



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 517.9
MSC 2010: 37G35

**2-циклы уравнения Рикера с периодически
изменяющимся мальтузианским параметром:
устойчивость и мультистабильность**

К. В. Шлюфман, Г. П. Неверова, Е. Я. Фрисман

Проведено исследование возникновения и устойчивости 2-циклов модели Рикера с мальтузианским параметром периода 2. Показано, что потеря устойчивости тривиального решения происходит через транскритическую бифуркацию, в результате которой в положительной области фазового пространства появляется устойчивый 2-цикл. Обнаружено, что последующая касательная бифуркация приводит к рождению «внутри» этого цикла двух новых 2-циклов, устойчивого и неустойчивого, и, соответственно, к появлению мультистабильности. Показано, что сосуществование двух разных устойчивых 2-циклов возможно в узкой области параметрического пространства. Дальнейшая потеря устойчивости 2-циклов происходит по сценарию Фейгенбаума.

Ключевые слова: рекуррентное уравнение, модель Рикера, периодический мальтузианский параметр, устойчивость, бифуркации, мультистабильность

Получено 07 июня 2016 года
После доработки 22 сентября 2016 года

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-29-02658 офи_м и Комплексной программы фундаментальных исследований «Дальний Восток».

Шлюфман Константин Владимирович
shlufman@mail.ru

Фрисман Ефим Яковлевич
frisman@mail.ru

Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН
679016, Россия, г. Биробиджан, ул. Шолом-Алейхема, д. 4

Неверова Галина Петровна
galina.nev@gmail.com

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН
690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, д. 5

1. Введение

Уравнению Рикера с периодически изменяющимся параметром посвящено большое количество работ. При этом спектр рассматриваемых задач весьма широк: от прикладных до сугубо теоретических [4–6, 10, 11, 14–16, 19].

Модель Рикера с периодически изменяющимся параметром весьма успешно применяется для решения биологически содержательных задач. В частности, в работе [10] на основе такого уравнения изучается периодическое воздействие экологического лимитирования на динамику численности популяций с коротким жизненным циклом. Данная модель позволяет исследовать динамику популяций видов, численность которых зависит от периодически изменяющегося фактора (например, запаса кормовых ресурсов). Также уравнение Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром используется для разработки стратегий снижения численности популяций (в частности, диких комаров, переносящих опасные заболевания, такие как малярия, желтая лихорадка, лихорадка денге, вирус лихорадки Западного Нила, энцефалита, филяриоз и др. [2, 20–23]).

Следует отметить, что модель Рикера с периодическим мальтузианским параметром сама по себе представляет интерес и, безусловно, требует изучения. В рамках таких исследований особое внимание уделяется поиску множества возможных решений уравнения [5, 7, 15, 17, 18]. В частности, работы [4, 7, 16] посвящены доказательству того, что модель Рикера с периодическим мальтузианским параметром имеет глобальное асимптотически устойчивое периодическое решение, и поиску теоретических оценок границ области его устойчивости [4, 7].

Данная работа направлена на развитие и дополнение результатов исследований [4, 7, 10] и посвящена уточнению условий возникновения и устойчивости 2-циклов модели Рикера, в которой мальтузианский параметр меняется с периодом 2.

2. Уравнение Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром

Уравнение Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром, позволяющее учитывать циклические воздействия (как экзогенной, так и эндогенной природы) на численность популяции, является модификацией модели запас–пополнения [1] и имеет вид

$$x_{n+1} = x_n \cdot \alpha_n \cdot e^{-\beta \cdot x_n}, \quad (2.1)$$

где переменная x_n интерпретируется как значение численности рассматриваемой популяции в момент времени $n = 0, 1, \dots$. Коэффициент α_n — периодический мальтузианский параметр (то есть $\alpha_{n+k} = \alpha_n$ для любого $n \geq 0$, где k — период), который соответствует репродуктивному потенциалу популяции и определяется биологическими особенностями вида. Отметим, что уравнение (2.1) является неавтономным, так как параметр α_n зависит от момента времени n . Дальнейшее исследование модели (2.1) будет ориентировано на случай, когда период параметра α_n составляет два года, то есть $k = 2$.

Параметр β ($\beta > 0$) характеризует «емкость» экологической ниши популяции. Нетрудно показать, что с помощью замены (масштабирования) переменной без потери общности этот параметр может быть исключен. В этом случае уравнение (2.1) принимает вид

$$x_{n+1} = \alpha_n \cdot x_n \cdot e^{-x_n}. \quad (2.2)$$



Для случая, когда мальтузианский параметр имеет период колебаний, равный двум, полезен переход к новым параметрам α и ρ :

$$\alpha = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}, \quad \rho = \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{2}.$$

Тогда уравнение (2.2) может быть записано в виде

$$x_{n+1} = x_n \cdot (\alpha + (-1)^n \cdot \rho) \cdot e^{-x_n}. \quad (2.3)$$

Параметр α в уравнении (2.3) соответствует среднему значению мальтузианского параметра, относительно которого происходят колебания, а коэффициент ρ — амплитуда колебаний. Так как мальтузианский параметр имеет смысл только при положительных значениях, то величина $\alpha \pm \rho$ должна быть строго больше нуля. Отсюда возникает естественное условие $|\rho| < \alpha$.

