УДК 517.929, 517.977.8

© *М. И. Гомоюнов, А. Р. Плаксин*

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

В статье рассматривается конфликтно-управляемая динамическая система, движение которой описывается функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла. Исследуются аппроксимации этой системы при помощи управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности. Предлагается процедура взаимного прицеливания между исходной системой и ее конечномерной аппроксимацией, обеспечивающая близость их движений. Устанавливается свойство устойчивости этой процедуры по отношению к погрешностям измерений, приводится иллюстрирующий пример. Дается приложение процедуры к решению задачи оптимизации гарантированного результата, в которой движение динамической системы описывается линейными функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла, а показатель качества оценивает историю движения системы и реализации воздействий управления и помехи. Для этого формулируется вспомогательная задача об управлении аппроксимирующей системой, и при помощи метода выпуклых сверху оболочек находится ее решение. Устанавливается, что величина оптимального гарантированного результата во вспомогательной задаче аппроксимирует величину оптимального гарантированного результата в исходной задаче, при этом оптимальный закон управления строится с использованием в качестве поводырей оптимальных во вспомогательной задаче движений аппроксимирующей системы. Рассматривается иллюстрирующий пример, приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: теория управления, дифференциальные игры, системы нейтрального типа.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-05

Введение

Исследования аппроксимаций функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений имеют обширную историю. Сходимость таких аппроксимаций для линейных систем с постоянным сосредоточенным запаздыванием была доказана в работе [1]. В работе [2] этот результат был распространен на нелинейные системы, а в работе [3] — на случай переменных запаздываний. Позднее, подобные аппроксимации, их обобщения и приложения к различным задачам развивались в работах [4–8]. В том числе, в работах [7, 8] рассматривались аппроксимации различных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. В работе [9] было предложено использовать аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве поводырей для динамических систем с запаздыванием, управляемых в условиях помех или противодействий. При этом возникает вспомогательная задача взаимного прицеливания между движением исходной конфликтно-управляемой системы и движением аппроксимирующей системы. Решение этой задачи для динамических систем, описываемых функционально- дифференциальными уравнениям запаздывающего типа, было дано в работе [10], для систем, описываемых линейными уравнениями нейтрального типа, — в работе [11], и для нелинейных систем нейтрального типа в форме Дж. Хейла [12] — в работе [13]. Настоящая работа продолжает эти исследования.

Статья устроена следующим образом. В § 1 рассматривается конфликтно-управляемая динамическая система, описываемая функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла. В § 2 строится аппроксимирующая система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями, устанавливаются некоторые ее свойства. Для того, чтобы обеспечить близость движений исходной и аппроксимирующей систем, в § 3 предлагается устойчивая по отношению к погрешностям измерений процедура взаимного прицеливания. Работоспособность этой процедуры иллюстрируется на примере. Далее в статье дается приложение предложенной процедуры взаимного прицеливания к решению следующей

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3047.2017.1.

задачи конфликтного управления, которая подробно описывается в § 4. Рассматривается линейная динамическая система нейтрального типа в форме Дж. Хейла, управляемая в условиях помех или противодействий. Цель управления состоит в минимизации показателя качества, который оценивает историю движения системы и реализации воздействий управления и помехи. В рамках теоретико-игрового подхода [14–16] ставится задача о вычислении величины оптимального гарантированного результата управления и построении оптимального закона управления, обеспечивающего этот результат. Для решения этой задачи в § 5 рассматривается вспомогательная задача об управлении движением аппроксимирующей системы. Устанавливается, что оптимальный гарантированный результат управления во вспомогательной задаче аппроксимирует оптимальный гарантированный результат в исходной задаче, при этом оптимальный закон управления строится с использованием в качестве поводырей оптимальных во вспомогательной задаче движений аппроксимирующей системы. В § 6 приводится пример, описываются результаты численного моделирования.

Полученные в работе результаты будут представлены на Всемирном конгрессе Международной федерации по автоматическому управлению (IFAC 2017 World Congress).

§ 1. Конфликтно-управляемая система

Рассматривается конфликтно-управляемая динамическая система, описываемая функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x[t] - g\big(t, x_t[\cdot]\big)\Big) = f\big(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]\big), \quad t \in [t_0, \vartheta],$$
$$x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}, \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$x_{t_0}[\zeta] = x[t_0 + \zeta] = z[\zeta], \quad \zeta \in [-h, 0], \quad z[\cdot] \in Z. \tag{1.2}$$

Здесь t — переменная времени; $x[t]$ — вектор состояния в момент времени t; $x_t[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке $[t-h, t]$, причем $x_t[\zeta] = x[t+\zeta]$, $\zeta \in [-h, 0]$; $h = \mathrm{const} > 0$ — величина запаздывания; $u[t]$ — текущее управляющее воздействие; $v[t]$ — неконтролируемое воздействие помехи или противодействие; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — известные компакты конечномерных пространств; Z — множество абсолютно непрерывных функций $z[\cdot]$, удовлетворяющих неравенствам

$$\big\|z[\xi]\big\| \leqslant R_0, \quad \xi \in [-h, 0], \quad \big\|\dot{z}[\xi]\big\| \leqslant R_0 \text{ при п.в. } \xi \in [-h, 0], \quad R_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{1.3}$$

Здесь и далее двойные скобки $\|\cdot\|$ используются для обозначения евклидовой нормы.

Пусть $C = C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$ — пространство непрерывных функций, действующих из $[-h, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, оснащенное равномерной нормой $\|\cdot\|_C$.

