



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 517.938.5+531.38  
MSC 2010: 70E05, 70E17, 37J35, 34A05

**Дискриминантное множество  
и бифуркационная диаграмма интегрируемого  
случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке**

**П. Е. Рябов, Е. О. Бирючева**

В работе приводится в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Предъявлены характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1 отображения момента. С помощью критических точек ранга 0 и 1 отображения момента предлагается алгоритм выделения бифуркационной диаграммы отображения момента из вещественной части дискриминантного множества. Алгоритм работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, спектральная кривая, бифуркационная диаграмма

---

Получено 29 августа 2016 года  
После доработки 20 сентября 2016 года

---

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00119, 16-01-00170 и совместного гранта РФФИ и АВО № 15-41-02049.

---

Рябов Павел Евгеньевич  
[peryabov@fa.ru](mailto:peryabov@fa.ru)  
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации  
125993, Россия, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49  
Институт машиноведения РАН им. А. А. Благодатова  
119334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4  
Московский физико-технический институт (государственный университет)  
141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

Бирючева Екатерина Олеговна  
[biryucheva.katerina@gmail.com](mailto:biryucheva.katerina@gmail.com)  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1

## 1. Введение

Как известно, общий случай интегрируемости, изученный М. Адлером и П. ван Мёрбеке [1], является в динамике твердого тела одним из наиболее сложных. Его появлению в отечественной литературе мы обязаны прежде всего работам А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [2, 3], посвященным интегрированию уравнений Эйлера на конечномерных группах Ли. Другим случаем интегрируемости на  $so(4)$ , открытым позже и не менее сложным, является случай Борисова–Мамаева–Соколова [4], для которого найдены инвариантные соотношения третьей степени. В результате на  $so(4)$  возникает новое семейство интегрируемых квадратичных гамильтонианов с дополнительным интегралом четвертой степени. Существование дополнительного интеграла четвертой степени, найденного в [1], связано с особой симметрией  $so(4)$ , допускающей вещественное представление в виде прямой суммы  $so(3) \oplus so(3)$ . Уравнения Эйлера на алгебре Ли  $so(4) = so(3) \oplus so(3)$  также описывают вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение [5–8]. Эти уравнения исследовал В. А. Стеклов [9] в качестве модели вращения Земли. Современный обзор интегрируемых семейств метрик определенного вида на  $so(4)$  и их механическая интерпретация содержится в книгах [10–15].

Фазовая топология интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке до сих пор не исследовалась. На первом этапе топологического анализа необходимо найти бифуркационную диаграмму отображения момента. Вопросам анализа особенностей спектральной кривой и ее связи с бифуркационной диаграммой отображения момента посвящены работы [16–23].

В настоящей работе приводится в явном виде спектральная кривая и дискриминантное множество интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Предъявлены характеристические показатели для определения типа критических точек ранга 0 и 1 отображения момента. Показано, как с помощью невырожденных особенностей ранга 0 и 1 отображения момента можно выделить бифуркационную диаграмму отображения момента из вещественной части дискриминантного множества спектральной кривой, ассоциированной с  $L - A$  парой интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке. Алгоритм выделения бифуркационной диаграммы из дискриминантного множества работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

## 2. Гамильтониан и фазовое пространство.

### Дополнительный интеграл

Уравнения движения имеют вид уравнений Пуанкаре–Жуковского–Ламба

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{3} \mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}, \quad (2.1)$$

где трехмерный вектор  $\mathbf{M}$  имеет смысл кинетического момента системы «тело + жидкость», а компоненты трехмерного вектора  $\mathbf{S}$  пропорциональны компонентам вектора *завихренности жидкости*.

На коалгебре  $\mathfrak{g} = so(4)^*$  ( $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ ) с координатными функциями  $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \mathbf{S})$  определены скобки Ли–Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, S_j\} = 0, \quad \{S_i, S_j\} = -\frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} S_k. \quad (2.2)$$



Скобка (2.2) имеет две функции Казимира

$$F_1 = (M, M), \quad F_2 = (S, S). \quad (2.3)$$

Как известно, для заданной функции Гамильтона  $H$  от  $M, S$  уравнения движения с помощью скобки Ли–Пуассона можно записать в гамильтоновой форме

$$\dot{x} = \{x, H\}. \quad (2.4)$$

Здесь  $x$  — любая из переменных  $M_i, S_j$ .

На совместном уровне функций Казимира

$$\mathcal{P}_{a,b}^4 = \{F_1 = a^2, F_2 = b^2\} \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \quad (2.5)$$

индуцированная скобка Пуассона невырождена и ограничение системы (2.4) дает гамильтонову систему с двумя степенями свободы.

Рассмотрим следующий гамильтониан

$$H = (M, AM) + 2(M, BS) + (S, CS), \quad (2.6)$$

где диагональные  $(3 \times 3)$ -матрицы  $A, B, C$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}[\alpha_2^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_3^2, \alpha_1^2 \alpha_2^2], \\ B &= \text{diag}[(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_2 \alpha_3, (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_1 \alpha_3, (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_1 \alpha_2], \\ C &= \text{diag}[\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 \alpha_3 - 4\alpha_1^2), \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 \alpha_3 - 4\alpha_2^2), \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 \alpha_2 - 4\alpha_3^2)]. \end{aligned}$$

Чтобы утверждать, что система является вполне интегрируемой по Лиувиллю, необходимо указать еще один независимый первый интеграл, находящийся в инволюции с гамильтонианом (2.6). Мы приводим дополнительный интеграл в следующей симметричной форме:

$$\begin{aligned} K &= 3 \sum_{i,j} \alpha_i (\alpha_j - \alpha_i) M_j S_j S_i^2 + \sum_i (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k) M_i S_i^3 - \\ &- (M, M) \sum_i [\alpha_j \alpha_k M_i S_i + 2(\alpha_j^2 + \alpha_k^2) S_i^2]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что выражение (2.7) отличается от форм дополнительного интеграла, использованных в оригинальных работах, посвященных доказательству алгебраической интегрируемости (см. [1, 11]). Дополнительный интеграл (2.7) наиболее приближен по виду к интегралам, указанным в работе [25] и в книге [14].

**Теорема 1.**  $\{H, K\} = 0$ , если  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ .

### 3. Представление Лакса и спектральная кривая

В работе [24] А. Рейман и М. Семенов-Тянь-Шанский указали для интегрируемого случая М. Адлера и П. ван Мёрбеке представление Лакса со спектральным параметром  $\dot{L}(z) = [L(z), A(z)]$ . Рассмотрим, следуя результатам работы [24], представление Лакса со спектральным параметром

$$\dot{L}(z) = [L(z), A(z)],$$

где матрицы  $L$  и  $A$  имеют вид

$$L(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(M_3 + S_3) & \frac{1}{2}(M_2 + S_2) & -\frac{1}{2}(M_1 - S_1) & 0 & 0 & \alpha_1 z \\ \frac{1}{2}(M_3 + S_3) & 0 & -\frac{1}{2}(M_1 + S_1) & -\frac{1}{2}(M_2 - S_2) & 0 & \alpha_2 z & 0 \\ -\frac{1}{2}(M_2 + S_2) & \frac{1}{2}(M_1 + S_1) & 0 & -\frac{1}{2}(M_3 - S_3) & \alpha_3 z & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(M_1 - S_1) & \frac{1}{2}(M_2 - S_2) & \frac{1}{2}(M_3 - S_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 z & 0 & 0 & S_1 & -S_2 \\ 0 & \alpha_2 z & 0 & 0 & 0 & -S_1 & S_3 \\ \alpha_1 z & 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 & -S_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(u_3 + v_3) & \frac{1}{2}(u_2 + v_2) & -\frac{1}{2}(u_1 - v_1) & 0 & 0 & b_1 z \\ \frac{1}{2}(u_3 + v_3) & 0 & -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) & -\frac{1}{2}(u_2 - v_2) & 0 & b_2 z & 0 \\ -\frac{1}{2}(u_2 + v_2) & \frac{1}{2}(u_1 + v_1) & 0 & -\frac{1}{2}(u_3 - v_3) & b_3 z & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(u_1 - v_1) & \frac{1}{2}(u_2 - v_2) & \frac{1}{2}(u_3 - v_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 z & 0 & 0 & v_1 & -v_2 \\ 0 & b_2 z & 0 & 0 & 0 & -v_1 & 0 & v_3 \\ b_1 z & 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & -v_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

