

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВО «УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ
(для студентов 1 курса ИЭиУ)

Составитель:

Бадаш Е.Х., старший преподаватель

Ижевск 2017

УДК 514.74(075.8)

ББК 22.151.5я73

М 545

Рекомендовано учебно-методической комиссией ИЭиУ. Протокол №35 от 30.10.2017

Бадаш Е.Х.

Методическое пособие. Основы векторной алгебры (для студентов 1 курса ИЭиУ). – Ижевск: Институт экономики и управления ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2017, 32 с.

Пособие представляет собой систематическое изложение одного из разделов аналитической геометрии – векторная алгебра. Рекомендуется студентам первого курса ИЭиУ всех направлений и специальностей, а так же всех форм обучения.

© Бадаш Е.Х., 2017

© Институт экономики и управления
ФГБОУ ВО «Удмуртский
государственный университет», 2017

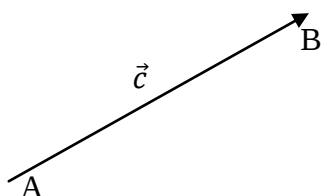
ПРЕДИСЛОВИЕ.

Основой при написании данного пособия послужили идеи и методический подход И.А. Шпилькина. Они в своё время были изложены в его пособии «Векторная алгебра». Некоторые разделы из его работы присутствуют и в данном пособии.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Вектором называется направленный отрезок прямой, т.е. отрезок, один из концов которого объявлен началом, а другой – концом.

Вектор с началом в точке А и с концом в точке В обозначается $\overrightarrow{AB}$. Векторы можно обозначать и одной малой буквой $\vec{c}$.

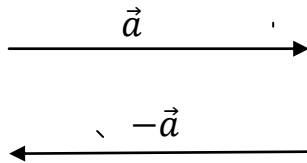


Вектор, начало которого совпадает с его концом, называют **нулевым**. Нулевой вектор обозначают нулем со стрелочкой сверху $\vec{0}$.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными**. Будем обозначать это следующим образом: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Знак $\parallel$ обозначает коллинеарность вообще. Два коллинеарных вектора могут иметь одинаковые или противоположные направления. $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD}$ – это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и одинаково направлены. $\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD}$ – это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и противоположно направлены. Векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются **компланарными**.

Длиной или **модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка АВ, изображающего вектор. Обозначают модуль $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{c}|$. По определению $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$. Направление вектора задается обычно при помощи единичного вектора или **орта**. Орт данного направления – это вектор данного направления с единичной длиной. Орт вектора обозначается $\overrightarrow{AB^0}$, при этом $|\overrightarrow{AB^0}| = 1$.

Будем считать векторы равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые направления и равные модули. То есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким образом, векторы равны, если равны их орты и модули. Если же модули двух коллинеарных векторов равны, но векторы направлены в противоположные стороны, то векторы называются **противоположными**. Вектор противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.



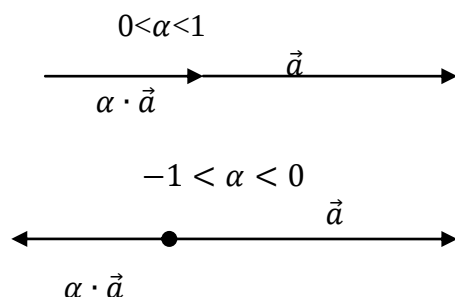
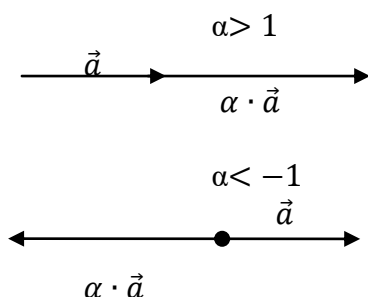
Нулевой вектор имеет длину, равную нулю, и не имеет определенного направления. Поэтому ему часто приписывают то направление, которое удобно в данном конкретном случае. Например, принято считать, что нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Вектор, который можно перемещать в пространстве параллельно самому себе называется **свободным**. Мы будем в основном рассматривать свободные векторы.

2. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО.

Вектор $\vec{b}$ называется произведением вектора $\vec{a}$ на число α , т. е. $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, если

- 1) $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $\alpha > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\alpha < 0$.



Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

- 1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ и $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- 2) $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \alpha$;
- 3) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a})$.

Исходя из определения умножения вектор на число, любой вектор может быть представлен в виде произведения своего модуля на орт, например $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, $\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^0$. Этот способ записи очень важен, так как здесь выделены две основные характеристики вектора длина и направление.

Запись $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, ещё принято читать следующим образом: «Вектор $\vec{b}$ линейно выражается через вектор $\vec{a}$ ».

Утверждение 2.1. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них линейно выражался через другой.

Доказательство.

Необходимость: дано, что вектор $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

А) Если хотя бы один из векторов нулевой, например $\vec{b}$, то он линейно выражается через другой с числовым множителем 0: $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$.

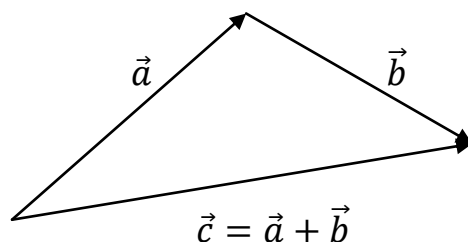
Б) Если оба вектора отличны от нуля, то можно каждый из них записать через модуль и орт: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, $\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^0$, причем числовые множители $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ отличны от нуля. Из двух последних равенств выразим орты векторов $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$, $\vec{b}^0 = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$. (2.1)

Но так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их орты либо равны, либо противоположны, то есть $\vec{b}^0 = \pm \vec{a}^0$. Используя равенство (2.1), получим $\frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = \pm \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$. Отсюда можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$ или вектор $\vec{a}$ через вектор $\vec{b}$: $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, где $\alpha = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ или $\vec{a} = \beta \cdot \vec{b}$, где $\beta = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$, что и требовалось доказать.

Достаточность: пусть вектор $\vec{b}$ линейно выражается через вектор $\vec{a}$, т.е. $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$. Но по определению умножения вектора на число, указанный вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$. Утверждение доказано.

3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ.

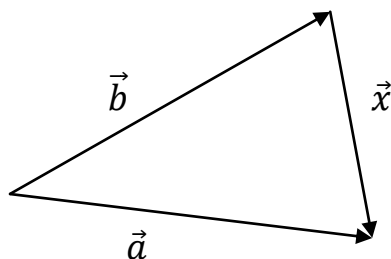
Если два вектора расположены так, что конец одного из них служит началом второго, то их суммой является вектор, началом которого служит начало первого слагаемого, а концом – конец второго слагаемого. В общем случае эти три вектора – два слагаемых и их сумма – образуют треугольник, поэтому это правило называется правилом треугольника.



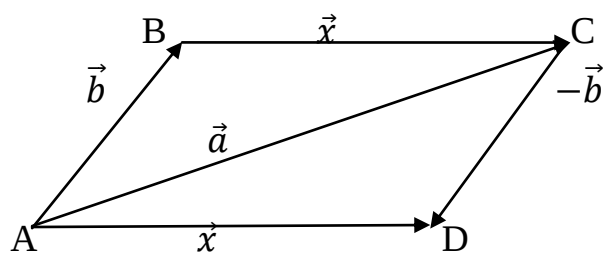
Если векторы сумму, которых требуется найти, расположены в пространстве произвольно, то их перемещают параллельно самим себе таким образом, чтобы начало второго слагаемого совпадало с концом первого.

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т.е. $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$. Отсюда следует правило построения разности двух векторов.

Если два вектора имеют общее начало, то вектор, началом которого служит конец второго вектора, а концом – конец первого, есть разность между первым и вторым вектором.



Если векторы расположены произвольно, их следует привести к общему началу, перемещая в пространстве параллельно самим себе. Вычитание вектора может быть заменено сложением противоположного вектора. Это можно показать, построив треугольник вычитания векторов до параллелограмма: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{x}$, $\overrightarrow{CD} = -\vec{b}$.



Из треугольника ABC: $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$, из треугольника ADC: $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
Поэтому в дальнейшем будем говорить только о сложении векторов.