Заметим, что полученное представление (2.3), равно как и (2.2), является неавтономным рекуррентным уравнением, которое может быть сведено к автономной системе путем расширения фазового пространства. В данном случае для увеличения размерности фазового пространства удобно ввести новую фазовую переменную ρ . Соответственно, уравнение (2.3) принимает вид

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot (\alpha + \rho_n) \cdot e^{-x_n}, \\ \rho_{n+1} = -\rho_n, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $|\rho_n|$ — амплитуда колебаний мальтузианского параметра, причем $|\rho_n| < \alpha$. Перенос ρ из пространства параметров в пространство фазовых переменных накладывает на поведение ρ следующее ограничение: переменная ρ_n меняет только знак, сохраняя свое значение по модулю. Поэтому результаты экстраполяции полученных результатов при исследовании системы (2.4) на уравнение (2.3) требуют проверки корректности.

Следует отметить, что сдвиг фазы периодического мальтузианского параметра для начального условия x_0 в уравнении (2.3) эквивалентен изменению знака переменной ρ при начальном условии (x_0, ρ_0) в системе (2.4).

3. Стационарные решения уравнения Рикера с мальтузианским параметром периода 2: исследование на устойчивость

Уравнение Рикера с мальтузианским параметром периода 2 (уравнение (2.3)) имеет тривиальное стационарное решение

$$x = 0, \quad (3.1)$$

которое существует при всех допустимых значениях параметров α ($\alpha > 0$) и ρ ($-\alpha < \rho < \alpha$) и не зависит от их значений. Вместе с тем решение (3.1) соответствует целому классу полутривиальных 2-циклов системы (2.4) с координатами $(0, \rho)$ и $(0, -\rho)$, включая тривиальное решение.

Кроме того, уравнение (2.3) может иметь и нетривиальное стационарное решение

$$x = \ln(\alpha), \quad (3.2)$$

но оно существует только при $\rho = 0$ и соответствует в этом случае полутривиальному решению

$$x = \ln(\alpha), \quad \rho = 0$$

системы (2.4). Следовательно, рассматриваемое уравнение Рикера с периодическим мальтузианским параметром (2.3) имеет стационарное нетривиальное решение только в случае, когда оно вырождается в классическое уравнение Рикера, то есть при $\rho = 0$. Таким образом, появление в уравнении Рикера колебаний мальтузианского параметра исключает существование нетривиальных стационарных решений.

Исследуем полученные стационарные решения на устойчивость.

Вопрос об устойчивости решения (3.2) достаточно хорошо рассмотрен в литературе [1, 9], где показано, что оно устойчиво при $1 < \alpha < e^2$.

Исследование устойчивости решения (3.1) неавтономного уравнения (2.3) удобно проводить с помощью эквивалентной автономной системы (2.4). Как уже указывалось, решению (3.1) соответствует целый класс полутривиальных 2-циклов. Каждый из этих циклов является стационарной точкой системы, полученной в результате двух последовательных итераций модели (2.4).

Рассмотрим уравнения оператора, полученные из системы (2.4) повторной итерацией

$$P^{(2)}(u) = P(P(u)), \quad (3.3)$$

где

$$P(u) = P \begin{pmatrix} x_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n, \alpha, \rho_n) \\ g(\rho_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \cdot (\alpha + \rho_n) \cdot e^{-x_n} \\ -\rho_n \end{pmatrix}.$$

Оператор $P^{(2)}(u)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ \rho_{n+2} \end{pmatrix} = P^{(2)} \begin{pmatrix} x_n \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(2)}(x_n, \alpha, \rho_n) \\ g^{(2)}(\rho_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \cdot (\alpha^2 - \rho_n^2) \cdot e^{-x_n - x_n \cdot (\alpha + \rho_n) \cdot e^{-x_n}} \\ \rho_n \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Устойчивость равновесия (3.1) определяется значениями собственных чисел, удовлетворяющих характеристическому многочлену системы (3.4):

$$\left(\frac{\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))}{\partial x} - \lambda \right) \cdot (1 - \lambda) = 0, \quad (3.5)$$

где

$$f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x \cdot (\alpha^2 - \rho^2) \cdot e^{-x - x \cdot (\alpha + \rho) \cdot e^{-x}}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))}{\partial x} = (\alpha^2 - \rho^2) \cdot e^{(-x - x \cdot (\alpha + \rho) \cdot e^{-x}) \cdot (x-1) \cdot (x \cdot (\alpha + \rho) \cdot e^{-x} - 1)}. \quad (3.7)$$

Поскольку собственные числа действительны, нет смысла говорить о потере устойчивости решения (3.1) по сценарию Неймарка – Сакера, который может реализовываться только при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения. Один из корней уравнения (3.5) равен единице, $\lambda_1 = 1$, и является мультипликатором отображения для переменной ρ , поскольку оператор $P^{(2)}(u)$ (3.3) не изменяет значение переменной ρ .

Второй корень λ_2 равен производной $\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho)) / \partial x$ в соответствующей стационарной точке $(0, \rho)$ или $(0, -\rho)$. Находя эту производную, получаем

$$\lambda_2 = \alpha^2 - \rho^2.$$



Тогда при $\lambda_2 = 1$ граница области устойчивости решения (3.1) определяется равенством

$$\alpha^2 - \rho^2 = 1. \tag{3.8}$$

Область допустимых значений параметров (α, ρ) , при которых решение (3.1) сохраняет устойчивость, представлена на рисунке 1. Слева эта область ограничена условием допустимости значений $\alpha > 0$ и $(-\alpha < \rho < \alpha)$, а справа — неравенством $\alpha^2 - \rho^2 < 1$.