В приводимых выше формулах необходимо произвести замену

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2}{3} \alpha_2 \alpha_3 (S_1 \alpha_2 \alpha_3 - M_1 \alpha_2 \alpha_3 - 4S_1 \alpha_1^2 - 2M_1 \alpha_1^2), \\ v_2 &= \frac{2}{3} \alpha_3 \alpha_1 (S_2 \alpha_3 \alpha_1 - M_2 \alpha_3 \alpha_1 - 4S_2 \alpha_2^2 - 2M_2 \alpha_2^2), \\ v_3 &= \frac{2}{3} \alpha_1 \alpha_2 (S_3 \alpha_1 \alpha_2 - M_3 \alpha_1 \alpha_2 - 4S_3 \alpha_3^2 - 2M_3 \alpha_3^2), \\ u_1 &= 2\alpha_2 \alpha_3 (M_1 \alpha_2 \alpha_3 - S_1 \alpha_2 \alpha_3 - 2S_1 \alpha_1^2), \\ u_2 &= 2\alpha_3 \alpha_1 (M_2 \alpha_3 \alpha_1 - S_2 \alpha_3 \alpha_1 - 2S_2 \alpha_2^2), \\ u_3 &= 2\alpha_1 \alpha_2 (M_3 \alpha_1 \alpha_2 - S_3 \alpha_1 \alpha_2 - 2S_3 \alpha_3^2), \\ b_1 &= \frac{4}{3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (2\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1^2), \quad b_2 = \frac{4}{3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2), \quad b_3 = \frac{4}{3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (2\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3^2). \end{aligned}$$

Спектральная кривая  $\mathcal{E}(z, \zeta)$ , ассоциированная с матрицей  $L(z)$ , определяется как алгебраическая кривая

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 : \det(L(z) - \zeta E) = 0\}, \quad (3.1)$$

где через  $E$  обозначена единичная матрица соответствующего размера.

Спектральная кривая (3.1) для  $L - A$  пары Реймана и Семенова-Тян-Шанского имеет явный вид

$$\mathcal{E}(z, \zeta): \quad \zeta \cdot \left( \sum_{i=0}^3 d_{2i} \zeta^{2i} \right) = 0, \quad (3.2)$$



где

$$\begin{aligned} d_6 &= 16, \quad d_4 = -16(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)z^2 + 8(a^2 + 3b^2), \\ d_2 &= [a^2 + 3b^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)z^2]^2, \\ d_0 &= -16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2z^6 + 4hz^4 - 4[b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + k]z^2 + b^2(a^2 - b^2)^2. \end{aligned}$$

Здесь  $a, b, h, k$  — постоянные казимиров  $F_1, F_2$  и первых интегралов  $H, K$ .

В таком виде спектральная кривая представлена здесь впервые и именно дополнительный интеграл в виде (2.7) был найден как соответствующий коэффициент в выражении для  $d_0$  спектральной кривой (3.2).

#### 4. Дискриминантное множество спектральной кривой

Кривую (3.2) можно рассматривать как нулевой уровень отображения  $\mathcal{E}: \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Обозначим через  $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{R}^4(a, b, k, h)$  множество таких значений интегральных постоянных, для которых 0 является критическим значением отображения  $\mathcal{E}$ . Множество  $\tilde{\Sigma}$  в конечных точках  $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$  определяется системой уравнений

$$\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\mathcal{E}(z, \zeta) = 0. \tag{4.1}$$

В работах [17, 20] множество  $\tilde{\Sigma}$  называется дискриминантным множеством спектральной кривой  $\mathcal{E}(z, \zeta)$ .

**Теорема 2.** *Дискриминантное множество  $\tilde{\Sigma}$  является объединением поверхностей кратных корней многочленов  $P(t)$  и  $Q(s)$ , где*

$$\begin{aligned} P(t) &= 16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t^3 - 4ht^2 + 4[b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + k]t - b^2(a^2 - b^2)^2, \\ Q(s) &= 16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2s^3 + 12[9h - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(a^2 + 3b^2)]s^2 + \\ &\quad + 12[a^2(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)(a^2 - 21b^2) - 9k]s - a^2(a^2 - 9b^2)^2. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Рассмотрим нетривиальную часть спектральной кривой  $\mathcal{E}(z, \zeta)$ :

$$\sum_{i=0}^3 d_{2i}\zeta^{2i} = 0.$$

Тогда система (4.1) сводится к двум возможностям: либо

$$\begin{aligned} \zeta &= 0, \\ P(t) &= P'(t) = 0, \end{aligned}$$

либо к системе из трех уравнений

$$\begin{cases} 16s^3 + [8a^2 + 24b^2 - (16\alpha_1^2 + 16\alpha_2^2 + 16\alpha_3^2)t]s^2 + [3b^2 + a^2 - (4\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2)t]^2s - \\ - 16\alpha_3^2t^3\alpha_2^2\alpha_1^2 + 4ht^2 - [4b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + 4k]t + b^2(a^2 - b^2)^2 = 0, \\ - 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)s^2 - 2[3b^2 + a^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t](\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)s - \\ - 12\alpha_3^2\alpha_2^2\alpha_1^2t^2 + 2ht - b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) - k = 0, \\ 48s^2 + 16[a^2 + 3b^2 - 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)t]s + [3b^2 + a^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t]^2 = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

В обоих случаях использованы переменные  $t = z^2, s = \zeta^2$ .



Подставим в систему (4.2) условие коммутирования первых интегралов  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$  (например, выражая  $\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$ ). В результате такой подстановки третье уравнение системы (4.2) раскладывается в произведение двух множителей:

$$[4s - 4t(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + a^2 + 3b^2][12s - 4t(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + a^2 + 3b^2] = 0.$$

Откуда

$$s = (\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t - \frac{1}{4}(a^2 + 3b^2), \quad (4.3)$$

либо

$$s = \frac{1}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t - \frac{1}{12}(a^2 + 3b^2). \quad (4.4)$$

В случае (4.3) первые два уравнения системы (4.2) приводят к поверхности кратных корней многочлена  $P(t)$ , то есть  $P(t) = P'(t) = 0$ , а в случае (4.4) — к системе  $Q(t) = Q'(t) = 0$ . ■

**Предложение 1.** *Поверхности кратных корней многочленов  $P(t)$  и  $Q(s)$  имеют следующее параметрическое представление:*

$$\begin{cases} \gamma_1 : \begin{cases} h(t) = 8\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t + \frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{4t^2}, \\ k(t) = 4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t^2 - b^2(b^2 + 3a^2)(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{2t}, \end{cases} \\ \gamma_2 : \begin{cases} h(s) = -\frac{8}{27}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2s - \frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{108s^2} + \\ \quad + \frac{4}{9}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)^2(a^2 + 3b^2), \\ k(s) = -\frac{4}{27}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2s^2 - \frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{54s} + \\ \quad + \frac{a^2(a^2 - 21b^2)}{9}(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2). \end{cases} \end{cases}$$

*Доказательство.* Для доказательства достаточно разрешить системы уравнений  $P(t) = P'(t) = 0$  и  $Q(s) = Q'(s) = 0$  относительно  $h$  и  $k$ . ■

На рисунке 1 изображена вещественная часть дискриминантного множества  $\tilde{\Sigma}$  и его увеличенный фрагмент для следующих значений параметров:  $a = 0.66$ ,  $b = 0.86$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.77$ .