Полагаем, что для системы (1.1) выполнены следующие условия:

$(C.1)$ Отображение $[t_0, \vartheta] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \ni (t, w[\cdot], u, v) \mapsto f = f(t, w[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$ непрерывно.

$(C.2)$ Существует такая константа $\alpha_f > 0$, что

$$\big\|f\big(t, w[\cdot], u, v\big)\big\| \leqslant \alpha_f\big(1 + \big\|w[\cdot]\big\|_C\big), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot] \in C, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

$(C.3)$ Для любого компакта $D \subset C$ существует такое число $\lambda_f(D) > 0$, что

$$\big\|f\big(t, w[\cdot], u, v\big) - f\big(t, r[\cdot], u, v\big)\big\| \leqslant \lambda_f(D)\big\|w[\cdot] - r[\cdot]\big\|_C,$$
$$t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}, \quad w[\cdot], r[\cdot] \in D.$$

$(C.4)$ Существуют такие числа $\lambda_g > 0$ и h_i, $i = \overline{1,k}$ $(0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_k = h)$, что

$$\big\|g\big(t, w[\cdot]\big) - g\big(t, r[\cdot]\big)\big\| \leqslant \lambda_g \bigg(\int\limits_{-h}^{0} \big\|w[\xi] - r[\xi]\big\| \mathrm{d}\xi + \sum_{i=1}^{k} \big\|w[-h_i] - r[-h_i]\big\| \bigg),$$

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot], r[\cdot] \in C.$$

$(C.5)$ Существует такая константа $\alpha_g > 0$, что

$$\big\|g\big(t, w[\cdot]\big) - g\big(\xi, w[\cdot]\big)\big\| \leqslant \alpha_g \Big(1 + \big\|w[\cdot]\big\|_C\Big)|t - \xi|, \quad t, \xi \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot] \in C.$$

Допустимыми реализациями управления $u[t]$ и помехи $v[t]$ считаем измеримые функции $u : [t_0, \vartheta) \to \mathbb{U}$ и $v : [t_0, \vartheta) \to \mathbb{V}$, которые обозначаем далее через $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ соответственно. При условиях $(C.1)$–$(C.5)$ можно показать (см., например, [13]), что для любых допустимых реализаций $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ и любой начальной функции $z[\cdot] \in Z$ существует единственное решение $x[t_0 - h, \vartheta]$ задачи (1.1), (1.2) — абсолютно непрерывная функция $x : [t_0 - h, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет начальному условию (1.2) и вместе с $u[t]$ и $v[t]$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду.

§ 2. Аппроксимирующая система

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, и $\Delta h = h/m$. Следуя [13], на основе системы (1.1), (1.2) определим аппроксимирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}^{[0]}[t] = f\big(t, S\big(Y[t]\big)[\cdot], p[t], q[t]\big), \\ \dot{y}^{[1]}[t] = \big(y^{[0]}[t] + g\big(t, S\big(Y[t]\big)[\cdot]\big) - y^{[1]}[t]\big)/\Delta h, \\ \dot{y}^{[i]}[t] = \big(y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t]\big)/\Delta h, \quad i = \overline{2,m}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad y^{[i]}[t] \in \mathbb{R}^n, \ i = \overline{0,m}, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V},$$

с фазовым вектором $Y[t] = (y^{[0]}[t], y^{[1]}[t], \ldots, y^{[m]}[t])$ и начальным условием

$$y^{[i]}[t_0] = y_0^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0,m}, \quad Y_0 = \big(y_0^{[0]}, y_0^{[1]}, \ldots, y_0^{[m]}\big) \in \mathbb{R}^{(m+1)n}. \tag{2.2}$$

Здесь $S(Y[t])[\cdot]$ обозначает линейный сплайн на отрезке $[-h, 0]$ с узлами в точках $-i\Delta h$, $i = \overline{0,m}$, определяемый по правилу

$$S\big(Y[t]\big)[0] = y^{[1]}[t], \quad S\big(Y[t]\big)[-i\Delta h] = y^{[i]}[t], \quad i = \overline{1,m}.$$

В силу условий $(C.1)$–$(C.5)$ для любых допустимых реализаций $p[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $q[t_0[\cdot]\vartheta)$ и любого значения $Y_0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ существует единственное решение $Y[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) — абсолютно непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ функция, которая удовлетворяет начальному условию (2.2) и вместе с $p[t]$ и $q[t]$ удовлетворяет системе уравнений (2.1) почти всюду.

По решению $Y[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2) определим функцию $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ согласно следующему правилу:

$$y[t] = \begin{cases} y^{[0]}[t] + g\big(t, S\big(Y[t]\big)[\cdot]\big), & t \in [t_0, \vartheta], \\ y[t_0] + (y[t_0] - y^{[1]}[t_0])(t - t_0)/\Delta h, & t \in [t_0 - \Delta h, t_0), \\ S\big(Y[t_0]\big)[t - t_0], & t \in [t_0 - h, t_0 - \Delta h). \end{cases} \tag{2.3}$$

Полагаем, что начальная функция $z[\cdot]$ из (1.2) и начальный вектор $Y_0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ из (2.2) связаны условием

$(C.6)$ Справедливы неравенства

$$\big\|y_0^{[0]} - z[0] + g\big(t_0, z[\cdot]\big)\big\| \leqslant R_*\Delta h, \quad \big\|y_0^{[i]} - z[-i\Delta h]\big\| \leqslant R_*\Delta h, \quad i = \overline{1,m}, \quad R_* = \mathrm{const} > 0.$$

Следующие две леммы устанавливают аппроксимирующие свойства системы (2.1), (2.2). Подробные доказательства этих лемм приведены в работе [13].