Таким образом, область задается системой неравенств

$$\begin{cases} \alpha > 0, \\ \sqrt{\alpha^2 - 1} < |\rho| < \alpha. \end{cases} \tag{3.9}$$

Заметим, что в этой области второй корень λ_2 характеристического уравнения (3.5), равный производной $\partial(f^{(2)})/\partial x$, принимает значения от 0 до 1, причем на левой границе $|\rho| = \alpha$ корень λ_2 принимает значение 0, а на правой границе $\alpha^2 - \rho^2 = 1$ корень равен 1.

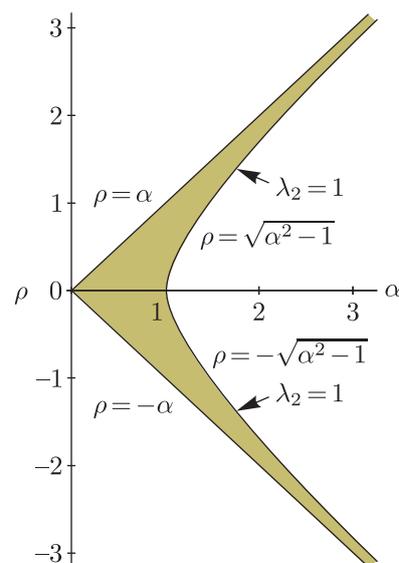


Рис. 1. Область устойчивости тривиального решения (3.1) уравнения (2.3) в пространстве параметров (α, ρ) .

4. Устойчивость 2-цикла уравнения Рикера с мальтузианским параметром периода 2

В уравнении Рикера (2.3) при $\rho \neq 0$ с ростом значения бифуркационного параметра α при переходе через границу $\alpha^2 - \rho^2 = 1$ на смену потерявшему устойчивость тривиальному решению (3.1) приходит устойчивый 2-цикл. Элементы этого цикла могут быть найдены из уравнения, где правая часть представляет собой результат два раза подряд итерированного уравнения (2.3)

$$\bar{x} = f^{(2)}(\bar{x}, \alpha, \rho), \tag{4.1}$$

где $\bar{x} \neq 0$, а $f^{(2)}(x, \alpha, \rho)$ определяется формулой (3.6). Очевидно, что решением уравнения (4.1) является множество точек кривой

$$(\alpha^2 - \rho^2) \cdot e^{-\bar{x} - \bar{x}(\alpha + \rho) \cdot e^{-\bar{x}}} = 1,$$

где ρ принимает любые значения.

Заметим, что 2-циклы неавтономного уравнения (2.3) также являются 2-циклами автономной системы (2.4) и соответствуют паре стационарных точек (x_1, ρ) и $(x_2, -\rho)$ системы (3.4), полученной в результате двух последовательных итераций модели (2.4). Используя это, найдем границы области устойчивости 2-цикла.

Устойчивость неподвижных точек системы (3.4) определяется значениями собственных чисел, удовлетворяющих характеристическому многочлену (3.5),

$$\left(\frac{\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho))}{\partial x} - \lambda \right) \cdot (1 - \lambda) = 0,$$

где производная $\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho)) / \partial x$ определена формулой (3.7).



Как уже отмечалось, один из корней уравнения (3.5) равен единице, $\lambda_1 = 1$, и является мультипликатором отображения для переменной ρ . Второй корень λ_2 равен производной $\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho)) / \partial x$ в соответствующей стационарной точке (x_1, ρ) или $(x_2, -\rho)$.

Искомая область устойчивости 2-цикла формируется границей, потеря устойчивости через которую реализуется по сценарию Фейгенбаума, то есть при втором корне λ_2 характеристического многочлена (3.5), равном -1 ($\lambda_2 = -1$). Учитывая, что $\lambda_2 = \partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho)) / \partial x$ и стационарные точки (x_1, ρ) или $(x_2, -\rho)$, при которых происходит потеря устойчивости, должны удовлетворять уравнению (4.1), искомая граница определяется системой

$$\begin{cases} \partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho)) / \partial x = -1, \\ f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x. \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований выражения, получаемого из $\partial (f^{(2)}(x, \alpha, \rho)) / \partial x = 0$ при подстановке $f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x$, параметры системы α и ρ можно выразить через переменную x . В результате получаем границу области устойчивости ненулевых стационарных решений системы (3.4) в параметрическом виде:

$$\rho^*(\alpha) = \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2-x) \cdot e^x}{x \cdot (1-x)} + \frac{x \cdot (1-x)}{2-x} \cdot e^{\left(\frac{2-x}{1-x}\right)} \right], \\ \rho = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(2-x) \cdot e^x}{x \cdot (1-x)} - \frac{x \cdot (1-x)}{2-x} \cdot e^{\left(\frac{2-x}{1-x}\right)} \right], \end{cases} \quad (4.2)$$

где $x \in (0, 0.7016)$. Границы диапазона значений x уточнялись численно.

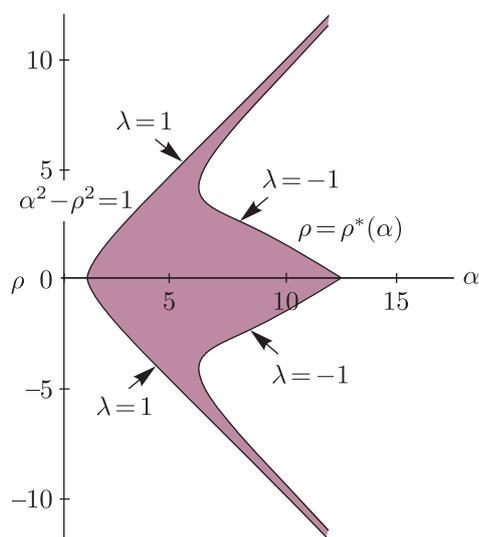


Рис. 2. Область устойчивости 2-цикла уравнения (2.3).

