УДК 517.977, 519.837.3

© *А. Г. Ченцов*

СУПЕРРАСШИРЕНИЕ КАК БИТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассматриваются суперкомпактное пространство максимальных сцепленных систем топологического пространства (суперрасширение) и его подпространство, состоящее из ультрафильтров семейства замкнутых множеств. Получены соотношения, связывающие упомянутые пространства, и некоторые следствия, относящиеся к расширению Волмэна в случае, когда исходное топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1. В этом случае указаны некоторые представления множеств в пространстве обобщенных элементов (определяемых в виде замкнутых ультрафильтров), имеющие отношение к абстрактной задаче о достижимости при ограничениях асимптотического характера. Исследуется также более общий случай упомянутых соотношений, отвечающий ситуации, когда исходное пространство произвольно (рассматривается конструкция, использующая замкнутые ультрафильтры исходного топологического пространства). Наряду с оснащением топологией волмэновского типа используется топология, подобная применяемой при построении компактов Стоуна. В результате реализуются битопологическое пространство максимальных сцепленных систем и связанное с ним битопологическое пространство замкнутых ультрафильтров в виде соответствующего подпространства.

Ключевые слова: битопологическое пространство, замкнутый ультрафильтр, суперкомпактность, суперрасширение.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-03

Введение

Суперкомпактные топологические пространства (ТП) и связанная с ними конструкция суперрасширения были введены в [1, 2]. Важную роль в этих построениях играли топологии волмэновского типа. Особое внимание уделялось исследованию функтора суперрасширения (см. [3, гл. 3, § 4]). При этом точками пространства суперрасширения являются максимальные сцепленные системы (МСС) замкнутых множеств. Отмечено [3, 4.18], что суперрасширение ТП практически никогда не является расширением исходного ТП.

С другой стороны, конструкции, связанные с применением расширений (компактификаций), оказались (см. [4–7] и др.) полезными при исследовании прикладных по своей сути задач, связанных с достижимостью при ограничениях асимптотического характера. В этих конструкциях, однако, объектом расширения является не ТП, а сама задача о достижимости. В частности (см. [7, 8]), оказалось возможным применить (в интересах построения пространства обобщенных элементов [7]) расширение Волмэна. В этой связи представляется логичным рассмотреть данный вариант расширения и несколько более общую схему, оперирующую с замкнутыми ультрафильтрами (у/ф) произвольного ТП, в терминах представлений на основе подходящего объемлющего пространства. В качестве последнего, как показано в статье, оказывается возможным использовать суперрасширение исходного ТП (имеется в виду представление волмэновского пространства в виде подпространства суперрасширения).

Итак, по сути речь идет о представлении расширения Волмэна и некоторых эффектах, возникающих в связи с данным представлением. В этой связи отметим, что в [8] использовалась еще одна топология на множестве замкнутых у/ф (и в более общих случаях), которую можно назвать стоуновской по способу построения (обычно данная топология применяется в случае использования у/ф алгебры множеств). В настоящей работе для упомянутой топологии также конструируется объемлющее ТП. Устанавливается его сравнимость с исходным пространством суперрасширения и, таким образом, реализуется естественное оснащение парой топологий. Таким образом, возникает структура, связанная с оснащением множества МСС парой сравнимых топологий, то есть реализуется битопологическое пространство. В свою очередь, замкнутые у/ф могут рассматриваться как частный случай МСС, а совокупность всех таких у/ф также допускает оснащение парой сравнимых топологий (волмэновской и стоуновской), порождая битопологическое пространство. В работе устанавливается, что последнее индуцировано из суперрасширения (в его битопологическом варианте).

В заключительной части статьи приведены два добавления, ориентированные на применение в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ); см. [4–8]. В частности, устанавливается одно свойство, касающееся эквивалентности двух семейств, определяющих каждое соответствующий вариант ОАХ. В основе данной конструкции находится подход, связанный с применением расширения Волмэна при построении пространства обобщенных элементов.

В конструкциях с применением у/ф мы не ограничиваемся построениями только замкнутых у/ф: используются определения, естественные для широко понимаемых измеримых пространств (оснащения π-системами, решетками и, в частности, алгебрами п/м того или иного множества). Это естественно для расширений задач о достижимости с ОАХ, которые в настоящей работе не рассматриваются (однако соответствующие ссылки по ходу изложения позволяют осуществить нужную «привязку»).

§ 1. Обозначения и определения общего характера

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки и др.); def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для всякого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон, содержащий z. Множества — объекты, а потому для произвольных объектов a и b в виде $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$ мы имеем [9, с. 87] упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Если же h — какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определяемые условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) множества X и, кроме того, полагаем, что $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$; через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, то есть семейство всех непустых конечных п/м X.

Для каждого множества Y в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$ имеем семейство всех непустых семейств п/м Y, а в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(Y))$ — семейство всех непустых семейств непустых п/м Y. Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : \ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

есть след семейства $\mathcal{A}$ на множество B. Если M — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))$, то

$$\mathbf{C}_M[\mathcal{M}] \triangleq \{ \ M \setminus H : \ H \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M))$$

есть семейство п/м M, двойственное по отношению к $\mathcal{M}$.

Ниже используются некоторые специальные семейства, которые не определяются однозначно набором ключевых свойств; вместо этого мы получаем семейства, «составленные» из семейств и определяемые уже однозначно упомянутыми свойствами. Так, в частности, мы вводим семейства π-систем п/м заданного множества, семейство топологий на этом множестве, семейство алгебр его п/м; соответствующие алгебры множеств и топологии рассматриваются как варианты π-систем. В этой связи рассмотрим непустое множество I, а также семейство

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))| \ (\varnothing \in \mathcal{L})\&(I \in \mathcal{L})\&(\ A \cap B \in \mathcal{L} \ \forall \, A \in \mathcal{L} \ \forall \, B \in \mathcal{L})\} \tag{1.1}$$

всех π-систем п/м I с «нулем» и «единицей», а также

$$(\mathrm{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I]| I \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall \, A \in \mathcal{A}\}, \tag{1.2}$$

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in \pi[I]| \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \, \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}.$$

Итак, введены семейства всех алгебр п/м I и всех топологий на I. Введем, кроме того, семейство

$$(\mathrm{LAT})_0[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) | (\varnothing \in \mathcal{I}) \& (I \in \mathcal{I}) \& (\forall A \in \mathcal{I}\, \forall B \in \mathcal{I} \ \ (A \cup B \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I}))\} = \\ = \{\mathcal{I} \in \pi[I] | A \cup B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I}\, \forall B \in \mathcal{I}\} \tag{1.3}$$

всех решеток п/м I с «нулем» и «единицей». Каждое из семейств (1.2)–(1.3) является подсемейством (1.1). В виде

$$\tilde{\pi}^0[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[I] | \forall L \in \mathcal{I}\, \forall x \in I \setminus L\, \exists J \in \mathcal{I} : \ (x \in J) \& (J \cap L = \varnothing)\}$$

имеем семейство всех отделимых π-систем п/м I. Наконец, если $\mathcal{I} \in \pi[I]$, то в виде

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) | \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

получаем семейство всех непустых центрированных подсемейств π-системы $\mathcal{I}$.

Элементы топологии; базы и предбазы. Условимся о следующих обозначениях: если $\mathcal{S}$ — непустое семейство, то полагаем, что

$$\{\cup\}(\mathcal{S}) \stackrel{\triangle}{=} \{\bigcup_{S \in \chi} S : \ \chi \in \mathcal{P}(\mathcal{S})\},$$

$$\{\cap\}(\mathcal{S}) \stackrel{\triangle}{=} \{\bigcap_{S \in \chi} S : \ \chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{S})\},$$

$$\{\cup\}_\sharp(\mathcal{S}) \stackrel{\triangle}{=} \{\bigcup_{S \in \chi} S : \ \chi \in \mathrm{Fin}(\mathcal{S})\},$$

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{S}) \stackrel{\triangle}{=} \{\bigcap_{S \in \chi} S : \ \chi \in \mathrm{Fin}(\mathcal{S})\},$$

получая четыре семейства п/м объединения всех множеств из $\mathcal{S}$ (в последующих построениях не определяется и не используется пересечение множеств пустого семейства).

Для большей краткости в обозначениях фиксируем до конца настоящего пункта непустое множество X. Тогда семейство открытых баз топологий на X имеет вид

$$(\mathrm{BAS})[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | (X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \& (\forall B_1 \in \mathcal{B}\, \forall B_2 \in \mathcal{B}\, \forall x \in B_1 \cap B_2 \\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : \ (x \in B_3) \& (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\}; \tag{1.4}$$

ясно, что $\{\cup\}(\mathfrak{B}) \in (\mathrm{top})[X]\ \forall \mathfrak{B} \in (\mathrm{BAS})[X]$. Введена топология, порожденная соответствующей базой. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, то

$$(\tau - \mathrm{BAS})_0[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[X] | \tau = \{\cup\}(\mathcal{B})\}$$

есть семейство всех (открытых) баз ТП (X, τ). В связи с понятием открытой предбазы заметим, что в виде

$$(p - \mathrm{Bas})[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \in (\mathrm{BAS})[X]\} = \{\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | X = \bigcup_{\mathbb{X} \in \mathfrak{X}} \mathbb{X}\}$$

имеем семейство всех открытых предбаз топологий на X. Ясно, что

$$\{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})) \in (\mathrm{top})[X] \ \ \forall \mathfrak{X} \in (p - \mathrm{Bas})[X].$$

Тем самым введена топология, порожденная открытой предбазой. Полагаем также, что

$$(p - \mathrm{BAS})_0[X; \tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{X} \in (p - \mathrm{Bas})[X] | \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[X]\},$$

получая семейство всевозможных открытых предбаз конкретного ТП (X,τ). Введем теперь в рассмотрение замкнутые топологии П. С. Александрова (см. [10, с. 98]): семейство всех таких топологий имеет вид

$$(\mathrm{clos})[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | (\varnothing \in \mathcal{F}) \& (X \in \mathcal{F}) \& (A \cup B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \& \\ \& (\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F}\ \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F}))\}.$$

