

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт экономики и управления
Кафедра математических методов в экономике**

А.В. Летчиков

**ПРАКТИКУМ
по теории вероятностей
и математической статистике
Часть 1**

ИЖЕВСК 2017

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.17я73

Л 527

Издается по рекомендации Учебно-методической Комиссии Института экономики и управления

Лётчиков А.В.

Л 527 Практикум по теории вероятностей и математической статистике.

Часть 1. – Ижевск, 2017. – 45 с.

Практикум по теории вероятностей и математической статистике предназначен для студентов бакалавриата направлений «Экономика» и «Бизнес-информатика» и содержит решение задач по курсу теории вероятностей и математической статистике.

© А.В. Лётчиков, 2017

© ИЭиУ ФГБОУ ВО «УдГУ», 2017

Оглавление

Предисловие.....	4
1. Вероятность	5
Практическое занятие № 1. Пространство элементарных событий. Случайные события.	5
Практическое занятие № 2. Классическое определение вероятности. ...	12
Практическое занятие № 3. Геометрическое определение вероятности.	20
Практическое занятие № 4. Применение формул сложения и умножения для вычисления вероятности.	25
Практическое занятие № 5. Применение формул полной вероятности и Байеса для вычисления вероятности.	29
Практическое занятие № 6. Схема Бернулли.....	36

Предисловие

Настоящая методическая разработка предназначена для студентов бакалавриата направлений «Экономика» и «Бизнес-информатика» в качестве руководства по решению задач по курсу теории вероятностей и математической статистике. Она разделена на параграфы, каждый из которых отвечает практическому занятию в соответствие с рабочей программой дисциплины. Все параграфы содержат тщательно разобранные решения типичных задач по соответствующей теме. В начале каждого параграфа приводятся краткие сведения о понятиях теории вероятностей и математической статистики, необходимые для решения задач по теме параграфа. В конце параграфа представлены задачи для самостоятельного решения. Такое построение практикума сделано для того, чтобы студенты могли самостоятельно научиться решать задачи по теории вероятностей и математической статистике.

Для более углубленного теоретического изучения дисциплины студентам рекомендуется следующая литература.

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для бакалавров / В.Е. Гмурман. - М.: Юрайт, 2013. - 479 с.
2. Ширяев, А. Н. Вероятность. В двух книгах. 3-е изд., перераб. и доп. / А.Н. Ширяев. - М.: Изд-во МЦНМО, 2004. Кн.1 - 520 с. - Кн.2 - 408 с.
3. Ширяев, А. Н. Задачи по теории вероятностей / А.Н. Ширяев. - М.: МЦНМО, 2011. - 416 с.

1. Вероятность

Практическое занятие №1.

Пространство элементарных событий. Случайные события.

Каждая задача теории вероятностей включает в себя понятие вероятностного пространства, которое можно понимать как математическую модель изучаемого случайного эксперимента. Возможные исходы случайного эксперимента, не разлагающиеся на более простые, называются *элементарными событиями (исходами)*. Всякий эксперимент, таким образом, определяет множество его исходов $\Omega = \{\omega\}$, которое называется *пространством элементарных событий*.

С каждым случайным экспериментом связывают систему случайных событий $A, B, C, \dots$, каждое из которых в результате эксперимента либо происходит, либо не происходит. Если эксперимент закончился исходом ω , и событие A произошло, то говорят, что исход ω благоприятствует событию A ($\omega \in A$). Таким образом, каждому случайному событию A ставится в соответствие подмножество пространства элементарных событий, состоящее из благоприятствующих A исходов.

Так как событие определяется как подмножество Ω , можно ввести операции над событиями аналогично операциям над множествами. Определение операций над событиями и отношений между событиями, а также их связи с теорией множеств приводятся в таблице 1.

Таблица 1.

Связь языка теории вероятностей с языком теории множеств

Обозначения	Термины	
	теории множеств	теории вероятностей
Ω	Пространство	Достоверное событие
$\emptyset$	Пустое множество	Невозможное событие
ω	Элемент пространства	Элементарное событие
A, B	Подмножество A, B	Случайное событие A, B
$A+B$ ($A \cup B$)	Объединение множеств A и B	Сумма событий A и B
$A \cdot B$ ($A \cap B$)	Пересечение множеств A и B	Произведение событий A и B
$\bar{A}$ ($\Omega \setminus A$)	Дополнение множества A	Событие, противоположное для A
$A \cdot B = \emptyset$ ($A \cap B = \emptyset$)	Множества A и B не пересекаются	События A и B несовместны
$A = B$	Множества A и B равны	События A и B равносильны
$A \subset B$	Множество A вложено в множество B	Событие A влечет событие B

Основным положением аксиоматики Колмогорова являются понятие пространства Ω элементарных событий и понятие случайного события A как его подмножества $A \subset \Omega$. Однако, не требуется, чтобы любое подмножество являлось событием и имело вероятность. Требуется лишь, чтобы введенные операции над событиями, производимые в счетном числе, снова приводили к событиям.

Следовательно, множество F всех рассматриваемых событий должно удовлетворять следующим аксиомам: 1) $\Omega \in F$; 2) если $A \in F$, то $\bar{A} \in F$; 3) если $A_1, A_2, \dots \in F$, то $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \in F$. Множество F , удовлетворяющее этим аксиомам, называется σ -алгеброй событий. Свойства σ -алгебры: 1) $\emptyset \in F$; 2) если $A, B \in F$, то $A+B \in F$; 3) если $A_1, A_2, \dots \in F$, то $\prod_{n=1}^{+\infty} A_n \in F$.

Другие аксиомы относятся к вероятности P как функции на σ -алгебре событий F , определяющей численную оценку шансов появления события. Функция $P: F \rightarrow [0,1]$ удовлетворяет следующим аксиомам: 1) $P(\Omega)=1$; 2) если $A_1, A_2, \dots \in F$, $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $P\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ (счетная аддитивность).

Таким образом, для каждого случайного эксперимента строится его математическая модель в виде *вероятностного пространства* (Ω, F, P) , где Ω - пространство элементарных событий, F - σ -алгебра событий, P - вероятность, определенная на σ -алгебре F .

Студентам следует различать события и элементарные события, они являются элементами разных множеств. Подчеркиваем, что областью определения числовой функции P является множество событий F .

Большинство задач, с которыми сталкивается студент, сформулировано на естественном, а не на математическом языке. Поэтому основная трудность при решении задач заключается в удачном построении вероятностного пространства, соответствующего заданному случайному эксперименту. Следующие примеры показывают неоднозначность построения пространства элементарных событий даже для простых случайных явлений.

Задача 1. Бросаются одновременно две игральные кости. Рассмотрим следующие случайные события: $A = \{\text{сумма выпавших очков равна } 8\}$, $B = \{\text{произведение выпавших очков равно } 8\}$, $C = \{\text{сумма выпавших очков больше, чем произведение}\}$. Для заданного случайного эксперимента постройте пространство элементарных событий Ω . Для выписанных событий укажите множества благоприятствующих им исходов.

Решение. При подбрасывании двух костей наблюдаемый результат эксперимента – пара чисел от одного до шести. При этом возможны два варианта условий данного эксперимента: игральные кости одинаковые или различные.

1 вариант. Если выброшенные игральные кости не различаются, то нам не важно, на какой кости выпало то или иное число. Поэтому резуль-

татом эксперимента можно считать неупорядоченную пару чисел $\{i, j\}$ ¹. В этом случае формальная запись пространства элементарных событий имеет следующий вид: $\Omega = \{\{i, j\}, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Нетрудно аккуратно написать все исходы эксперимента:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} \{1,1\}; & \{1,2\}; & \{1,3\}; & \{1,4\}; & \{1,5\}; & \{1,6\}; \\ & \{2,2\}; & \{2,3\}; & \{2,4\}; & \{2,5\}; & \{2,6\}; \\ & & \{3,3\}; & \{3,4\}; & \{3,5\}; & \{3,6\}; \\ & & & \{4,4\}; & \{4,5\}; & \{4,6\}; \\ & & & & \{5,5\}; & \{5,6\}; \\ & & & & & \{6,6\} \end{array} \right\}.$$

Для того, чтобы построить множество исходов, благоприятствующих заданному событию, обычно применяют метод полного перебора. Рассмотрим событие A , состоящее в том, что сумма очков равно 8. Пусть результатом эксперимента стала пара $\{1,1\}$, означающая, что на костях выпали единицы. Сумма выпавших очков равна 2 и событие A не произошло. Поэтому $\{1,1\}$ не благоприятствует событию A и $\{1,1\} \notin A$. Так перебирая все исходы, находим, что событию A благоприятствуют только исходы $\{2,6\}$, $\{3,5\}$, $\{4,4\}$. Следовательно, $A = \{\{2,6\}; \{3,5\}; \{4,4\}\}$. Аналогично $B = \{\{2,4\}\}$, $C = \{\{1,1\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{1,4\}; \{1,5\}; \{1,6\}\}$.