Л е м м а 2.1. *Существует такой компакт $D_y \subset C$, что, каковы бы ни были натуральное число $m \geqslant 2$, начальные значения $z[\cdot] \in Z$, $Y_0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ и допустимые реализации $p[t_0[\cdot]\vartheta)$, $q[t_0[\cdot]\vartheta)$, при выполнении условий $(C.1)$–$(C.6)$ для решения $Y[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи* (2.1), (2.2) *и соответствующей функции $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$* (2.3) *справедливы включения*

$$y_t[\cdot] \in D_y, \quad S\big(Y[t]\big)[\cdot] \in D_y, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Л е м м а 2.2. *Существует такое число $K > 0$, что, каковы бы ни были натуральное число $m \geqslant 2$, начальные значения $z[\cdot] \in Z$, $Y_0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ и допустимые реализации $p[t_0[\cdot]\vartheta)$, $q[t_0[\cdot]\vartheta)$, при выполнении условий $(C.1)$–$(C.6)$ решение $Y[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи* (2.1), (2.2) *и соответствующая функция $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$* (2.3) *удовлетворяют неравенству*

$$\big\|y_t[\cdot] - S\big(Y[t]\big)[\cdot]\big\|_C \leqslant K\sqrt{m}, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

§ 3. Процедура прицеливания

Полагаем, что выполняется условие седловой точки для маленькой игры [14, с. 79] (или, в другой терминологии, условие Айзекса [17]):

$(C.7)$ Имеет место равенство

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\big\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big), s\big\rangle = \max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\big\langle f\big(t, w[\cdot], u, v\big), s\big\rangle,$$

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot] \in C, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь и далее угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используются для обозначения скалярного произведения векторов.

Опишем процедуру взаимного прицеливания между движениями систем (1.1), (1.2) и (2.1), (2.2). Предположим, что вместо точных значений $x[t]$ и $Y[t] = (y^{[0]}[t], \ldots, y^{[m]}[t])$ известны приближенные значения $x_*[t]$ и $Y_*[t] = (y_*^{[0]}[t], \ldots, y_*^{[m]}[t])$, которые для некоторого числа $\eta > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\big\|x[t] - x_*[t]\big\| \leqslant \eta, \quad \big\|y^{[i]}[t] - y_*^{[i]}[t]\big\| \leqslant \eta, \quad i = \overline{0,m}, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{3.1}$$

Пусть кусочно-постоянные реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ в системе (1.1) и $q[t_0[\cdot]\vartheta)$ в системе (2.1) формируются по принципу обратной связи на базе разбиения

$$\Delta_\delta = \big\{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j \leqslant \delta,\ j = \overline{0, J-1},\ t_J = \vartheta\big\} \tag{3.2}$$

промежутка времени управления $[t_0, \vartheta]$ согласно следующему правилу:

$$u[t] = u_j^\circ, \quad q[t] = q_j^\circ, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, J-1},$$

где

$$u_j^\circ \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\big\langle f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u, v\big),\ s_*[t_j]\big\rangle,$$

$$q_j^\circ \in \operatorname*{argmax}_{q\in\mathbb{V}}\min_{p\in\mathbb{U}}\big\langle f\big(t_j, S\big(Y_*[t_j]\big)[\cdot], p, q\big),\ s_*[t_j]\big\rangle, \tag{3.3}$$

$$s_*[t] = x_*[t] - g\big(t, x_{*t}[\cdot]\big) - y_*^{[0]}[t].$$

Т е о р е м а 3.1. *Для любого числа $\zeta > 0$ существуют такие числа $M > 0$, $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что, каковы бы ни были натуральное число $m \geqslant M$, начальные значения $z[\cdot] \in Z$, $Y_0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ и допустимые реализации $v[t_0[\cdot]\vartheta)$, $p[t_0[\cdot]\vartheta)$, если реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, $q[t_0[\cdot]\vartheta)$ формируются согласно процедуре прицеливания (3.1)–(3.3), то при выполнении условий (C.1)–(C.7) для решения $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ задачи (1.1), (1.2) и функции $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ (2.3), построенной по решению $Y[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (2.1), (2.2), справедливо неравенство*

$$\big\|x[t] - y[t]\big\| \leqslant \zeta, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Доказательство теоремы проводится по схеме из [13, Теорема 3].

З а м е ч а н и е 3.1. Отметим, что теорема 3.1 останется справедливой и без требования (C.7), если изменить процедуру прицеливания (3.1)–(3.3) следующим образом:

$$u[t] = u_j^\circ, \quad q[t] = q_j^\circ(p[t]), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, J-1},$$

где

$$u_j^\circ \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \big\langle f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u, v\big),\, s_*[t_j]\big\rangle,$$

$$q_j^\circ(p) \in \operatorname*{argmax}_{q \in \mathbb{V}} \big\langle f\big(t_j, S\big(Y_*[t_j]\big)[\cdot], p, q\big),\, s_*[t_j]\big\rangle.$$

Проиллюстрируем работоспособность процедуры (3.1)–(3.3) на примере.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим динамическую систему, описываемую функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x[t] - \sin\big(x[t-1]\big)\Big) = -2\int\limits_{t-1}^{t} x[\xi]e^{-0.3|x[\xi]|}\mathrm{d}\xi + u[t] + v[t]x[t-1], \quad t \in [0, 5],$$

$$x[t] \in \mathbb{R}, \quad \big|u[t]\big| \leqslant 1, \quad \big|v[t]\big| \leqslant 1,$$

с начальным условием

$$x[\xi] = \xi\cos(6\xi), \quad \xi \in [-1, 0].$$

Для этой системы в согласии с (2.1), (2.2) построим аппроксимирующую систему и осуществим процедуру взаимного прицеливания (3.1)–(3.3). При этом реализации $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $p[t_0[\cdot]\vartheta)$ будем формировать наихудшим для указанной процедуры способом с точки зрения близости функций $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ и $y[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$.