мультистабильность. В результатах численного моделирования это выражается в том, что при одной и той же фазе (значении) мальтузианского параметра и при разных начальных

С учетом результатов предыдущего пункта можно заключить следующее.

1. Область локальной асимптотической устойчивости периодического решения уравнения (2.3) заключена между границами (3.8) и (4.2) и имеет вид, представленный на рисунке 2.

2. На общей границе (3.8) ($\alpha^2 - \rho^2 = 1$) двух областей устойчивости, а именно, тривиального решения (3.1) и 2-цикла, происходит обмен устойчивостью между режимами при значении корня λ_2 характеристического многочлена (3.5), равном 1. Согласно представленной в [24] классификации, такой обмен устойчивостью между двумя режимами называется транскритической бифуркацией.

5. Мультистабильность

В работах [4–7, 16, 17, 19] теоретически доказано, что для уравнения Рикера с периодически изменяющимся параметром характерно такое явление, как

состояниях x_0 уравнение может выходить на разные режимы. Следует отметить, что при одном и том же начальном состоянии x_0 фаза мальтузианского параметра на первой итерации вычисления решения уравнения также может играть определяющую роль в выходе на тот или иной предельный режим.

В уравнении (2.3) фазу мальтузианского параметра формируют две величины: среднее значение α и полуамплитуда колебания ρ . Записи обеих фаз через α и ρ имеют вид $(\alpha + \rho)$ и $(\alpha - \rho)$. Таким образом, можно сказать, что при использовании записи вида (2.3) в задачах исследования мультистабильности уравнения Рикера с периодическим мальтузианским параметром удобнее рассматривать не саму фазу мальтузианского параметра, а знак при полуамплитуде ρ при фиксированном значении α . Тогда начальное состояние x_0 и знак (плюс или минус) при ρ , который приходится на это начальное состояние в первой итерации вычисления решения уравнения, вместе определяют режим, на который выходит уравнение.

Отметим, что для системы (2.4) запись начального условия $\begin{pmatrix} x_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix}$ содержит информацию о фазе мальтузианского параметра в первой итерации вычисления решения, а переход от системы (2.4) к уравнению (2.3) и обратно не составляет большого труда.

Для иллюстрации явления мультистабильности на рисунке 3 представлены фрагменты динамики переменной x двух решений отображения (2.4) с параметром $\alpha = 8$. Первое решение соответствует начальному условию $x_0 = 1$, $\rho_0 = 0.1$; его график выполнен красным цветом^a. Второе решение — условию $x_0 = 1$, $\rho_0 = -0.1$; график черного цвета. Учитывая связь между системой (2.4) и уравнением (2.3), можно сказать, что на рисунке 3 изображены фрагменты двух решений уравнения (2.3), соответствующие одному начальному состоянию $x_0 = 1$, но разным фазам мальтузианского параметра, приходящимся на это начальное состояние: красным цветом — фаза $\alpha + \rho = 8 + 0.1 = 8.1$, черным цветом — фаза $\alpha - \rho = 8 - 0.1 = 7.9$.

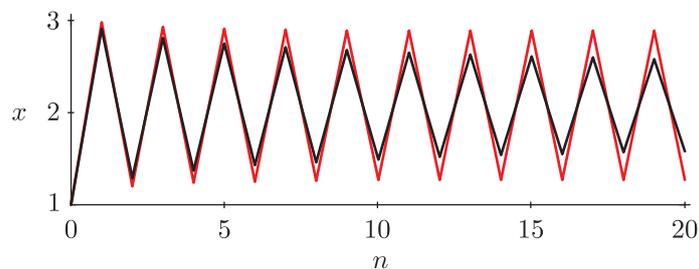


Рис. 3. Динамика переменной x отображения (2.4) при $\alpha = 8$ с разными начальными условиями: $x_0 = 1$, $\rho_0 = 0.1$ (график красного цвета), $x_0 = 1$, $\rho_0 = -0.1$ (черного цвета).

Из рисунка 3 видно, что фаза периодического мальтузианского параметра в начальном состоянии определяет выход на тот или иной локально асимптотически устойчивый режим. Заметим, что представленные решения отличаются продолжительностью переходного периода. Так, решение, соответствующее начальному условию $x_0 = 1$, $\rho_0 = 0.1$, за короткий переходный период притягивается 2-циклом с большей амплитудой. Второе решение при $x_0 = 1$, $\rho_0 = -0.1$ демонстрирует более продолжительный переход ко второму устойчивому 2-циклу, имеющему меньшую амплитуду колебаний.

^aДля читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1604001/>

Рассмотрим явление мультистабильности в уравнении Рикера с периодическим мальтузианским параметром, используя уравнение вида

$$x = f^2(x), \quad (5.1)$$

где правая часть представляет собой результат двукратного итерирования исследуемого рекуррентного уравнения. С помощью (5.1) можно находить значения элементов существующих у уравнения 2-циклов либо их численные значения [12]. Заметим, что для получения элементов циклов большей длины необходимо увеличить количество выполняемых итераций. В настоящем пункте для рассмотрения явления мультистабильности ограничимся двукратным итерированием.