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

- 1) переместительный закон сложения: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) сочетательный закон сложения: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) распределительные законы сложения:

А) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

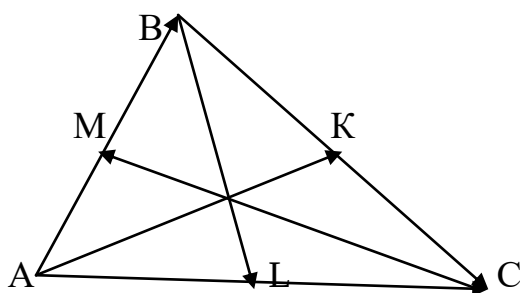
Б) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

4) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

5) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Пример. Дан треугольник ABC, в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$.
Выразить векторы $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}$, где K, L, M – основания медиан, через векторы $\vec{p}, \vec{q}$.

Решение.



Пользуясь определением суммы двух векторов, получаем $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$. Так как $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (это следует из определения медианы: K – основание медианы), $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$, то $\overrightarrow{AK} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$.

Далее, $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (векторы $\overrightarrow{CL}$ и $\overrightarrow{AC}$ противоположно направлены), $\overrightarrow{AC} = \vec{p} + \vec{q}$, поэтому $\overrightarrow{BL} = \vec{q} - \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) = \frac{1}{2}(\vec{q} - \vec{p})$.

Аналогично находим, что $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{p}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{p} + \vec{q})$, тогда $\overrightarrow{CM} = -(\vec{p} + \vec{q}) + \frac{1}{2}\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ.

Пусть даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и соответствующие им числа α, β, γ . Построим векторы $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$ и найдем их сумму – вектор $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Полученный вектор называется **линейной комбинацией** векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Числа α, β, γ называются коэффициентами линейной комбинации. Если все коэффициенты равны нулю, то линейная комбинация называется **тривиальной**. Если хотя бы один из коэффициентов линейной комбинации отличен от нуля, то такая комбинация называется **нетривиальной**.

Если вектор $\vec{m}$ является линейной комбинацией данных векторов, то принято говорить, что он **линейно выражается** через эти векторы.

Если задана некоторая система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и некоторый вектор $\vec{m}$ есть линейная комбинация не всех векторов системы, то недостающие вектора можно ввести в эту линейную комбинацию с нулевыми коэффициентами: $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$.

Утверждение 4.1. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы из них можно было составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.

Доказательство.

Необходимость: дано, что вектор $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Тогда согласно утверждению 2.1, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то либо $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, либо $\vec{a} = \beta\vec{b}$. Переносим все члены любого равенства в одну часть, получим или $\alpha\vec{a} - \vec{b} = 0$, или $-\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$. В обоих равенствах один из коэффициентов равен -1 и отличен от нуля. Следовательно, мы имеем нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.

Достаточность: Пусть дана нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю: $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$. По условию, по крайней мере один из коэффициентов отличен от нуля. Предположим, что $\alpha \neq 0$, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через $\vec{b}$: $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}$. Если же $\beta \neq 0$, то вектор $\vec{b}$

линейно выражается через вектор $\vec{a}$. Тогда согласно утверждению 2.1, в обоих случаях вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Утверждение доказано.

Рассмотрим снова вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и сформулируем условия компланарности трех векторов.

Утверждение 4.2. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них линейно выражался через остальные.

Утверждение 4.3. Для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовала их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Останавливаться на доказательстве этих утверждений не будем.

5. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ.

Пусть дана некоторая система векторов.

Определение 5.1 Если хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через остальные, то такая система векторов называется **линейно зависимой**.

Если ни один из векторов системы не выражается линейно через остальные, то такая система векторов называется **линейно независимой**.

Примеры линейно зависимых систем:

система, содержащая нулевой вектор;

система, содержащая коллинеарные вектора;

система, состоящая из трех и более компланарных векторов;

система, состоящая из четырех и более произвольно расположенных векторов.

Замечание. Условимся считать, что система, состоящая из одного нулевого вектора, линейно зависима.

Линейно независимыми являются только следующие системы:

система, состоящая из одного ненулевого вектора;

система, состоящая из двух неколлинеарных векторов;

система, состоящая из трёх некомпланарных векторов.

Рассмотрим ещё одно определение линейной зависимости и независимости векторов.

Определение 5.2 Система векторов называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулю.

Система векторов называется **линейно независимой**, если нулю может быть равна только тривиальная линейная комбинация её векторов.

Утверждение 5.1 Определения линейной зависимости векторов 5.1 и 5.2 равносильны.

Доказательство.