Результаты численных экспериментов приведены на рис. 1 и 2.

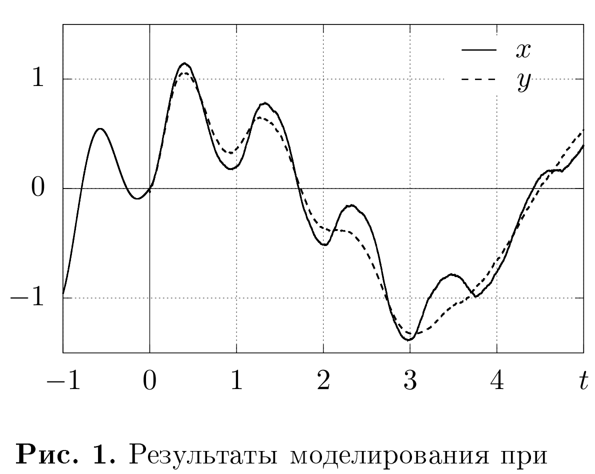

Рис. 1. Результаты моделирования при $m = 50$, $\delta = 0.001$, $\eta = 0.1$.

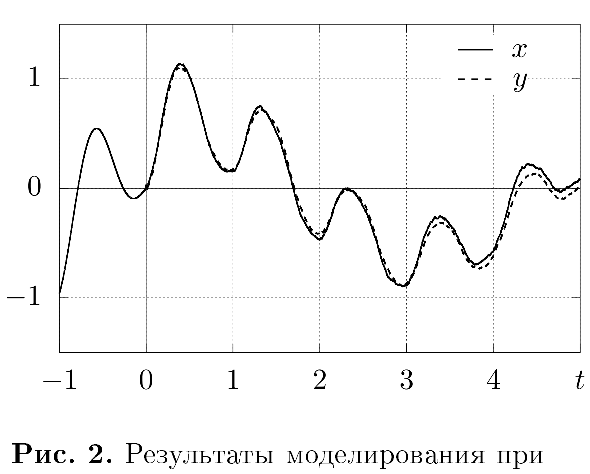

Рис. 2. Результаты моделирования при $m = 500$, $\delta = 0.001$, $\eta = 0.1$.

§ 4. Приложение к решению задачи управления

Действуя по схеме из работы [18], применим процедуру прицеливания (3.1)–(3.3) для решения следующей задачи конфликтного управления. Пусть движение динамической системы описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x[t]-A_\tau[t]x[t-\tau]\Big)=A[t]x[t]+A_h[t]x[t-h]+B[t]u[t]+C[t]v[t],\quad t\in[t_0,\vartheta],$$
$$x[t]\in\mathbb{R}^n,\quad u[t]\in\mathbb{R}^{n_1},\quad v[t]\in\mathbb{R}^{n_2},\tag{4.1}$$

с начальным условием

$$x_{t_0}[\cdot]=z[\cdot]\in Z.\tag{4.2}$$

Здесь $\tau,h=\mathrm{const}>0$ и $\tau\leqslant h$; матрица-функция $A_\tau[t]$ удовлетворяет условию Липшица и выполняется неравенство $\|A_\tau[t]\|<1$, $t\in[t_0,\vartheta]$; матрицы-функции $A[t]$, $A_h[t]$, $B[t]$ и $C[t]$ непрерывны; множество Z определяется согласно (1.3).

Предположим, что допустимые значения воздействий управления $u[t]$ и помехи $v[t]$ стеснены включениями

$$u[t]\in\mathbb{U}=\big\{u\in\mathbb{R}^{n_1}:\|u\|\leqslant E\big\},\quad v[t]\in\mathbb{V}=\big\{v\in\mathbb{R}^{n_2}:\|v\|\leqslant E\big\},$$

где константа $E>0$ является достаточно большой для того, чтобы были применимы результаты [16, с. 179] (см. также [19]).

Отметим, что система (4.1) удовлетворяет условиям $(C.1)$–$(C.5)$. Следовательно, каковы бы ни были начальная функция $z[\cdot]\in Z$ и допустимые реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$, существует единственное решение $x[t_0-h[\cdot]\vartheta]$ задачи (4.1), (4.2). Тройку $\{x[t_0-h[\cdot]\vartheta],\ u[t_0[\cdot]\vartheta),v[t_0[\cdot]\vartheta)\}$ назовем реализацией процесса управления.

Качество этой реализации оценивается показателем

$$\gamma=\bigg(\int\limits_{\vartheta-h}^{\vartheta}\|x[\xi]\|^2\mathrm{d}\xi\bigg)^{1/2}+\int\limits_{t_0}^{\vartheta}\Big[\langle u[\xi],\Phi[\xi]u[\xi]\rangle-\langle v[\xi],\Psi[\xi]v[\xi]\rangle\Big]\mathrm{d}\xi.\tag{4.3}$$

Здесь $\Phi[\xi]$ и $\Psi[\xi]$ — симметричные непрерывные матрицы-функции, такие, что квадратичные формы $\langle u,\Phi[\xi]u\rangle$ и $\langle v,\Psi[\xi]v\rangle$ положительно определены при всех $\xi\in[t_0,\vartheta]$.