Точкам пересечения  $P_i$  дискриминантных кривых отвечают следующие значения параметров  $t_i$ ,  $s_i$  и  $h_i$ ,  $k_i$ :

$$\begin{aligned} P_1 : \quad t_1 &= -\frac{b(a+b)}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s_1 = \frac{a(a-3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\ h_1 &= \alpha_1\alpha_2[\alpha_1\alpha_2(a^2 - 7b^2 - 10ab) - 4b(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(a+b)], \\ k_1 &= -ab[2ab(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \alpha_1\alpha_2a^2 - b^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)(2\alpha_2 + \alpha_1)], \end{aligned}$$

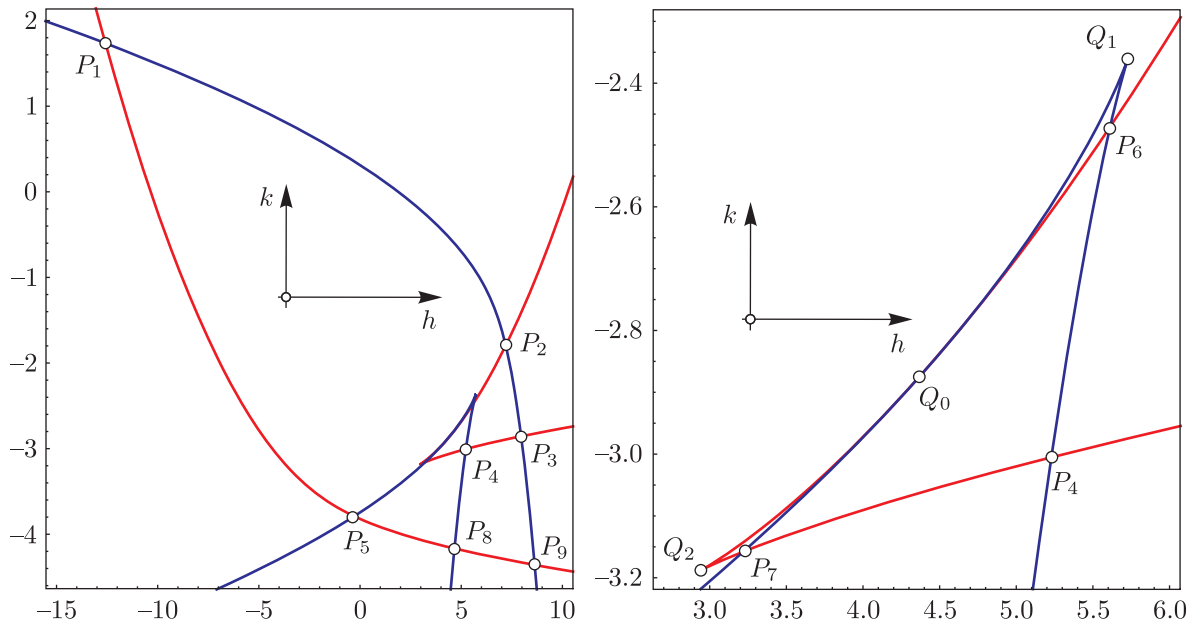


Рис. 1. Вещественная часть дискриминантного множества  $\tilde{\Sigma}$  и его увеличенный фрагмент для значений параметров  $a = 0.66$ ,  $b = 0.86$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.77$ .

$$\begin{aligned}
 P_2 : \quad t_2 &= \frac{b(a+b)}{2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_2 = \frac{a(a-3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)}, \\
 h_2 &= \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_2(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) + 2ab(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2) + 4b^2\alpha_1^2], \\
 k_2 &= ab[b^2(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2) + a(a-4b)\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) - 2ab\alpha_1^2], \\
 P_3 : \quad t_3 &= -\frac{b(a-b)}{2\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_3 = -\frac{a(a+3b)}{2(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\
 h_3 &= \alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_1(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) + 2ab(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1) + 4b^2\alpha_2^2], \\
 k_3 &= -ab[\alpha_1(a^2-b^2+4ab)(\alpha_1+\alpha_2) + 2b(a+b)\alpha_2^2], \\
 P_4 : \quad t_4 &= -\frac{b(a-b)}{2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_4 = \frac{a(a+3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)}, \\
 h_4 &= \alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_2(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) - 2ab(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2) + 4b^2\alpha_1^2], \\
 k_4 &= -ab[\alpha_2(a^2-b^2+4ab)(\alpha_1+\alpha_2) + 2b(a+b)\alpha_1^2], \\
 P_5 : \quad t_5 &= \frac{b(a-b)}{2\alpha_1\alpha_2}, \quad s_5 = \frac{a(a+3b)}{2(\alpha_2+2\alpha_1)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\
 h_5 &= \alpha_1\alpha_2[\alpha_1\alpha_2(a^2-7b^2+10ab) + 4b(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(a-b)], \\
 k_5 &= -ab[2ab(\alpha_1^2+\alpha_2^2) - \alpha_1\alpha_2a^2 + b^2(2\alpha_2+\alpha_1)(\alpha_2+2\alpha_1)], \\
 P_6 : \quad t_6 &= \frac{b(a+b)}{2\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad s_6 = -\frac{a(a-3b)}{2(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1)}, \\
 h_6 &= \alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_1(a^2+b^2)(\alpha_1+\alpha_2) - 2ab(\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_2+\alpha_1) + 4b^2\alpha_2^2], \\
 k_6 &= ab[\alpha_1(a^2-b^2-4ab)(\alpha_1+\alpha_2) - 2b(a-b)\alpha_2^2],
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
P_7: \quad t_7 &= -\frac{(a^2 - b^2)}{4\alpha_1\alpha_2}, \quad s_7 = -\frac{(a^2 - 9b^2)}{4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)}, \\
h_7 &= -2\alpha_1\alpha_2[(a^2 - b^2)\alpha_3^2 - 2b^2\alpha_1\alpha_2], \\
k_7 &= \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2(a^4 + 3b^4 - 12a^2b^2) + \frac{1}{4}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(a^4 - 3b^4 - 14a^2b^2), \\
P_8: \quad t_8 &= \frac{(a^2 - b^2)}{4\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad s_8 = -\frac{(a^2 - 9b^2)}{4(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\
h_8 &= 2(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_2[(a^2 - b^2)\alpha_1^2 + 2b^2\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)], \\
k_8 &= \frac{1}{4}\alpha_1^2(a^4 - 3b^4 - 14a^2b^2) - b^2\alpha_2(a^2 + 3b^2)(\alpha_1 + \alpha_2), \\
P_9: \quad t_9 &= \frac{(a^2 - b^2)}{4\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad s_9 = \frac{(a^2 - 9b^2)}{4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\
h_9 &= 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)[(a^2 - b^2)\alpha_2^2 + 2b^2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)], \\
k_9 &= \frac{1}{4}\alpha_2^2(a^4 - 3b^4 - 14a^2b^2) - \alpha_1b^2(a^2 + 3b^2)(\alpha_1 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