Ясно, что $\mathbf{C}_X[\tau] \in (\mathrm{clos})[X]\ \forall \tau \in (\mathrm{top})[X]$; кроме того, $\mathbf{C}_X[\mathcal{F}] \in (\mathrm{top})[X]\ \forall \mathcal{F} \in (\mathrm{clos})[X]$. Наряду с открытыми (см. (1.4)) рассматриваем замкнутые базы: в виде

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | (X \in \mathcal{B}) \& (\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \varnothing) \& (\forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in X \setminus (B_1 \cup B_2) \\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ (B_1 \cup B_2 \subset B_3) \& (x \notin B_3))\}$$

имеем семейство всех замкнутых баз (фиксированного множества X). При этом, конечно,

$$\{\cap\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{clos})[X]\ \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[X].$$

Рассматриваем, кроме того, замкнутые базы ТП с «единицей» X; в этой связи полагаем при $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, что

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[X;\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[X] | \mathbf{C}_X[\tau] = \{\cap\}(\mathcal{B})\}.$$

Введем в рассмотрение семейство замкнутых предбаз на множестве X, полагая

$$(p-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[X] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) | \{\cup\}_\sharp(\mathcal{X}) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[X]\}.$$

Наконец, введем множество всех замкнутых предбаз фиксированного ТП с «единицей» X: если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, то

$$(p-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[X;\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in (p-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[X] | \{\cup\}_\sharp(\mathcal{X}) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[X;\tau]\}.$$

Введем также в рассмотрение семейство покрытий X множествами заданного семейства: если $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, то

$$(\mathrm{COV})[X|\mathfrak{X}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X}) | X = \bigcup_{\mathbb{X} \in \mathcal{X}} \mathbb{X}\}.$$

Если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $x \in X$, то $N^0_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau | x \in G\}$, а

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(X) | \exists G \in N^0_\tau(x):\ G \subset H\}$$

есть фильтр окрестностей x в ТП (X,τ), понимаемых в смысле [11, гл. I]; $N^0_\tau(x) \subset N_\tau(x)$.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ и $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначаем замыкание множества A в ТП (X,τ). Наконец, при $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ условимся через $(\tau-\mathrm{comp})[X]$ обозначать семейство всех компактных в ТП (X,τ) п/м множества X.

§ 2. Фильтры и сцепленные системы

Фильтры. В последующем изложении фиксируем непустое множество E и рассматриваем различные варианты π-систем из множества $\pi[E]$. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то в виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}) | (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \& \\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\} \tag{2.1}$$

имеем множество всех фильтров (широко понимаемого) измеримого пространства (ИП) $(E,\mathcal{L})$; соответственно, множество всех у/ф π-системы $\mathcal{L}$ (то есть максимальных фильтров данной π-системы) имеет вид

$$\begin{gathered}\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) | \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) | \forall L \in \mathcal{L} \ (L \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\} = \\ = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] | \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\},\end{gathered} \tag{2.2}$$

$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. Заметим в этой связи, что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} | x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in E.$$

Таким образом, введены тривиальные (фиксированные) фильтры. При этом [12, (5.9)]

$$(\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]) \Longleftrightarrow ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E) \tag{2.3}$$

(в (2.3) указаны необходимые и достаточные условия максимальности тривиальных фильтров π-системы). Полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) | L \in \mathcal{U}\} \ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{2.4}$$

Тогда $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : \ L \in \mathcal{L}\} \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$, а топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \overset{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]) = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) | \forall \mathcal{U} \in G \ \exists U \in \mathcal{U} : \ \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset G\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{2.5}$$

превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное T_2-пространство. С другой стороны, при $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$ имеем

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$$

(замкнутая база), а порожденная данной замкнутой базой топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E] \overset{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\{\cap\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}])] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$$

превращает (см. [7, раздел 6]) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в компактное T_1-пространство, для которого

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];$$

в итоге получаем, что триплет

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$$

является (при $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$) битопологическим пространством (см. [13]). Отметим, что в качестве $\mathcal{L}$ можно использовать замкнутую топологию $\mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Если к тому же (E,τ) является T_1-пространством, то компактное T_1-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])$$

соответствует расширению Волмэна (исходного ТП (E,τ)). В случае когда $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$$

является нульмерным компактом (пространством Стоуна).

Сцепленные системы. Напомним, что (см. [1–3]) семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (п/м множества E) называется сцепленной системой (в [1–3] в основном рассматриваются сцепленные системы замкнутых множеств), если $A \cap B \neq \varnothing \ \forall A \in \mathcal{E} \ \forall B \in \mathcal{E}$. Тогда полагаем, что

$$(\mathrm{link})[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) | A \cap B \neq \varnothing \ \forall A \in \mathcal{E} \ \forall B \in \mathcal{E}\}, \tag{2.6}$$

получая семейство всех сцепленных систем п/м множества E.

Фиксируем до конца статьи топологию $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и полагаем, что

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathrm{link})[E] | \mathcal{E} \subset \mathbf{C}_E[\tau]\},$$

получая семейство всех сцепленных систем замкнутых (в ТП (E,τ)) множеств. Наконец,

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau] | \forall \mathcal{S} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau] \ \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\} \tag{2.7}$$

есть семейство всех максимальных сцепленных систем (МСС) замкнутых (в ТП (E,τ)) множеств. Семейство (2.7) будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения наряду с (2.2) при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$.

Суперкомпактность. Введем ряд известных понятий, связанных с суперкомпактными ТП, фиксируя, как уже отмечалось, $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. В частности, полагаем, что

$$((p,\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[E;\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in (p-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[E;\tau] | \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{S} \in (\mathrm{link})[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{X})\}; \tag{2.8}$$

замкнутые предбазы ТП (E,τ) из множества (2.8) называем бинарными. Легко видеть, что (см. (2.6), (2.8)) $\forall \mathcal{E} \in ((p,\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[E;\tau] \ \forall \mathcal{C} \in (\mathrm{COV})[E|\mathbf{C}_E[\mathcal{E}]] \ \exists C_1 \in \mathcal{C} \ \exists C_2 \in \mathcal{C}$:

$$E = C_1 \cup C_2 \tag{2.9}$$

(в (2.9) проясняется выражение «бинарная предбаза»). Разумеется, по двойственности имеем, наряду с (2.9), что $\forall \mathcal{E} \in (p-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[E;\tau]$

$$(\forall \mathcal{C} \in (\mathrm{COV})[E|\mathbf{C}_E[\mathcal{E}]] \ \exists C_1 \in \mathcal{C} \ \exists C_2 \in \mathcal{C}: \ E = C_1 \cup C_2) \Longrightarrow (\mathcal{E} \in ((p,\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[E;\tau]). \tag{2.10}$$

В определении суперкомпактного ТП следуем [1–3]: ТП (E,τ) называем суперкомпактным, если $((p,\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[E;\tau] \neq \varnothing$ (суперкомпактность отождествляется с фактом существования замкнутой бинарной предбазы).

§ 3. Суперкомпактные пространства

В настоящем параграфе фиксируем непустое множество M, получая в виде

$$((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[M] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[M] | ((p,\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[E;\mathbf{t}] \neq \varnothing\} \tag{3.1}$$

семейство всех топологий, превращающих M в суперкомпактное ТП, или (короче) семейство суперкомпактных топологий на M. Следуя традиции, суперкомпактное T_2-пространство называем суперкомпактом. С учетом (2.9), (2.10) устанавливается, что

$$\begin{gathered} ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[M] = \{\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[M] | \exists \mathcal{S} \in (p-\mathrm{BAS})_0[M;\mathbf{t}] \ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[M|\mathcal{S}] \\ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \exists G_2 \in \mathcal{G}: \ M = G_1 \cup G_2\}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

В (3.1), (3.2) имеем очевидную двойственность, связанную с (2.8)–(2.10). С учетом леммы Александера [14, 3.12.2] имеем при $\mathbf{t} \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[M]$, что $(M,\mathbf{t})$ есть компактное ТП.

В заключение параграфа отметим некоторые простые свойства, связанные с переходом к подпространству ТП. Так, в частности, $\forall \mathbf{t} \in (\mathrm{top})[M] \ \forall \mathcal{B} \in (\mathbf{t}-\mathrm{BAS})_0[M] \ \forall H \in \mathcal{P}'(M)$

$$\mathcal{B}|_H \in (\mathbf{t}|_H - \mathrm{BAS})_0[H]. \tag{3.3}$$

С другой стороны, как легко видеть, $\forall \mathcal{E} \in (p-\mathrm{Bas})[M] \ \forall H \in \mathcal{P}'(M)$

$$\mathcal{E}|_H \in (p-\mathrm{Bas})[H]. \tag{3.4}$$

Комбинируя (3.3) и (3.4), получаем (см. § 1), что $\forall \mathbf{t} \in (\mathrm{top})[M] \ \forall \mathcal{E} \in (p-\mathrm{BAS})_0[M;\mathbf{t}]$ $\forall H \in \mathcal{P}'(M)$

$$\mathcal{E}|_H \in (p-\mathrm{BAS})_0[H;\mathbf{t}|_H] \tag{3.5}$$

(в (3.5) имеем известное свойство «сужаемости» открытых предбаз).