Цель управления заключается в минимизации показателя качества (4.3). Отметим, что так как действия помехи неизвестны, то в самом неблагоприятном случае они могут максимизировать показатель (4.3).

Согласно [20] (см. также [14]) задачу управления (4.1)–(4.3) формализуем следующем образом. Под стратегия управления $u(\cdot)$ понимаем произвольную функцию

$$u(t,w[\cdot],\varepsilon)\in\mathbb{U},\quad t\in[t_0,\vartheta],\quad w[\cdot]\in C,\quad \varepsilon>0,$$

где $\varepsilon>0$ — параметр точности [14, с. 68]. Пусть выбраны число $\varepsilon>0$ и разбиение Δ_δ (3.2). Тройка $\{u(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$ определяет закон управления, который формирует кусочно-постоянную реализацию $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ согласно следующему пошаговому правилу:

$$u[t]=u\big(t_j,x_{t_j}[\cdot],\varepsilon\big),\quad t\in[t_j,t_{j+1}),\quad j=\overline{0,J-1}.$$

Обозначим через $\Omega=\Omega(u(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta)$ множество таких реализаций процесса управления $\{x[t_0-h[\cdot]\vartheta],u[t_0[\cdot]\vartheta),v[t_0[\cdot]\vartheta)\}$, что $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ — произвольная допустимая реализация помехи; $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ — реализация управления, формируемая согласно закону $\{u(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$; $x[t_0-h[\cdot]\vartheta]$ — решение задачи (4.1), (4.2), определяемое реализациями $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, $v[t_0[\cdot]\vartheta)$. Положим

$$\Gamma=\sup\Big\{\gamma:\ \{x[t_0-h[\cdot]\vartheta],u[t_0[\cdot]\vartheta),v[t_0[\cdot]\vartheta)\}\in\Omega\Big\}.$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом управления будет

$$\Gamma^{\circ} = \inf_{u(\cdot)} \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \Gamma.$$

Согласно этому определению, величина Γ° — это точная нижняя грань значений показателя качества (4.3), которые могут быть гарантированы при использовании указанной схемы формирования управляющих воздействий.

В следующем параграфе предлагается метод для приближенного вычисления величины Γ° и описывается процедура формирования управления, которая гарантирует это значение с наперед заданной точностью.

§ 5. Вспомогательная задача управления

Применяя описанную в § 2 аппроксимацию к системе (4.1), (4.2), приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}^{[0]}[t] = A[t]y^{[0]}[t] + A_h[t]y^{[m]}[t-h] + B[t]p[t] + C[t]q[t], \\ \dot{y}^{[1]}[t] = \big(y^{[0]}[t] + A_\tau[t]y^{[m_\tau]} - y^{[1]}[t]\big)/\Delta h, \\ \dot{y}^{[i]}[t] = \big(y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t]\big)/\Delta h, \quad i = \overline{2,m}, \end{cases}$$
$$t \in [t_0, \vartheta], \quad y^{[i]}[t] \in \mathbb{R}^n, \ i = \overline{0,m}, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V}, \tag{5.1}$$

с начальным условием

$$y^{[0]}[t_0] = z[0] - A_\tau[t_0]z[-\tau], \quad y^{[i]}[t_0] = z[-i\Delta h], \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.2}$$

Здесь $m_\tau = \tau/\Delta h$, и для простоты предполагается, что $m_\tau \in \mathbb{N}$.

Действуя по схеме из § 3, принимая во внимание вид показателя качества (4.3), рассмотрим следующую процедуру прицеливания между движениями систем (4.1), (4.2) и (5.1), (5.2). Пусть реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ в исходной системе (4.1) и $q[t_0[\cdot]\vartheta)$ в аппроксимирующей системе (5.1) формируются на базе разбиения Δ_δ (3.2) по правилу

$$\begin{gathered} u[t] = u_j \in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbb{U}} \Big[\langle B[t_j]u, s[t_j]\rangle + \langle u, \Phi[t_j]u\rangle \tilde{s}[t_j]\Big], \\ q[t] = q_j \in \operatorname*{argmax}_{q\in\mathbb{V}} \Big[\langle C[t_j]q, s[t_j]\rangle - \langle q, \Psi[t_j]q\rangle \tilde{s}[t_j]\Big], \\ t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, J-1}, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где

$$s[t] = x[t] - A_\tau[t]x[t-\tau] - y^{[0]}[t],$$

$$\tilde{s}[t] = \int\limits_{t_0}^{t} \Big[\langle u[\xi], \Phi[\xi]u[\xi]\rangle - \langle v[\xi], \Psi[\xi]v[\xi]\rangle\Big]\mathrm{d}\xi - \int\limits_{t_0}^{t} \Big[\langle p[\xi], \Phi[\xi]p[\xi]\rangle - \langle q[\xi], \Psi[\xi]q[\xi]\rangle\Big]\mathrm{d}\xi.$$