Если в (5.1) подставлять правую часть уравнения Рикера (2.3), то в соответствии со значением фазы мальтузианского параметра на первой итерации ($\alpha - \rho$ или $\alpha + \rho$) получаются два подобных уравнения:

$$x = (\alpha^2 - \rho^2) \cdot x \cdot e^{-x - (\alpha - \rho) \cdot x \cdot e^{-x}} \quad (5.2)$$

и

$$x = (\alpha^2 - \rho^2) \cdot x \cdot e^{-x - (\alpha + \rho) \cdot x \cdot e^{-x}}. \quad (5.3)$$

Для уравнения Рикера (2.3) характерно согласование фазы переменной x уравнения (2.3) с фазой периодического мальтузианского параметра. Этому согласованию отвечает деление уравнения (5.1) на два подобных, каждое из которых определяет только один элемент 2-цикла. Одно из них, условно говоря, в зависимости от начального состояния x_0 и ему соответствующей фазы мальтузианского параметра, описывает четные элементы 2-цикла, а другое — нечетные. Заметим, что из уравнения (5.2) подстановкой $-\rho$ вместо ρ получается уравнение (5.3), и обратно.

Уравнения (5.2) и (5.3) определяют неявно заданные зависимости между тремя величинами x , ρ и α . Численное решение этих уравнений при фиксированном значении параметра ρ позволяет построить график зависимости переменной x уравнения (2.3) от значений α . На рисунке 4 представлены графические решения уравнений (5.2) и (5.3) в пространстве (α, x) для значений ρ , равных 0, 0.1 и 1.

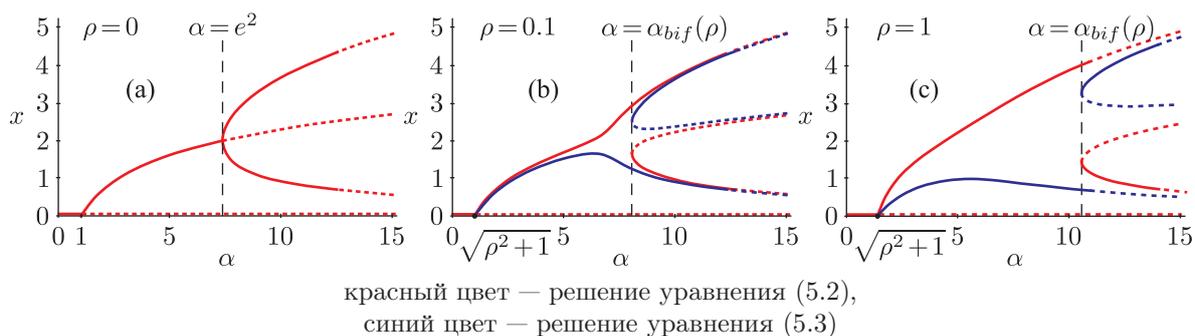


Рис. 4. Графики решений уравнений (5.2) и (5.3), соответствующие стационарным точкам и элементам 2-циклов уравнения (2.3), при фиксированных значениях параметра ρ . Сплошная линия — элементы устойчивых решений, пунктир — неустойчивых.

При $\rho = 0$ уравнения (5.2) и (5.3) совпадают и их график принимает вид, соответствующий бифуркационной диаграмме классической модели Рикера (рис. 4а). Здесь в зависимости от количества решений уравнения (5.2) и наблюдаемого динамического режима уравнения (2.3) можно выделить следующие диапазоны значений параметра α :

1) при $0 < \alpha < \sqrt{\rho^2 + 1} = 1$ устойчиво тривиальное равновесие $x = 0$ уравнения (2.3) (единственное решение уравнения (5.2)),

2) при $\alpha = \sqrt{\rho^2 + 1} = 1$ происходит транскритическая бифуркация, в результате которой нулевое решение теряет устойчивость, а нетривиальное равновесие становится устойчивым до $\alpha = \alpha_{bif}(\rho) = e^2$,

3) при $\alpha = \alpha_{bif}(\rho) = e^2$ происходит бифуркация рождения 2-цикла уравнения (2.3), и при $\alpha > \alpha_{bif}(\rho) = e^2$ наблюдается устойчивый 2-цикл (три решения уравнения (5.2)), элементы 2-цикла располагаются на «вилке» по обе стороны от неустойчивого ненулевого равновесия.

Описанная эволюция динамических режимов и количества решений уравнений (5.2) при $\rho = 0$ соответствует результатам исследований классической модели Рикера [9]. Следует отметить, что в рамках данной работы мы исследуем только возникновение двухгодичных колебаний, дальнейшее усложнение динамики по сценарию Фейгенбаума не рассматривается.

Даже небольшое увеличение значения параметра ρ вносит существенные изменения в картину динамического поведения уравнения (2.3). Как видно на рисунке 4b, при $\rho = 0.1$ из точки с координатами $(\sqrt{\rho^2 + 1}, 0)$ расходятся две кривые. Это говорит о том, что в этом случае при потере устойчивости тривиального решения в положительной области фазового пространства появляется 2-цикл (в дальнейшем будем называть его «первый 2-цикл»). Как показано ранее, этот 2-цикл устойчив при $\sqrt{\rho^2 + 1} < \alpha < \rho^*(\alpha)$, где $\rho^*(\alpha)$ — граница (4.2). Вместе с тем, при увеличении значения параметра α внутри указанного диапазона устойчивости происходит впечатляющее изменение амплитуды цикла. Вначале амплитуда небольшая и медленно растет (кривые медленно расходятся) с ростом α . Однако при приближении α к e^2 и переходе через это значение амплитуда резко возрастает. Такое поведение амплитуды позволяет говорить о том, что здесь возникают резонансные явления, которые приводят к формированию 2-цикла с большой амплитудой.