§ 4. О подпространствах суперкомпактных пространств

Настоящий параграф содержит замечание, относящееся к (3.2)–(3.5). В этой связи отметим весьма очевидное

Замечание 1. Если $(X, \mathbf{t})$ есть ТП, $X \neq \varnothing$ и $Y \in \mathcal{P}'(X)$, то истинна следующая импликация:

$$(\exists \mathcal{S} \in (p-\mathrm{BAS})_0[X;\mathbf{t}]\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathcal{S})$$
$$(Y \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G) \Longrightarrow (\exists G_1 \in \mathcal{G}\ \exists G_2 \in \mathcal{G}:\ Y \subset G_1 \cup G_2)) \Longrightarrow (\mathbf{t}|_Y \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[Y]). \tag{4.1}$$

Доказательство импликации (4.1) по сути дела сводится к непосредственной комбинации (3.2) и (3.5) (отметим, что общие вопросы, связанные с подпространствами суперрасширений, рассматривались в [2]; мы ограничиваемся здесь замечанием простейшего характера). Тем не менее рассмотрим краткую схему, полагая истинной посылку доказываемой импликации (4.1). Зафиксируем открытую предбазу $\mathcal{S} \in (p-\mathrm{BAS})_0[X;\mathbf{t}]$ со следующим свойством: $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathcal{S})$

$$(Y \subset \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G) \Longrightarrow (\exists G_1 \in \mathcal{G}\ \exists G_2 \in \mathcal{G}:\ Y \subset G_1 \cup G_2). \tag{4.2}$$

Тогда в силу (3.5) имеем очевидное свойство

$$\mathcal{S}|_Y \in (p-\mathrm{BAS})_0[Y;\mathbf{t}|_Y].$$

Выберем произвольно $\mathfrak{U} \in (\mathrm{COV})[Y|\mathcal{S}|_Y]$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{S}|_Y)$, и при этом

$$Y = \bigcup_{Z \in \mathfrak{U}} Z. \tag{4.3}$$

Легко видеть, что $\mathfrak{V} \triangleq \{L \in \mathcal{S} | Y \cap L \in \mathfrak{U}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{S})$, и при этом

$$Y \subset \bigcup_{L \in \mathfrak{V}} L \tag{4.4}$$

(учитываем (4.3), то есть тот факт что $\mathfrak{U}$ — покрытие Y). Используя (4.2) и (4.4), получаем для некоторых множеств $L_1 \in \mathfrak{V}$ и $L_2 \in \mathfrak{V}$ свойство $Y \subset L_1 \cup L_2$. Тогда $U_1 \triangleq Y \cap L_1 \in \mathfrak{U}$ и $U_2 \triangleq Y \cap L_2 \in \mathfrak{U}$ реализуют равенство $Y = U_1 \cup U_2$. Следовательно,

$$\exists G_1 \in \mathfrak{U}\ \exists G_2 \in \mathfrak{U}:\ Y = G_1 \cup G_2. \tag{4.5}$$

Поскольку $\mathcal{S}|_Y$ есть открытая предбаза ТП $(Y, \mathbf{t}|_Y)$, получаем из (3.2) и (4.5) требуемое свойство

$$\mathbf{t}|_Y \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[Y].$$

Итак, импликация (4.1) установлена.

§ 5. Суперрасширение топологического пространства

Напомним, что в последующих построениях (E, τ), $E \neq \varnothing$, — фиксированное ТП. Итак, E — непустое множество и $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ (дополнительные условия будут оговариваться по мере надобности). Заметим, что некоторые из рассматриваемых ниже построений соответствуют [3, гл. VII,§ 4]. По ходу изложения отмечаются соотношения, связывающие МСС и замкнутые у/ф (имеются в виду у/ф π-системы $\mathbf{C}_E[\tau]$). В этой связи напомним, что $\varnothing \notin \mathcal{E}\ \forall \mathcal{E} \in (\mathrm{link})[E]$. Легко видеть, что

$$\mathbb{F}^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \subset (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau].$$

Кроме того, имеем следующее легкопроверяемое равенство:

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] = \{\mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau] | \forall A \in \mathbf{C}_E[\tau]\ \ (A \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (A \in \mathcal{E})\}. \tag{5.1}$$

Из (2.2) и (5.1) легко следует вложение

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \subset (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]. \tag{5.2}$$

В свою очередь, (5.2) означает (см. § 2), что $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \neq \varnothing$. При этом (см. [3, 4.7])

$$\forall\, \mathcal{E}_1 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau]\ \exists \mathcal{E}_2 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]:\ \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2. \tag{5.3}$$

Отметим ряд совсем простых свойств. Так, в частности, имеем $\{F\} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau]$ при $F \in \mathbf{C}_E[\tau] \setminus \{\varnothing\}$. В качестве F может быть выбрано множество E. Вообще же

$$\mathcal{E} \cup \{E\} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau]\ \forall\, \mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau].$$

При этом, конечно, имеем (см. (2.7)), что $E \in \mathcal{E}\ \ \forall\, \mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$. Следуя [3, гл. VII, § 4], введем $\forall\, F \in \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|F] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] | F \in \mathcal{E}\}. \tag{5.4}$$

Ясно, что $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|\varnothing] = \varnothing$ и $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|E] = (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$. Кроме того, $\forall\, A \in \mathbf{C}_E[\tau]$ $\forall\, B \in \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(A \subset B) \Longrightarrow ((\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A] \subset (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|B]). \tag{5.5}$$

Полезно отметить очевидную связь замкнутых у/ф и МСС, дополняющую (5.2):

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) = \{\mathfrak{U} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] | A \cap B \in \mathfrak{U}\ \forall\, A \in \mathfrak{U}\ \forall\, B \in \mathfrak{U}\}. \tag{5.6}$$

Итак, замкнутые у/ф суть МСС, замкнутые относительно конечных пересечений, и только они. В связи с (5.6) отметим одно свойство, касающееся тривиальных фильтров (см. § 2): если (E,τ) есть T_1-пространство, то

$$(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]\ \forall\, x \in E \tag{5.7}$$

((5.7) получается фактически комбинацией (2.3) и (5.2) с учетом простейших следствий T_1-отделимости).

З а м е ч а н и е 2. Подчеркнем, что предположение о T_1-отделимости ТП (E,τ) существенно для справедливости (5.7). Рассмотрим соответствующий пример, который, кроме того, показывает, что уже в T_0-пространстве тривиальный замкнутый фильтр может не быть максимальным.

Пусть в данном замечании множество E совпадает с натуральным рядом $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$. Итак, в нашем примере $E = \mathbb{N}$ (E есть натуральный ряд с обычной упорядоченностью $\leqslant$) и $\overrightarrow{n,\infty} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N}\ | n \leqslant k\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда полагаем (в данном примере), что

$$\tau \overset{\triangle}{=} \{\overrightarrow{n,\infty}:\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\} \tag{5.8}$$

(заметим, что $E = \overrightarrow{1,\infty}$). Ясно, что в данном случае $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, а (E,τ) есть T_0-пространство. Пусть $\overline{1,n} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant n\}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (5.8)

$$\mathbf{C}_E[\tau] = \{\overline{1,n}:\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing; E\}.$$

Выберем произвольно $m \in \mathbb{N}$ со свойством $2 \leqslant m$. Рассмотрим тривиальный замкнутый фильтр

$$\mathcal{M} \overset{\triangle}{=} (\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[m] = \{L \in \mathbf{C}_E[\tau] | m \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathbf{C}_E[\tau]).$$

Поскольку $m-1 \in \mathbb{N}$, имеем очевидное свойство

$$\overline{1,m-1} \in \mathbf{C}_E[\tau] \setminus \mathcal{M}, \tag{5.9}$$

причем $\overline{1,m-1} \neq \varnothing$. Заметим, что

$$\mathcal{U} \overset{\triangle}{=} \{\overline{1,k}:\ k \in \mathbb{N}\} \cup \{E\} = \mathbf{C}_E[\tau] \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \tag{5.10}$$

(в самом деле, $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathbf{C}_E[\tau])$), причем $\mathcal{U}$ не только обладает максимальностью, но и является наибольшим в упорядоченности по включению элементом $\mathbb{F}^*(\mathbf{C}_E[\tau])$, поскольку

$$\mathcal{F} \subset \mathbf{C}_E[\tau] \setminus \{\varnothing\} \; \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathbf{C}_E[\tau])$$

согласно (2.1)); в частности (см. (5.2)),

$$\mathcal{U} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E;\tau]. \tag{5.11}$$

При этом $\mathcal{M} \subset \mathbf{C}_E[\tau] \setminus \{\varnothing\}$ в силу (2.1), а потому $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$. Но (см. (5.9), (5.10)) $\overline{1, m-1} \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{M}$. Тогда

$$(\mathcal{M} \subset \mathcal{U}) \& (\mathcal{M} \neq \mathcal{U}), \tag{5.12}$$

а потому (см. (2.2), (5.10)) имеем

$$\mathcal{M} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]). \tag{5.13}$$

В связи с (5.9), (5.11) полезно отметить, что

$$\mathcal{U} = (\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[1].$$

С учетом (5.10), (5.13) получаем, что в данном примере одна «часть» замкнутых тривиальных фильтров обладает свойством максимальности, а другая нет. Из (2.7), (5.2), (5.11) и (5.12) имеем, конечно, что $\mathcal{M} \notin (\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E;\tau]$. □

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Пусть (E,τ) есть T_1-пространство. Тогда* $\forall A \in \mathbf{C}_E[\tau] \; \forall B \in \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(A \subset B) \Longleftrightarrow ((\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|A] \subset (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|B]). \tag{5.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $A \in \mathbf{C}_E[\tau]$ и $B \in \mathbf{C}_E[\tau]$. Пусть

$$(\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|A] \subset (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|B]. \tag{5.15}$$

Покажем, что (в этом случае) $A \subset B$. Допустим противное: $A \setminus B \neq \varnothing$. Пусть $q \in A \setminus B$. С учетом (5.7) $\mathcal{U} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[q] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E;\tau]$, причем $A \in \mathcal{U}$ (см. § 2). Тогда

$$\mathcal{U} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|A]$$

в силу (5.4). С учетом (5.15) получаем, как следствие, включение

$$\mathcal{U} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|B],$$

а потому (см. (5.4)) $B \in \mathcal{U}$, что означает справедливость свойства $q \in B$ (по определению $\mathcal{U}$). Получено противоречие. Итак, $A \subset B$. Тем самым установлена импликация

$$((\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|A] \subset (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|B]) \Longrightarrow (A \subset B).$$