В том случае, когда перебор слишком трудоемкий, можно использовать аналитические приемы, уменьшающие полный перебор. Рассмотрим на примере события A . Формально $A = \{\{i, j\}, i + j = 8, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Для построения множества исходов, благоприятствующих A , необходимо решить уравнение $i + j = 8$ на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с условием $i \leq j$. Рассмотрим $i = 8 - j \leq j$, откуда имеем $2j \geq 8$. В итоге получаем, что $j \geq 4$,

¹ Фигурные скобки в данном случае играют важную роль. Например, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

и возможных значений j всего три: $j \in \{4, 5, 6\}$. Отсюда вытекает, что пары $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 4\}$ и есть решения уравнения $i + j = 8$ на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с условием $i \leq j$. Следовательно, $A = \{\{2, 6\}; \{3, 5\}; \{4, 4\}\}$. Аналогично $B = \{\{2, 4\}\}$.

Теперь рассмотрим событие $C = \{\{i, j\}, i + j > ij, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Ему благоприятствуют решения неравенства $ij < i + j$ на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ с условием $i \leq j$. Преобразуем неравенство: $ij - i - j + 1 < 1$ или $(i - 1)(j - 1) < 1$. Вместе с условиями $i \geq 1$ и $j \geq 1$ это неравенство эквивалентно уравнению $(i - 1)(j - 1) = 0$, которое при условии $i \leq j$ в свою очередь эквивалентно $i = 1$. Таким образом,

$$C = \{\{1, j\}, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{\{1, 1\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{1, 5\}; \{1, 6\}\}.$$

2 вариант. В случае, если игральные кости различны, результатом подбрасывания двух костей следует считать упорядоченную пару чисел $(i, j)^2$. Тогда формальная запись пространства элементарных событий имеет следующий вид: $\Omega = \{(i, j), i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Удобно выписать все исходы данного эксперимента в виде матрицы размером 6×6 :

$$\Omega = \begin{pmatrix} (1,1); & (1,2); & (1,3); & (1,4); & (1,5); & (1,6); \\ (2,1); & (2,2); & (2,3); & (2,4); & (2,5); & (2,6); \\ (3,1); & (3,2); & (3,3); & (3,4); & (3,5); & (3,6); \\ (4,1); & (4,2); & (4,3); & (4,4); & (4,5); & (4,6); \\ (5,1); & (5,2); & (5,3); & (5,4); & (5,5); & (5,6); \\ (6,1); & (6,2); & (6,3); & (6,4); & (6,5); & (6,6) \end{pmatrix}.$$

Методом полного перебора находим, что

$$A = \{(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)\}, \quad B = \{(2,4); (4,2)\},$$

² Круглые скобки в отличие от фигурных скобок упорядочивают элементы пары: $(1, 2) \neq (2, 1)$

$$C = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(3,1);(4,1);(5,1);(6,1)\}.$$

Задача 2. В урне находятся три шара, занумерованные от 1 до 3. Из урны вынимаются два шара. Рассмотрим следующие случайные события: $A = \{\text{среди вынутых шаров хотя бы один шар с номером 3}\}$, $B = \{\text{среди вынутых шаров ровно один шар с номером 3}\}$, $C = \{\text{среди вынутых шаров нет шара с номером 3}\}$. Требуется описать пространство элементарных событий Ω , соответствующее данному случайному эксперименту, а для выписанных событий указать множества благоприятствующих им исходов.

Решение. Наблюдаемый результат исследуемого эксперимента – пара чисел от одного до трех. Однако, как и при решении предыдущей задачи возможны несколько вариантов условий данного эксперимента. Рассмотрим все варианты по отдельности.

1 вариант. Шары извлекаются из урны последовательно по одному с возвращением первого извлеченного шара в урну. Результатом такого эксперимента будет упорядоченная пара чисел (i, j) , причем один шар можно вынуть оба раза: тогда $i = j$. В этом случае пространство элементарных событий имеет следующий вид:

$$\Omega = \{(i, j), i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,1); & (1,2); & (1,3); \\ (2,1); & (2,2); & (2,3); \\ (3,1); & (3,2); & (3,3) \end{array} \right\}.$$

Методом полного перебора находим, что

$$A = \{(1,3);(2,3);(3,1);(3,2);(3,3)\}, \quad B = \{(1,3);(2,3);(3,1);(3,2)\},$$

$$C = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2)\}.$$

2 вариант. Шары извлекаются из урны последовательно по одному без возвращения первого извлеченного шара в урну. В этом случае результатом эксперимента будет упорядоченная пара чисел (i, j) , причем поскольку в отличие от первого варианта один шар вынуть два раза нет воз-

возможности, $i \neq j$. Пространство элементарных событий имеет следующий вид:

$$\Omega = \{(i, j), i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \{(1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2)\}.$$

Применяем метод полного перебора: $A = B = \{(1, 3); (2, 3); (3, 1); (3, 2)\}$,
 $C = \{(1, 2); (2, 1)\}.$

3 вариант. Шары извлекаются из урны одновременно. Для этого эксперимента извлеченные шары являются равноценными. Поэтому результатом эксперимента будет неупорядоченная пара чисел $\{i, j\}$ с условием $i \neq j$. Пространство элементарных событий имеет следующий вид:

$$\Omega = \{\{i, j\}, i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \{\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}\}.$$

Методом полного перебора получаем: $A = B = \{\{1, 3\}; \{2, 3\}\}$, $C = \{\{1, 2\}\}.$

Задача 3. Эксперимент состоит в раскладывании трех шаров по двум различным ящикам. Рассмотрим следующие случайные события: $A = \{\text{первый ящик пустой}\}$, $B = \{\text{все шары попали в один ящик}\}$, $C = \{\text{пустых ящиков нет}\}$. Требуется описать пространство элементарных событий Ω , соответствующее данному случайному эксперименту, а для выписанных событий указать множества благоприятствующих им исходов.

Решение. Как и в предыдущих задачах, условия данного эксперимента описаны не полностью и позволяют рассмотреть два варианта решения задачи: в предположении, что шары различны или одинаковы.

1 вариант. Предположим, что шары различные и занумерованы числами от одного до трех. Результатом нашего эксперимента является упорядоченная тройка чисел (i_1, i_2, i_3) , где i_j - номер ящика, в который попал шар с номером j ($j = 1, 2, 3$). В этом случае пространство элементарных событий имеет следующий вид:

$$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3), i_j \in \{1, 2\}, j = 1, 2, 3\} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 2, 1); (1, 2, 2) \\ (2, 1, 1); (2, 1, 2); (2, 2, 1); (2, 2, 2) \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим случайное событие $A = \{\text{первый ящик пустой}\}$. Оно произойдет, если все шары попадут во второй ящик. Поэтому $A = \{(2, 2, 2)\}$. Событию $B = \{\text{все шары попали в один ящик}\}$ благоприятствуют тройки одинаковых цифр. Следовательно, $B = \{(1, 1, 1); (2, 2, 2)\}$. Наконец, событие $C = \{\text{пустых ящиков нет}\}$ происходит, если исходом эксперимента является тройка, в которой встречаются и 1, и 2. Значит,

$$C = \{(1, 1, 2); (1, 2, 1); (1, 2, 2); (2, 1, 1); (2, 1, 2); (2, 2, 1)\}.$$

2 вариант. Предположим, что шары одинаковые. Мысленно их можно пронумеровать от одного до трех. Исход нашего эксперимента можно описать неупорядоченной тройкой чисел $\{i_1, i_2, i_3\}$, где i_j - номер ящика, в который попал шар с номером j ($j = 1, 2, 3$). В этом случае пространство элементарных событий имеет следующий вид:

$$\Omega = \{\{i_1, i_2, i_3\}, i_j \in \{1, 2\}, j = 1, 2, 3\} = \{\{1, 1, 1\}; \{1, 1, 2\}; \{1, 2, 2\}; \{2, 2, 2\}\}.$$

Нетрудно получить, что $A = \{\{2, 2, 2\}\}$, $B = \{\{1, 1, 1\}; \{2, 2, 2\}\}$,

$$C = \{\{1, 1, 2\}; \{1, 2, 2\}\}.$$

Задачи для самостоятельного решения

- 1.1. Игральная кость бросается два раза. Рассматриваются следующие случайные события: $A = \{\text{оба раза выпало число очков, кратное трем}\}$, $B = \{\text{ни разу не выпало число шесть}\}$, $C = \{\text{оба раза выпало число очков, большее трех}\}$. Постройте пространство элементарных событий, соответствующее данному эксперименту. Для выписанных событий укажите множества благоприятствующих им исходов.
- 1.2. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются следующие случайные события: $A = \{\text{герб выпал ровно один раз}\}$, $B = \{\text{ни разу не выпала решка}\}$, $C = \{\text{герб выпал хотя бы один раз}\}$. Постройте пространство элементарных событий, соответствующее данному эксперименту. Для выписанных событий укажите множества благоприятствующих им исходов.

- 1.3. Монета подбрасывается до первого появления герба, но не более четырех раз. Рассматриваются следующие случайные события: $A = \{\text{герб выпал при третьем подбрасывании}\}$, $B = \{\text{ни разу не выпал герб}\}$, $C = \{\text{герб выпал при четвертом подбрасывании}\}$. Постройте пространство элементарных событий, соответствующее данному эксперименту. Для выписанных событий укажите множества благоприятствующих им исходов.
- 1.4. Монета подбрасывается до второго появления герба, но не более четырех раз. Рассматриваются следующие случайные события: $A = \{\text{монету бросали два раза}\}$, $B = \{\text{монету бросали три раза}\}$, $C = \{\text{монету бросали четыре раза}\}$. Постройте пространство элементарных событий, соответствующее данному эксперименту. Для выписанных событий укажите множества благоприятствующих им исходов.
- 1.5. Эксперимент состоит в раскладывании наудачу трех пронумерованных шаров по трем различным ящикам. Рассматриваются следующие случайные события: $A = \{\text{первый ящик пустой}\}$, $B = \{\text{в каждый ящик попало по одному шару}\}$, $C = \{\text{все шары попали в один ящик}\}$. Постройте пространство элементарных событий, соответствующее данному эксперименту. Для выписанных событий укажите множества благоприятствующих им исходов.

