УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.934

ВАГИН ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск - 2003 г.

Работа выполнена в Удмуртском государственном университете.

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент Н. Н. Петров

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Ушаков
кандидат физико-математических наук,
доцент С. В. Лутманов

Ведущая организация - Челябинский государственный университет

Защита состоится на заседании диссертационного совета К.064.47.01 при Удмуртском государственном университете по адресу: г. Ижевск, ул. Университетская 1(корп. 4), Математический факультет. E-mail: imi@wing.uni.udm.ru

"......." .... 2003 г. в .... в ауд. ....

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан "........" .... 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета к.ф.-м.н., доцент Н. Н. Петров

Актуальность темы. Теория дифференциальных игр - раздел математической теории оптимальных процессов, связанный с исследованием управляемых систем, функционирующих в условиях конфликта.

Развитие этой теории стимулировалось наличием реальных прикладных задач, имеющих важное практическое значение для механики, экономики, военного дела и некоторых других областей.

Становление теории дифференциальных игр связано с исследованиями Р. Айзекса, А. Брайсона, У. Флеминга, Ю. Хо, Б. Н. Пшеничного, Л. А. Петросяна.

В Советском Союзе активная разработка теории дифференциальных игр началось после фундаментальных работ Н. Н. Красовского и Л. С. Петросяна. Существенный вклад в эту разработку внесли В. Д. Батухтин, Р. В. Гамкрелидзе, Н. Л. Григоренко, П. Б. Гусятников, В. И. Жуковский, М. И. Зеликин, А. Ф. Клейменов, А. В. Кряжимский, А. Б. Куржанский, В. Н. Лагунов, А. А. Меликян, Е. Ф. Мищенко, М. С. Никольский, Ю. С. Осипов, А. Г. Пашков, Н. Н. Петров, Г. К. Пожарицкий, Е. С. Половинкин, А. Ю. Сатимов, А. И. Субботин, Н. Н. Субботина, В. Е. Третьяков, Н. Т. Тынянский, В. И. Ухоботов, В. Н. Ушаков, А. Г. Ченцов, Ф. Л. Черноусько, А. А. Чикрий и многие другие авторы.

Из зарубежных авторов можно в первую очередь отметить работы Л. Берковича, Д. Брейквелла, Н. Калтона, А. Фридмана, Р. Эллиота, Дж. Лейтмана, Р. П. Иванова и других авторов.

Одним из важных разделов теории дифференциальных игр является задача преследования управляемого объекта одним или несколькими управляемыми объектами и задача уклонения от одного или нескольких объектов. При этом ситуация может быть осложнена наличием ограничений на состояния объектов.

Одна из первых задач, линейная глобальная задача уклонения, была поставлена Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко.[1]

В этом направлении следует отметить также работы А. Азамова, М. С. Габриэляна, В. Л. Зака, А. В. Мезенцева, В. В. Остапенко, В. С. Пацко, И. С. Раппопорта, Б. Б. Рихсиева, С. И. Тарлинского, В. Д. Ширяева и других авторов.

[1] Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого//ДАН СССР, 1969, Т. 189, №4, С. 721-723

Наибольшую трудность для исследований представляет задача преследования группой управляемых объектов группы управляемых объектов.[2][3][4] Специфика этих задач требует создания новых методов их исследования.

Цель данной работы состоит в получении условий разрешимости задачи преследования группой управляемых объектов группы управляемых объектов.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

1. Получены необходимые и достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в задаче простого преследования со многими убегающими и многими преследователями, при условии, что все убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого многогранного множества.

2. Получены достаточные условия поимки двух убегающих в задаче простого преследования со многими участниками, при условии, что все убегающие используют одно и то же управление.

3. Для примера Л. С. Понтрягина получены достаточные условия поимки группой преследователей по крайней мере одного убегающего, при условии, что все убегающие используют одно и то же управление и не покидают пределы выпуклого многогранного множества.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Все результаты могут быть использованы для дальнейших исследований по теории дифференциальных игр со многими участниками.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались:

- на международной конференции "Control Applications of Optimization 11th IFAC INTERNATIONAL WORKSHOP" (Санкт-Петербург, 2000)

- на 32-й региональной молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (УрО РАН, Институт математики и механики, Екатеринбург, 2001)

- на международной конференции "Logic, Game Theory and Social Choice" (Санкт-Петербург, 2001)

- на международном симпозиуме "The Tenth International Symposium of Dynamic Games and Applications" (Санкт-Петербург, 2002)

[2]Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев, Наук. думка, 1992

[3]Петров Н. Н., Петров Н. Никандр. О дифференциальной игре "казаки-разбойники"//Дифф. уравнения, 1983, Т. 19, №8, С. 1366-1374

[4]Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М. МГУ, 1990

- на Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 2003)

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 99-01-00454, 03-01-00014) и конкурсным центром Минобразования РФ (гранты Е00-1.0-5, Е02-1.0-100).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, 7 параграфов, 6 рисунков и списка литературы. Объем диссертации 102 страницы. Библиографический список содержит 192 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении сделан обзор работ других авторов и излагается краткое содержание работы по параграфам.