Для точек возврата  $Q_1$ ,  $Q_2$  и точки касания  $Q_0$  ограничимся лишь приведением значений параметров  $t$  и  $s$ :

$$\begin{aligned}
Q_1: \quad s_{\text{cusp}} &= \sqrt[3]{\frac{a^2(a^2 - 9b^2)^2}{16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(2\alpha_1 + \alpha_2)^2}}, \\
Q_2: \quad t_{\text{cusp}} &= \sqrt[3]{\frac{b^2(a^2 - b^2)^2}{16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2}}, \\
Q_0: \quad t_0 = s_0 &= \frac{(a^2 + 3b^2)}{4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)}.
\end{aligned}$$

## 5. Аналитическая классификация особенностей ранга 0 отображения момента

Здесь мы покажем, что узловым точкам пересечения вещественной части дискриминантных кривых  $P_1$ – $P_6$  отвечают невырожденные особенности ранга 0 отображения момента. Напомним некоторые определения. Фиксируем значения казимиров  $a$  и  $b$  и рассмотрим интегральное отображение

$$\mathcal{F}: \mathcal{P}_{a,b}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

полагая  $(h, k) = \mathcal{F}(x) = (H(x), K(x))$ . Отображение  $\mathcal{F}$  принято также называть *отображением момента*. Обозначим через  $\mathcal{C}$  совокупность всех критических точек отображения момента, то есть множество точек, в которых  $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$ . Множество  $\mathcal{C}$  можно стратифицировать рангом отображения момента, представив его в виде объединения  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1$ . Здесь  $\mathcal{C}^r = \{x: \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}$ . Множество критических значений  $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_{a,b}^4)$  называется *бифуркационной диаграммой*.





Множество  $C^0$  исчерпывается неподвижными точками системы (2.1):

$$\begin{aligned}
 P_1: & \begin{cases} c_{11} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = b), \\ c_{21} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = -a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -b), \end{cases} \\
 P_2: & \begin{cases} c_{12} = (M_1 = a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = b, S_2 = 0, S_3 = 0), \\ c_{22} = (M_1 = -a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = -b, S_2 = 0, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_3: & \begin{cases} c_{13} = (M_1 = 0, M_2 = a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = -b, S_3 = 0), \\ c_{23} = (M_1 = 0, M_2 = -a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = b, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_4: & \begin{cases} c_{14} = (M_1 = a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = -b, S_2 = 0, S_3 = 0), \\ c_{24} = (M_1 = -a, M_2 = 0, M_3 = 0, S_1 = b, S_2 = 0, S_3 = 0), \end{cases} \\
 P_5: & \begin{cases} c_{15} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = -b), \\ c_{25} = (M_1 = 0, M_2 = 0, M_3 = -a, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = b), \end{cases} \\
 P_6: & \begin{cases} c_{16} = (M_1 = 0, M_2 = a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = b, S_3 = 0), \\ c_{26} = (M_1 = 0, M_2 = -a, M_3 = 0, S_1 = 0, S_2 = -b, S_3 = 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Отметим, что остальным точкам  $P_7-P_9$  не соответствует никакая особенность ранга 0. Узловые точки  $P_1-P_6$  пересечения дискриминантных кривых образуют нульмерный остов бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ , поскольку им отвечают особенности ранга 0 отображения момента. Выясним тип точек  $c_{ij}$ .

Хорошо известно [26], что в неподвижной точке матрица линеаризации канонических уравнений с гамильтонианом  $H$  задает оператор  $A_H: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ , у которого характеристический многочлен содержит только четные степени. Соответствующие собственные числа полностью определяют характер устойчивости, если все они различны. В силу вырожденности скобки (2.2) или, что то же самое, в силу наличия интегралов (2.3), два собственных числа оператора  $A_H$  нулевые. Обозначим через  $\varrho_H(\mu)$  характеристический многочлен  $A_H$ , сокращенный на  $\mu^2$ . Очевидно, многочлен  $\varrho_H(\mu)$  есть биквадрат. Заменяя в уравнениях (2.4) гамильтониан  $H$  на первый интеграл  $K$ , той же процедурой получим оператор  $A_K$  и биквадратный трехчлен  $\varrho_K(\mu)$ .

Полагая  $\lambda = \mu^2$ , выпишем явно квадраты корней  $\varrho_H(\mu)$  в точках  $P_k, k = 1, \dots, 6$ :

$$\begin{aligned}
 P_1: & \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)[(a + b)\alpha_1 + 2b\alpha_2][2b\alpha_1 + (a + b)\alpha_2]\alpha_1^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1\alpha_2[(a + b)\alpha_1 + 2b\alpha_2][2b\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_2 + 2\alpha_1)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2, \end{cases} \\
 P_2: & \begin{cases} \lambda_1 = 4(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a + b)\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][-2b\alpha_1 + (a - b)\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)[(a + b)\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][-2b\alpha_1 + (a - b)\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2, \end{cases} \\
 P_3: & \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a + b)\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][(a + b)\alpha_1 + 2b\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_1^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)[(a + b)\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][(a + b)\alpha_1 + 2b\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$P_4: \begin{cases} \lambda_1 = 4(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2][2b\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2][2b\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_2 + 2\alpha_1)^2, \end{cases}$$

$$P_5: \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)[-2b\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2]\alpha_1^2\alpha_2^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1\alpha_2[-2b\alpha_1 + (a - b)\alpha_2][(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2](\alpha_2 + 2\alpha_1)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2, \end{cases}$$

$$P_6: \begin{cases} \lambda_1 = -4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2][(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 + \alpha_2)^2\alpha_1^2, \\ \lambda_2 = -\frac{4}{9}\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)[(a - b)\alpha_1 - 2b\alpha_2][(a - b)\alpha_1 + (a + b)\alpha_2](\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2. \end{cases}$$

Напомним, что в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, имеющей два функционально независимых первых интеграла  $H, K$ , тип неподвижной точки определяется для так называемых невырожденных точек. Критерий невырожденности состоит в том, что операторы  $A_H, A_K$  линейно независимы и найдется такая их линейная комбинация, у которой все собственные числа различны [27, 28]. Пусть  $A$  такая комбинация. Оператор  $A$  называется в этом случае регулярным элементом (алгебры симплектических операторов, порожденной парой  $A_H, A_K$ ). Говорят, что неподвижная точка имеет тип «центр–центр», если все собственные числа  $A$  чисто мнимые, тип «седло–седло», если все они вещественные, и тип «центр–седло», если одна пара собственных чисел чисто мнимая, а вторая — вещественна. Теоретически имеется еще один случай, когда собственные числа  $A$  имеют вид  $(\pm a \pm bi)$  с  $ab \neq 0$ . Такие неподвижные точки называются фокусными. При этом характеристический многочлен регулярного элемента неприводим над  $\mathbb{R}$ . Однако уже из полученных выражений для  $\rho_H(\mu)$  следует, что в рассматриваемой задаче фокусных точек нет.

Для выбранных значений параметров  $a = 0.66, b = 0.86, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.77$  тип точек  $c_{ij}$ , которые являются особенностями ранга 0, определяется из следующей таблицы 1.