Практическое занятие №2.

Классическое определение вероятности.

При классическом определении вероятность $P(A)$ события A полагается равной отношению числа элементарных событий, входящих в A , к общему числу элементарных событий в Ω : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, где $|M|$ - число элементов конечного множества M . В

других терминах вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A , к числу всевозможных исходов. Однако классическое определение вероятности можно применять только в том случае, когда пространство Ω состоит из конечного числа элементарных событий, и все элементарные исходы равновероятны между собой. Последнее происходит в силу симметрии условий, при которых происходит эксперимент. Например, если сделанная из однородного материала геометрически правильная кость (кубик) подбрасывается так, что она успевает сделать достаточно большое число оборотов, то выпадение любой из граней считается равновероятными исходами. Выражения "наугад", "случайно", "наудачу" и т.п., характеризующие выбор в тексте задачи, в случае конечного числа исходов истолковываются как указание к применению классического определения вероятности. Подсчет вероятности в этом случае сводится к подсчету числа составляющих то или иное событие элементарных исходов. В некоторых случаях это делается непосредственным перебором всех благоприятствующих исходов. В иных приходится пользоваться формулами комбинаторики.

Некоторые задачи на классическое определение вероятности сводятся к так называемой урновой схеме, которую вкратце можно описать следующим образом. В урне M белых и N черных шаров. Из урны вынимают $m+n$ шаров сразу. Тогда вероятность события A , состоящего в том, что среди вынутых шаров будет ровно m белых и n черных шаров, равна $P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_N^n}{C_{M+N}^{m+n}}$.

Задача 1. Бросаются одновременно две игральные кости. Используя классическое определение вероятности, вычислите вероятности следующих случайных событий: $A = \{\text{сумма выпавших очков равна } 8\}$, $B = \{\text{произведение выпавших очков равно } 8\}$, $C = \{\text{сумма выпавших очков больше, чем произведение}\}$.

Решение. На предыдущем практическом занятии мы построили два варианта пространства элементарных событий данного случайного эксперимента и множеств исходов, благоприятствующих выписанным случайным событиям. Рассмотрим каждый вариант по отдельности.

1 вариант. Игральные кости не различаются. В этом случае пространство элементарных событий имеет вид: $\Omega = \{\{i, j\}, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Для применения классического определения вероятности необходимо выполнения двух условий: 1) $|\Omega| < +\infty$, 2) равновозможность исходов эксперимента. Однако в нашем случае второе условие не выполняется, поскольку не все исходы равновозможны, например, исход $\{1, 2\}$ более вероятен, чем исход $\{1, 1\}$. Поэтому применять классическое определение вероятности для данной модели нельзя.

2 вариант. Игральные кости различаются. В этом случае пространство элементарных событий имеет следующий вид: $\Omega = \{(i, j), i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Множества исходов, благоприятствующих заданным событиям, равны:

$$A = \{(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)\}, B = \{(2, 4); (4, 2)\},$$

$$C = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(3,1);(4,1);(5,1);(6,1)\}.$$

В отличие от первого варианта для второго варианта модели выпisanного случайного эксперимента условия, при которых применимо классическое определение вероятности, выполнены. Для вычисления вероятностей находим число элементов в соответствующих множествах: $|\Omega| = 36$, $|A| = 5$,

$$|B| = 2, \quad |C| = 11. \quad \text{Отсюда} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}.$$

Задача 2. В урне находятся три шара, занумерованные от 1 до 3. Из урны вынимаются два шара. Используя классическое определение вероятности, вычислите вероятности следующих случайных событий: $A = \{\text{среди вынутых шаров хотя бы один шар с номером 3}\}$, $B = \{\text{среди вынутых шаров ровно один шар с номером 3}\}$, $C = \{\text{среди вынутых шаров нет шара с номером 3}\}$.

Решение. На предыдущем практическом занятии были рассмотрены три варианта вынимания двух шаров из урны. Для каждого из них были построены свои пространства элементарных событий и множества исходов, благоприятствующих выпisanным случайным событиям. Во всех трех случаях выполнены условия применимости классического определения вероятности. Вычислим искомые вероятности для каждого варианта в отдельности.

1 вариант. Шары извлекаются из урны последовательно по одному с возвращением первого извлеченного шара в урну. В этом случае пространство элементарных событий имеет следующий вид:

$$\Omega = \{(i, j), i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1); & (1,2); & (1,3); \\ (2,1); & (2,2); & (2,3); \\ (3,1); & (3,2); & (3,3) \end{array} \right\}.$$

Соответствующие множества исходов:

$$A = \{(1,3);(2,3);(3,1);(3,2);(3,3)\}, B = \{(1,3);(2,3);(3,1);(3,2)\},$$

$$C = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2)\}.$$

Непосредственным подсчетом находим, что $|\Omega| = 9$, $|A| = 5$, $|B| = |C| = 4$. От-

сюда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}$, $P(B) = P(C) = \frac{4}{9}$.

2 вариант. Шары извлекаются из урны последовательно по одному без возвращения первого извлеченного шара в урну.

$$\Omega = \{(i, j), i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \{(1,2);(1,3);(2,1);(2,3);(3,1);(3,2)\}.$$

$$A = B = \{(1,3);(2,3);(3,1);(3,2)\}, C = \{(1,2);(2,1)\}.$$

Тогда $|\Omega| = 6$, $|A| = |B| = 4$, $|C| = 2$.

Отсюда $P(A) = P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3 вариант. Шары извлекаются из урны одновременно.

$$\Omega = \{\{i, j\}, i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}\} = \{\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}\}.$$

$$A = B = \{\{1, 3\}; \{2, 3\}\}, C = \{\{1, 2\}\}.$$

Тогда $|\Omega| = 3$, $|A| = |B| = 2$, $|C| = 1$.

Отсюда $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{1}{3}$.

Заметим, что при втором и третьем варианте интерпретации вынимания двух шаров из урны вероятности выписанных событий получаются одинаковые.

Задача 3. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе: а) имеет все цифры разные; б) имеет только две одинаковые цифры; в) имеет две пары одинаковых

цифр; г) имеет только три одинаковых цифры; д) имеет все цифры одинаковые?

Решение. Сначала построим пространство элементарных событий, соответствующее данному эксперименту. Четырехзначный номер автомобиля – это упорядоченная четверка чисел (i_1, i_2, i_3, i_4) , где i_j – одна из десяти возможных цифр, стоящая на j -том месте номера, $i_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). В этом случае пространство элементарных событий имеет следующий вид:

$$\Omega = \{(i_1, i_2, i_3, i_4), i_j \in \{0, 1, \dots, 9\}, j = 1, 2, 3, 4\}.$$

Выписать все исходы данного эксперимента, как это делалось ранее, видится довольно затруднительным действием. Для применения классического определения вероятности достаточно посчитать количество элементов Ω . Тем, кто владеет методами применения комбинаторных формул, нетрудно вычислить, что $|\Omega| = 10^4 = 10000$. Это же число можно получить, рассуждая так. Первую цифру i_1 можно выбрать десятью способами, вторую i_2 – также десятью. Поэтому пару (i_1, i_2) можно выбрать ста способами ($10 \cdot 10 = 100$). Соответственно тройку (i_1, i_2, i_3) можно выбрать тысячей способами, а четверку (i_1, i_2, i_3, i_4) – десятью тысячами способов. Поэтому $|\Omega| = 10^4 = 10000$.

Введем обозначения рассматриваемых случайных событий: $A = \{\text{все цифры разные}\}$; $B = \{\text{только две одинаковые цифры}\}$; $C = \{\text{две пары одинаковых цифр}\}$; $D = \{\text{только три одинаковых цифр}\}$; $E = \{\text{все цифры одинаковые}\}$.

Нетрудно убедиться, что

$$A = \{(i_1, i_2, i_3, i_4); i_j \in \{0, 1, \dots, 9\}; i_j \neq i_k, j \neq k; j = 1, 2, 3, 4\}.$$

Для удобства формализации описания исходов, благоприятствующих данным событиям, каждую цифру в выбранной четверке будем обозначать буквой так, что разные буквы соответствуют разным буквам. Тогда $A = \{(a, b, c, d), a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$. Для вычисления $|A|$ рассуждаем так. Первая цифра a выбирается десятью способами. Так как $a \neq b$, цифра b выбирается из оставшихся 9 цифр. Аналогично c выбирается отличной от цифр a и b восьмью способами, а d - семью. В итоге $|A| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ и $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5040}{10000} = 0,504$.

Рассмотрим событие B . Ему благоприятствуют четверки, составленные из трех цифр a, b, c , при этом цифра a повторяется. Взаимное расположение двух цифр a и цифр b и c дает нам шесть различных вариантов. Поэтому

$$B = \left\{ (a, a, b, c), (a, b, a, c), (a, b, c, a), (b, a, a, c), (b, a, c, a), (b, c, a, a), a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\} \right\}.$$

Тогда $|A| = 6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 4320$ и $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4320}{10000} = 0,432$.