С учетом (5.5) получаем требуемое свойство (5.14). □

С л е д с т в и е 5.1. *Если (E,τ) есть T_1-пространство, то* $\forall A \in \mathbf{C}_E[\tau] \; \forall B \in \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(A = B) \Longleftrightarrow ((\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|A] = (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|B]).$$

Доказательство очевидно. Полагаем теперь, что

$$\mathcal{C}_0^*[E;\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E;\tau|F] : \; F \in \mathbf{C}_E[\tau]\}, \tag{5.16}$$

получая непустое семейство п/м $(\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E;\tau]$. Если $G \in \tau$, то полагаем

$$(\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|G] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E;\tau] | \exists \Sigma \in \mathcal{E} : \; \Sigma \subset G\}; \tag{5.17}$$

разумеется, в (5.17) можно в качестве G использовать дополнения (до E) замкнутых множеств. Если $F \in \mathbf{C}_E[\tau]$, то

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E\setminus F] = (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]\setminus(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|F]. \tag{5.18}$$

Ясно также, что $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E] = (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$. Заметим, что (см. (5.17), (5.18))

$$\mathcal{C}^0_{\mathrm{op}}[E;\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|G]\colon\ G\in\tau\} \in (p-\mathrm{Bas})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]]. \tag{5.19}$$

С учетом (5.19) получаем теперь, что

$$\mathbb{T}^0_\tau[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}^0_{\mathrm{op}}[E;\tau])) \in (\mathrm{top})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]]\colon\ \mathcal{C}^0_{\mathrm{op}}[E;\tau]\subset\mathbb{T}^0_\tau[E]. \tag{5.20}$$

В виде $((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau],\mathbb{T}^0_\tau[E])$ имеем [1–3] суперрасширение исходного ТП (E,τ), причем (см. (5.16), (5.18), (5.19))

$$\mathcal{C}^*_0[E;\tau] = \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathcal{C}^0_{\mathrm{op}}[E;\tau]] \in (p-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau];\mathbb{T}^0_\tau[E]]. \tag{5.21}$$

Итак, (5.16) — замкнутая, а (5.19) — открытая предбазы суперрасширения; последнее — суперкомпактное ТП:

$$\mathbb{T}^0_\tau[E] \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]]; \tag{5.22}$$

см. [3, 4.13]. При этом (см. (2.8), (5.21)) имеет место следующее свойство:

$$\mathcal{C}^*_0[E;\tau] \in ((p,\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau];\mathbb{T}^0_\tau[E]]; \tag{5.23}$$

кроме того, получаем с учетом (5.21)–(5.23), что $\forall\,\chi\in(\mathrm{COV})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]|\mathcal{C}^0_{\mathrm{op}}[E;\tau]]\ \exists\mathbb{X}_1\in\chi$ $\exists\mathbb{X}_2\in\chi$:

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] = \mathbb{X}_1\cup\mathbb{X}_2.$$

Последнее означает (см. (5.19)), что $\forall\,\mathcal{G}\in\mathcal{P}'(\tau)$

$$\begin{gathered}((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] = \bigcup_{G\in\mathcal{G}}(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|G]) \Longrightarrow (\exists G_1\in\mathcal{G}\ \exists G_2\in\mathcal{G}\colon\\ (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] = (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|G_1]\cup(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|G_2]).\end{gathered}$$

§ 6. Суперрасширение и замкнутые ультрафильтры

Сохраняем предположения § 5. Рассмотрим более подробно связь суперрасширения ТП (E,τ) и пространства замкнутых ультрафильтров (ПЗУ) с топологией волмэновского типа. Сначала отметим несколько легкопроверяемых общих свойств. Так, $\forall\,G_1\in\tau\ \forall\,G_2\in\tau$

$$(G_1\cap G_2=\varnothing)\Longrightarrow((\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|G_1]\cap(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|G_2]=\varnothing).$$

Напомним также известное [3, 4.16] свойство: если (E,τ) есть T_4-пространство (см. [3, 2.7]), то $((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau],\mathbb{T}^0_\tau[E])$ является T_2-пространством, а стало быть, и суперкомпактом, то есть суперкомпактным T_2-пространством.

Легко видеть, что $\{F\}\in(\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E,\tau]\ \forall\,F\in\mathbf{C}_E[\tau]\setminus\{\varnothing\}$. Как следствие (см. (5.3)),

$$\mathbf{C}_E[\tau]\setminus\{\varnothing\} = \bigcup_{\mathcal{E}\in(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}\mathcal{E}$$

(в этой связи отметим следующую очевидную аналогию:

$$\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\} = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}\mathcal{U}\ \ \forall\,\mathcal{L}\in\pi[E];$$

данное свойство легко следует из построений [7]). Итак, получаем, как следствие, цепочку равенств

$$\mathbf{C}_E[\tau]\setminus\{\varnothing\} = \bigcup_{\mathcal{E}\in(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}\mathcal{E} = \bigcup_{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])}\mathcal{U}.$$

Напомним, что $\mathbf{C}_E[\tau] \in (\mathrm{LAT})_0[E]$. Это позволяет использовать битопологическое пространство $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ при $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$. Полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^0[\tau|G] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) | \exists U \in \mathcal{U}:\ U \subset G\}\ \forall G \in \tau. \tag{6.1}$$

Посредством (6.1) реализуется конструкция, подобная расширению Волмэна в случае применения T_1-пространства; мы рассматриваем ее в общем случае ТП (E, τ). Легко видеть, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^0[\tau|E \setminus F] = \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \setminus \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(F)\ \forall F \in \mathbf{C}_E[\tau]. \tag{6.2}$$

Введем в рассмотрение следующее непустое семейство:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^0[\tau|G]:\ G \in \tau\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]))). \tag{6.3}$$

Из (6.2), (6.3) вытекает (см. обозначения § 2) очевидное представление

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\tau] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])}[(\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]]] \in (\mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\tau]}^0[E] - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])]. \tag{6.4}$$

Мы получили (см.(6.4)) открытую базу ПЗУ. При этом, как легко видеть (см. (5.17), (6.1)),

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^0[\tau|G] = (\mathrm{cl} - \mathrm{link})_{\mathrm{op}}^0[E; \tau|G] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])\ \ \forall G \in \tau.$$

В виде непосредственного следствия получаем равенство (см. (5.19), (6.4))

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\tau] = \mathcal{C}_{\mathrm{op}}^0[E; \tau]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])} \tag{6.5}$$

(заметим, что согласно (5.19) и (5.20) $\mathcal{C}_{\mathrm{op}}^0[E; \tau]$ есть предбаза объемлющего пространства, а $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}[\tau]$ — база ТП с «единицей» $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])$). В свою очередь, из (6.5) вытекает следующее

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Топология $\mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\tau]}^0[E]$ индуцирована на $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])$ топологией $\mathbb{T}_\tau^0[E]$:*

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\tau]}^0[E] = \mathbb{T}_\tau^0[E]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])}.$$

Итак, в виде $(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\tau]}^0[E])$ имеем подпространство ТП $((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E; \tau], \mathbb{T}_\tau^0[E])$. Тем самым реализуется естественная связь суперрасширения ТП (E, τ) и соответствующего ПЗУ. С учетом положений §§ 2 и 3 получаем, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \in (\mathbb{T}_\tau^0[E] - \mathrm{comp})[(\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E; \tau]]. \tag{6.6}$$

Из (6.6) имеем по свойствам T_2-пространств, что справедливо следующее свойство: если (E, τ) есть T_4-пространство, то

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]), \mathbf{T}_{\mathbf{C}_E[\tau]}^0[E])$$

есть T_2-пространство и, более того, компакт; при этом, конечно,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \in \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}_\tau^0[E]] \tag{6.7}$$

(в виде ПЗУ имеем замкнутое подпространство суперрасширения).

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Если $\mathcal{E} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E; \tau]$, то*

$$\{\mathcal{E}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E; \tau|\Sigma]. \tag{6.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mathcal{W}$ из множества-пересечения в правой части (6.8). Тогда $\mathcal{W} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{link})_0[E; \tau]$ и, согласно (5.4), $\mathcal{E} \subset \mathcal{W}$. С учетом максимальности $\mathcal{E}$ получаем равенство $\mathcal{E} = \mathcal{W}$, а тогда $\mathcal{W} \in \{\mathcal{E}\}$. Установлено, что

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} (\mathrm{cl} - \mathrm{link})^0[E; \tau|\Sigma] \subset \{\mathcal{E}\}.$$

Противоположное вложение очевидно. $\square$

П р е д л о ж е н и е 6.3. *Если* $F \in \mathbf{C}_E[\tau]$, *то*

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|F] \in \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^0_\tau[E]].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $F \in \mathbf{C}_E[\tau]$. Тогда $E \setminus F \in \tau$, и в силу (5.18)

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E\setminus F] = (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \setminus (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|F],$$

где $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E\setminus F] \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{op}}[E;\tau]$ и, в частности, $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E\setminus F] \in \mathbb{T}^0_\tau[E]$ (см. (5.20)). Дальнейшее рассуждение очевидно. □

П р е д л о ж е н и е 6.4. $((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau], \mathbb{T}^0_\tau[E])$ *есть* T_1*-пространство.*

Доказательство сводится к непосредственной комбинации предложений 6.2, 6.3. Из (5.22) и предложения 6.4 получаем, что (в общем случае ТП (E,τ)) справедливо следующее положение: $((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau], \mathbb{T}^0_\tau[E])$ есть суперкомпактное T_1-пространство.