Первая глава состоит из 4-х параграфов и посвящена задаче простого преследования группой преследователей группы убегающих при одинаковых динамических возможностях участников, при условии, что все убегающие используют одно и то же управление и в процессе игры не покидают пределы выпуклого многогранного множества.

Первый параграф носит вспомогательный характер и посвящен понятию положительного базиса.

Определение 1. *Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_l \in R^k$ образуют положительный базис R^k, если для любого $x \in R^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ \ldots, \alpha_l$ такие, что*

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l.$$

Приводятся некоторые новые свойства положительного базиса.

В втором параграфе данной главы рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц.

В пространстве $R^k (k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \| u_i \| \leq 1. \tag{1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид:

$$\dot{y}_j = v, \quad \| v \| \leq 1. \tag{2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in R^k$. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_i^0, \ \ y_j(0) = y_j^0,$$

причем
$$x_i^0 \neq y_j^0.$$
Здесь и всюду далее, если не оговорено специально $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $T > 0$ и σ – некоторое конечное разбиение
$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_q < t_{q+1} = T$$
отрезка $[0,\ T]$.

О п р е д е л е н и е 2. *Кусочно-программной стратегией V убегающих E_j, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений c^l, $l = 0, 1, \ldots, q$, ставящих в соответствие величинам*
$$(t_l, x_i(t_l), y_j(t_l), \min_{t\in[0,t_l]} \min_i \parallel x_i(t) - y_j(t) \parallel) \tag{3}$$
измеримую функцию $v(t)$, определенную для $t \in [t_l,\ t_{l+1})$ и такую, что $\parallel v(t) \parallel \leq 1,\ t \in [t_l,\ t_{l+1})$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который по величинам (3) для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $v(t),\ t \in [t_l,\ t_{l+1})$.

О п р е д е л е н и е 3. *Кусочно-программной контрстратегией U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений c_i^l, $l = 0, 1, \ldots, q$, ставящих в соответствие величинам (3) и управлению $v(t),\ t \in [t_l,\ t_{l+1})$ измеримую функцию $u_i(t)$, определенную для $t \in [t_l,\ t_{l+1})$ и такую, что $\parallel u_i(t) \parallel \leq 1$, $t \in [t_l,\ t_{l+1})$.*

Обозначим данную игру Γ.

О п р е д е л е н и е 4. *В игре Γ происходит уклонение от встречи, если для любого $T > 0$ существуют разбиение σ интервала $[0,\ T]$, стратегия V убегающих E_j такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ преследователей P_i имеет место*
$$x_i(t) \neq y_j(t), \quad t \in [0, T].$$

О п р е д е л е н и е 5. *В игре Γ происходит поимка, если существует $T > 0$ и для любой стратегии V убегающих E_j существуют кусочно-программные контрстратегии U_i преследователей P_i, момент $\tau \in [0, T]$ и номера $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что*
$$x_r(\tau) = y_s(\tau).$$

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему
$$\dot{z}_{i,j} = u_i - v, \quad z_{i,j}(0) = z_{i,j}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{4}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что начальные позиции x_i^0, y_j^0 таковы, что а) если $n > k$, то для любого набора индексов $I \subset \{1, \dots, n\}$, $|I| \geq k+1$ справедливо $\mathrm{Intco}\{x_i^0,\ i \in I\} \neq \emptyset$;

б) любые k векторов из совокупности $\{x_i^0 - y_j^0, y_s^0 - y_r^0, s \neq r\}$ линейно независимы.

Т е о р е м а 1. *Пусть*

$$\mathrm{Intco}\{x_i^0\} \cap \mathrm{co}\{y_j^0\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

В третьем параграфе данной главы дополнительно (по отношению к задаче второго параграфа) предполагается, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого многогранного множества

$$D = \{y | y \in R^k, (P_s, y) \leqslant \mu_s, s = 1, \dots, r\},$$

где $p_1, \dots, p_s$ - единичные векторы R^k, $\mu_1, \dots, \mu_r$ - вещественные числа, такие, что $\mathrm{Int} D \neq \emptyset$.