Итак, если в системе с постоянным мальтузианским параметром его рост приводит к смене тривиального равновесия нетривиальным, а затем к потере устойчивости нетривиального стационарного решения и возникновению устойчивого 2-цикла, то при периодическом мальтузианском параметре тривиальное равновесие сменяется 2-циклом. Последующая бифуркация приводит к рождению нового устойчивого 2-цикла «внутри» уже существующего и, соответственно, возникновению мультистабильности с двумя устойчивыми и одним неустойчивым 2-циклами.

При $\rho \neq 0$ эта бифуркация происходит при $\alpha = \alpha_{bif}(\rho)$, причем $\alpha_{bif}(\rho) > e^2$ и растет с ростом ρ . В диапазоне значений $\sqrt{\rho^2 + 1} < \alpha < \alpha_{bif}$ уравнения (5.2) и (5.3) в общей сложности имеют всего 2 корня (рис. 4b, c) и, соответственно, для модели (2.3) характерен единственный 2-цикл. Однако при $\alpha = \alpha_{bif}(\rho)$ ситуация изменяется. Уравнения (5.2) и (5.3) имеют теперь 4 корня, два из которых являются элементами «первого 2-цикла»: соответствующие значения переменной x лежат на крайней верхней и крайней нижней ветвях графиков. Дополнительно возникшая при $\alpha = \alpha_{bif}(\rho)$ пара элементов — это полуустойчивые особые точки (2-цикл уравнения (2.3)), которые рождаются в результате касательной бифуркации [12]. Дальнейший рост значений параметра α ($\alpha > \alpha_{bif}(\rho)$) ведет к распаду каждой полуустойчивой особой точки на устойчивую и неустойчивую. Соответственно, здесь возникает еще два 2-цикла, один из которых устойчивый («второй 2-цикл»), а другой неустойчивый («третий 2-цикл»).

Таким образом, периодическое изменение мальтузианского параметра коренным образом меняет сценарии эволюции динамических режимов уравнения Рикера. В системе

с постоянным мальтузианским параметром его рост приводит к потере устойчивости нетривиального стационарного решения и бифуркационному возникновению устойчивого 2-цикла. При периодическом мальтузианском параметре 2-цикл формируется в результате транскритической бифуркации и «внутри» него рождается новый устойчивый 2-цикл, что приводит к возникновению мультистабильности.

6. Параметрические области устойчивости 2-циклов

Чтобы определить границу, отделяющую область «единственности» первого устойчивого 2-цикла от области мультистабильности, в которой существуют три 2-цикла, на основе уравнений (5.2) и (5.3) необходимо найти бифуркационное значение параметра $\alpha = \alpha_{bif}(\rho)$, при котором происходит касательная бифуркация. Выбор уравнения для поиска бифуркационного значения не принципиален, поскольку $\alpha = \alpha_{bif}(\rho)$ совпадает для обоих уравнений и, следовательно, исследование каждого из них приведет к идентичным результатам.

Касательной бифуркации соответствует значение корня характеристического многочлена (3.5), равное 1, то есть второй корень $\lambda_2 = 1$. Учитывая, что $\lambda_2 = \partial(f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x$ и это полуустойчивая особая точка (2-цикл уравнения (2.3)), которая рождается в результате касательной бифуркации, должна удовлетворять уравнению (4.1), искомая граница определяется системой

$$\begin{cases} \partial(f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x = 1, \\ f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x, \end{cases} \quad (6.1)$$

где зависимость $f^{(2)}(x, \alpha, \rho)$ и производная $\partial(f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x$ определены формулами (3.6) и (3.7) соответственно.

Используя $f^{(2)}(x, \alpha, \rho) = x$ в подстановках в уравнение $\partial(f^{(2)}(x, \alpha, \rho))/\partial x = 0$, нетрудно показать, что решением системы (6.1) является параметрически заданная кривая, которая определяет границу, отделяющую друг от друга области «единственности» первого устойчивого 2-цикла и существования трех 2-циклов:

$$\begin{cases} \alpha_{bif} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^x}{x-1} + (x-1) \cdot e^{\left(\frac{x}{x-1}\right)} \right], \\ \rho = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{e^x}{x-1} - (x-1) \cdot e^{\left(\frac{x}{x-1}\right)} \right], \end{cases} \quad (6.2)$$

где $x > 1$, $x \neq 2$.

График численного решения системы (6.2) (обратной функции $\alpha = \alpha_{bif}(\rho)$) представлен на рисунке 5.

Этот график одновременно является и границей, отделяющей область единственности первого устойчивого 2-цикла от области мультистабильности, и линией, по которой проходит касательная бифуркация и появляется второй устойчивый 2-цикл уравнения (2.3).