В связи с предложением 6.4 отметим некоторые простые представления окрестностей, реализующих T_1-отделимость. Прежде всего укажем следующее свойство: если $\mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$, $\Sigma \in \mathcal{E}$ и $F \in \mathbf{C}_E[\tau] \cap \mathcal{P}(E\setminus\Sigma)$, то

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E\setminus F] \in N^0_{\mathbb{T}^0_\tau[E]}(\mathcal{E}).$$

С учетом максимальности семейств из $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$ легко проверяется, что для любых семейств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_1 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$, $\mathcal{E}_2 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$)

$$(\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow ((\mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2 \neq \varnothing)\&(\mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1 \neq \varnothing)).$$

Данное свойство, реализуемое для у/ф, использовалось в [7] в связи с процедурами расширения абстрактных задач о достижимости. Кроме того, отметим в связи с (5.1), что $\forall\,\mathcal{E}_1 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]\ \forall\,\mathcal{E}_2 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$

$$(\mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow (\exists F_1 \in \mathcal{E}_1\ \exists F_2 \in \mathcal{E}_2 :\ F_1 \cap F_2 = \varnothing).$$

Для последующих построений полезно приводимое ниже общее определение: если $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ суть непустые семейства множеств, то

$$(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2] \overset{\triangle}{=} \{z \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 | \mathrm{pr}_1(z) \cap \mathrm{pr}_2(z) = \varnothing\}; \tag{6.9}$$

в частности, (6.9) можно рассматривать в случае, когда $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ — элементы $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$, то есть являются МСС. Легко видеть, что при $\mathcal{E}_1 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$, $\mathcal{E}_2 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$ и $z \in (\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E\setminus \mathrm{pr}_2(z)] \in N^0_{\mathbb{T}^0_\tau[E]}(\mathcal{E}_1):\ \mathcal{E}_2 \notin (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0_{\mathrm{op}}[E;\tau|E\setminus \mathrm{pr}_2(z)].$$

В этой связи отметим, что в силу (6.9)

$$(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2] \neq \varnothing\ \ \forall\,\mathcal{E}_1 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]\ \forall\,\mathcal{E}_2 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]\setminus\{\mathcal{E}_1\}. \tag{6.10}$$

§ 7. Суперрасширение как нульмерное T_2-пространство

Вернемся к рассмотрению семейства (5.16), которое, согласно (5.21), является замкнутой предбазой суперрасширения. Легко видеть, однако, что

$$\mathcal{C}^*_0[E;\tau] \in (p-\mathrm{Bas})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]] \tag{7.1}$$

(действительно, $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$ совпадает с объединением всех множеств семейства (5.16)). Из (5.21) и (7.1) имеем, как следствие,

$$\mathcal{C}^*_0[E;\tau] \in (p-\mathrm{Bas})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]] \cap (p-\mathrm{Bas})_{\mathrm{cl}}[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]]. \tag{7.2}$$

Согласно (7.2) семейство (5.16) является одновременно и открытой, и замкнутой предбазой. Представления, связанные со свойствами замкнутой предбазы, были предметом рассмотрения в двух предыдущих параграфах. Сейчас обратимся к (7.1), получая, что

$$\mathbb{T}^*_\tau[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}^*_0[E;\tau])) \in (\mathrm{top})[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]]. \tag{7.3}$$

Рассмотрим некоторые свойства топологии (7.3), для которой, конечно,

$$\mathcal{C}^*_0[E;\tau] \subset \mathbb{T}^*_\tau[E]. \tag{7.4}$$

С учетом (6.9) получаем, в частности, следующее свойство:

$$\begin{gathered}(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|\mathrm{pr}_1(z)] \cap (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|\mathrm{pr}_2(z)] = \varnothing\\ \forall\,\mathcal{E}_1 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]\ \forall\,\mathcal{E}_2 \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]\ \forall\,z \in (\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2].\end{gathered} \tag{7.5}$$

Из (5.16), (6.10), (7.4) и (7.5) вытекает важное положение, а именно: справедливо

П р е д л о ж е н и е 7.1. $((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau], \mathbb{T}^*_\tau[E])$ *есть T_2-простанство.*

Покажем, что упомянутое ТП с «единицей» $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$ нульмерно. Для этого сначала установим ряд вспомогательных утверждений.

П р е д л о ж е н и е 7.2. *Если $A \in \mathbf{C}_E[\tau]$, то справедливо равенство*

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A] = \{\mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] | A \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall\,\Sigma \in \mathcal{E}\}. \tag{7.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через Ω обозначим множество в правой части (7.6) (множество $A \in \mathbf{C}_E[\tau]$ фиксируем). Если $\mathcal{S} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A]$, то согласно (5.4) $\mathcal{S} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$, и при этом $A \in \mathcal{S}$. Поскольку, в частности, $\mathcal{S} \in (\mathrm{link})[E]$ (см. § 2), то $A \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\mathcal{S} \in \Omega$. Вложение

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A] \subset \Omega \tag{7.7}$$

установлено. Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$, и при этом $A \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall\,\Sigma \in \mathcal{V}$. Поскольку A замкнуто, из (5.1) вытекает, что $A \in \mathcal{V}$. С учетом (5.4) получаем, что $\mathcal{V} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A]$, чем и завершается проверка вложения, противоположного (7.7). □

П р е д л о ж е н и е 7.3. *Если $A \in \mathbf{C}_E[\tau]$, то* $(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A] \in \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^*_\tau[E]]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем замкнутое множество A. Выберем произвольную МСС

$$\mathcal{V} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \setminus (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A]. \tag{7.8}$$

В силу предложения 7.2 для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$ имеем $A \cap V = \varnothing$. Рассмотрим множество

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|V] \in \mathcal{C}^*_0[E;\tau] \tag{7.9}$$

(см. (5.16)). Легко видеть, что

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|V] \subset (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \setminus (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A].$$

С учетом (7.9) получаем, в частности, что $\exists \mathbb{B} \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}^*_0[E;\tau])$:

$$(\mathcal{V} \in \mathbb{B})\&(\mathbb{B} \subset (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \setminus (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A]).$$

Поскольку выбор $\mathcal{V}$ (7.8) был произвольным, установлено (см. (7.3)), что

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \setminus (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A] \in \mathbb{T}^*_\tau[E],$$

откуда и вытекает требуемое предложение. □

Из (5.16) и предложения 7.3 вытекает, что

$$\mathcal{C}_0^*[E;\tau] \subset \mathbf{C}_{(\mathrm{cl-link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}_\tau^*[E]]. \tag{7.10}$$

Из (7.10) получаем по свойствам замкнутых множеств, что

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}_0^*[E;\tau]) \subset \mathbf{C}_{(\mathrm{cl-link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}_\tau^*[E]].$$

Получили свойство замкнутости множеств из открытой базы, поскольку (см. (7.3))

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{C}_0^*[E;\tau]) \in (\mathbb{T}_\tau^*[E] - \mathrm{BAS})_0[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]].$$

Итак, мы получили с учетом предложения 7.1, что (см. [14, 6.2]) $((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau], \mathbb{T}_\tau^*[E])$ есть нульмерное T_2-пространство.

П р е д л о ж е н и е 7.4. *Справедливо следующее равенство:*

$$(\mathbb{UF})[E;\mathbf{C}_E[\tau]] = \mathcal{C}_0^*[E;\tau]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.4), (5.2) и (5.4) вытекает, что

$$\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(A) = (\mathrm{cl}-\mathrm{link})^0[E;\tau|A] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \ \forall\, A \in \mathbf{C}_E[\tau].$$

Поэтому с учетом (5.16) и определений § 2 получаем, что

$$\mathbb{G} \cap \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]) \in (\mathbb{UF})[E;\mathbf{C}_E[\tau]] \ \forall\, \mathbb{G} \in \mathcal{C}_0^*[E;\tau].$$

Кроме того (см. § 2), имеем с очевидностью, что

$$\forall\, \mathbb{B} \in (\mathbb{UF})[E;\mathbf{C}_E[\tau]] \ \exists \mathbb{G} \in \mathcal{C}_0^*[E;\tau]:\ \mathbb{B} = \mathbb{G} \cap \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]).$$

В итоге получаем следующую цепочку равенств:

$$(\mathbb{UF})[E;\mathbf{C}_E[\tau]] = \{\mathbb{G} \cap \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]):\ \mathbb{G} \in \mathcal{C}_0^*[E;\tau]\} = \mathcal{C}_0^*[E;\tau]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])}.$$

Предложение доказано. □

Из (2.5), (7.3) и предложения 7.4 вытекает следующее равенство топологий:

$$\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E] = \mathbb{T}_\tau^*[E]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])}. \tag{7.11}$$

Итак, установлено, что $(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]), \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])$ есть подпространство ТП $((\mathrm{cl-link})_0[E;\tau], \mathbb{T}_\tau^*[E])$.

П р е д л о ж е н и е 7.5. *Топологии* $\mathbb{T}_\tau^0[E]$ *и* $\mathbb{T}_\tau^*[E]$ *сравнимы, и при этом*

$$\mathbb{T}_\tau^0[E] \subset \mathbb{T}_\tau^*[E].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учтем (5.16) и (5.21). Действительно, согласно (5.21) имеем по определению замкнутой предбазы произвольного ТП (см. § 1), что

$$\{\cup\}_\sharp(\mathcal{C}_0^*[E;\tau]) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau];\mathbb{T}_\tau^0[E]], \tag{7.12}$$

и при этом, конечно, $\mathcal{C}_0^*[E;\tau] \subset \{\cup\}_\sharp(\mathcal{C}_0^*[E;\tau])$ (см. определения § 1). В силу (7.12)

$$\mathbf{C}_{(\mathrm{cl-link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}_\tau^0[E]] = \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp(\mathcal{C}_0^*[E;\tau])). \tag{7.13}$$

Как следствие, получаем с очевидностью, что

$$\{\cap\}(\mathcal{C}_0^*[E;\tau]) \subset \mathbf{C}_{(\mathrm{cl-link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}_\tau^0[E]].$$

Выберем и зафиксируем произвольное множество

$$\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^0_\tau[E]]. \tag{7.14}$$

В силу (7.13) получаем, что для некоторого $\chi \in \mathcal{P}'(\{\cup\}_\sharp(\mathcal{C}^*_0[E;\tau]))$

$$\mathbb{F} = \bigcap_{\mathbb{X}\in\chi} \mathbb{X}. \tag{7.15}$$

При этом $\chi \neq \varnothing$ и $\chi \subset \{\cup\}_\sharp(\mathcal{C}^*_0[E;\tau])$. Заметим, что в силу (7.10)

$$\{\cup\}_\sharp(\mathcal{C}^*_0[E;\tau]) \subset \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^*_\tau[E]]$$