Пусть система векторов линейно зависима по первому определению. Это значит, что хотя бы один из векторов системы линейно выражается через остальные, например, $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Это равенство можно записать так: $1 \cdot \vec{d} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} - \gamma\vec{c} = 0$. В итоге мы получили нетривиальную (т.к. коэффициент перед вектором $\vec{d}$ равен 1 и отличен от нуля) линейную комбинацию векторов, равную нулю. А это и есть определение линейной зависимости по второму определению.

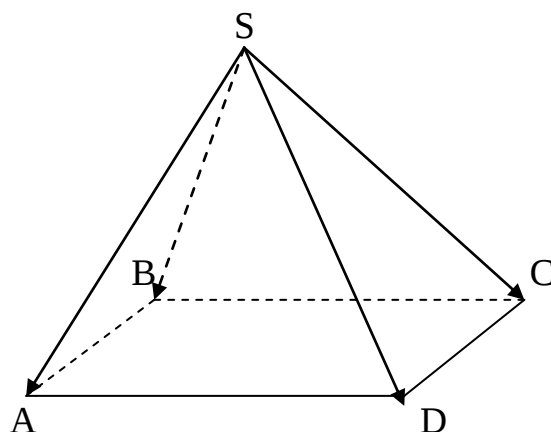
Пусть система векторов линейно зависима по второму определению, то есть существует нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, равная нулю, например, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = 0$. Т.к. линейная комбинация нетривиальная, то хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Пусть этим коэффициентом будет $\alpha \neq 0$. Тогда вектор $\vec{a}$ можно выразить через остальные: $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c} - \frac{\delta}{\alpha}\vec{d}$. А это значит, что система линейно зависима по первому определению. Утверждение доказано.

6. РАНГ И БАЗИС СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ.

Пусть мы имеем некоторую систему векторов, вообще говоря, линейно зависимую. Но если взять часть этой системы, так называемую подсистему, то она может оказаться линейно независимой.

Рассмотрим систему, составленную из векторов, направленных по боковым ребрам четырехугольной пирамиды.

$$\vec{a} = \overrightarrow{SA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{SB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{SC}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{SD}.$$



Как было сказано в предыдущем разделе система, состоящая из четырех векторов, линейно зависима. Но любая подсистема рассматриваемой нами системы, состоящая из одного, двух или трех векторов, линейно независима. Например, подсистема, состоящая из одного ненулевого вектора $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$. Подсистема, состоящая из двух неколлинеарных векторов $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{SD}$, и наконец, подсистема, состоящая из трех некомпланарных векторов $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$. Нас будут интересовать те подсистемы, которые содержат максимальное число линейно независимых векторов.

Договоримся различать две подсистемы, если они отличаются порядком своих элементов, то есть будем рассматривать упорядоченные подсистемы. Например, будем считать подсистемы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ различными, так как они отличаются порядком своих векторов.

Определение. Упорядоченная подсистема, содержащая максимально возможное число линейно независимых векторов данной системы, называется базисом этой системы.

Система векторов может иметь несколько различных базисов, отличающихся друг от друга, как составом векторов, так и порядком векторов. Но у всех базисов данной системы векторов есть общее – это число векторов, составляющих базис, то есть максимальное число линейно независимых векторов данной системы.

Число векторов в базисе данной системы векторов называется **рангом** этой системы векторов.

В рассмотренном выше примере базисами служат любые упорядоченные тройки векторов, так как они все линейно независимы: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$; $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$; $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ и так далее. Ранг этой системы равен 3.

Принято считать, что система, состоящая из одного нулевого вектора, имеет ранг, равный 0.

Система, состоящая из одного ненулевого вектора, имеет ранг, равный одному.

Система, состоящая из коллинеарных векторов (не все из них нулевые), также имеет ранг, равный 1, а базисом её может служить любой ненулевой вектор.

Если система компланарных векторов содержит неколлинеарные векторы, то её ранг равен двум, а базисом может служить любая пара неколлинеарных векторов этой системы.

Ранг системы некомпланарных векторов равен трём, а базисом служит любая некомпланарная тройка, составленная из векторов этой системы.

Теорема.