По аналогии с теоремой 3.1 имеет место

Т е о р е м а 5.1. *Для любого числа $\zeta > 0$ существуют такие числа $M > 0$ и $\delta > 0$, что, каковы бы ни были натуральное число $m \geqslant M$, начальные значения $z[\cdot] \in Z$, $Y_0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ и допустимые реализации $p[t_0[\cdot]\vartheta)$, $v[t_0[\cdot]\vartheta)$, если реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$, $q[t_0[\cdot]\vartheta)$ формируются согласно процедуре прицеливания (5.3), то для решения $x[t_0-h[\cdot]\vartheta]$ задачи (4.1), (4.2) и функции $y[t_0-h[\cdot]\vartheta]$ (2.3), построенной по решению $Y[t_0[\cdot]\vartheta]$ задачи (5.1), (5.2), справедливо неравенство*

$$\big\|x[t] - y[t]\big\| \leqslant \zeta, \quad \big\|x[t-i\Delta h] - y^{[i]}[t]\big\| \leqslant \zeta, \quad i = \overline{1,m}, \quad \big\|s[t]\big\| \leqslant \zeta, \quad \big|\tilde{s}[t]\big| \leqslant \zeta, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Принимая во внимание этот результат, определим показатель качества

$$\gamma_m = \left(\sum_{i=1}^{m} \|y^{[i]}(\vartheta)\|^2 \Delta h \right)^{1/2} + \int_{t_0}^{\vartheta} \Big[\langle p[\xi], \Phi[\xi] p[\xi] \rangle - \langle q[\xi], \Psi[\xi] q[\xi] \rangle \Big] \mathrm{d}\xi, \tag{5.4}$$

который аппроксимирует исходный показатель (4.3).

Для системы (5.1), начального условия (5.2) и показателя качества (5.4) рассмотрим вспомогательную задачу конфликтного управления. В этой задаче $p[t]$ и $q[t]$ трактуются как воздействия управления и помехи соответственно.

В согласии с [14] стратегией управления $p_m(\cdot)$ называется произвольная функция

$$p_m(t, Y, \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad Y \in \mathbb{R}^{(m+1)n}, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть выбраны число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ_δ (3.2). Тройка $\{p_m(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления, который формирует кусочно-постоянную реализацию $p[t_0[\cdot]\vartheta)$ по правилу

$$p[t] = p_m\big(t_j, Y[t_j], \varepsilon\big), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, J-1}. \tag{5.5}$$

Обозначим через $\Omega_m = \Omega_m(p_m(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta)$ множество таких реализаций процесса управления $\{Y[t_0[\cdot]\vartheta], p[t_0[\cdot]\vartheta), q[t_0[\cdot]\vartheta)\}$, что $q[t_0[\cdot]\vartheta)$ — произвольная допустимая реализация помехи; $p[t_0[\cdot]\vartheta)$ — реализация управления, формируемая согласно закону $\{p_m(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$; $Y[t_0[\cdot]\vartheta]$ — решение задачи (5.1), (5.2), определяемое реализациями $p[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $q[t_0[\cdot]\vartheta)$. Положим

$$\Gamma_m = \sup \Big\{ \gamma : \ \big\{ Y[t_0[\cdot]\vartheta], p[t_0[\cdot]\vartheta), q[t_0[\cdot]\vartheta) \big\} \in \Omega_m \Big\}$$

и определим величину оптимального гарантированного результата

$$\Gamma_m^\circ = \inf_{p_m(\cdot)} \ \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \ \lim_{\delta \downarrow 0} \ \sup_{\Delta_\delta} \ \Gamma_m. \tag{5.6}$$

Известно (см, например, [14]), что точная нижняя грань в выражении (5.6) достигается на оптимальной стратегии $p_m^\circ(\cdot)$. Более того, величина Γ_m° и стратегия $p_m^\circ(\cdot)$ могут быть эффективно найдены при помощи метода выпуклых сверху оболочек (детали и результирующие формулы см., например, в [16, 19]).

Теорема 5.1 с учетом результатов из [13, 20] позволяет доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 5.2. *Для любого числа $\zeta > 0$ существует такое число $M > 0$, что, каково бы ни было натуральное число $m \geqslant M$, справедливы следующие утверждения:*

1. *Имеет место неравенство $|\Gamma^\circ - \Gamma_m^\circ| \leqslant \zeta$.*
2. *Существуют такие число $\varepsilon^* > 0$ и функция $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, что, каковы бы ни были число $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и разбиение Δ_δ (3.2) при $\delta \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, схема формирования управления (5.3), (5.5) при $p_m(\cdot) = p_m^\circ(\cdot)$ гарантирует неравенство*

$$\gamma \leqslant \Gamma^\circ + \zeta \tag{5.7}$$

для любой допустимой реализации помехи $v[t_0[\cdot]\vartheta)$.

Таким образом, для исходной задачи управления (4.1)–(4.3) получаем следующий алгоритм построения приближенного решения. Зафиксируем достаточно большое натуральное число m. Применяя метод выпуклых сверху оболочек, найдем величину оптимального гарантированного результата Γ_m° и оптимальную стратегию управления $p_m^\circ(\cdot)$ во вспомогательной задаче управления (5.1), (5.2), (5.4). Тогда величина Γ_m° аппроксимирует оптимальный гарантированный результат Γ° в исходной задаче, а схема управления (5.3), (5.5) при $p_m(\cdot) = p_m^\circ(\cdot)$ обеспечивает выполнение неравенства (5.7) при достаточно малом значении параметра точности $\varepsilon > 0$ и достаточно мелком разбиении Δ_δ (3.2).