Таблица 1

$P_{a,b}^4$	Образ в $\mathbb{R}^2(h, k)$	Тип
$c_{11}$ $c_{21}$	$P_1$	центр–центр
$c_{12}$ $c_{22}$	$P_2$	центр–седло
$c_{13}$ $c_{23}$	$P_3$	центр–центр
$c_{14}$ $c_{24}$	$P_4$	центр–седло
$c_{15}$ $c_{25}$	$P_5$	центр–центр
$c_{16}$ $c_{26}$	$P_6$	седло–седло

С учетом таблицы 1 и выбранных значений параметров  $a = 0.66, b = 0.86, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.77$  предполагаемая бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  показана на рисунке 2.



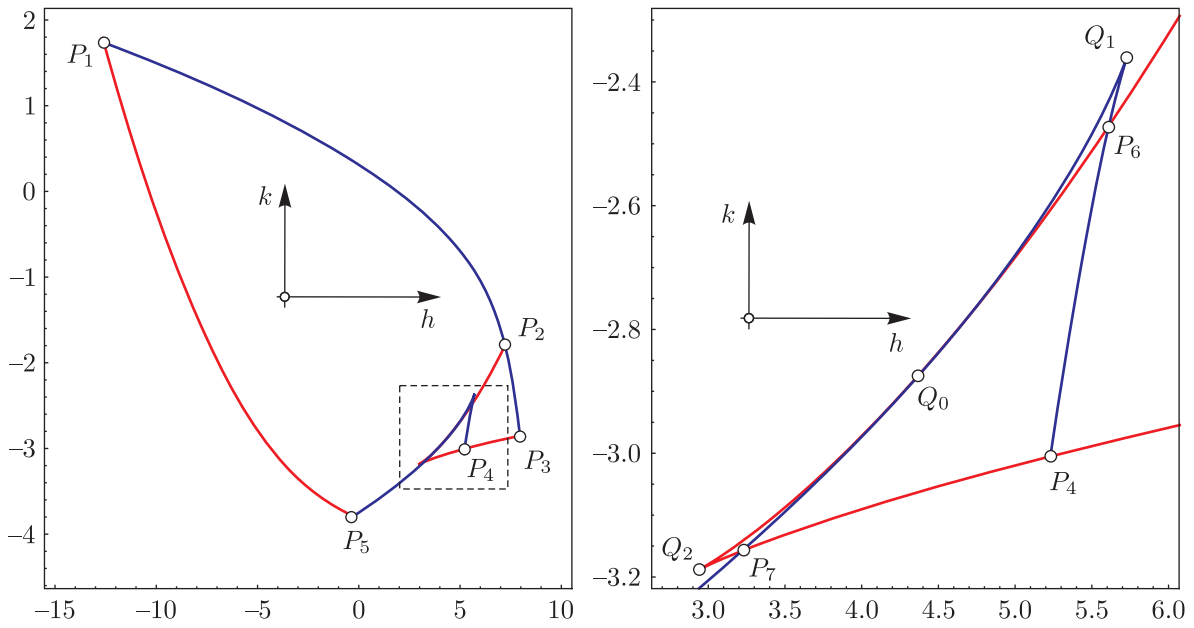


Рис. 2. Предполагаемая бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  и ее увеличенный фрагмент для значений параметров  $a = 0.66, b = 0.86, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.77$ .

### 6. Критические точки ранга 1 отображения момента

В этом разделе мы опишем явно некоторые критические точки ранга 1, которые лежат в прообразе дискриминантных кривых, соединяющих точки нульмерного остова  $P_k, k = 1, \dots, 6$ . Мы не ставим целью найти *все* критические точки ранга 1, а существенно предполагаем, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму. С одной стороны, это недостаток, поскольку о существовании общих теорем о включении бифуркационной диаграммы в вещественную часть дискриминантного множества на сегодняшний день нам не известно. С другой стороны, опыт исследования конкретных механических систем подсказывает, что это так.

Критические точки ранга 1 отображения момента  $\mathcal{F}$  удобно определять из условия

$$\text{rank}(H \times K \times F_1 \times F_2) < 4, \tag{6.1}$$

проверяя обращение в нуль миноров четвертого порядка. При этом можно использовать тот факт, что интегральные многообразия  $J_{h,k} = \{x \in \mathcal{P}_{a,b}^4 : H(x) = h, K(x) = k\}$  инвариантны относительно преобразований фазовых координат

$$\begin{aligned} \tau_1 : (M_1, M_2, M_3, S_1, S_2, S_3) &\rightarrow (-M_1, M_2, M_3, -S_1, S_2, S_3), \\ \tau_2 : (M_1, M_2, M_3, S_1, S_2, S_3) &\rightarrow (M_1, -M_2, M_3, S_1, -S_2, S_3), \\ \tau_3 : (M_1, M_2, M_3, S_1, S_2, S_3) &\rightarrow (M_1, M_2, -M_3, S_1, S_2, -S_3). \end{aligned}$$

Рассмотрим множество  $\mathcal{M}_1$  неподвижных точек преобразования  $\tau_1$ :

$$\mathcal{M}_1 = \{(M, S) \in \mathcal{P}_{a,b}^4 : M_1 = S_1 = 0\}.$$

Множеству  $\mathcal{M}_1$  заведомо принадлежат неподвижные точки системы (2.1):  $c_{11}, c_{21}, c_{13}, c_{23}, c_{15}, c_{25}, c_{16}, c_{26}$ . Исключая их, найдем пересечение  $\mathcal{M}_1$  с оставшейся частью множества критических точек  $\mathcal{C}$ .



Полагая в (6.1)  $M_1 = S_1 = 0$ , приходим к одному уравнению, которое представляет собой произведение двух полиномиальных выражений:

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 + \alpha_2)S_3M_2 + \alpha_2S_2M_3 - (\alpha_1 + 2\alpha_2)S_2S_3] \times \\ & \times \left[ \alpha_1^2(\alpha_1M_3 + 3\alpha_2S_3)M_2^3 - 3\alpha_1[\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)M_3 + 2\alpha_2(2\alpha_2 + \alpha_1)S_3]S_2M_2^2 + \right. \\ & + \{ \alpha_1^2(\alpha_1M_3 + 3\alpha_2S_3)M_3^2 + 3\alpha_1^2(2\alpha_2 + \alpha_1)(S_2^2 - S_3^2)M_3 + (2\alpha_2 + \alpha_1)^2 \times \\ & \times [3S_2^2\alpha_2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)S_3^2]S_3 \} M_2 - [3\alpha_1^3(M_3 + S_3)^2 + 3\alpha_2\alpha_1^2M_3^2 + 6\alpha_1\alpha_2(2\alpha_2 + 3\alpha_1)S_3M_3 + \\ & \left. + 3\alpha_2(5\alpha_1^2 + 8\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_2^2)S_3^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_2 + \alpha_1)^2S_2^2]M_3S_2 \right] = 0. \end{aligned}$$