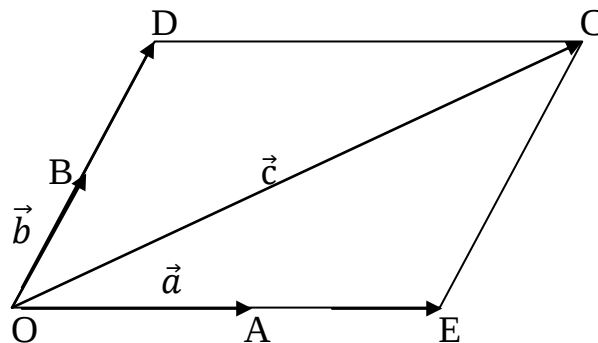
Любой вектор системы можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов, причем единственным образом.

В случае системы, состоящей из всех векторов плоскости, это теорема будут звучать так:

Любой вектор плоскости линейно выражается через два неколлинеарных вектора этой плоскости, причем единственным образом.

Доказательство.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарные вектора, причем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.



Приведем их к общему началу и на векторе $\vec{c}$, как на диагонали, построим параллелограмм со сторонами, параллельными векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из построения видно, что $\vec{c} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$, так как $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OD}$. Поскольку $\overrightarrow{OE} \parallel \vec{a}$ и $\overrightarrow{OD} \parallel \vec{b}$, то $\overrightarrow{OE} = \alpha \vec{a}$, а $\overrightarrow{OD} = \beta \vec{b}$. Тогда $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. Итак, мы представили вектор $\vec{c}$ в виде линейной комбинации двух данных неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем единственность этого разложения. Предположим противное, что наряду с разложением $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, имеет место разложение

$\vec{c} = \alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b}$. Но так как в левой части обоих равенств стоит один и тот же вектор, то и правые части должны быть равны: $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \alpha' \vec{a} + \beta' \vec{b}$. Переносим всё в левую часть равенства, и сгруппировав слагаемые с одинаковыми векторами, получим: $(\alpha - \alpha') \vec{a} + (\beta - \beta') \vec{b} = 0$. Если допустить, что $\alpha \neq \alpha'$ или $\beta \neq \beta'$, то согласно утверждению 4.1 получим, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (нетривиальная линейная комбинация равна нулю). А это противоречит условию. Таким образом, второго разложения быть не может и единственность доказана.

Аналогичная теорема справедлива и для векторов в пространстве.

Любой вектор пространства линейно выражается через три некопланарных вектора, причем единственным образом.

7. ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ.

Рассмотрим систему, состоящую из всех векторов пространства. Ранг такой системы равен трем, а базисом служит любая тройка некопланарных векторов, например, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Пусть $\vec{m}$ – произвольный вектор пространства. Разложим его по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{m} = m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + m_3 \vec{c}$.

Коэффициенты этого разложения, то есть числа m_1, m_2, m_3 называются **координатами** вектора $\vec{m}$ в данном базисе.

Для задания вектора при известном базисе достаточно записать тройку чисел – его координат в базисе. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис, то равносильны две записи: $\vec{m} = m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + m_3 \vec{c}$ и $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$.

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис, то

$$\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} \quad \vec{a} = (1; 0; 0)$$

$$\vec{b} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} \quad \text{или} \quad \vec{b} = (0; 1; 0)$$

$$\vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} \quad \vec{c} = (0; 0; 1).$$

Так как базисные вектора по определению упорядочены, то можно сказать, что i -ая координата i -го базисного вектора равна 1, а остальные равны нулю.

Условие равенства векторов в координатной форме.

Пусть $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$, $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3)$ и $\vec{m} = \vec{p}$.

Тогда из единственности разложения вектора по базису следует, что

соответствующие координаты векторов (коэффициенты разложения) $\vec{m}$ и $\vec{p}$ должны быть равны. Обратно, если координаты двух векторов в одном и том же базисе равны (т.е. вектора имеют одинаковое разложение по базису), то равны и сами вектора.

Итак, для того, чтобы два вектора были равны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты в некотором базисе были равны: $\vec{m} = \vec{p} \Leftrightarrow m_1 = p_1, m_2 = p_2, m_3 = p_3$.

Умножение вектора на число в координатной форме.