§ 6. Пример

Проиллюстрируем предложенный в предыдущем параграфе алгоритм решения задачи конфликтного управления (4.1)–(4.3) на примере. Пусть движение динамической системы описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big(r_1[t] - 0.4r_2[t-0.5]\Big) = -2r_1[t] - 0.4\dot r_1[t] + 0.02r_2[t] - r_1[t-1] \\ \qquad\qquad - 0.4\dot r_1[t-1] + 0.4r_2[t-1] - \dot r_2[t-1] + (5-t)u_1[t] + 2v_1[t], \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big(r_2[t] - 0.5r_1[t-0.5]\Big) = 0.01r_1[t] - r_2[t] - 0.1\dot r_2[t] - 0.3r_1[t-1] \\ \qquad\qquad + 0.7\dot r_1[t-1] - 0.4r_2[t-1] + 0.5\dot r_2[t-1] + (4-0.5t)u_2[t] + 3v_2[t], \end{cases}$$

$$t \in [0,4], \quad x[t] = (r_1[t], \dot r_1[t], r_2[t], \dot r_2[t]) \in \mathbb{R}^4,$$
$$u[t] = (u_1[t], u_2[t]) \in \mathbb{R}^2, \quad v[t] = (v_1[t], v_2[t]) \in \mathbb{R}^2,$$

с начальным условием

$$z[\xi] = \big(\sin(\xi), \cos(\xi), \cos(\xi), -\sin(\xi)\big), \quad \xi \in [-1,0].$$

Показатель качества имеет вид

$$\gamma = \bigg(\int\limits_3^4 \Big[r_1^2[\xi] + r_2^2[\xi] + \dot r_1^2[\xi] + \dot r_2^2[\xi]\Big]\mathrm{d}\xi\bigg)^{1/2} + \int\limits_0^4 \Big[u_1^2[\xi] + u_2^2[\xi] - v_1^2[\xi] - v_2^2[\xi]\Big]\mathrm{d}\xi.$$

Применим к этой задаче управления описанный в § 5 метод решения при различных значениях m, ε и равномерных разбиениях Δ_δ (3.2) с диаметром δ.

Для величины оптимального гарантированного результата Γ° получаем следующие приближенные значения:

$$\Gamma^\circ_{10} = 2.178, \quad \Gamma^\circ_{50} = 1.905, \quad \Gamma^\circ_{100} = 1.872.$$

Для того, чтобы проиллюстрировать работоспособность предложенной схемы управления, воздействия помехи моделировались следующим образом. В рамках теоретико-игрового подхода [14–16] для системы (4.1), начального условия (4.2) и показателя качества (4.3), по аналогии с исходной задачей управления рассматривается задача о формировании воздействий помехи, которые нацелены на максимизацию показателя (4.3). Для этой задачи строится соответствующая схема формирования оптимальных воздействий помехи и устанавливаются результаты, аналогичные теоремам 5.1 и 5.2.

При использовании схемы управления (5.3), (5.5) при $p_m(\cdot) = p^\circ_m(\cdot)$, когда воздействия помехи выбираются указанным способом, получаем следующие значения показателя качества:

m	ε	δ	γ
10	0.1	0.01	1.295
50	0.02	0.002	1.869
100	0.01	0.001	1.856

Результаты моделирования проиллюстрированы на рис. 3.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 716–724.
2. Репин Ю.М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 226–235.
3. Куржанский А.Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3. № 12. С. 2094–2107.

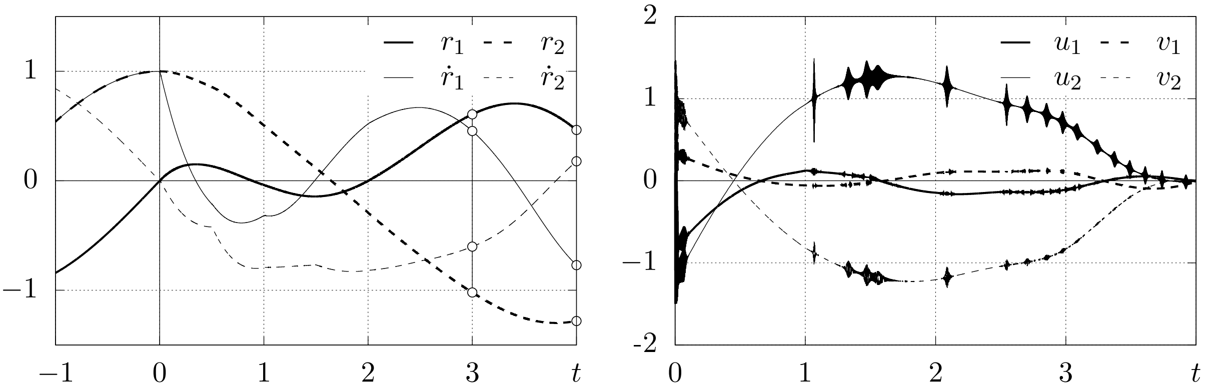

Рис. 3. Компоненты движения динамической системы и реализации воздействий управления и помехи, полученные при $m = 100$, $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.001$.