В первом случае критические точки ранга 1, которые принадлежат множеству  $\mathcal{M}_1$ , имеют следующую параметризацию:

$$\mathcal{M}_{11}: \begin{cases} M_1 = S_1 = 0, \\ S_2^2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2[a^2b^2 - (b^2 + 2\alpha_1\alpha_2t)^2]}{\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)[a^2 - b^2 - 4\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)t]}, \\ M_2^2 = \frac{[a^2 - b^2 + 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)t]^2[a^2b^2 - (b^2 + 2\alpha_1\alpha_2t)^2]^2}{4t^2\alpha_1^3(\alpha_1 + 2\alpha_2)[a^2 - b^2 - 4\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)t]}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Во втором случае критические точки ранга 1, которые также принадлежат множеству  $\mathcal{M}_1$ , определяются системой уравнений

$$\mathcal{M}_{21}: \begin{cases} M_1 = S_1 = 0, \\ M_3^2 = \frac{[2(2\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_2 + \alpha_1)^3s^2 + 2a^2(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - 4\alpha_2)s + a^2(a^2 - 9b^2)]^2 \times A_1}{108\alpha_1^3(2\alpha_2 + \alpha_1)[a^2 - 9b^2 + 4s(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)][a^2 - (2\alpha_2 + \alpha_1)^2s]^2s^2}, \\ S_3^2 = \frac{[\alpha_1a^2 + 3b^2(2\alpha_2 + \alpha_1) - 2\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2)s]^2A_1}{12\alpha_1(2\alpha_2 + \alpha_1)[a^2 - (2\alpha_2 + \alpha_1)^2s]^2[a^2 - 9b^2 + 4(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)s]}, \\ \text{где } A_1 = [a^2 + 2(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)s]^2 - 9a^2b^2. \end{cases} \quad (6.3)$$

Теперь рассмотрим множество  $\mathcal{M}_2$  неподвижных точек преобразования  $\tau_2$ ,

$$\mathcal{M}_2 = \{(\mathbf{M}, \mathbf{S}) \in \mathcal{P}_{a,b}^4: M_2 = S_2 = 0\},$$

которому принадлежат неподвижные точки системы (2.1):  $c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22}, c_{14}, c_{24}, c_{15}, c_{25}$ . Как и в предыдущем случае, исключая их, найдем пересечение  $\mathcal{M}_2$  с оставшейся частью множества критических точек  $\mathcal{C}$ .

Полагая в (6.1)  $M_2 = S_2 = 0$ , приходим к одному уравнению, которое представляет собой по-прежнему произведение двух полиномиальных выражений:

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 + \alpha_2)S_3M_1 + \alpha_1S_1M_3 - (2\alpha_1 + \alpha_2)S_1S_3] \times \\ & \times \left[ \alpha_2^2(\alpha_2M_3 + 3\alpha_1S_3)M_1^3 - 3\alpha_2[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)M_3 + 2\alpha_1(2\alpha_1 + \alpha_2)S_3]S_1M_1^2 + \right. \\ & + \{ \alpha_2^2(\alpha_2M_3 + 3\alpha_1S_3)M_3^2 + 3\alpha_2^2(2\alpha_1 + \alpha_2)(S_1^2 - S_3^2)M_3 + (2\alpha_1 + \alpha_2)^2 \times \\ & \times [3S_1^2\alpha_1 - (2\alpha_2 + \alpha_1)S_3^2]S_3 \} M_1 + [3\alpha_2^3(M_3 + S_3)^2 + 3\alpha_2^2\alpha_1M_3^2 + \\ & + 6\alpha_1\alpha_2(3\alpha_2 + 2\alpha_1)M_3S_3 + 3\alpha_1(5\alpha_2^2 + 8\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1^2)S_3^2 - \\ & \left. - (\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)^2S_1^2]S_1M_3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

В первом случае критические точки ранга 1, которые принадлежат множеству  $\mathcal{M}_2$ , имеют следующую параметризацию:

$$\mathcal{M}_{12}: \begin{cases} M_2 = S_2 = 0, \\ S_1^2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 [a^2 b^2 - (b^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 t)^2]}{\alpha_2 (\alpha_2 + 2\alpha_1) [a^2 - b^2 - 4\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) t]}, \\ M_1^2 = \frac{[a^2 b^2 - (b^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 t)^2] [a^2 - b^2 + 2\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2}{4t^2 \alpha_2^3 (\alpha_2 + 2\alpha_1) [a^2 - b^2 - 4\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) t]}. \end{cases}$$

Во втором случае (6.4):

$$\mathcal{M}_{22}: \begin{cases} M_2 = S_2 = 0, \\ M_3^2 = \frac{[2(2\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2)^3 s^2 - 2a^2(2\alpha_2 + \alpha_1)(4\alpha_1 - \alpha_2)s + a^2(a^2 - 9b^2)]^2 A_2}{108\alpha_2^3(2\alpha_1 + \alpha_2)[a^2 - 9b^2 - 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)s][a^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)^2 s]^2 s^2}, \\ S_3^2 = \frac{[\alpha_2 a^2 + 3b^2(2\alpha_1 + \alpha_2) - 2\alpha_2(2\alpha_2 + \alpha_1)(2\alpha_1 + \alpha_2)s]^2 A_2}{12\alpha_2(2\alpha_1 + \alpha_2)[a^2 - (2\alpha_1 + \alpha_2)^2 s]^2 [a^2 - 9b^2 - 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)s]}, \\ \text{где } A_2 = [a^2 - 2(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)s]^2 - 9a^2 b^2. \end{cases}$$

Наконец, рассмотрим множество  $\mathcal{M}_3$  неподвижных точек преобразования  $\tau_3$ ,

$$\mathcal{M}_3 = \{(M, S) \in \mathcal{P}_{a,b}^4 : M_3 = S_3 = 0\},$$

которому принадлежат неподвижные точки системы (2.1):  $c_{12}, c_{22}, c_{13}, c_{23}, c_{14}, c_{24}, c_{16}, c_{26}$ . Исключая их, найдем пересечение  $\mathcal{M}_3$  с оставшейся частью множества критических точек  $\mathcal{C}$ . Подставляя в (6.1)  $M_3 = S_3 = 0$ , приходим к одному уравнению, которое представляет собой, как в предыдущих случаях, произведение двух полиномиальных выражений:

$$\begin{aligned} & [(\alpha_1 - \alpha_2)S_1 S_2 + \alpha_2 M_1 S_2 - \alpha_1 S_1 M_2] \times \\ & \times \left\{ (\alpha_1 + \alpha_2)^2 [(\alpha_1 + \alpha_2)M_2 - 3\alpha_1 S_2] M_1^3 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) [\alpha_2 M_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \right. \\ & + 2\alpha_1 S_2 (\alpha_1 - \alpha_2)] S_1 M_1^2 + [(\alpha_1 + \alpha_2)^2 [(\alpha_1 + \alpha_2)M_2 - 3\alpha_1 S_2] M_2^2 - \\ & - 3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (S_1^2 - S_2^2) M_2 - S_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (3S_1^2 \alpha_1 + S_2^2 \alpha_1 + 2\alpha_2 S_2^2)] M_1 - \\ & - 3\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 S_1 M_2^3 + 6\alpha_2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) S_1 S_2 M_2^2 - \\ & \left. - M_2 S_1 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2S_1^2 \alpha_1 + \alpha_2 S_1^2 + 3\alpha_2 S_2^2) \right\} = 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

В первом случае критические точки ранга 1, которые принадлежат множеству  $\mathcal{M}_3$ , удовлетворяют системе уравнений:

$$\mathcal{M}_{13}: \begin{cases} M_3 = S_3 = 0, \\ S_2^2 = \frac{\alpha_1^2 \{a^2 b^2 - [b^2 - 2\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2\}}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (a^2 - b^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 t)}, \\ M_2^2 = \frac{\{a^2 b^2 - [b^2 - 2\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2\} [a^2 - b^2 + 2\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) t]^2}{4(\alpha_1 + \alpha_2)^3 (\alpha_1 - \alpha_2) (a^2 - b^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 t)^2}. \end{cases}$$