Т е о р е м а 2. *Пусть*

$$0 \notin \mathrm{Intco}\{x_i^0 - y_j^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит уклонение от встречи.*

Т е о р е м а 3. *Пусть* $n \geqslant k$ *и*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{x_i^0 - y_j^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

В §4 рассматривается задача простого преследования группой преследователей двух жестко скоординированных убегающих. Цель группы преследователей - поймать двух убегающих.

Получены достаточные условия поимки.

Глава 2 диссертации посвящена задаче преследования группой управляемых объектов группы жестко скоординированных убегающих в примере Понтрягина.

В первом параграфе данной главы доказаны некоторые полезные свойства решений линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В §2 данной главы рассматривается следующая дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц.

В пространстве R^k рассматривается дифференциальная игра $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид:

$$x_i^{(l)} + a_1 x_i^{(l-1)} + \dots + a_l x_i = u_i, \quad \| u_i \| \leqslant 1, \quad x_i \in R^k. \tag{5}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид:

$$y_j^{(l)} + a_1 y_j^{(l-1)} + \dots + a_l y_j = v, \quad \| v \| \leqslant 1, \quad y_j \in R^k. \tag{6}$$

Здесь x_i, y_j, u_i, $v \in R^k$, $a_1, \dots, a_l \in R^1$.

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i,\alpha}^0, \quad y_j^{(\alpha)}(0) = y_{j,\alpha}^0, \quad \alpha = 0, \dots, l-1, \tag{7}$$

причем $x_{i,0}^0 - y_{j,0}^0 \neq 0$ для всех i и j.

Здесь и всюду далее, если не оговорено специально $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление v.

Вместо систем (5), (6) рассмотрим систему

$$z_{i,j}^{(l)} + a_1 z_{i,j}^{(l-1)} + \dots + a_l z_{i,j} = u_i - v, \quad ||u_i|| \leqslant 1, \quad ||v|| \leqslant 1, \tag{8}$$

$$z_{i,j}(0) = z_{i,j,0}^0 = x_{i,0}^0 - y_{j,0}^0, \dots, z_{i,j}^{(l-1)}(0) = z_{i,j,l-1}^0 = x_{i,l-1}^0 - y_{j,l-1}^0.$$

Обозначим через $\varphi_q(t), q = 0, 1, \dots, l-1$ решения уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1 \omega^{(l-1)} + \dots + a_l \omega = 0 \tag{9}$$

с начальными условиями:

$$\omega(0) = 0, \dots, \omega^{(q-1)}(0) = 0, \omega^{(q)}(0) = 1, \omega^{(q+1)}(0) = 0, \dots, \omega^{(l-1)}(0) = 0.$$

П р е д п о л о ж е н и е 1. *Все корни характеристического уравнения*

$$\lambda^l + a_1 \lambda^{l-1} + \dots + a_l = 0 \tag{10}$$

имеют неположительные вещественные части.

П р е д п о л о ж е н и е 2. $\varphi_{l-1}(t) \geqslant 0$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Отметим, что предположение 2 выполнено, если уравнение (10) имеет только вещественные корни. Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s)$ - вещественные корни, $\mu_1 \pm i\nu_1, \dots, \mu_p \pm i\nu_p$ $(\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_p)$ - комплексные корни уравнения (10). Пусть далее

$$\zeta_i(T, t) = \varphi_0(T) x_i(t) + \dots + \varphi_{l-1}(T) x_i^{(l-1)}(t),$$

$$\eta_j(T, t) = \varphi_0(T) y_j(t) + \dots + \varphi_{l-1}(T) y_j^{(l-1)}(t),$$

$$\xi_{i,j}(T, t) = \varphi_0(T) z_{i,j}(t) + \dots + \varphi_{l-1}(T) z_{i,j}^{(l-1)}(t).$$

Так как

$$\varphi_q(t) = \sum_{\beta=1}^{s} e^{\lambda_\beta t} P_{q,\beta}(t) + \sum_{\alpha=1}^{p} e^{\mu_\alpha t} (Q_{q,\alpha}(t) \cos(\nu_\alpha t) + R_{q,\alpha}(t) \sin(\nu_\alpha t)),$$