Пусть $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$, $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3)$ в некотором базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и пусть $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{m}$. Тогда, применяя распределительный закон (раскрывая скобки), получим

$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{m} = \alpha \cdot (m_1\vec{a} + m_2\vec{b} + m_3\vec{c}) = (\alpha m_1)\vec{a} + (\alpha m_2)\vec{b} + (\alpha m_3)\vec{c}$. Из условия равенств векторов следует $p_1 = \alpha m_1, p_2 = \alpha m_2, p_3 = \alpha m_3$, то есть при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{m} \Leftrightarrow p_1 = \alpha m_1, p_2 = \alpha m_2, p_3 = \alpha m_3$.

Условие коллинеарности в координатной форме.

Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них линейно выражался через другой, например, $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{m}$, то есть можно записать следующие равенства:

$p_1 = \alpha m_1, p_2 = \alpha m_2, p_3 = \alpha m_3$. Если координаты вектора $\vec{m}$ не нулевые, то эти равенства можно записать в виде ряда равных соотношений:

$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \frac{p_3}{m_3} = \alpha$. Если же некоторая координата вектора $\vec{m}$ равна нулю, то соответствующая координата вектора $\vec{p}$ также равна нулю. Условимся в этом случае неопределенное выражение $\frac{0}{0}$ считать равным α .

Тогда условие коллинеарности в координатной форме можно сформулировать в следующем виде:

Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

$$\vec{p} \parallel \vec{m} \Leftrightarrow \frac{p_1}{m_1} = \frac{p_2}{m_2} = \frac{p_3}{m_3}.$$

Сложение и вычитание векторов в координатной форме.

Пусть $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$, $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3)$, $\vec{q} = (q_1; q_2; q_3)$ в некотором базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{q} = \vec{m} + \vec{p}$. Тогда имеем

$$q_1\vec{a} + q_2\vec{b} + q_3\vec{c} = (m_1\vec{a} + m_2\vec{b} + m_3\vec{c}) + (p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c}).$$

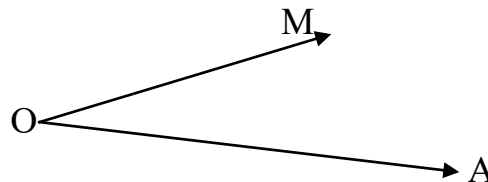
Пользуясь законами сложения векторов, получим

$$q_1\vec{a} + q_2\vec{b} + q_3\vec{c} = (m_1 + p_1)\vec{a} + (m_2 + p_2)\vec{b} + (m_3 + p_3)\vec{c}.$$

Из условия равенства векторов следует $q_1 = m_1 + p_1$, $q_2 = m_2 + p_2$, $q_3 = m_3 + p_3$. Таким образом, при сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются).

8. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.

Зафиксируем произвольную точку пространства, которую назовем полюсом или началом координат. Пусть это будет точка О.



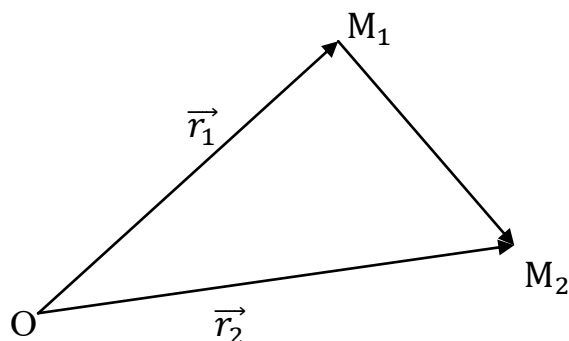
Вектор начало, которого находится в полюсе, а конец в заданной точке, называется **радиус – вектором** этой точки. Радиус – вектор точки М обычно обозначают $\vec{r}_M$ или $\vec{r}(M)$. Для задания точки в пространстве достаточно задать её радиус – вектор. Но векторы обычно задаются их координатами в некотором базисе. Поэтому для задания точки кроме полюса необходимо выбрать какой-нибудь базис в пространстве.

Тройка базисных векторов и полюс образуют систему координат в пространстве. (На плоскости соответственно полюс и пара базисных векторов).

В выбранном базисе радиус – вектор имеет какие-то координаты, которые обычно обозначаются x, y, z . Координаты радиус – вектора называются координатами точки. Принято писать $M(x; y; z)$.