(используем простейшие свойства семейства замкнутых множеств, то есть свойства замкнутой топологии). Как следствие, получаем, что

$$\chi \subset \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^*_\tau[E]].$$

Поэтому $\chi \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^*_\tau[E]])$, а потому (см. (7.15))

$$\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^*_\tau[E]]$$

(произвольная замкнутая топология содержит пересечения своих непустых подсемейств). Поскольку выбор $\mathbb{F}$ (см. (7.14)) был произвольным, установлено, что

$$\mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^0_\tau[E]] \subset \mathbf{C}_{(\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]}[\mathbb{T}^*_\tau[E]],$$

откуда (по двойственности) и вытекает требуемое утверждение. □

Из предложения 7.5 вытекает, что триплет

$$((\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau], \mathbb{T}^0_\tau[E], \mathbb{T}^*_\tau[E]) \tag{7.16}$$

есть битопологическое пространство. Из (7.11) и предложения 6.1 следует

Т е о р е м а 7.1. *Битопологическое ПЗУ* $(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E], \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])$ *индуцировано из суперрасширения битопологическим пространством* (7.16)*:*

$$(\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E] = \mathbb{T}^0_\tau[E]|_{\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])})\&(\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E] = \mathbb{T}^*_\tau[E]|_{\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])}).$$

Пусть теперь до конца настоящего параграфа (E,τ) есть T_1-пространство. Тогда (см. (5.6), (5.7)) имеем очевидное свойство максимальности тривиальных у/ф

$$(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]) \ \ \forall x \in E.$$

Поэтому определены множества-замыкания

$$\mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon\ x\in E\}, \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])),$$
$$\mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon\ x\in E\}, \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])).$$

При этом (см. § 2) $\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E] \subset \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$, а потому

$$\mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon\ x\in E\}, \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) \subset \mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon\ x\in E\}, \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]). \tag{7.17}$$

Напомним, что (см. [15, (1.21)] справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon\ x\in E\}, \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]) \tag{7.18}$$

(учитываем, что в рассматриваемом сейчас случае T_1-пространства (E,τ) непременно $\mathbf{C}_E[\tau] \in \tilde{\pi}^0[E]$). Из (7.17) и (7.18) получаем следующую цепочку равенств:

$$\mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon x \in E\}, \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon x \in E\}, \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]).$$

Заметим, что в этих построениях ТП $(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])$ отвечает расширению Волмэна.

Возвращаясь к [3, 4.18], напомним, что суперрасширение отличается от $\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])$ уже в простейших случаях. Для того чтобы проиллюстрировать это, воспользуемся модификацией примера [3, 4.18].

Итак, полагаем сейчас, что $E = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant 3\}$, получая трехэлементное множество, содержащее числа $1, 2$ и 3. Полагаем в данном примере, что $\tau = \mathcal{P}(E)$ (дискретная топология), и при этом

$$\mathcal{E} = \{F \in \mathcal{P}'(E) | \exists z \in E \times E\colon\ (F = \{\mathrm{pr}_1(z); \mathrm{pr}_2(z)\}) \& (\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(z))\} \cup \{E\}; \tag{7.19}$$

итак, в нашем случае $\mathcal{E}$ — семейство, содержащее следующие четыре множества:

$$\{1;2\},\ \{1;3\},\ \{2;3\},\ E$$

(учитываем, что $\{\mathrm{pr}_1(z); \mathrm{pr}_2(z)\} = \{\mathrm{pr}_2(z); \mathrm{pr}_1(z)\}\ \forall\, z \in E \times E$). Легко видеть, что (см. (7.19)) $\mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})[E;\tau]$. Более того, $\mathcal{E}$ является МСС, то есть

$$\mathcal{E} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau]$$

(ни один из синглетонов нельзя «добавить» к $\mathcal{E}$, не разрушая сцепленность). С другой стороны, $\mathcal{E} \notin \mathbb{F}^*(\mathbf{C}_E[\tau])$ (так, например, $\{1;2\} \cap \{1;3\} = \{1\} \notin \mathcal{E}$). Тем более

$$\mathcal{E} \notin \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]).$$

Поскольку в нашем случае (E,τ) есть T_4-пространство, справедливо (6.7), и при этом

$$\mathbf{G}_0 \overset{\triangle}{=} (\mathrm{cl}-\mathrm{link})_0[E;\tau] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]) \in \mathbb{T}^0_\tau[E] \setminus \{\varnothing\};$$

точнее, $\mathbf{G}_0 \in N^0_{\mathbb{T}^0_\tau[E]}(\mathcal{E})$. Напомним еще раз, что данный пример является простой модификацией [3, 4.18].

§ 8. Добавление 1: некоторые свойства плотности

Мы полагаем в настоящем параграфе, что (E,τ), $E \neq \varnothing$, есть T_1-пространство, получая, в частности, свойство $\mathbf{C}_E[\tau] \in \tilde{\pi}^0[E]$. Рассмотрим некоторые свойства ПЗУ, связанные с погружением в упомянутое ПЗУ исходного ТП. Будем при этом ориентироваться на оснащение ПЗУ, отвечающее расширению Волмэна.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Если X и Y — непустые множества, то, следуя [9, с. 77], через Y^X обозначаем множество всех отображений из множества X в множество Y; если при этом $f \in Y^X$ и $Z \in \mathcal{P}(X)$, то $f^1(Z) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon\ x \in Z\} \in \mathcal{P}(Y)$ есть образ Z при отображении f (если $Z \neq \varnothing$, то и $f^1(Z) \neq \varnothing$).

При условии, что (как уже отмечалось) E — непустое множество и $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ в виде

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot] \overset{\triangle}{=} ((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x])_{x \in E}$$

имеем элемент $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})^E$, то есть отображение из множества E в множество $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$; если при этом $A \in \mathcal{P}(E)$ (A — п/м E), то в соответствии с общим определением

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A) = \{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon\ x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$$

(имеем образ множества A в ПЗУ). Нас интересует случай $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$. Итак, при $A \in \mathcal{P}(E)$ получаем множество-образ

$$(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A) = \{(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x]\colon\ x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])); \tag{8.1}$$

при $A \neq \varnothing$ множество (8.1) непусто. В соответствии с (2.5) имеем следующее представление множества-замыкания: при $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau]) | A \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}\} \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)); \quad (8.2)$$

см. [15, § 1] (учитываем, что $A \subset \mathrm{cl}(A, \tau)$). Заметим, что множество в правой части (8.2) замкнуто и в смысле топологии $\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$, поскольку является элементом замкнутой предбазы. Рассмотрим теперь ситуацию, когда и первое в (8.2) множество заменено на замыкание в смысле последней топологии. Итак, нас интересуют множества

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]), \ A \in \mathcal{P}(E).$$

С целью их представления отметим несколько вспомогательных положений.

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$ и $F \in \mathbf{C}_E[\tau]$, то*

$$((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A) \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(F)) \Longrightarrow (A \subset F). \quad (8.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем A и F в соответствии с условиями предложения. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (8.3). Покажем, что $A \subset F$. Допустим противное: $A \setminus F \neq \varnothing$. Пусть $x_* \in A \setminus F$. Тогда

$$\mathcal{U} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[x_*] \in (\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A),$$

а потому $\mathcal{U} \in \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(F)$; это означает справедливость включения $F \in \mathcal{U}$ (см. § 2), а тогда $x_* \in F$. Получили противоречие, доказывающее вложение $A \subset F$. □

Напомним, что в рассматриваемом случае, согласно [16, (4.7)], $\forall F_1 \in \mathbf{C}_E[\tau] \ \forall F_2 \in \mathbf{C}_E[\tau]$

$$(F_1 \subset F_2) \Longleftrightarrow (\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(F_1) \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(F_2)). \quad (8.4)$$

П р е д л о ж е н и е 8.2. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то справедливо равенство*

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)). \quad (8.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathbf{A}$ множество-замыкание в левой части (8.5). Ясно, что

$$\mathbf{A} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])}[\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]], \quad (8.6)$$

и при этом имеет место следующее свойство:

$$(\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A) \subset \mathbf{A}.$$

Заметим, что $(\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])]$, и при этом

$$\{\cap\}((\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]]) = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])}[\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]] \quad (8.7)$$

(см. § 2). Из (8.6) и (8.7) следует, что

$$\mathbf{A} \in \{\cap\}((\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]]).$$

Тогда (см. § 1) для некоторого семейства $\alpha \in \mathcal{P}'((\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]])$ справедливо равенство

$$\mathbf{A} = \bigcap_{\mathbb{S} \in \alpha} \mathbb{S}. \quad (8.8)$$

Выберем произвольно $\Lambda \in \alpha$. Тогда, в частности, $\Lambda \in (\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]]$, а потому для некоторого множества $\Psi \in \mathbf{C}_E[\tau]$ справедливо равенство

$$\Lambda = \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\Psi). \quad (8.9)$$