Аналогично событиям C и D благоприятствуют, четверки, составленные из пары цифр a и b :

$$C = \{(a, a, b, b), (a, b, a, b), (a, b, b, a), a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}\},$$

$$D = \{(a, a, a, b), (a, a, b, a), (a, b, a, a), (b, a, a, a), a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}\}.$$

Отсюда $|C| = 3 \cdot 10 \cdot 9 = 270$ и $|D| = 4 \cdot 10 \cdot 9 = 360$. В итоге получаем

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{270}{10000} = 0,027, \quad P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{360}{10000} = 0,036.$$

Наконец, $E = \{(a, a, a, a), a \in \{0, 1, \dots, 9\}\}, \quad |E| = 10$ и

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{10}{10000} = 0,001.$$

Задача 4. В группе 25 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу выбрано 10 студентов. Найти вероятность, что среди отобранных студентов половина отличников.

Решение. Случайный эксперимент с выбором студентов относится к урновой схеме. Действительно, при выборе студентов мысленно можно представить этот эксперимент как вынимание шаров из урны. Каждому студенту ставим в соответствие шар, причем отличникам – белые шары, остальным – черные. Вынимая из урны шары, мы выбираем студентов, которым они соответствуют. Осталось определить параметры урновой схемы и подставить их в формулу.

По условиям задачи: $M + N = 25, \quad M = 8, \quad N = 17, \quad m + n = 10, \quad m = n = 5$. Применяем формулу урновой схемы:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{C_8^5 \cdot C_{17}^5}{C_{25}^{10}} = \frac{\frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{17!}{5!12!}}{25!} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = \\ &= \frac{(8 \cdot 7) \cdot (17 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 13)}{5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19} = \frac{2548}{24035} = 0,106012. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

- 2.1. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.
- 2.2. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{сумма выпавших очков равна } 8\}$, $B = \{\text{произведение выпавших очков равно } 8\}$, $C = \{\text{сумма выпавших очков больше, чем произведение}\}$.
- 2.3. Колода из 36 карт хорошо перемешана. Найти вероятности событий: $A = \{\text{четыре туза расположены рядом}\}$, $B = \{\text{места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с шагом } 7\}$.

- 2.4. Из ящика, содержащего три билета с номерами 1, 2, 3 вынимают по одному все билеты. Найти вероятность того, что хотя бы у одного билета порядковый номер совпадает с собственным.
- 2.5. На полке в случайном порядке расставлены 40 книг, среди которых трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).
- 2.6. Чему равна вероятность того, что два лица A и B окажутся рядом, если они рассаживаются вместе с 15 остальными произвольным образом в ряд из 17 мест?
- 2.7. Пять девочек и пять мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из 10 мест. Какова вероятность того, что никакие две девочки не окажутся рядом?
- 2.8. На шахматную доску произвольным образом поставили две ладьи (белую и черную), каждую в свою клетку. Что вероятнее: побьют эти ладьи друг друга или нет?
- 2.9. В урне 7 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают 5 шаров сразу. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров будет 3 белых и 2 черных шаров.
- 2.10. а) Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово "книга". Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Какова вероятность того, что у него снова получится слово "книга"? б) Тот же вопрос со словом "ананас". в) Тот же вопрос со словом "оборонеспособность".
- 2.11. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам: каждый шарик попадет в ту или иную лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других. Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой - один, а в двух остальных шариков не будет.
- 2.12. В партии из 11 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу выбирается 6 деталей. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 4 стандартных?
- 2.13. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
- 2.14. В группе 25 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу выбрано 10 студентов. найти вероятность, что среди отобранных студентов половина отличников.

Практическое занятие № 3.

Геометрическое определение вероятности.

Пусть пространство исходов эксперимента Ω является ограниченным подмножеством $\mathbf{R}^n$, n -мерный объем $V(\Omega)$ которого определен. Предположим, что выполнены два условия: 1) $0 < V(\Omega) < +\infty$, 2) все исходы равновозможны. Тогда согласно геометрическому определению вероятности для любого подмножества A пространства Ω , имеющего n -мерный объем $V(A)$, вероятность события A равна отношению объема множества A к объему множества Ω : $P(A) = V(A)/V(\Omega)$.

Задача 1. На отрезке AB длины 3 случайно выбирается точка C . Какова вероятность того, что длина отрезка AC больше, чем в 2 раза, длины отрезка BC ?

Решение. Множество всех исходов – это отрезок AB . Введем на отрезке координаты. Пусть точка A будет началом координат. Так как отрезок AB имеет длину 3, точка B имеет координату 3. Тогда $\Omega = [0, 3]$ и $l(\Omega) = 3$. Пусть x – координата выбранной точки C . Тогда $AC = x$ и $BC = 3 - x$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что $AC > 2 \cdot BC$. Тогда $A = \{x : x > 2(3 - x)\} = \{x : 3x > 6\} = \{x : x > 2\} = (2, 3]$.

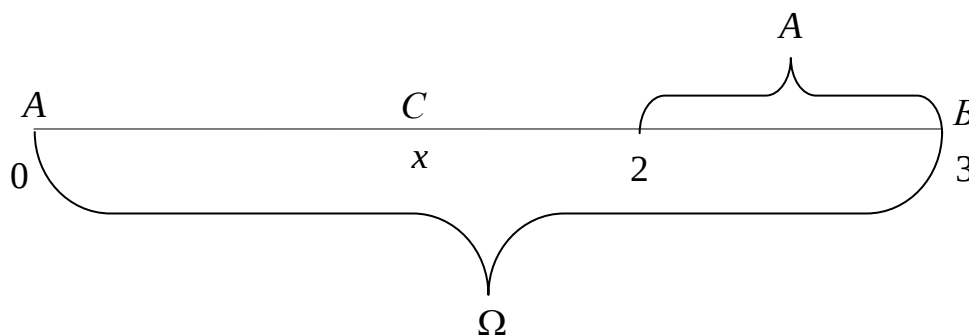


Рис. 1.

В итоге имеем:

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{1}{3}.$$

Задача 2. На отрезке AB длины 1 случайно выбираются две точки C и D . Какова вероятность того, что длина отрезка AC больше, чем в 2 раза, длины отрезка CD ?

Решение. Как и в решении предыдущей задачи введем координаты на прямой AB :

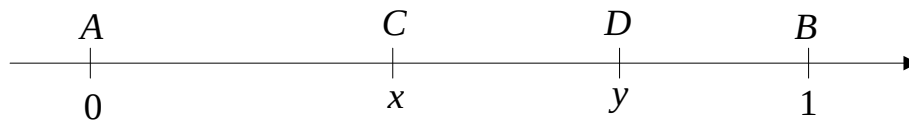


Рис. 2

Так как выбираются две точки, исходом эксперимента можно считать пару чисел (x, y) , где x - координата точки C , y - координата точки D . Таким образом, $\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 1]\} = [0, 1]^2$ - единичный квадрат. Его площадь равна $S(\Omega) = 1$. В свою очередь длина отрезка $AC = x$. Так как мы не знаем, какая из точек C или D правее, $CD = |y - x|$. Это означает, что событие A определяется по следующему правилу: $A = \{(x, y) : x > 2|y - x|\}$. Найдем множество точек из квадрата Ω , благоприятствующих A . Для этого решим неравенство $x > 2|y - x|$.

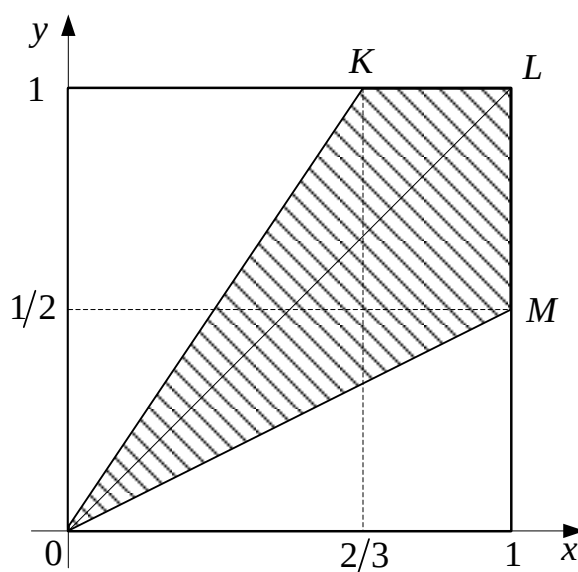


Рис. 3

Рассмотрим случай $y \geq x$. В квадрате это точки над диагональю OL .

Тогда $|y - x| = y - x$ и неравенство эквивалентно $x > 2(y - x)$ или $y < \frac{3}{2}x$.