то $\zeta_i(T,0)$, $\eta_j(T,0)$, $\xi_{i,j}(T,0)$ представимы в виде

$$\zeta_i(T,0)=\sum_{\beta=1}^{s}e^{\lambda_\beta T}P^1_{i,\beta}(T)+\sum_{\alpha=1}^{p}e^{\mu_\alpha T}(Q^1_{i,\alpha}(T)\cos(\nu_\alpha T)+R^1_{i,\alpha}(T)\sin(\nu_\alpha T)),$$

$$\eta_j(T,0)=\sum_{\beta=1}^{s}e^{\lambda_\beta T}P^2_{j,\beta}(T)+\sum_{\alpha=1}^{p}e^{\mu_\alpha T}(Q^2_{j,\alpha}(T)\cos(\nu_\alpha T)+R^2_{j,\alpha}(T)\sin(\nu_\alpha T)),$$

$$\xi_{i,j}(T,0)=\sum_{\beta=1}^{s}e^{\lambda_\beta T}P^3_{i,j,\beta}(T)+\sum_{\alpha=1}^{p}e^{\mu_\alpha T}(Q^3_{i,j,\alpha}(T)\cos(\nu_\alpha T)+R^3_{i,j,\alpha}(T)\sin(\nu_\alpha T)),$$

Считаем, что $\xi_{i,j}(T,0)\neq 0$ для всех i, j и $T>0$, ибо если $\xi_{p,q}(T,0)=0$ при некоторых p, q и T, то преследователь P_p ловит убегающего E_q к моменту T, полагая $u_p(t)=v(t)$. Считаем также, что $P^3_{i,j,s}(t)$ тождественно не равен 0 для всех i и j, ибо в противном случае преследователи первоначально добиваются выполнения указанного условия.

Обозначим через $\gamma_{i,j}$ - степень многочлена $P^3_{i,j,s}(t)$, γ - степень многочлена $P_{l-1,s}$. Можно считать, что $\gamma_{i,j}=\gamma$ для всех i и j, ибо в противном случае преследователи P_i первоначально добиваются выполнения данного условия.

Обозначим

$$X_i^0=\lim_{t\to\infty}\frac{P^1_{i,s}(t)}{t^\gamma},\quad Y_j^0=\lim_{t\to\infty}\frac{P^2_{j,s}(t)}{t^\gamma},\quad Z^0_{i,j}=\lim_{t\to\infty}\frac{P^3_{i,j,s}(t)}{t^\gamma}.$$

Обозначим данную игру Γ.

Определение 6. *В игре* Γ *происходит поимка, если существуют* $T>0$ *и измеримые функции* $u_i(t)=u_i(t,z^0_{i,j},v(t))$ *такие, что для любой измеримой функции* $v(t)$ *существуют момент* $\tau\in[0,T]$ *и номера* s, q, *для которых* $x_s(\tau)=y_q(\tau)$.

Доказана следующая

Теорема 4. *Пусть* $n\geqslant k+1$ *и*

$$0\in \mathrm{Intco}\{Z^0_{i,j}\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

В третьем параграфе данной главы рассматривается дифференциальная игра Γ при дополнительном предположении, что убегающие в процессе игры не покидают пределы выпуклого многогранного множества D вида

$$D=\{y|y\in R^k,(p_s,y)\leqslant\mu_s,s=1,\dots,r\},$$

где $p_1,\dots,p_s$ - единичные векторы R^k, $\mu_1,\dots,\mu_r$ вещественные числа такие, что $\mathrm{Int}D\neq\emptyset$.

Доказана

Т е о р е м а 5. *Пусть* $n \geqslant k$ *и*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{Z^0_{i,j}, p_1, \ldots, p_r\}.$$

Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Публикации по теме диссертации

1. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Простое преследование жестко скоординированных убегающих.//Известия РАН. Теория и системы управления, 5, 2001, 75–79.

2. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями.//Прикладная математика и механика 2002, т. 66, №2, 238–245.

3. *Vagin D.A., Chirkova L.S., Petrov N.N.* About some problems of group pursuit.//Control Applications of Optimization 11th IFAC INTERNATIONAL WORKSHOP, 3-6 July, 2000. Abstracts, S-P. 2000, p. 197–198.

4. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями.//Известия ИМИ, 2(19), 2000, Ижевск: Издательство УдГУ, 16–27.

5. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* О преследовании группы убегающих.//Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 32-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН, 2001, 188–193.

6. *Vagin D.A., Petrov N.N.* On One Problem of Pursuit of a Group of Evaders.//International Conference Logic, Game Theory and Social Choice, S-P. 2001, p. 204–205.

7. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Преследование группы жесткосоединенных убегающих в примере Понтрягина.//Известия ИМИ, 3(23), 2001, Ижевск: Издательство УдГУ, 55-68.

8. *Vagin D.A., Petrov N.N.* The Two Problems of Group Pursuit//The Tenth International Symposium of Dynamic Games and Applications. Proceedings, V2, S-P. 2002, p. 691–695.

9. *Вагин Д.А.* Одна задача группового преследования жесткосоединенных убегающих.//Известия ИМИ, 2(25), 2002, Ижевск: Издательство УдГУ, 31–34