Полученные в настоящей работе границы областей устойчивости тривиального решения (3.9), 2-цикла (4.2) и мультистабильности (6.2) определяют вид параметрического портрета уравнения Рикера с мальтузианским параметром периода 2 (см. рис. 6). Следует отметить, что продолжение границы области устойчивости первого 2-цикла, соответствующей потере устойчивости по сценарию Фейгенбаума ($\lambda = -1$), является границей области

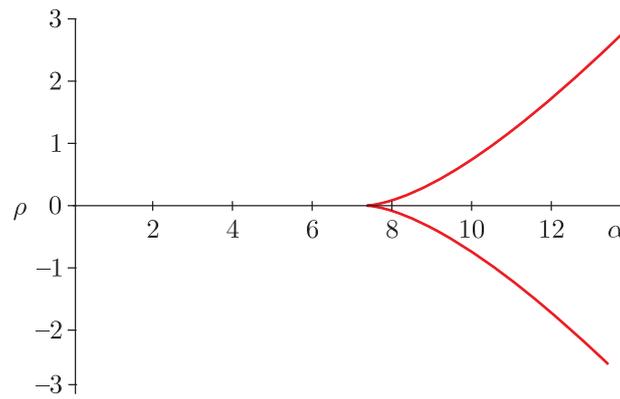


Рис. 5. График решения системы (6.2).

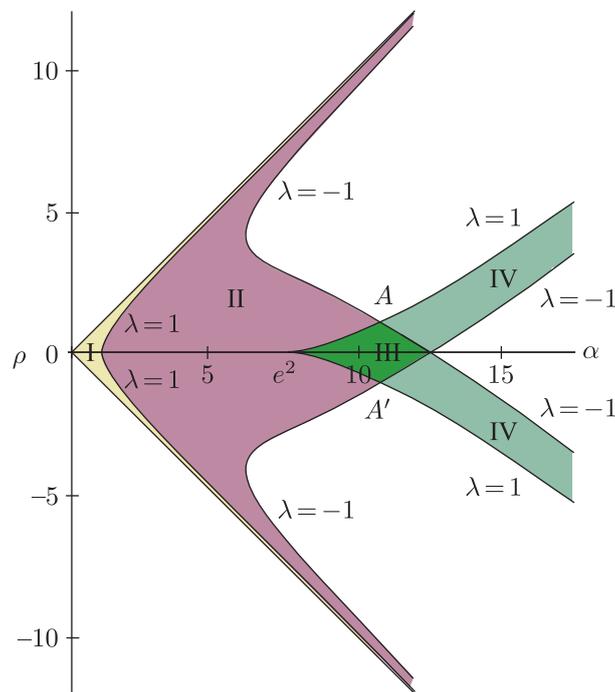


Рис. 6. Параметрические области различных устойчивых решений уравнения (2.3): I — устойчиво тривиальное решение; II — устойчив единственный 2-цикл (первый 2-цикл); III — мультистабильность: устойчивы 2 разных 2-цикла; IV — мультистабильность: сосуществуют устойчивый второй 2-цикл и динамические режимы, возникшие в результате бифуркаций первого 2-цикла.

устойчивости второго 2-цикла. При переходе через нее второй 2-цикл, так же, как и первый, теряет устойчивость через удвоение периода (рис. 6).

Как видно на рисунке, сосуществование двух разных 2-циклов возможно только в области III. Располагается она на интервале значений параметров $e^2 < \alpha < 12.49$ и $-1.0822 < \rho < 1.0822$. Отметим, что крайнее правое значение $\alpha \approx 12.49$ для классического уравнения Рикера является бифуркационным, при котором 2-цикл теряет устойчивость и рождается 4-цикл; $\rho = \pm 1.0822$ — ординаты точек A и A' , в которых пересекаются границы областей устойчивости первого 2-цикла при $\lambda = -1$ и второго 2-циклов при $\lambda = 1$. Таким образом, при $\rho < 1.0822$ с ростом значений параметра α сначала возникает касательная би-

фуркация, в результате которой рождается второй устойчивый 2-цикл, а потом происходит потеря устойчивости «первого» 2-цикла по сценарию Фейгенбаума, то есть здесь существуют значения α , при которых могут сосуществовать два разных устойчивых 2-цикла. При $\rho > 1.0822$ с ростом значения α сначала происходит потеря устойчивости первого 2-цикла, а затем рождается второй устойчивый 2-цикл, то есть второй 2-цикл сосуществует с динамическими режимами, возникшими в результате бифуркаций первого 2-цикла.

7. Заключение

В настоящей работе проведено исследование возникновения и устойчивости 2-циклов модели Рикера с мальтузианским параметром периода 2. Показано, что потеря устойчивости тривиального решения происходит через транскритическую бифуркацию, в результате которой в положительной области фазового пространства появляется устойчивый 2-цикл. Определены параметрические границы устойчивости этого цикла. Последующая касательная бифуркация приводит к рождению «внутри» этого цикла двух новых 2-циклов, устойчивого и неустойчивого, и, соответственно, возникновению мультистабильности. Дальнейшая потеря устойчивости 2-циклов происходит по сценарию Фейгенбаума при переходе через границу $\lambda = -1$. Построен параметрический портрет областей устойчивости 2-циклов.