Это полуплоскость, находящаяся ниже прямой, заданной уравнением

$y = \frac{3}{2}x$. Прямая проходит через начало координат $(0,0)$ и точку

$K = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$. С учетом условия $y \geq x$ получаем треугольник OKL . Так в этом

треугольнике сторона $KL = \frac{1}{3}$, а высота к ней равна 1, его площадь равна

$$S_{OKL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Аналогично рассмотрим случай $y < x$. В квадрате это точки под диагональю OL . Тогда $|y - x| = x - y$ и неравенство эквивалентно $x > 2(x - y)$

или $y > \frac{1}{2}x$. Это полуплоскость, находящаяся выше прямой, заданной

уравнением $y = \frac{1}{2}x$. Прямая проходит через начало координат $(0,0)$ и точку

ку $M = \left(1, \frac{1}{2}\right)$. С учетом условия $y < x$ получаем треугольник OLM . Так в

этом треугольнике сторона $LM = \frac{1}{2}$, а высота к ней равна 1, его площадь

$$\text{равна } S_{OLM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, множество точек, благоприятствующих A , - это четырехугольник $OKLM$. Его площадь равна $S(A) = S_{OKL} + S_{OLM} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

$$\text{Окончательно } P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{5}{12}.$$

Задача 3. Из отрезка $[0,1]$ наудачу выбираются два числа x и y . Какова вероятность того, что $y \leq \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ и $y \leq 2x^2$?

Решение. Задача двумерная. Для каждой пары (x, y) соответствует точка на декартовой плоскости. Следовательно, $\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 1]\} = [0, 1]^2$ - единичный квадрат. Его площадь равна $S(\Omega) = 1$. Точки плоскости, удовлетворяющие условиям $y \leq \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ и $y \leq 2x^2$, находятся ниже прямой $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ и параболы $y = 2x^2$. Найдем абсциссу точки их пересечения в единичном квадрате. Для этого решаем квадратное уравнение $2x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$. У этого уравнения два корня: $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$. Так как $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, прямая и парабола пересекаются в точке K с абсциссой $\frac{1}{2}$.

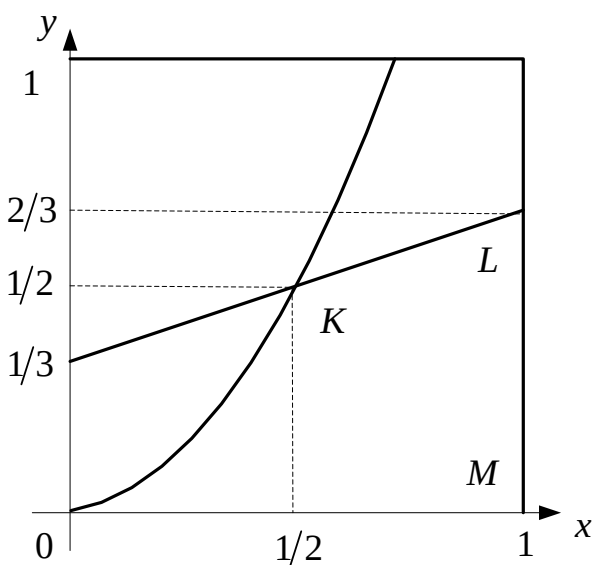


Рис. 4

Пусть L - точка пересечения прямой $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ и границы Ω , точка M - вершина квадрата. Тогда случайному событию A , состоящему в том, что $y \leq \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ и $y \leq 2x^2$, благоприятствуют точки из криволинейного четырехугольника $OKLM$. Его площадь находится следующим образом:

$$\begin{aligned} S(A) &= \int_0^{1/2} 2x^2 dx + \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^{1/2} + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} \right) \Big|_{1/2}^1 = \\ &= \frac{1}{12} - 0 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

В итоге получаем $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{3}{8}$.

Задачи для самостоятельного решения

- 3.1. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. Найти вероятность того, что наугад поставленная точка в этом круге окажется вне шестиугольника.
- 3.2. На отрезок OA длины L наудачу поставлена точка B . Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую чем $L/3$.
- 3.3. В круг радиуса 3 помещен круг радиуса 2. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в большой круг точка попадет также и в малый круг.
- 3.4. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых R и $2R$ соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями.
- 3.5. В круг вписан правильный n -угольник, а в него вписан малый круг. В большой круг наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что она попадет и в меньший круг, при $n = 3, 4, 6$.
- 3.6. Две точки выбираются наудачу из отрезка $[-1, 1]$. Пусть p и q - координаты точек. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь а) вещественные корни, б) вещественные положительные корни.

- 3.7. Из отрезка $[0,1]$ наудачу выбираются два числа x и y . Найти вероятность того, что $x + y < 1$ и $xy < \frac{2}{9}$.
- 3.8. Из отрезка $[0,2]$ наудачу выбираются два числа x и y . Найти вероятность того, что $xy < 1$ и $\frac{x}{y} < 2$.
- 3.9. Из отрезка $[0,1]$ наудачу выбираются два числа x и y . Найти вероятность того, что $x + y < \frac{3}{2}$ и $xy < 0,09$.

Практическое занятие № 4.

Применение формул сложения и умножения для вычисления вероятности.

При вычислении вероятностей событий, получившихся операциями из событий, вероятности которых известны, применяются следующие формулы, именуемые формулами сложения и умножения.

Вероятность совместного появления событий A и B . (события AB) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло: $P(AB) = P(A) \cdot P(A|B)$. Для независимых событий A и B : $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Вероятность совместного появления событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ находится по формуле $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})$.

Эти две формулы называются формулами умножения. Остальные формулы называются формулами сложения.

Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий A и B (сумма $A + B$) равна сумме вероятностей этих событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность появления хотя бы одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Вероятность появления хотя бы одного из двух произвольных событий находится по формуле $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Вероятность появления хотя бы одного из трех произвольных событий находится по формуле

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

Вероятность противоположного события равна $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Задача 1. Среди 100 лотерейных билетов - 50 выигрышных. Найти вероятность того, что наудачу выбранные два билета окажутся выигрышными.

Решение. Так как в задаче не уточняется, как выбираются билеты, предположим, что билеты выбираются по одному. Пусть события $A_1 = \{\text{первый билет выигрышный}\}$, $A_2 = \{\text{второй билет выигрышный}\}$. Легко увидеть, что $P(A_1) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ и $P(A_2|A_1) = \frac{49}{99}$. Искомая вероятность – это вероятность произведения событий A_1 и A_2 . По формуле умножения

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}.$$

Задача 2. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Из урны случайно вынимаются два шара, один за другим. Найти вероятность того, что а) оба шара будут белыми, б) шары будут разного цвета.

Решение. Пусть событие $A = \{\text{первый шар вынут белый}\}$, $B = \{\text{второй шар вынут белый}\}$, $C = \{\text{вынутые шары разного цвета}\}$. Тогда нам надо найти вероятности $P(AB)$ и $P(C)$. Воспользуемся формулой умножения вероятностей $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$. Из классического определения вероятностей нетрудно получить, что $P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, $P(B|A) = \frac{9}{14}$.

Следовательно, $P(AB) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$.

Теперь вычислим $P(C)$. Легко увидеть, $C = \bar{A}B + A\bar{B}$, где $\bar{A}B = \{\text{первый шар черный, второй - белый}\}$, $A\bar{B} = \{\text{первый шар белый, второй - черный}\}$.

События $\bar{A}B$ и $A\bar{B}$ являются несовместными. Поэтому в силу формулы сложения $P(C) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})$. Каждая из вероятностей в сумме находится по формуле умножения $P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$, $P(A\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}|A)$. Из классического определения вероятностей легко

получить, что $P(\bar{A}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$, $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\bar{B}|A) = \frac{5}{14}$. В

итоге имеем

$$P(C) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) + P(A) \cdot P(\bar{B}|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{14} = \frac{10}{21}.$$

Задача 3. В двух партиях 76% и 42% доброкачественных изделий соответственно. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них а) хотя бы одно бракованное, б) два бракованных, в) одно бракованное.

Решение. Пусть заданы события $A = \{\text{из первой партии выбрано бракованное изделие}\}$, $B = \{\text{из второй партии выбрано бракованное изделие}\}$, $C = \{\text{хотя бы одно бракованное}\}$, $D = \{\text{два бракованных}\}$, $E = \{\text{одно бракованное}\}$. Тогда $P(A) = 100\% - 76\% = 24\% = 0,24$ и

$P(B) = 100\% - 42\% = 58\% = 0,58$. Соответственно $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,76$ и

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,42$. Для событий $C = A + B$, $D = A \cdot B$, $E = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$.

По формулам сложения и умножения:

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ &= 0,24 + 0,58 - 0,24 \cdot 0,58 = 0,6808 \end{aligned}$$

$$P(D) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,24 \cdot 0,58 = 0,1392$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = \\ &= 0,24 \cdot 0,42 + 0,76 \cdot 0,58 = 0,5416 \end{aligned}$$

Это и есть ответы задачи.

Задача 4. Вероятности попадания каждым из двух стрелков соответственно равны 0,6 и 0,8. Каждый сделал по 2 выстрела. Найти вероятность а) только 1 промаха, б) хотя бы одного попадания.

Решение. Пусть даны события $A_i = \{\text{попадание первого стрелка при } i\text{-том выстреле}\}$, $B_i = \{\text{попадание второго стрелка при } i\text{-том выстреле}\}$

$i=1,2$. Соответственно $\bar{A}_i = \{\text{промах первого стрелка при } i\text{-том выстреле}\}$, $\bar{B}_i = \{\text{промах второго стрелка при } i\text{-том выстреле}\}$ $i=1,2$. Тогда $P(A_i) = 0,6$; $P(\bar{A}_i) = 0,4$; $P(B_i) = 0,8$; $P(\bar{B}_i) = 0,2$.