Из (8.8) с учетом (8.9) следует, что
$$\mathbf{A} \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\Psi). \tag{8.10}$$
В свою очередь, из (8.10) вытекает, что имеет место вложение
$$(\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A) \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\Psi).$$
Как следствие, из предложения 8.1 вытекает, что $A \subset \Psi$, откуда, в силу замкнутости множества Ψ следует, что
$$\mathrm{cl}(A, \tau) \subset \Psi. \tag{8.11}$$
Из (8.4) и (8.11) получаем очевидное следствие
$$\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)) \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\Psi) = \Lambda.$$
Поскольку выбор Λ был произвольным, имеем, что (см. (8.8))
$$\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)) \subset \mathbf{A}. \tag{8.12}$$
Отметим, что (см. определения § 2)
$$(\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]] \subset \{\cap\}((\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]]) = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])}[\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]]. \tag{8.13}$$
С другой стороны, $\mathrm{cl}(A, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$, и при этом
$$\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)) \in (\mathbb{UF})[E; \mathbf{C}_E[\tau]]$$
(см. § 2). С учетом (8.13) получаем включение
$$\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau])}[\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]], \tag{8.14}$$
то есть множество в левой части (8.14) замкнуто в ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])$. Далее, пусть
$$\mathfrak{U} \in (\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A).$$
Тогда (см. § 2) имеем для некоторого $x_* \in A$
$$\mathfrak{U} = (\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[x_*] = \{F \in \mathbf{C}_E[\tau] | x_* \in F\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{C}_E[\tau]). \tag{8.15}$$
Ясно, что $x_* \in \mathrm{cl}(A, \tau)$, а потому (см. (8.15)) имеем
$$\mathrm{cl}(A, \tau) \in \mathfrak{U}.$$
В силу (2.4) и (8.15) получаем, что $\mathfrak{U} \in \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau))$. Поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено, что
$$(\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A) \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)),$$
а тогда с учетом (8.14) имеем, по определению множества $\mathbf{A}$, следующее вложение:
$$\mathbf{A} \subset \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)).$$
С учетом (8.12) получаем теперь требуемое равенство:
$$\mathbf{A} = \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)).$$
Предложение доказано. □

С л е д с т в и е 8.1. *Если $A \in \mathcal{P}(E)$, то справедливо равенство*
$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\mathrm{cl}(A, \tau)), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $A \in \mathcal{P}(E)$ и получаем $\mathrm{cl}(A, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$. Тогда [8, (4.10)]

$$\begin{gathered}\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\mathrm{cl}(A, \tau)), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \\ = \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\mathrm{cl}(A, \tau)), \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau)).\end{gathered} \tag{8.16}$$

В (8.16) учтено то обстоятельство, что в рассматриваемом сейчас случае T_1-пространства (E, τ) имеет место

$$\mathbf{C}_E[\tau] \in (\mathrm{LAT})_0[E]\colon\ \{x\} \in \mathbf{C}_E[\tau]\ \forall\, x \in E$$

(итак, имеем свойство замкнутости всех синглетонов точек из E). Из (8.16) и предложения 8.2 вытекает требуемое равенство замыканий в топологии $\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$. □

Из следствия 8.1 вытекает с очевидностью, что

$$\begin{gathered}\mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[x]\colon\ x \in A\}, \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \\ = \mathrm{cl}(\{(\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[x]\colon\ x \in \mathrm{cl}(A, \tau)\}, \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A, \tau))\ \forall\, A \in \mathcal{P}(E).\end{gathered} \tag{8.17}$$

В конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости, рассматриваемых в [4–8, 13, 15–17], важную роль играют множества притяжения (МП) в пространстве обобщенных элементов (ОЭ), что связано с построением компактификаторов (см., в частности, [17, раздел 4]. Последние, как показано в [7, 8], можно, в частности, конструировать на основе расширения Волмэна. В связи с (8.17), предложением 8.2 и следствием 8.1 рассмотрим кратко упомянутую возможность, полагая для краткости, что

$$(\mathrm{Adm})[\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])\ \ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

С целью более кратких обозначений зафиксируем (непустое) семейство $\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. В интересах согласования с конструкциями [13, 15–17] полагаем, что

$$\forall\, \Sigma_1 \in \mathfrak{E}\ \forall\, \Sigma_2 \in \mathfrak{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathfrak{E}\colon\ \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \tag{8.18}$$

(итак, мы рассматриваем направленное семейство, что достаточно (см. [8, с. 321; 12]) для всех наших последующих целей). При данном условии нужный вариант МП есть множество

$$(\mathrm{Adm})[\mathfrak{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])), \tag{8.19}$$

точки которого (а это замкнутые у/ф) играют роль допустимых ОЭ, отвечающих постановке, в которой семейство $\mathfrak{E}$ используется в качестве ограничений асимптотического характера (ОАХ). Общие вопросы, связанные с решением задач о достижимости (в ТП) при тех или иных ОАХ, рассматривались в [4–8, 15–17]. В настоящем параграфе коснемся только одного частного вопроса, имеющего отношение к представлению МП, подобных (8.19) и являющихся по смыслу вспомогательными конструкциями (имеется в виду применение в духе [8, теорема 7.1]). А именно, рассмотрим вопрос о замене $\mathfrak{E}$ тем или иным направленным (см. (8.18)) семейством п/м E. В связи с этим наряду с $\mathfrak{E}$ рассмотрим семейство

$$\mathfrak{E}_{\mathrm{cl}} \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{cl}(\Sigma, \tau)\colon\ \Sigma \in \mathfrak{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \tag{8.20}$$

всевозможных замыканий множеств из $\mathfrak{E}$. Из (8.18) по аксиомам оператора замыкания имеем, конечно, что

$$\forall\, \Sigma^{(1)} \in \mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}\ \forall\, \Sigma^{(2)} \in \mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}\ \exists \Sigma^{(3)} \in \mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}\colon\ \Sigma^{(3)} \subset \Sigma^{(1)} \cap \Sigma^{(2)},$$

то есть семейство (8.20) является направленным. Наряду с (8.19) рассмотрим МП (см. [8, (5.2)]) следующего вида:

$$(\mathrm{Adm})[\mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}] \overset{\triangle}{=} \bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}} \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])). \tag{8.21}$$

С учетом следствия 8.1 имеем, однако, что

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\Sigma),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])=\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(\mathrm{cl}(\Sigma,\tau)),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])\ \forall\,\Sigma\in\mathfrak{E}.$$

Используя (8.19)–(8.21), получаем цепочку равенств

$$\begin{gathered}(\mathrm{Adm})[\mathfrak{E}]=(\mathrm{Adm})[\mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}]=\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{E}}\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(\Sigma,\tau))=\\=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])|\mathrm{cl}(\Sigma,\tau)\in\mathcal{U}\ \forall\,\Sigma\in\mathfrak{E}\}=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])|\mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}\subset\mathcal{U}\}.\end{gathered}\tag{8.22}$$

Из (8.22) следует совпадение двух МП в пространстве ОЭ, одно из которых отвечает ОАХ в виде $\mathfrak{E}$, а второе — ОАХ в виде семейства $\mathfrak{E}_{\mathrm{cl}}$.

В заключение отметим некоторые соотношения, связывающие операторы замыкания в топологиях $\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$ и $\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$. Будем рассматривать при этом процедуру погружения множества E в ПЗУ.

П р е д л о ж е н и е 8.3. *Если $A\in\mathcal{P}(E)$ и $x_*\in\mathrm{cl}(A,\tau)\setminus A$, то*

$$(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x_*]\in\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])\setminus\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]).\tag{8.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{U}\overset{\triangle}{=}(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x_*]$. Тогда $\mathfrak{U}\in\mathbb{F}^*_0(\mathbf{C}_E[\tau])$, и при этом справедливо равенство

$$\mathfrak{U}=\{F\in\mathbf{C}_E[\tau]|x_*\in F\}.$$

Напомним, что по свойствам T_1-пространств $\{x_*\}\in\mathbf{C}_E[\tau]$, а потому $\{x_*\}\in\mathfrak{U}$. По выбору x_* имеем, конечно, свойство $\{x_*\}\cap A=\varnothing$. С учетом (8.2) получаем, что

$$\mathfrak{U}\notin\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]).\tag{8.24}$$

С другой стороны, по выбору x_* получаем включение $\mathrm{cl}(A,\tau)\in\mathfrak{U}$, а тогда

$$\mathfrak{U}\in\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(\mathrm{cl}(A,\tau)).$$

С учетом предложения 8.2 получаем теперь, что

$$\mathfrak{U}\in\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]),$$

откуда в силу (8.24) вытекает требуемое свойство (8.23). □

Напомним, что, поскольку топологии $\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$ и $\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$ сравнимы, имеем

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])\subset\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])\ \forall\,A\in\mathcal{P}(E).$$

Т е о р е м а 8.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{C}_E[\tau]=\{A\in\mathcal{P}(E)|\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])=\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])\}.\tag{8.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathfrak{H}$ семейство в правой части (8.25). Требуется установить следующее равенство:

$$\mathbf{C}_E[\tau]=\mathfrak{H}.\tag{8.26}$$

Напомним, что $\mathbf{C}_E[\tau]\in(\mathrm{LAT})_0[E]$, и при этом $\{x\}\in\mathbf{C}_E[\tau]\ \forall\,x\in E$. Тогда в силу [8, (3.4), (4.10)] имеем свойство

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(F),\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])=\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(F),\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E])=\Phi_{\mathbf{C}_E[\tau]}(F)\ \forall\,F\in\mathbf{C}_E[\tau].$$

Как следствие, получаем очевидное вложение

$$\mathbf{C}_E[\tau]\subset\mathfrak{H}.\tag{8.27}$$

Выберем произвольное множество $H \in \mathfrak{H}$. Тогда $H \in \mathcal{P}(E)$, и при этом справедливо равенство

$$\mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(H), \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) = \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau] - \mathrm{triv})[\cdot]^1(H), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]). \tag{8.28}$$

Покажем, что $H \in \mathbf{C}_E[\tau]$. В самом деле, допустим противное:

$$H \notin \mathbf{C}_E[\tau]. \tag{8.29}$$

Тогда $H \neq \mathrm{cl}(H,\tau)$, так как $\mathrm{cl}(H,\tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$. Поскольку $H \subset \mathrm{cl}(H,\tau)$, имеем в рассматриваемом случае следующее свойство непустоты:

$$\mathrm{cl}(H,\tau) \setminus H \neq \varnothing.$$

С учетом этого выберем $x_* \in \mathrm{cl}(H,\tau) \setminus H$. Тогда из предложения 8.3 получаем, следовательно, вопреки (8.28), что

$$(\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[x_*] \in \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(H), \mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]) \setminus \mathrm{cl}((\mathbf{C}_E[\tau]-\mathrm{triv})[\cdot]^1(H), \mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]). \tag{8.30}$$

Полученное при условии (8.29) противоречие (см. (8.28), (8.30)) означает, что само (8.29) невозможно, и, стало быть, $H \in \mathbf{C}_E[\tau]$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathfrak{H} \subset \mathbf{C}_E[\tau].$$

С учетом (8.27) получаем требуемое равенство (8.26). □

§ 9. Добавление, 2

В предыдущем параграфе для целей представления замыканий образов произвольных п/м непустого множества E существенно использовалось оснащение данного множества топологией. Сейчас мы рассмотрим (несколько «усеченный») вариант подобного представления для случая, когда на упомянутом множестве задана произвольная решетка его п/м с «нулем» и «единицей»; предполагаем, кроме того, выполненным свойство отделимости данной решетки.