Список литературы

- [1] Рикер У.Е. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб. Москва: Пищевая промышленность, 1979. 408 с.
- [2] Sacker R. J., von Bremen H. F. Global asymptotic stability in the Jia Li model for genetically altered mosquitos // *Difference Equations and Discrete Dynamical Systems: Proc. of the 9th Internat. Conf. on Difference Equations and Applications (University of Southern California, Los Angeles, Calif., 2004)*. P. 87–100.
- [3] Sacker R. J., von Bremen H. F. Some stability results in a model for genetically altered mosquitoes // *Modeling and Control of Autonomous Decision Support Based Systems: Proc. of the 13th Internat. Workshop on Dynamics and Control (Wiesensteig, Germany, 2005)*. P. 301–308.
- [4] Sacker R. J., von Bremen H. F. A conjecture on the stability of the periodic solutions of Ricker's equation with periodic parameters // *Appl. Math. Comput.*, 2010, vol. 217, no. 3, pp. 1213–1219.
- [5] Zhou Zh., Zou X. Stable periodic solutions in a discrete logistic equation // *Appl. Math. Lett.*, 2003, vol. 16, no. 2, pp. 165–171.
- [6] Kon R. Attenuant cycles of population models with periodic carrying capacity // *J. Difference Equ. Appl.*, 2005, vol. 11, nos. 4–5, pp. 423–430.
- [7] Sacker R. J. A note on periodic Ricker maps // *J. Difference Equ. Appl.*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 89–92.
- [8] Шапиро А.П., Луппов С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. Москва: Наука, 1983. 132 с.
- [9] Скалецкая Е.И., Фрисман Е.Я., Шапиро А.П. Дискретные модели динамики численности популяции и оптимизации промысла. Москва: Наука, 1979. 168 с.
- [10] Ашихмина Е.В., Израильский Ю.Г., Фрисман Е.Я. Динамическое поведение модели Рикера при циклическом изменении одного из параметров // *Вестн. ДВО РАН*, 2004, № 5, с. 19–28.
- [11] Ашихмина Е.В., Израильский Ю.Г., Фрисман Е.Я. Оптимизации промысла популяций, описываемых уравнением Рикера, при циклическом изменении имитирующих рост численности факторов среды // *Дальневост. матем. журн.*, 2003, т. 4, № 1, с. 127–133.
- [12] Кузнецов С.П. Динамический хаос. 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.



- [13] Кузнецов А. П., Седова Ю. В. Бифуркации трехмерных и четырехмерных отображений: Универсальные свойства // Изв. вузов. ПНД, 2012, т. 20, № 5, с. 26–43.
- [14] Ласунский А. В. О циклах дискретного периодического логистического уравнения // Тр. ИММ УрО РАН, 2010, т. 16, № 2, с. 154–157.
- [15] Ласунский А. В. О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения // Труды КарНЦ РАН, т. 5. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии, № 3, 2012, с. 44–48.
- [16] Elaydi S. N., Luís R., Oliveira H. Towards a theory of periodic difference equations and its application to population dynamics // Dynamics, Games and Science: Vol. 1 / M. M. Peixoto et al. (Eds.). (Springer Proc. Math., vol. 1.) Heidelberg: Springer, 2011. P. 287–321.
- [17] Elaydi S. N., Sacker R. J. Basin of attraction of periodic orbits of maps in the real line // J. Difference Equ. Appl., 2004, vol. 10, no. 10, pp. 881–888.
- [18] Elaydi S. N., Yakubu A. Open problems and conjectures basins of attraction of stable cycles // J. Difference Equ. Appl., 2002, vol. 8, no. 8, pp. 755–760.
- [19] AlSharawi Z., Angelos J., Elaydi S., Rakesh L. An extension of Sharkovsky's theorem to periodic difference equations // J. Math. Anal. Appl., 2006, vol. 316, no. 1, pp. 128–141.
- [20] Li J. Simple mathematical models for interacting wild and transgenic mosquito populations // Math. Biosci., 2004, vol. 189, no. 1, pp. 39–59.
- [21] Li J. Heterogeneity in modelling of mosquito populations with transgenic mosquitoes // J. Difference Equ. Appl., 2005, vol. 11, nos. 4–5, pp. 443–457.
- [22] Li J. Discrete-time models with mosquitoes carrying genetically-modified bacteria // Math. Biosci., 2012, vol. 240, no. 1, pp. 35–44.
- [23] Li J. Stage-structured models for interacting wild and sterile mosquitoes // Journal of Shanghai Normal University (Natural Science. Mathematics), 2014, vol. 43, no. 5, pp. 511–523.
- [24] Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. Москва: МЦНМО, 2005. 416 с.

Two-cycles of the Ricker model with the periodic Malthusian parameter: stability and multistability

Konstantin V. Shlufman¹, Galina P. Neverova², Efim Ya. Frisman³

^{1,3}Institute for Complex Analysis of Regional Problems, Far Eastern Branch of RAS
ul. Sholom-Aleikhem 4, Birobidzhan, 679016, Russia

²Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS
ul. Radio 5, Vladivostok, 690041, Russia

¹shlufman@mail.ru, ²galina.nev@gmail.com, ³frisman@mail.ru

This paper investigates the emergence and stability of 2-cycles for the Ricker model with the 2-year periodic Malthusian parameter. It is shown that the stability loss of the trivial solution occurs through the transcritical bifurcation resulting in a stable 2-cycle. The subsequent tangent bifurcation leads to the appearance of two new 2-cycles: stable and unstable ones. As a result, there is multistability. It is shown that the coexistence of two different stable 2-cycles is possible in a narrow area of the parameter space. Further stability loss of the 2-cycles occurs according to the Feigenbaum scenario.

MSC 2010: 37G35

Keywords: recurrence equation, Ricker model, periodic Malthusian parameter, stability, bifurcation, multistability

Received June 07, 2016, accepted September 22, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 553–565 (Russian)