а) Событие $C = \{\text{только 1 промах}\}$ представляется как

$$C = \bar{A}_1 A_2 B_1 B_2 + A_1 \bar{A}_2 B_1 B_2 + A_1 A_2 \bar{B}_1 B_2 + A_1 A_2 B_1 \bar{B}_2$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\bar{A}_1 A_2 B_1 B_2 + A_1 \bar{A}_2 B_1 B_2 + A_1 A_2 \bar{B}_1 B_2 + A_1 A_2 B_1 \bar{B}_2) = \\ &= P(\bar{A}_1)P(A_2)P(B_1)P(B_2) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(B_1)P(B_2) + \\ &+ P(A_1)P(A_2)P(\bar{B}_1)P(B_2) + P(A_1)P(A_2)P(B_1)P(\bar{B}_2) = \\ &= 2 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,8^2 + 2 \cdot 0,6^2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,3072 + 0,1152 = 0,4224 \end{aligned}$$

б) Событие $D = \{\text{хотя бы одно попадание}\}$ имеет противоположное событие $\bar{D} = \{\text{все промахи}\}$. Очевидно $\bar{D} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{B}_1 \bar{B}_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(\bar{D}) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{B}_1 \bar{B}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2) = \\ &= 0,4^2 \cdot 0,2^2 = 0,0064 \end{aligned}$$

Отсюда $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - 0,0064 = 0,9936$.

Задача 5. ОТК проверяет изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Найти вероятность того, что хотя бы одно из трех проверенных изделий стандартно.

Решение. Пусть события $A_i = \{i\text{-тое изделие стандартно}\}$, $i=1,2,3$, $B = \{\text{хотя бы одно из трех проверенных изделий стандартно}\}$. Тогда $B = A_1 + A_2 + A_3$ и $\bar{B} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$. По условию задачи $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,9$. По формуле вероятности противоположного события $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i) = 1 - 0,9 = 0,1$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = \\ &= 1 - 0,1^3 = 1 - 0,001 = 0,999. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

- 4.1. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что а) 1-й студент взял «хороший» билет, б) 2-й студент взял «хороший» билет, в) оба студента взяли «хорошие» билеты.
- 4.2. Два игрока поочередно извлекают шары без возвращения из урны, содержащей 7 белых и 4 черных шара. Выигрывает тот, кто вынет первым белый шар. Найти вероятность выигрыша первого участника.
- 4.3. Из урны, содержащей 3 белых, 5 черных и 2 красных шара, два игрока поочередно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Если появляется красный шар, то объявляется ничья. Найти вероятности событий $A = \{\text{выигрывает игрок, начавший игру}\}$, $B = \{\text{выигрывает второй игрок}\}$, $C = \{\text{игра закончилась вничью}\}$.
- 4.4. В читальном зале имеется 7 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность, что оба учебника окажутся в переплете.
- 4.5. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны три человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.
- 4.6. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три экзаменационных вопроса.
- 4.7. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0.7, а для второго - 0.8. Какова вероятность того, что при залпе в мишень попадет только один из стрелков?
- 4.8. ОТК проверяет изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0.9. Найти вероятность того, что хотя бы одно из трех проверенных изделий стандартно.
- 4.9. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0.8. Какова вероятность того, что при трех выстрелах он хотя бы раз поразит мишень?

Практическое занятие № 5.

Применение формул полной вероятности и Байеса для вычисления вероятности.

Предположим, что событие B может произойти только после того, как произойдет одно из попарно несовместных событий или A_1 или $A_2, \dots, A_n$. В таких случаях

вероятность события легко находится по формуле полной вероятности

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Эту формулу можно применять, если события $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ удовлетворяют следующим условиям.

$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ (хотя бы одно из событий A_i обязательно произойдет);

$\forall i \neq j \ A_i \cdot A_j = \emptyset$ (попарная несовместность событий);

$P(A_i) > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ (иначе условная вероятность $P(B|A_i)$ будет не определена).

Если же нам необходимо вычислить условную вероятность события A при условии события B , происходящего после A удобно пользоваться формулой Байеса $P(A|B) = P(B|A) \cdot P(A) / P(B)$.

Задача 1. Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что второй студент взял «хороший» билет.

Решение. Обозначим события $A = \{\text{первый студент взял «хороший» билет}\}$, $B = \{\text{второй студент взял «хороший» билет}\}$. В том случае, если мы знаем, какой билет взял первый студент, нетрудно найти вероятность события B . Действительно, представим, что событие A произошло. Тогда второму студенту осталось на выбор 24 билета и 4 «хороших» из них. Поэтому условная вероятность равна $P(B|A) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Аналогично

$P(B|\bar{A}) = \frac{5}{24}$. Однако для того, чтобы найти безусловную вероятность события B , необходимо воспользоваться формулой полной вероятности:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}).$$

Находим вероятности событий, связанных с первым студентом:

$$P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \quad P(\bar{A}) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Подставляя полученные вероятности в формулу полной вероятности, находим искомую вероятность:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1+5}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Из вычисления видно, что $P(A) = P(B)$. Поэтому можно сделать вывод, что шансы у студента получить «хороший» билет не зависят от того, каким по счету он выбирает билет: первым или вторым.

Задача 2. У мальчика в левом кармане 3 конфеты «Белочка» и 1 конфета «Маска», а в правом - 2 «Белочки» и 2 «Маски». Он достал две конфеты из одного кармана, и оказалось, что одна из них «Белочка», а другая – «Маска». Найти вероятность того, что он достал конфеты а) из левого кармана, б) из правого кармана.

Решение. Введем обозначения событий: $A = \{\text{мальчик достал конфеты из левого кармана}\}$, $B = \{\text{мальчик достал одну «Белочку» и одну «Маску»}\}$. По условию задачи известно, что событие B произошло. Поэтому задача состоит в вычислении условных вероятностей $P(A|B)$ и $P(\bar{A}|B)$.

Для решения задачи воспользуемся формулой Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}.$$

Так как выбор мальчиком карманов случаен, находим, что $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$. Условные вероятности $P(B|A)$ и $P(B|\bar{A})$ вычисляем по

формуле урновой схемы: $P(B|A) = \frac{C_3^1 \cdot C_1^1}{C_4^2} = \frac{3 \cdot 1}{6} = \frac{1}{2},$

$P(B|\bar{A}) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1}{C_4^2} = \frac{2 \cdot 2}{6} = \frac{2}{3}.$ Для вычисления безусловной вероятности

$P(B)$ применяем формулу полной вероятности:

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}.$ В итоге по

формуле Байеса получаем $P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}} = \frac{1}{4}$. Аналогично

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Задача 3. Имеется пять урн: 2 урны состава A_1 по два белых шара и по одному черному, 3 урны состава A_2 по одному белому шару и по 5 черных, 2 урны состава A_3 по одному белому шару и по два черных. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу вынимается шар.

а) Чему равна вероятность события B , состоящего в том, что вынутый шар белый?

б) Найти условную вероятность того, что была выбрана урна с составом A_1 , при условии, что вынули белый шар.

Решение. Пусть A_i событие, состоящее в том, что выбрана урна состава A_i ($i=1,2,3$). Тогда нетрудно вычислить, что $P(B|A_1) = \frac{2}{3}$,

$$P(B|A_2) = \frac{1}{6}, P(B|A_3) = \frac{1}{3}, P(A_1) = P(A_3) = \frac{2}{7}, P(A_2) = \frac{3}{7}.$$

а) Заметим, что в результате эксперимента мы обязательно выберем урну с определенным составом шаров, т.е. $A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$ и $A_i A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Значит, можно воспользоваться формулой полной вероятности

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{14}.$$

б) В этом случае удобно воспользоваться малой формулой Байеса

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)}.$$

Подставляя в формулу, в итоге получаем $P(A_1|B) = \frac{2/3 \cdot 2/7}{5/14} = \frac{8}{15}$.

Задача 4. Из 1000 деталей 230 деталей принадлежат первой партии, 480 - второй партии, остальные – третьей партии. В первой партии 6% бракованных деталей, во второй - 5%, в третьей - 4%. Из 1000 деталей наудачу выбирается одна. Определить вероятность того, что выбранная деталь бракованная.

Решение. Пусть события $A_i = \{\text{выбранная деталь из } i\text{-той партии}\}$, $i = 1, 2, 3$, $B = \{\text{выбранная деталь бракованная}\}$. Тогда

$$P(A_1) = \frac{230}{1000} = 0,23; P(A_2) = \frac{480}{1000} = 0,48; P(A_3) = \frac{1000 - 230 - 480}{1000} = 0,29.$$

Условные вероятности:

$$P(B|A_1) = 6\% = 0,06; P(B|A_2) = 5\% = 0,05; P(B|A_3) = 4\% = 0,04.$$

Формула полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \\ &= 0,23 \cdot 0,06 + 0,48 \cdot 0,05 + 0,29 \cdot 0,04 = 0,0494. \end{aligned}$$

Задача 5. В первой урне находится 4 белых и 6 черных шаров, а во второй - 3 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны случайным образом без возвращения удалили по одному шару, а остальные шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, будет белым.