Итак, всюду в настоящем параграфе фиксируется решетка

$$\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E] \cap \tilde{\pi}^0[E], \tag{9.1}$$

где E — непустое множество. Как уже отмечалось в § 2, у нас определено битопологическое пространство

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[E], \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]), \tag{9.2}$$

$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. Напомним следующее свойство плотности п/м множества E при погружении в $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ (см. [15, (1.20)]):

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \;\forall\, L \in \mathcal{L}. \tag{9.3}$$

На самом же деле подобные свойства плотности реализуются в битопологическом пространстве (9.2) (см. [8, (4.10)]). Напомним здесь соответствующее рассуждение на этот счет.

Итак, в силу сравнимости топологий $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[E]$ и $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$ получаем, что

$$\mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \subset \mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[E]) \;\forall\, A \in \mathcal{P}(E).$$

В частности, получаем следующую систему вложений:

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathrm{cl}((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[E]) \;\forall\, L \in \mathcal{L}; \tag{9.4}$$

см. [15, (1.20)]. Напомним, что (в рассматриваемом случае отделимой решетки $\mathcal{L}$ с «нулем» и «единицей») семейство $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ есть замкнутая база. При этом (см. § 2)

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}[E]] = \{\cap\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]). \tag{9.5}$$

Из (9.5), в частности, следует свойство

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]]\ \forall\, L \in \mathcal{L} \tag{9.6}$$

(в самом деле, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}])$; осталось учесть (9.5)). Кроме того,

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L)\ \forall\, L \in \mathcal{L}. \tag{9.7}$$

Из (9.6) и (9.7) получаем следующую очевидную систему оценок:

$$\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L)\ \forall\, L \in \mathcal{L}. \tag{9.8}$$

Из (9.4) и (9.8) вытекает свойство плотности

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E])\ \forall\, L \in \mathcal{L}. \tag{9.9}$$

С учетом (9.3) и (9.9) получаем следующее положение о плотности в смысле битопологического пространства (9.2).

П р е д л о ж е н и е 9.1. *Если $L \in \mathcal{L}$, то справедлива цепочка равенств*

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]) = \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]).$$

Данное положение аналогично [8, (4.10)], где, однако, относительно $\mathcal{L}$ предполагалось дополнительно свойство

$$\{x\} \in \mathcal{L}\ \forall\, x \in E;$$

предложение же 9.1 установлено при более общем условии (9.1). В этой связи рассмотрим следующий

П р и м е р 9.1. Пусть $E = [0,1[$ (полуинтервал, открытый справа) и рассматривается «стрелка»

$$\mathfrak{L} \triangleq \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[:\ z \in [0,1] \times [0,1]\}$$

(легко видеть, что в виде $\mathfrak{L}$ реализуется семейство всех полуинтервалов $[a,b[$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, включая пустой, получаемый, например, в виде $[0,0[$); тогда $\mathfrak{L}$ — полуалгебра п/м E, $E \subset \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Полагаем теперь, что $\mathcal{L}$ есть алгебра п/м E, порожденная полуалгеброй $\mathfrak{L}$: $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, и при этом $\mathcal{L}$ есть семейство всех множеств $L \in \mathcal{P}(E)$, для каждого из которых при некотором выборе $n \in \mathbb{N}$ и $(L_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathfrak{L}^n$ имеют место свойства

$$(L = \bigcup_{i=1}^{n} L_i) \& (L_p \cap L_q = \varnothing\ \forall\, p \in \overline{1,n}\ \forall\, q \in \overline{1,n} \setminus \{p\}). \tag{9.10}$$

Тогда, в частности, $\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$. При этом $\{x\} \notin \mathfrak{L}\ \forall\, x \in E$. В силу представления (9.10) имеем

$$\{x\} \notin \mathcal{L}\ \forall\, x \in E. \tag{9.11}$$

Итак, семейство $\mathcal{L}$ не содержит синглетонов. Вместе с тем по определению $\mathfrak{L}$ имеем, что

$$\forall\, \mathbb{L} \in \mathfrak{L}\ \forall\, x \in E \setminus \mathbb{L}\ \exists \varepsilon \in]0,\infty[:\ [x, x+\varepsilon[\cap \mathbb{L} = \varnothing. \tag{9.12}$$

Из (9.10), (9.12) вытекает, как следствие, что

$$\forall\, L \in \mathcal{L}\ \forall\, x \in E \setminus L\ \exists \varepsilon \in]0,\infty[:\ [x, x+\varepsilon[\cap L = \varnothing.$$

В свою очередь, последнее свойство означает (после простых преобразований), что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (см. § 1). Получили свойство

$$\mathcal{L} \in (\mathrm{LAT})_0[E] \cap \tilde{\pi}^0[E],$$

причем справедливо (9.11). Итак, $\mathcal{L}$ есть отделимая решетка с «нулем» и «единицей», не содержащая синглетонов. $\square$

Отметим, что на основе предложения 9.1 легко получается представление для (вспомогательного по смыслу задачи о достижимости с ОАХ) МП, соответствующее [8, (4.11)].

В только что рассмотренном примере в качестве решетки использовалась на самом деле алгебра множеств, не содержащая синглетонов. Заметим в этой связи, что (см. [7, предложение 9.2])

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}[E] = \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] \; \forall \, \mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E].$$

Здесь же отметим и аналогичное свойство, касающееся открытых у/ф (то есть у/ф, составленных из открытых множеств) и упомянутое в [8, (8.12)]:

$$\mathbf{T}^0_{\tau}[E] = \mathbf{T}^*_{\tau}[E].$$

В связи с общими вопросами структуры пространств, элементами которых являются у/ф, отметим исследования А. А. Грызлова и его учеников (см. [18, 19]).

Список литературы

1. de Groot J. Supercompactness and superextensions // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
2. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977. 238 p.
3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
4. Ченцов А.Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна–Чеха // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 26. С. 119–150.
5. Ченцов А.Г. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 298–314.
6. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.
7. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. DOI: 10.20537/vm110112
8. Ченцов А.Г., Пыткеев Е.Г. Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 312–329.
9. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
10. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
12. Ченцов А.Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Известия вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
13. Dvalishvili B.P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam: Elsevier Science, 2005. 422 p.
14. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
15. Ченцов А.Г. К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 212–229. DOI: 10.20537/vm150206
16. Ченцов А.Г. К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 90–109. DOI: 10.20537/vm140309
17. Ченцов А.Г. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 294–309.
18. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С. Некоторые центрированные системы множеств и определяемые ими точки // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 76–82.
19. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О плотности и числе Суслина подмножеств одного пространства Стоуна // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 4. С. 18–24. DOI: 10.20537/vm140402

Поступила в редакцию 30.10.2016

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov
Superextension as bitopological space

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian).

Keywords: bitopological space, closed ultrafilter, supercompactness, superextension.

MSC2010: 37N35, 65J15, 47J25, 52A01, 91A25

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-03

Supercompact space of maximal linked systems of topological space (superextension) and its subspace consisting of ultrafilters of the family of closed sets are considered. Some relations connecting above-mentioned spaces and some corollaries relating to Wallman extension in the case of T_1-space are obtained. For this case, some representations of sets in the space of generalized elements (defined as closed ultrafilters) for an abstract attainability problem under constraints of asymptotic character are considered. A more general variant of the above-mentioned relations for arbitrary initial topological space is also investigated (construction that uses closed ultrafilters of initial topological space is considered). Along with equipment with topology of Wallman type, topology similar to one applied for Stone compactum is used. As a result, bitopological space of maximal linked systems and corresponding bitopological space of closed ultrafilters as its subspace are realized.

REFERENCES

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
2. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p.
3. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Base constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006, 336 p.
4. Chentsov A.G. Certain constructions of asymptotic analysis related to the Stone–Čcech compactification, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 140, issue 6, pp. 873–904. DOI: 10.1007/s10958-007-0022-8
5. Chentsov A.G. Tier mappings and ultrafilter-based transformations, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 298–314 (in Russian).
6. Chentsov A.G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311 (in Russian).
7. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142. DOI: 10.20537/vm110112
8. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 36–54. DOI: 10.1134/S0081543816020048
9. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* (Set theory), Moscow: Mir, 1970, 416 p.
10. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004, 368 p.
11. Bourbaki N. *Topologie générale*, Paris: Hermann, 1961, 263 p.
12. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: equivalent representations and basic properties, *Russian Mathematics*, 2013, vol. 57, issue 11, pp. 28–44. DOI: 10.3103/S1066369X13110030
13. Dvalishvili B.P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*, Amsterdam: Elsevier Science, 2005, 422 p.
14. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN, 1985, 752 p.
15. Chentsov A.G. To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 212–229 (in Russian). DOI: 10.20537/vm150206

16. Chentsov A.G. To the validity of constraints in the class of generalized elements, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 3, pp. 90–109 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140309
17. Chentsov A.G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 294–309 (in Russian).
18. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S. Some centered systems of sets and points defined by them, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 76–82 (in Russian).
19. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. On the density and Suslin number of subsets of one Stone space, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 4, pp. 18–24 (in Russian).
DOI: 10.20537/vm140402

Received 30.10.2016

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru