aligned}$$

К системе приложено внешнее однородное переменное магнитное поле \mathbf{H} : $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 \sin(\omega t)$. Считается, что рассматриваемые две частицы не искажают его. Со стороны внешнего магнитного поля на каждую частицу действует магнитный момент:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2^D &= (\mathbf{m}_D \times \mathbf{H}), \\ \mathbf{T}_2^E &= (\mathbf{m}_E \times \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем суммарные магнитные моменты

$$\mathbf{T}^D = \mathbf{T}_1^D + \mathbf{T}_2^D, \quad \mathbf{T}^E = \mathbf{T}_1^E + \mathbf{T}_2^E.$$

Под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты частиц меняют свою ориентацию, что приводит к вращению частиц в результате диполь-дипольного взаимодействия. Это, в свою очередь, приводит к движению вязкой жидкости и к появлению сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицы. Выражения для соответствующих гидродинамических сил и моментов получены в [15].

Динамика частиц описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^D + \mathbf{F}_{hid}^D + \mathbf{N}^D &= 0, & \mathbf{F}^E + \mathbf{F}_{hid}^E + \mathbf{N}^E &= 0, \\ J_D \frac{d\boldsymbol{\Omega}^D}{dt} &= \mathbf{T}_1^D + \mathbf{T}_2^D + \mathbf{T}_{hid}^D, & J_E \frac{d\boldsymbol{\Omega}^E}{dt} &= \mathbf{T}_1^E + \mathbf{T}_2^E + \mathbf{T}_{hid}^E. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $\mathbf{F}_{hid}^D, \mathbf{F}_{hid}^E$ — силы, $\mathbf{T}_{hid}^D, \mathbf{T}_{hid}^E$ — моменты сил, действующие на частицы со стороны жидкости, $\mathbf{N}^D, \mathbf{N}^E$ — силы реакции связей, наложенных на частицы, J_D, J_E — моменты инерции частиц, $\boldsymbol{\Omega}^D, \boldsymbol{\Omega}^E$ — угловые скорости сфер, которые определяются по формулам

$$\Omega_i^D = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Gamma_{jk}^D, \quad \Omega_i^E = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Gamma_{jk}^E.$$

Здесь ε_{ijk} — тензор Леви-Чивиты. В отсутствие внешнего магнитного поля в результате диполь-дипольного взаимодействия магнитные моменты частиц приобретают направление, соответствующее устойчивому положению равновесия и минимальной энергии взаимодействия. В этом случае векторы магнитных моментов перпендикулярны вектору \mathbf{r} и направлены противоположно друг другу, то есть $\mathbf{m}_D = -\mathbf{m}_E$.

Для описания динамики введем декартову систему координат XYZ так, что векторы магнитных моментов частиц имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_D &= m(\cos \varphi_1, \sin \varphi_1, 0), \\ \mathbf{m}_E &= m(\cos \varphi_2, \sin \varphi_2, 0). \end{aligned}$$

Здесь φ_1, φ_2 — углы, образованные проекциями векторов \mathbf{m}_D и \mathbf{m}_E на плоскость XOY и положительным направлением оси OX , m — величина магнитного момента частиц. Угловые скорости частиц $\boldsymbol{\Omega}^D = (0, 0, \omega_3^D)$, $\boldsymbol{\Omega}^E = (0, 0, \omega_3^E)$ связаны с введенными углами с помощью следующих соотношений:

$$\omega_3^D = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_3^E = \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Таким образом, система уравнений движения частиц должна быть записана в указанных переменных, что упрощает ее решение. В силу громоздкости этих выражений они здесь не приводятся.

Для определения динамики частиц необходимо решить систему дифференциальных уравнений (5.3).

Для моментов $\mathbf{T}^D = (0, 0, T^D)$, $\mathbf{T}^E = (0, 0, T^E)$, $\mathbf{T}_{hid}^D = (0, 0, T_{hid}^D)$, $\mathbf{T}_{hid}^E = (0, 0, T_{hid}^E)$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_D \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} &= T^D + T_{hid}^D, \\ J_E \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} &= T^E + T_{hid}^E. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Найти аналитическое решение полученной системы (5.4) не представляется возможным, поэтому она решалась численно при следующих начальных значениях: $r = 3$, $\varphi_1(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2(0) = -\frac{\pi}{2}$.

Полученные результаты представлены для двух случаев внешнего магнитного поля при следующих значениях параметров системе СГС (сантиметр, грамм, секунда): $\rho = 0.889$, $\eta = 0.01$, $a = 0.001$, $\omega = 10\,000$, $H = 100$.

Результаты решения приведены на рисунке 3. Аналогичные результаты получаются и при изменении магнитного поля по закону $\cos(\omega t)$. Как видно из приведенных графиков, частицы поворачиваются в противоположные стороны с одной угловой скоростью. Прежде чем приобрести новое положение равновесия, соответствующее направлению магнитных моментов частиц вдоль приложенного магнитного поля, частицы по инерции отклоняются на некоторый угол от него. Если в этот момент отключить магнитное поле, то в результате диполь-дипольного взаимодействия и под влиянием гидродинамических сил частицы должны вернуться в первоначальное положение, после чего вновь включается магнитное поле и повторяется предыдущий цикл.

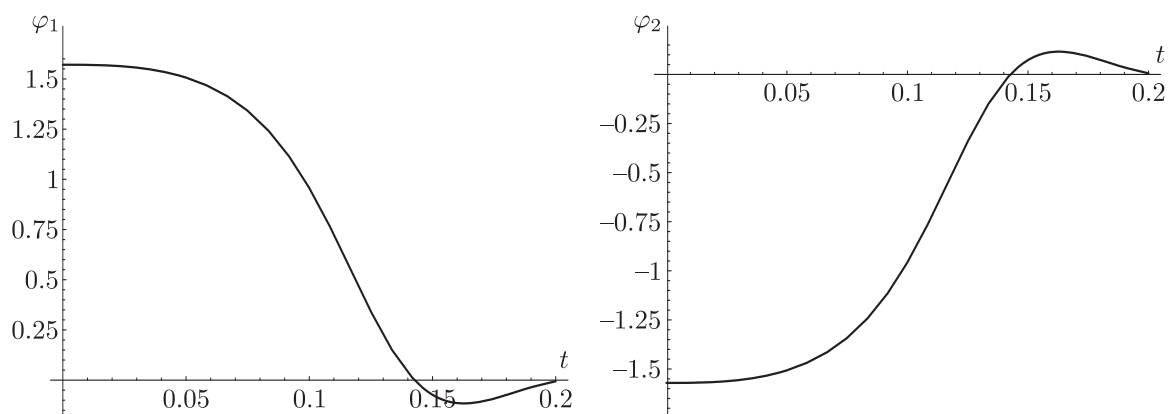


Рис. 3. Динамика вращения частиц в магнитном поле.

6. Заключение

Предложена модель плавающих агрегатов, основанная на таких относительных перемещениях его составных частей за счет моментов внутренних сил, которые формируют вихревую структуру течения в окружающей жидкости. Такое течение создает гидродинамическую силу, действующую на агрегат и приводящую к его перемещению. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, из которых состоит агрегат. Для компьютерного моделирования перемещений такого рода агрегатов в вязкой жидкости использован специальный программный комплекс, разработанный авторами. Проведен численный расчет динамики трех модельных структур, образованных из пяти частиц разного размера, определенным образом соединенных между собой. Результаты численного моделирования показывают, что одна из моделей плавающего агрегата частиц перемещается с большей скоростью, чем две другие. Анализ сил, действующих на частицы агрегата со стороны окружающей вязкой жидкости, показал, что это достигается за счет большей гидродинамической силы, действующей на подвижные частицы агрегата, формирующие вихревое

течение в жидкости. Найдены усилия реакций стержневых связей, наложенных на частицы агрегата.

На основе предложенного подхода можно создавать модели самодвижущихся агрегатов разной геометрической формы с двумя и более парами вращающихся частиц. Приведены примеры конструирования такого рода агрегатов, динамика которых в вязкой жидкости также была изучена с помощью компьютерного моделирования.

Предложен механизм приведения в вращение частиц, моделирующих двигательный аппарат агрегата, внешним магнитным полем.

Список литературы

- [1] Арансон И. С. Активные коллоиды // УФН, 2013, т. 183, № 1, с. 87–102.
- [2] Lighthill M. J. *Mathematical biofluidynamics*. Philadelphia: SIAM, 1975. 281 pp.
- [3] Bandyopadhyay P. R., Beal D. N., Menozzi A. Biorobotic insights into how animals swim // *J. Exp. Biol.*, 2008, vol. 211, part 2, pp. 206–214.
- [4] Lopez D., Lauga E. Dynamics of swimming bacteria at complex interfaces // *Phys. Fluids*, 2014, vol. 26, no. 7, 071902, 23 pp.
- [5] Taylor G. Analysis of the swimming of microscopic organisms // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci.*, 1951, vol. 209, no. 1099, pp. 447–461.
- [6] Бэтчелор Дж. К. Успехи микрогидродинамики // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV междунар. конгресса IUTAM / В. Т. Койтер (ред.). Москва: Мир, 1979. С. 136–187.
- [7] Lentink D., Muijres F. T., Donker-Duyvis F. J., van Leeuwen J. L. Vortex-wake interactions of a flapping foil that models animal swimming and flight // *J. Exp. Biol.*, 2008, vol. 211, part 2, pp. 267–273.
- [8] Iima M. A two-dimensional aerodynamic model of freely flying insects // *J. Theor. Biol.*, 2007, vol. 247, no. 4, pp. 657–671.
- [9] Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Моделирование динамики плавающих организмов // *Вестн. ЮГУ*, 2015, № 2(37), с. 27–32.
- [10] Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Динамика цепочечных агрегатов частиц в потоке вязкой жидкости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016, т. 56, № 5, с. 133–148.
- [11] Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 1998, № 2, с. 112–119.
- [12] Мартынов С. И. Взаимодействие частиц в течении с параболическим профилем скорости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2000, № 1, с. 84–91.
- [13] Баранов В. Е., Мартынов С. И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2004, № 1, с. 152–164.
- [14] Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2015, т. 55, № 2, с. 109–118.
- [15] Коновалова Н. И., Мартынов С. И. Моделирование динамики частиц в быстропеременном потоке вязкой жидкости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012, т. 52, № 12, с. 2247–2259.
- [16] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 8: Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., испр.* Москва: Физматлит, 1982. 621 с.
- [17] Коновалова Н. И., Мартынов С. И. Обтекание двух сфер нестационарным потоком вязкой жидкости // *Нелинейная динамика*, 2008, т. 4, № 4, с. 67–81.

On one model of the dynamics of self-propelled aggregates of particles in a viscous fluid

Sergey I. Martynov¹, Leonilla Yu. Tkach²

^{1,2}Yugra State University

ul. Chekhova 16, Khanty-Mansiysk, 628012, Russia

¹martynovsi@mail.ru, ²leonilla7777@mail.ru

The model of an aggregate of spherical particles connected by rods and moving in a viscous fluid is considered. The motion of the aggregate is due to the action of hydrodynamic forces from the vortex flow of the viscous fluid. The fluid flow is generated by rotation in opposite directions of two particles of the aggregate. The rotation of the particles is caused by the action of moments of the internal forces whose sum is equal to zero. Other particles of the aggregate are subject to constraints preventing their rotation. To calculate the dynamics of the aggregate, a system of equations of the viscous fluid is jointly solved in the approximation of small Reynolds numbers with appropriate boundary conditions and equations of motion of the particles under the action of applied external and internal forces and torques. The hydrodynamic interaction of the particles is taken into account. It is assumed that the rods do not interact with the fluid and do not allow the particles to change the distance between them. Computer simulation of the dynamics of three different aggregates of 5 particles is tested by special software. The forces in the rods and the speed of movement for each aggregate are calculated. It was found that one aggregate moves faster than others. This means that the shape of the aggregate is more adapted for such movement as compared to the other two. This approach can be used as a basis to create a model of self-propelled aggregates of different geometric shape with two or more pairs of rotating particles. Examples of constructions of aggregates and their dynamics in viscous fluid are also studied by computer simulation.

MSC 2010: 76D07, 76D09, 76D17

Keywords: numerical simulation, viscous fluid, particle aggregates, hydrodynamic interaction, internal interaction forces

Received April 27, 2016, accepted September 10, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 605–618 (Russian)