Во втором случае (6.5):

$$\mathcal{M}_{23}: \begin{cases} M_3 = S_3 = 0, \\ M_1^2 = \frac{[2(\alpha_2 + 2\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)^3 s^2 + 2a^2(\alpha_1 + 5\alpha_2)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s + a^2(a^2 - 9b^2)]^2 A_3}{108(\alpha_1 + \alpha_2)^3(\alpha_1 - \alpha_2)[a^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 s]^2 [a^2 - 9b^2 + 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s] s^2}, \\ S_1^2 = \frac{[(\alpha_1 + \alpha_2)a^2 + 3b^2(\alpha_1 - \alpha_2) - 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s]^2 A_3}{12(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)[a^2 - (\alpha_1 - \alpha_2)^2 s]^2 [a^2 - 9b^2 + 4(2\alpha_2 + \alpha_1)(\alpha_2 + 2\alpha_1)s]}, \\ \text{где } A_3 = [a^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_2 + \alpha_1)s]^2 - 9a^2 b^2. \end{cases}$$

Здесь параметры  $t$  и  $s$  одновременно являются параметрами дискриминантных кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно. Поскольку левые части выражений для семейств  $\mathcal{M}_{ij}$  содержат квадраты фазовых переменных, то правые части должны быть неотрицательными. В таблице 2 приведены соответствующие области изменения параметров  $t$  и  $s$  для выделения вещественных решений из семейств  $\mathcal{M}_{ij}$ . Здесь использованы следующие значения параметров:  $a = 0.66$ ,  $b = 0.86$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.77$ .

Таблица 2

Кривая	Семейство	Область существования	Сегмент кривой $\gamma_k$
$\gamma_1$	$\mathcal{M}_{11}$	$[t_1; t_5] \cup [t_3; t_6]$	$[P_1; P_5] \cup [P_3; P_6]$
$\gamma_1$	$\mathcal{M}_{12}$	$[t_1; t_5] \cup [t_4; t_2]$	$[P_1; P_5] \cup [P_4; P_2]$
$\gamma_1$	$\mathcal{M}_{13}$	$[t_3; t_4] \cup [t_6; t_2]$	$[P_3; P_4] \cup [P_6; P_2]$
$\gamma_2$	$\mathcal{M}_{21}$	$[s_3; s_1] \cup [s_5; s_6]$	$[P_3; P_1] \cup [P_5; P_6]$
$\gamma_2$	$\mathcal{M}_{22}$	$[s_2; s_1] \cup [s_5; s_4]$	$[P_2; P_1] \cup [P_5; P_4]$
$\gamma_2$	$\mathcal{M}_{23}$	$[s_3; s_2] \cup [s_6; s_4]$	$[P_3; P_2] \cup [P_6; P_4]$

Таким образом, приведенные выражения и области изменения параметров позволяют выделить сегменты дискриминантных кривых, которые вместе с узловыми точками  $P_1$ – $P_6$  и определяют бифуркационную диаграмму  $\Sigma$  отображения момента  $\mathcal{F}$ . Напомним, что наш алгоритм работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

В качестве приложения полученных выражений вычислим тип критических точек ранга 1. При этом достаточно определить тип (эллиптический/гиперболический) в какой-нибудь одной из точек  $(h, k) \in \Sigma$  гладкой ветви бифуркационной диаграммы [29]. Мы это сделаем для критических точек ранга 1 из семейств  $\mathcal{M}_{11}$  и  $\mathcal{M}_{21}$ , которые принадлежат множеству  $\mathcal{M}_1$  и имеют явную параметризацию в виде формул (6.2) и (6.3).

Тип критической точки  $x_0$  ранга 1 в интегрируемой системе с двумя степенями свободы вычисляется следующим образом. Необходимо указать первый интеграл  $F$ , такой, что  $dF(x_0) = 0$  и  $dF \neq 0$  в окрестности этой точки. Тогда, в частности, точка  $x_0$  оказывается неподвижной для гамильтонова поля  $\text{sgrad } F$  и можно вычислить линеаризацию этого поля в точке  $x_0$  — симплектический оператор  $A_F$  в четырехмерном касательном пространстве к фазовому пространству в точке  $x_0$ . Этот оператор будет иметь два нулевых собственных числа, оставшийся сомножитель характеристического многочлена имеет вид  $\mu^2 - C_F$ . При  $C_F < 0$  получим точку типа «центр» (соответствующее периодическое решение имеет

эллиптический тип, является устойчивым периодическим решением в фазовом пространстве, пределом концентрического семейства двумерных регулярных торов), а при  $C_F > 0$  получим точку типа «седло» (соответствующее периодическое решение имеет гиперболический тип, существуют движения, асимптотические к этому решению, лежащие на двумерных сепаратрисных поверхностях).

В нашей задаче ситуация осложнена тем, что фазовое пространство задано в  $\mathbb{R}^6$  двумя неявными уравнениями (2.5) и вычислять ограничения операторов на касательные пространства затруднительно. Однако функции в левых частях уравнений (2.5) служат функциями Казимира для естественного продолжения на  $\mathbb{R}^6$  скобки Пуассона симплектической структуры пространства  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ , поэтому при вычислении симплектических операторов вида  $A_F$  они лишь добавляют два нулевых корня в характеристический многочлен, имеющий в целом шестую степень. Таким образом, мы заранее знаем, что при условии  $\text{sgrad } F = 0$  искомым коэффициент  $C_F$  есть коэффициент при  $\mu^4$  в характеристическом многочлене  $Z_F(\mu)$  оператора  $A_F$  в  $\mathbb{R}^6$ :

$$Z_F(\mu) = \mu^4(\mu^2 - C_F).$$

Сам же оператор  $A_F$  вычисляется и при наличии вырожденных скобок Пуассона (для рассматриваемого здесь пространства  $\mathbb{R}^6$  они определены явно формулами (2.2)). Отметим, что при вычислении характеристического многочлена через определитель соответствующей  $(6 \times 6)$ -матрицы трудности для некоторых функций оказываются слишком высоки даже при использовании мощных современных систем аналитических вычислений. Однако, заранее зная в данном случае структуру искомого многочлена, можем найти

$$C_F = \frac{1}{2} \text{trace}(A_F^2).$$

**Предложение 2.** Тип критических точек ранга 1, заданных системами (6.2) и (6.3), определяется знаками квадратов характеристических показателей

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{[16(\alpha_1 - \alpha_2)^2(2\alpha_2 + \alpha_1)^2(2\alpha_1 + \alpha_2)^2s^3 - a^2(a^2 - 9b^2)^2][a^2 + 3b^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)s]^2}{324s^4}, \\ \mu^2 &= \frac{[16\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2t^3 - b^2(a^2 - b^2)^2][a^2 + 3b^2 - 4(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)t]^2}{36t^4}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

где  $t$  и  $s$  — значения параметров в соответствующей точке (6.2) и (6.3) кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Критические точки имеют тип «центр» при  $\mu^2 < 0$  и тип «седло» при  $\mu^2 > 0$ . При  $\mu = 0$  критические точки вырождены. На кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  множество вырожденных критических точек отвечает точкам возврата и точке касания.

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $L = H + \sigma K$ . Вычисляя ее косой градиент в точках (6.2) и (6.3) и приравнивая его к нулю, найдем

$$\sigma = -\frac{1}{t} \text{ в точках } \mathcal{M}_{11} \quad \text{и} \quad \sigma = -\frac{1}{s} \text{ в точках } \mathcal{M}_{21}. \tag{6.7}$$

Полученные поля  $\text{sgrad } L$  обращаются в нуль лишь в самих рассматриваемых точках (6.2) и (6.3), но не в окрестности, а следовательно, основное требование к интегралу  $L$  выполнено. Вычислим  $\frac{1}{2} \text{trace}(A_L^2)$ , подставим значения (6.7), затем — (6.2) и (6.3) соответственно. Найденные выражения средствами компьютерной алгебры разлагаются на множители,



Таблица 3

Кривая	Сегмент на кривой	Тип
$\gamma_1$	$(P_1; P_5)$	эллиптический
$\gamma_1$	$(P_2; P_6) \cup (P_6; Q_0) \cup (Q_0; Q_2)$	гиперболический
$\gamma_1$	$(P_3; P_4) \cup (P_4; Q_2)$	эллиптический
$\gamma_2$	$(P_1; P_2) \cup (P_2; P_3)$	эллиптический
$\gamma_2$	$(P_5; Q_0) \cup (Q_0; Q_1)$	эллиптический
$\gamma_2$	$(P_4; P_6) \cup (P_6; Q_1)$	гиперболический

которые дают искомые значения (6.6). Характер критических точек определяется знаком величин (6.6). Тот факт, что при равенстве этой величины нулю критические точки вырождены (то есть нельзя указать другого интеграла с ненулевым характеристическим значением), вытекает из того, что коэффициент при  $H$  в функции  $L$  отличен от нуля (он просто равен единице), а равенство  $dH = 0$  приводит к критическим точкам ранга 0. Связь множества  $\mu^2 = 0$  с геометрическими свойствами кривых  $\gamma_{1,2}$  проверяется непосредственно. ■

Для выбранных значений параметров  $a = 0.66$ ,  $b = 0.86$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.77$  тип критических точек ранга 1 определяется из таблицы 3.

## 7. Заключение

В работе приводится в явном виде спектральная кривая, коэффициентами которой являются первые интегралы рассматриваемого интегрируемого случая Адлера и ван Мёрбеке. Дискриминантное множество спектральной кривой представлено в виде объединения поверхностей кратных корней двух многочленов. С помощью критических точек ранга 0 и 1 отображения момента предлагается алгоритм выделения бифуркационной диаграммы отображения момента из вещественной части дискриминантного множества. Алгоритм работает при условии, что вещественная часть дискриминантного множества содержит бифуркационную диаграмму.

## Благодарности

Авторы выражают благодарность А. В. Борисову и И. С. Мамаеву за плодотворные обсуждения и ценные советы, касающиеся как содержания работы, так и методологии исследования.

## Список литературы

- [1] Adler M., van Moerbeke P. A. A new geodesic flow on  $so(4)$  // Probability, Statistical Mechanics and Number Theory: A Volume Dedicated to Mark Kac / G.-C. Rota (Ed.). (Adv. Math. Suppl. Stud., vol. 9.) Orlando, Fla.: Acad. Press, 1986. P. 81–96.
- [2] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1978, т. 42, № 2, с. 396–415.





- [3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу, 1979, т. 19, с. 3–94.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколов В. В. Новый интегрируемый случай на  $so(4)$  // Докл. РАН, 2001, т. 381, № 5, с. 614–615.
- [5] Greenhill A. G. On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1880, vol. 4, pp. 4–14.
- [6] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельной жидкостью: I, II, III // Собр. соч.: Т. 1 / Н. Е. Жуковский. Москва: ГИТТЛ, 1949. С. 31–152.
- [7] Poincaré H. Sur la précession des corps déformables // Bull. Astron., 1910, vol. 27, pp. 321–356.
- [8] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Москва: Наука, 1965. 440 с.
- [9] Stekloff V. A. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3), 1909, vol. 1, pp. 145–256.
- [10] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия: Методы и приложения. Москва: МГУ, 1988. 413 с.
- [11] Adler M., van Moerbeke P., Vanhaecke P. Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras. (Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 47.) Berlin: Springer, 2004. 483 pp.
- [12] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УдГУ, 1995. 432 с.
- [13] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.
- [14] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [15] Богоявленский О. И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. Москва: Наука, 1991. 320 с.
- [16] Audin M. Spinning tops: A course on integrable systems. (Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 51.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 148 pp.
- [17] Браилов Ю. А. Геометрия сдвигов инвариантов на полупростых алгебрах Ли // Матем. сб., 2003, т. 194, № 11, с. 3–16.
- [18] Рябов П. Е. Алгебраические кривые и бифуркационные диаграммы двух интегрируемых задач // Механика твердого тела, 2007, № 37, с. 97–111.
- [19] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Bi-Hamiltonian structures and singularities of integrable systems // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, nos. 4–5, pp. 431–454.
- [20] Коняев А. Ю. Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой интегрируемых систем на алгебрах Ли // Матем. сб., 2010, т. 201, № 9, с. 27–60.
- [21] Bolsinov A., Izosimov A. Singularities of Bi-Hamiltonian systems // Comm. Math. Phys., 2014, vol. 331, no. 2, pp. 507–543.
- [22] Ryabov P. E. New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // J. Geom. Phys., 2015, vol. 87, pp. 415–421.
- [23] Izosimov A. Singularities of integrable systems and algebraic curves // Int. Math. Res. Notices, 2016, vol. 2016, no. 17, 50 pp.
- [24] Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. A new integrable case of the motion of the 4-dimensional rigid body // Comm. Math. Phys., 1986, vol. 105, no. 3, pp. 461–472.
- [25] Болсинов А. В., Борисов А. В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // Матем. заметки, 2002, т. 72, № 1, с. 11–34.
- [26] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 531 с.
- [27] Lerman L. M., Umanskiĭ Ya. L. Structure of the Poisson action of  $\mathbf{R}^2$  on a four-dimensional symplectic manifold: 1 // Selecta Math. Sov., 1987, vol. 6, no. 4, pp. 365–396.

- [28] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: УдГУ, 1999. 444 с.; 448 с.
- [29] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2, с. 71–132.

## The discriminant set and bifurcation diagram of the integrable case of M. Adler and P. van Moerbeke

Pavel E. Ryabov<sup>1</sup>, Ekaterina O. Biryucheva<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Financial University under the Government of Russian Federation

Leningradsky pr. 49, Moscow, 125993, Russia

Blagonravov Institute for Machine Science, Russian Academy of Sciences

ul. Bardina 4, Moscow, 119334, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Institutskiy per. 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University

Leninskie Gory 1, Moscow, 119991, Russia

<sup>1</sup>perjabov@fa.ru, <sup>2</sup>biryucheva.katerina@gmail.com

The paper presents explicitly the spectral curve and the discriminant set of the integrable case of M. Adler and P. van Moerbeke. For critical points of rank 0 and 1 of the momentum map we explicitly calculate the characteristic values defining their type. An algorithm is proposed for finding the bifurcation diagram from the real part of the discriminant set with the help of critical points of rank 0 and 1. The algorithm works under the condition that the real part of the discriminant set contains the bifurcation diagram.

MSC 2010: 70E05, 70E17, 37J35, 34A05

Keywords: integrable Hamiltonian systems, spectral curve, discriminant set, bifurcation diagram

Received August 29, 2016, accepted September 20, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 633–650 (Russian)