4. Кряжимский А.В., Максимов В.И. Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 202–209.
5. Banks H.T., Burns J.A. Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximations // SIAM J. Control Optim. 1978. Vol. 16. Issue 2. P. 169–208. DOI: 10.1137/0316013
6. Banks H.T., Kappel F. Spline approximations for functional differential equations // J. Differential Equations. 1979. Vol. 34. Issue 3. P. 496–522. DOI: 10.1016/0022-0396(79)90033-0
7. Kunisch K. Approximation schemes for nonlinear neutral optimal control systems // J. Math. Anal. Appl. 1981. Vol. 82. Issue 1. P. 112–143. DOI: 10.1016/0022-247X(81)90228-6
8. Fabiano R. A semidiscrete approximation scheme for neutral delay–differential equations // Int. J. Numer. Anal. Mod. 2013. Vol. 10. No. 3. P. 712–726.
9. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 97–104.
10. Lukoyanov N., Plaksin A. On approximations of time-delay control systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. Issue 25. P. 178–182. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.080
11. Плаксин А.Р. Конечномерные поводыри для конфликтно управляемых линейных систем нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 402–412.
12. Hale J.K., Cruz M.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. 1970. Vol. 85. Issue 1. P. 63–81. DOI: 10.1007/BF02413530
13. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 204–217.
14. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
15. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
16. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
17. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
18. Gomoyunov M., Plaksin A. On a problem of guarantee optimization in time-delay systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. № 25. P. 172–177. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079
19. Лукоянов Н.Ю. Об одной дифференциальной игре с интегральным критерием качества // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1905–1913.
20. Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 101–112. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112

Поступила в редакцию 20.03.2017

Гомоюнов Михаил Игоревич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
доцент, кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Плаксин Антон Романович, научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: a.r.plaksin@gmail.com

M. I. Gomoyunov, A. R. Plaksin

Finite-dimensional approximations of neutral-type conflict-controlled systems

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 49, pp. 111–122 (in Russian).

Keywords: control theory, differential games, neutral-type systems.

MSC2010: 49N35, 49N70

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-49-05

The paper deals with a conflict-controlled dynamical system which motion is described by neutral-type functional-differential equations in J. Hale's form. Approximations of this system by controlled high-dimensional systems of ordinary differential equations are investigated. A mutual aiming procedure between the initial system and its finite-dimensional approximation that guarantees proximity between their motions is elaborated. Stability properties of the procedure with respect to measurement errors are established, an illustrative example is considered. An application of the procedure is given for solving a guarantee optimization problem in which a motion of the dynamical system is described by linear functional-differential equations of neutral type in J. Hale's form and the quality index evaluates a motion history and realizations of control and disturbance actions. For this purpose an auxiliary control problem for the approximating system is formulated and its solution is constructed by the upper convex hulls method. It is shown that the optimal guaranteed result in the auxiliary problem approximates the optimal guaranteed result in the initial problem, and with the use of optimal in the auxiliary problem motions of the approximating system as guides an optimal control law is constructed. An illustrative example is considered, numerical simulation results are shown.

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag, *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, issue 4, pp. 876–885. DOI: 10.1016/0021-8928(64)90073-5
2. Repin Yu.M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems, *J. Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, issue 2, pp. 254–264. DOI: 10.1016/0021-8928(65)90029-8
3. Kurzhanskii A.B. On the approximation of linear differential equations with delay, *Differents. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 12, pp. 2094–2107 (in Russian).
4. Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Approximation in linear difference–differential games, *J. Appl. Math. Mech.*, 1978, vol. 42, no. 2, pp. 212–219. DOI: 10.1016/0021-8928(78)90136-3
5. Banks H.T., Burns J.A. Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximations, *SIAM J. Control Optim.*, 1978, vol. 16, issue 2, pp. 169–208. DOI: 10.1137/0316013
6. Banks H.T., Kappel F. Spline approximations for functional differential equations, *J. Differential Equations*, 1979, vol. 34, issue 3, pp. 496–522. DOI: 10.1016/0022-0396(79)90033-0
7. Kunisch K. Approximation schemes for nonlinear neutral optimal control systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 1981, vol. 82, issue 1, pp. 112–143. DOI: 10.1016/0022-247X(81)90228-6
8. Fabiano R. A semidiscrete approximation scheme for neutral delay–differential equations, *Int. J. Numer. Anal. Mod.*, 2013, vol. 10, no. 3, pp. 712–726.
9. Krasovskii N.N., Kotel'nikova A.N. Stochastic guide for a time-delay object in a positional differential game, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. S145–S151. DOI: 10.1134/S0081543812050148
10. Lukoyanov N., Plaksin A. On approximations of time-delay control systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, issue 25, pp. 178–182. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.080
11. Plaksin A.R. Finite-dimensional guides for conflict-controlled linear systems of neutral type, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, issue 3, pp. 406–416. DOI: 10.1134/S0012266115030118
12. Hale J.K., Cruz M.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1970, vol. 85, issue 1, pp. 63–81. DOI: 10.1007/BF02413530
13. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. On the approximation of nonlinear conflict-controlled systems of neutral type, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. S182–S196. DOI: 10.1134/S0081543816020152
14. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamic system), Moscow: Nauka, 1985, 516 p.
15. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, 517 p.
16. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information*, Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p.
17. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965, 384 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967, 479 p.

18. Gomoyunov M., Plaksin A. On a problem of guarantee optimization in time-delay systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, issue 25, pp. 172–177. DOI: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079
19. Lukoyanov N.Yu. A differential game with integral performance criterion, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1759–1766.
20. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Existence of the value and saddle point in positional differential games for neutral-type systems, *Trudy Inst. Mat. Mekh. Ural Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 101–112 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112

Received 20.03.2017

Gomoyunov Mikhail Igorevich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Associate Professor, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Plaksin Anton Romanovich, Researcher, Department of Dynamical Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: a.r.plaksin@gmail.com