Решение. Обозначим события $A_i = \{\text{из } i\text{-той урны вынут белый шар}\}$, $i = 1, 2, 3$. По классическому определению вероятности

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = 0,4; P(\overline{A_1}) = \frac{6}{10} = 0,6; P(A_2) = \frac{3}{12} = 0,25; P(\overline{A_2}) = \frac{9}{12} = 0,75.$$

При вынимании двух шаров из первых двух урн возможны четыре события, образующие полную систему гипотез:

$$A_1 \cdot A_2 = \{\text{из первой урны вынут белый шар, из второй – белый}\},$$

$\overline{A_1} \cdot A_2 = \{\text{из первой урны вынут черный шар, из второй – белый}\},$

$A_1 \cdot \overline{A_2} = \{\text{из первой урны вынут белый шар, из второй – черный}\},$

$\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} = \{\text{из первой урны вынут черный шар, из второй – черный}\}.$

По формуле умножения находим вероятности каждого события:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1;$$

$$P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0,6 \cdot 0,25 = 0,15;$$

$$P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3;$$

$$P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,6 \cdot 0,75 = 0,45$$

Условные вероятности находим по классическому определению вероятности, представив, что событие, определяющее условие, произошло. Допустим, что событие $A_1 \cdot A_2$ произошло. Это означает, что из первых двух урн вынули 2 белых шара. Следовательно, в третьей урне после перекладывания шаров окажется 20 шаров, причем 5 из них белых. Поэтому

$$P(A_3 | A_1 \cdot A_2) = \frac{5}{20} = 0,25. \text{ Аналогично } P(A_3 | \overline{A_1} \cdot A_2) = P(A_3 | A_1 \cdot \overline{A_2}) = \frac{6}{20} = 0,3;$$

$$P(A_3 | \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Формула полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_1 \cdot A_2)P(A_3 | A_1 \cdot A_2) + P(\overline{A_1} \cdot A_2)P(A_3 | \overline{A_1} \cdot A_2) + \\ &+ P(A_1 \cdot \overline{A_2})P(A_3 | A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2})P(A_3 | \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = \\ &= 0,1 \cdot 0,25 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,35 = 0,3175. \end{aligned}$$

Задача 6. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение. Обозначим события $A = \{\text{наугад выбранное лицо – мужчина}\}$, $\bar{A} = \{\text{наугад выбранное лицо – женщина}\}$, $B = \{\text{наугад выбранное лицо – дальтоник}\}$. Тогда $P(A) = P(\bar{A}) = 0,5$; $P(B|A) = 0,05$; $P(B|\bar{A}) = 0,0025$.

Применяем большую формулу Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025} = \frac{20}{21} = 0,952381.$$

Задачи для самостоятельного решения

- 5.1. В тире имеются 5 ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.
- 5.2. Группа студентов состоит из 3 отличников, 12 хорошистов и 5 занимающихся слабо. Отличники на экзамене могут получить только 5, хорошисты могут получить с равной вероятностью 4 или 5, слабо занимающиеся могут получить 3, 4 или 2. Для сдачи экзамена вызывается наудачу один студент. Какова вероятность того, что он получит 4 или 5?
- 5.3. Вероятность попадания при каждом выстреле для 3-х стрелков равна соответственно $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$. При одновременном выстреле всех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий.
- 5.4. В первой урне лежат 1 белый и 4 красных шара, а во второй - 1 белый и 7 красных. В первую урну добавляются два шара, случайно выбранных из второй урны. Найти вероятность того, что шар, выбранный из пополненной урны, окажется белым.
- 5.5. Имеются 5 урн. В 1-й, 2-й и 3-й урне находится по 2 белых и 3 черных шара, в 4-й и 5-й урнах по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна, и из нее извлекается шар. Какова условная вероятность того, что выбрана 4-я или 5-я урна, если извлеченный шар оказался белым?
- 5.6. В стройотряде 70% первокурсников и 30% второкурсников. Среди первокурсников 10% девушек, а среди студентов второго курса - 5% девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероят-

- ность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.
- 5.7. Имеются три урны с белыми и черными и черными шарами, причем отношение числа белых шаров к числу черных равно p_1, p_2, p_3 для 1-й, 2-й и 3-й урн соответственно. Наудачу (с вероятностью $\frac{1}{3}$) выбирается урна и из нее шар. Какова вероятность того, что а) вынутый шар белый, б) шар вынут из 1-й урны, если он белый?
- 5.8. Два стрелка стреляют по мишени. Один из них попадает в цель в среднем в 5 случаях, а второй – в 8 случаях из 10. Перед выстрелом они бросают правильную монету для определения очередности. Посторонний наблюдатель знает условия стрельбы, но не знает, кто в данный момент стреляет. Вот он видит, что стрелок попал в цель. Какова вероятность, что стрелял первый стрелок?
- 5.9. В урне 7 белых и 3 черных шара. Без возвращения извлекаются 3 шара. Известно, что среди них есть черный шар. Какова вероятность, что два другие белые?
- 5.10. Урна содержит один шар, про который известно, что он либо белый, либо черный с одинаковой вероятностью. В урну кладут один белый шар и затем наудачу извлекают один шар. Он оказался белым. Какова вероятность, что оставшийся в урне шар - белый?

Практическое занятие № 6.

Схема Бернулли.

Пусть n раз проводится испытание (наблюдение, эксперимент), результатом которого может быть один из двух исходов. Обычно один из исходов называется «успехом», а другой – «неуспехом». Вероятность появления «успеха» не зависит от того, которое по счету испытание проводится, а полагается равным p . В свою очередь вероятность «неуспеха» равна $q = 1 - p$. Предполагается, что каждое испытание не зависит от остальных производимых испытаний. такая система испытаний называется схемой Бернулли. Для схемы Бернулли важна следующая формула: вероятность того, что в n испытаниях «успех» появится ровно k раз, равна $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ число сочетаний из n элементов по k элементов. Этим соотношением следует пользоваться при достаточно маленьких n ($n \leq 20$). Для больших n эта формула неудобна в вычислениях, даже если пользоваться компьютером. В этом случае применяют известные предельные теоремы: локальную и интегральную теоремы Муавра - Лапласа и теорему Пуассона. Однако в каком случае, какой теоремой пользоваться? Ответ на этот вопрос дает следующий алгоритм.

1. Локальная предельная теорема применяется, если надо вычислить $P_n(k)$ и $npq > 10$. При этом сначала находим $\sigma = \sqrt{npq}$ и $x = \sigma^{-1}(k - np)$. Все вычисления про-

изводим с точностью до 0.01. Из таблицы 1 приложения находим приближенное значение $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

При этом, если $x < 0$, то пользуемся четностью функции $\varphi(x)$: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Согласно локальной теоремы аппроксимация искомой вероятности следующая: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(x)$.

2. Если же необходимо вычислить $P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$ - вероятность того, что число «успехов» в серии n испытаний принадлежит отрезку $[k_1, k_2]$, и $(k_2 - k_1)$ достаточно велико (что затрудняет использование локальной теоремы), то пользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Для этого находим вначале приближенные значения $\sigma = \sqrt{npq}$, $x_1 = \frac{1}{\sigma}(k_1 - np)$, $x_2 = \frac{1}{\sigma}(k_2 - np)$.

По таблице 2 приложения находим $\Phi_0(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $\Phi_0(x_2)$, причем если x_i отрицательно ($i = 1, 2$), то учитываем нечетность функции Φ_0 : $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$. Теперь осталось воспользоваться интегральной теоремой $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$.

3. Теорема Пуассона применяется, когда n велико, а npq мало ($npq < 10$). Это возможно, если вероятность p или q является достаточно маленьким числом, то есть появление «успеха» или «неуспеха» есть достаточно редкое событие. Пусть p мало (этого всегда можно добиться, если мысленно поменять местами «успех» и «неуспех»). Так как в этом случае «успех» - редкое событие, вычисление $P_n(k)$ имеет смысл при небольших значениях k (при больших k $P_n(k)$ близко к нулю). Для этого необходимо найти $\lambda = np$ и воспользоваться теоремой Пуассона $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$. Последнее значение можно найти, используя калькулятор.

Задача 1. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 8 билетов. Найти вероятность того, что среди купленных билетов а) ровно три билета выигрышных; б) хотя бы три билета выигрышных; в) хотя бы три билета выигрышных и хотя бы три билета проигрышных.

Решение. Задача на формулу Бернулли. В схеме Бернулли при n испытаниях с вероятностью успеха p вероятность того, что будет ровно k успехов, равна $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Если же необходимо вычислить вероятность того, что число «успехов» в серии n испытаний принадлежит

отрезку $[k_1, k_2]$, то вычисляют сумму $P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)$. В задаче каждый

отдельный лотерейный билет – это независимое испытание, а выигрышный билет – «успех». Поэтому $n=8$, $p=0,3$ и $q=1-p=0,7$.

а) Вероятность того, что среди купленных билетов ровно три билета выигрышных, равна $P_8(3)$. По формуле Бернулли $P_8(3) = C_8^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^5 = 0,2541$.

б) Вероятность того, что среди купленных билетов хотя бы три билета выигрышных, равна $P_8(3,8) = 1 - P_8(0,2)$. Найдем $P_8(0,2)$:

$$\begin{aligned} P_8(0,2) &= P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) = \\ &= C_8^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^8 + C_8^1 \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^7 + C_8^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^6 = \\ &= 0,0576 + 0,1977 + 0,2965 = 0,5518. \end{aligned}$$

Следовательно, $P_8(3,8) = 1 - P_8(0,2) = 0,4482$.

в) Вероятность того, что среди купленных билетов хотя бы три билета выигрышных и хотя бы три билета проигрышных, равна

$$\begin{aligned} P_8(3,5) &= P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) = \\ &= C_8^3 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^5 + C_8^4 \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^4 + C_8^5 \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^3 = \\ &= 0,2541 + 0,1361 + 0,0467 = 0,4369. \end{aligned}$$

Задача 2. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 130 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступило а) ровно 90 раз; б) не менее 90 раз; в) не более 90 раз; г) не менее 90 и не более 100 раз.

Решение. Задача на применение предельных теорем Муавра-Лапласа (или просто теоремы Лапласа). Найдем параметры схемы Бернулли: $n=130$, $p=0,7$, $q=1-p=0,3$. Вычислим $np=130 \cdot 0,7=91$; $npq=130 \cdot 0,7 \cdot 0,3=27,9$ и $\sigma=\sqrt{npq}=5,2249$. Для удобства обозначим число наступивших событий через ν .

а) Необходимо найти локальную вероятность $P\{\nu = 90\} = P_{130}(90)$. По формуле Бернулли $P_{130}(90) = C_{130}^{90} \cdot 0,7^{90} \cdot 0,3^{40}$. Последняя формула практически невычислима. Поэтому применяем локальную предельную теорему Муавра-Лапласа. Для этого найдем $x = \frac{k - np}{\sigma}$ при $k = 90$:

$$x = \frac{90 - 130 \cdot 0,7}{5,2249} = -0,1914 \approx -0,19.$$

Округление с точностью до второго знака необходимо только в том случае, если значение функции определяется по таблице. Из таблицы 1 приложения или с помощью калькулятора находим приближенное значение $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$: $\varphi(-0,19) = \varphi(0,19) = 0,3918$. Это значение можно также найти в таблице MS Excel, воспользовавшись функцией НОРМ.СТ.РАСП(-0,19;0), где второй аргумент функции, равный нулю, означает выбор локальной функции распределения (плотности).

По теореме Лапласа искомая вероятность равна

$$P_{130}(90) \approx \frac{\varphi(x)}{\sigma} = \frac{0,3918}{5,2249} = 0,0750.$$

г) В данном случае необходимо найти интегральную вероятность $P\{90 \leq \nu \leq 100\} = P_{130}(90,100)$. Для этого применяем интегральную предельную теорему Муавра-Лапласа. Сначала вычислим

$$x_1 = \frac{k_1 - 0,5 - np}{\sigma} = \frac{90 - 0,5 - 130 \cdot 0,7}{5,2249} = -0,2871 \approx -0,29,$$

$$x_2 = \frac{k_2 + 0,5 - np}{\sigma} = \frac{100 + 0,5 - 130 \cdot 0,7}{5,2249} = 1,8182 \approx 1,82.$$

Из таблицы 2 приложения находим приближенные значения $\Phi_0(x_i)$,

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Учитывая нечетность функции $\Phi_0(x)$, получаем

$\Phi_0(-0,29) = -\Phi_0(0,29) = -0,1141$ и $\Phi_0(1,82) = 0,4656$. Эти значения можно также найти в таблице MS Excel, воспользовавшись формулой НОРМ.СТ.РАСП(-0,19;1)-0,5, где второй аргумент функции, равный 1, означает выбор интегральной функции распределения.

По интегральной предельной теореме искомая вероятность равна

$$P_{130}(90,100) = \Phi_0(1,82) - \Phi_0(-0,29) = 0,4656 + 0,1141 = 0,5797.$$

б) Необходимо вычислить одностороннюю интегральную вероятность $P\{90 \leq \nu\} = P_{130}(90,130)$. В этом случае также находится $\Phi_0(x_1)$:

$$x_1 = \frac{k_1 - 0,5 - np}{\sigma} = \frac{90 - 0,5 - 130 \cdot 0,7}{5,2249} = -0,2871 \approx -0,29,$$

$$\Phi_0(-0,29) = -\Phi_0(0,29) = -0,1141.$$

В качестве x_2 следует взять $+\infty$. Так как

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5, \text{ находим, что искомая вероятность равна}$$

$$P_{130}(90,130) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(-0,29) = 0,5 + 0,1141 = 0,6141.$$

в) Найдем одностороннюю интегральную вероятность $P\{\nu \leq 90\} = P_{130}(0,90)$. В отличие от предыдущего пункта сначала вычисляем $\Phi_0(x_2)$:

$$x_2 = \frac{k_2 + 0,5 - np}{\sigma} = \frac{90 + 0,5 - 130 \cdot 0,7}{5,2249} = -0,0957 \approx -0,1,$$

$$\Phi_0(-0,1) = -\Phi_0(0,1) = -0,0398.$$

В качестве x_1 берем $-\infty$. Используя нечетность функции $\Phi_0(x)$, находим, что $\Phi_0(-\infty) = -\Phi_0(+\infty) = -0,5$. В итоге вычисляем искомую вероятность:

$$P_{130}(0,90) = \Phi_0(-0,1) - \Phi_0(-\infty) = -0,0398 + 0,5 = 0,4602.$$

Задача 3. Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна $p = 0,002$. Поступило $n = 1000$ вызовов. Найти вероятность того, что а) произошло три «сбоя», б) произошло не менее трех «сбоев», в) «сбоев» произошло не менее трех и не более пяти.

Решение. Эксперимент является схемой Бернулли. Каждый вызов можно считать независимым испытанием. Сбой в работе телефонной станции будем считать успех в испытании. Поскольку сбой в работе телефонной станции является редким событием, при решении задачи следует применять предельную теорему Пуассона. Для этого вначале находим параметр $\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$. Число сбоев обозначим ν

а) Локальная вероятность $P\{\nu = 3\} = P_{1000}(3)$. Тогда по теореме Пуассона с помощью таблиц, калькулятора или соответствующего программного приложения вычисляем:

$$P_{1000}(3) = \frac{\lambda^3}{3!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = 0,1804.$$

в) Необходимо найти значение интегральной вероятности:

$$P\{3 \leq \nu \leq 5\} = P_{1000}(3,5) = P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5).$$

Аналогично предыдущему находим каждое слагаемое в отдельности и суммируем:

$$\begin{aligned} P_{1000}(3,5) &= P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) = \\ &= \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} + \frac{2^4}{4!} \cdot e^{-2} + \frac{2^5}{5!} \cdot e^{-2} = \\ &= 0,1804 + 0,0902 + 0,0361 = 0,3067. \end{aligned}$$

б) Необходимо найти значение односторонней интегральной вероятности:

$$P\{3 \leq \nu\} = P_{1000}(3,1000).$$

Удобно перейти к противоположному событию и найти

$$\begin{aligned}
 P\{\nu \leq 2\} &= P_{1000}(0, 2) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = \\
 &= \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} + \frac{2}{1!} \cdot e^{-2} + \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} = \\
 &= 5e^{-2} = 0,6767.
 \end{aligned}$$

В итоге имеем $P\{3 \leq \nu\} = 1 - P\{\nu \leq 2\} = 1 - 0,6767 = 0,3233$.

Задачи для самостоятельного решения

- 6.1. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что 2 раза появится число очков кратное трем.
- 6.2. В семье 10 детей. Считая вероятность рождения мальчика и девочки равной 0.5, определить вероятность того, что в данной семье а) 5 мальчиков, б) мальчиков не менее 3, но не более 8.
- 6.3. Вероятность попадания бомбы в цель равна 0.3. Сбрасывается 6 бомб. Найти вероятность того, что в цель попадут а) 4 бомбы, б) не менее 5 бомб, в) не более 4-х бомб.
- 6.4. Вероятность того, что посаженное семечко подсолнуха прорастет, равна 0.8. Найти вероятность того, что из 150 посаженных семечек прорастет ровно 110.
- 6.5. Проходят соревнования по парашютному спорту. Вероятность попадания в заданный круг для каждого спортсмена одинакова и равна 0.6. Найти вероятность того, что среди 200 парашютистов ровно 111 спортсменов попадут в заданный круг.
- 6.6. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0.8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?
- 6.7. При изготовлении отливок получается 27% дефектных. Сколько необходимо запланировать отливок к изготовлению, чтобы с вероятностью не менее 0.95 была обеспечена программа выпуска изделий, для выполнения которой необходимо 50 бездефектных отливок?
- 6.8. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти вероятность того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.
- 6.9. Вероятность частице, вылетевшей из радиоактивного источника, быть зарегистрированной счетчиком равна 0.0001. За время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Какова вероятность, что счетчик а) зарегистрировал более 10 частиц, б) не зарегистрировал ни одной частицы, в) зарегистрировал ровно 3 частицы? г) Какое

наименьшее число частиц должно вылететь из источника, чтобы с вероятностью, большей 0.99, счетчик зарегистрировал более трех частиц?

- 6.10. Вероятность заболевания клещевым энцефалитом для туриста - 0.1. В среднем среди 10 туристов только 1 не имеет прививки. Через лес за лето прошло 10000 туристов. Какова вероятность, что заболевших клещевым энцефалитом не более двух?

Приложение

Таблица 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	Второй знак после запятой									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,398	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,341	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,323	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,062	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,027	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Таблица 2

$$\text{Значения функции } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

	Второй знак после запятой									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,437	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,483	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,485	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,489
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Летчиков Андрей Владимирович

**Практикум
по теории вероятностей и математической статистике**

Часть 1

Подписано в печать 26.09.2017. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 2,61. Усл.-изд. л. 2,21.

Издательство Института экономики и управления ФГБОУ ВО «УдГУ»
426034 г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.