Если известны координаты концов вектора в некоторой системе координат, то легко найти координаты самого вектора в этой системе координат. Пусть даны точки M_1 и M_2 . Тогда можно построить радиус – вектора этих точек $\vec{r}_1 = \vec{r}(M_1)$ и $\vec{r}_2 = \vec{r}(M_2)$. Тогда из треугольника OM_1M_2 (см. рисунок) получим: $\vec{OM}_2 = \vec{OM}_1 + \vec{M_1M_2}$. Следовательно, $\vec{M_1M_2} = \vec{OM}_2 - \vec{OM}_1$ или $\vec{M_1M_2} = \vec{r}(M_2) - \vec{r}(M_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Чтобы найти вектор, соединяющий две точки, следует из радиус – вектора его конца вычесть радиус – вектор его начала.



Зададим координаты точек M₁ и M₂: M₁(x₁; y₁; z₁), M₂(x₂; y₂; z₂), тогда считаются известными и координаты радиус – векторов этих точек.

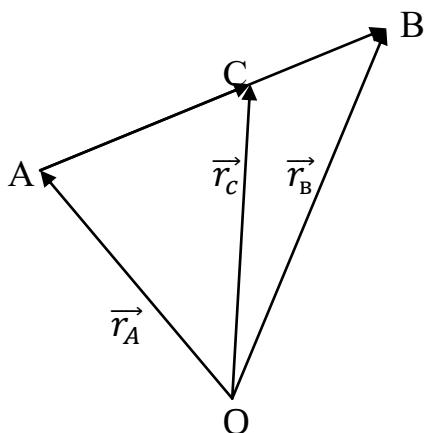
$$\vec{r}(M_1) = (x_1; y_1; z_1), \quad \vec{r}(M_2) = (x_2; y_2; z_2).$$

Используя правило вычитания векторов в координатной форме, получим

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

9. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ.

На некоторой прямой даны точки A и B. Точка C лежит на отрезке [AB] так, что $\frac{|AC|}{|CB|} = \lambda$. В этом случае говорят, что точка C делит отрезок в отношении λ . Зная, координаты концов отрезка A и B, нужно найти координаты точки C.



И так, известны координат точек A и B, а это означает, что известны координаты радиус – векторов этих точек. То есть A(x_A, y_A, z_A) или

$\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ или $\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$. Так как $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{CB}$, то справедливо равенство $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. Выразим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ через радиусы векторы их концов, пользуясь правилом из раздела 8: $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$, $\overrightarrow{CB} = \vec{r}_B - \vec{r}_C$, тогда $\vec{r}_C - \vec{r}_A = \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_C)$. Перенесём слагаемые, содержащие вектор $\vec{r}_C$ в левую часть равенства: $\vec{r}_C + \lambda \vec{r}_C = \vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B$, тогда $\vec{r}_C(1 + \lambda) = \vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B$, в итоге получим: $\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1 + \lambda}$. Таким образом, найден радиус – вектор точки С. Распишем это равенство в координатной форме:

$$x_c = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_c = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_c = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

Особенно часто встречающийся случай деления отрезка в данном отношении – это деление отрезка пополам. То есть точка С расположена на отрезке [AB] так, что $|AC| = |CB|$ или $\frac{|AC|}{|CB|} = 1$, следовательно $\lambda = 1$. И полученные выше формулы примут вид:

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_c = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_c = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

10. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ.

Рассмотрим упорядоченную тройку некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведенную к общему началу.

Три некопланарных вектора образуют **правую** тройку, если, глядя с конца третьего вектора, поворот от первого вектора ко второму совершается против часовой стрелки. Если этот поворот совершается по часовой стрелке, тройка векторов называется **левой**.

Базис системы векторов называется **ортонормированным**, если его вектора взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Рассмотрим ортонормированный базис, векторы которого образуют правую тройку. Базисные векторы имеют специальные обозначения:

$\vec{i}$ – первый базисный вектор,

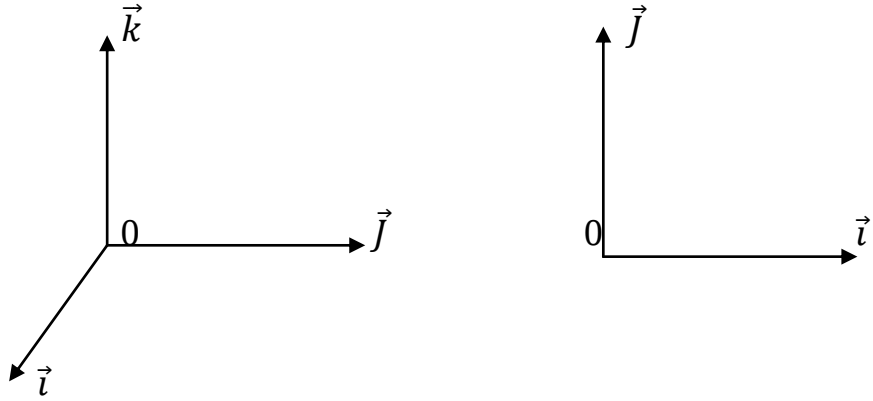
$\vec{j}$ – второй базисный вектор,

$\vec{k}$ – третий базисный вектор.

Из определения ортонормированного базиса следует, что

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad (\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = (\widehat{\vec{i}, \vec{k}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{k}}) = 90^\circ$$

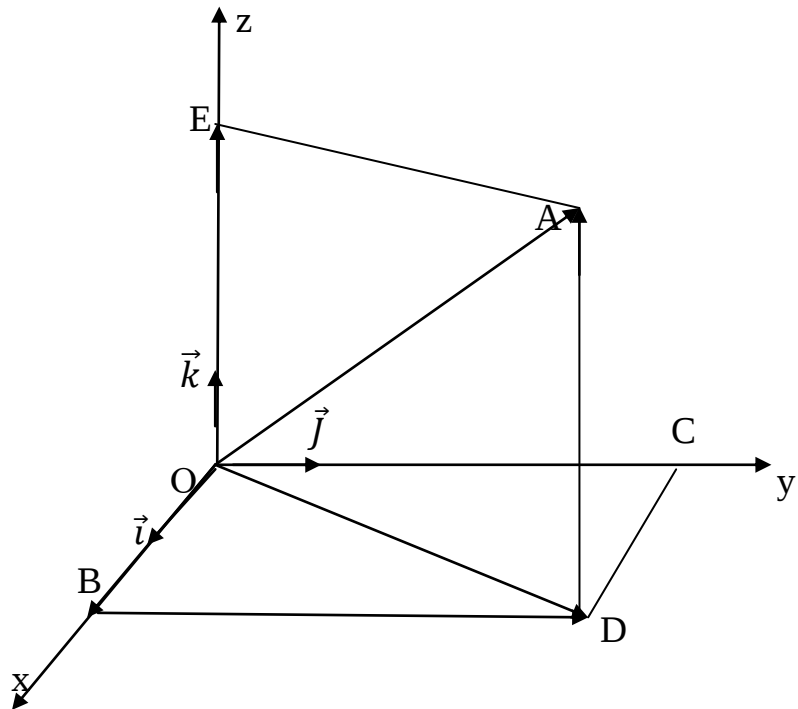
Ортонормированный базис обычно изображают следующим образом:
(на плоскости, естественно, достаточно двух базисных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$.)



Система координат, построенная на основе ортонормированного базиса, называется **прямоугольной декартовой системой координат**.

Введение ортонормированного базиса позволяет выразить длину (модуль) вектора через его координаты в этом базисе.

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор. Разложим его по ортонормированному базису.



$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. По правилу сложения векторов можно записать $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA}$. В свою очередь вектор $\overrightarrow{OD}$ равен: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$, и

получаем, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}$. Так как вектора $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA}$ коллинеарны векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно, то можно записать $\overrightarrow{OB} = a_1 \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{BD} = a_2 \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{DA} = a_3 \cdot \vec{k}$. Тогда вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов (или разложен по базису): $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ или $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Из треугольника ODA по теореме Пифагора найдем длину вектора $\overrightarrow{OA}$: $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2$. Аналогично, из треугольника OBD находим длину вектора $\overrightarrow{OD}$: $|\overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2$. Таким образом, для вектора $\overrightarrow{OA}$ получаем: $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2$. Используя выражение векторов $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA}$ через базисные вектора, и вспомнив, что длины базисных векторов равны 1, получим: $|\overrightarrow{OB}|^2 = |a_1 \vec{i}|^2 = |a_1|^2 \cdot |\vec{i}|^2 = |a_1|^2 \cdot 1 = (a_1)^2$, $|\overrightarrow{BD}|^2 = |a_2 \vec{j}|^2 = |a_2|^2 \cdot |\vec{j}|^2 = |a_2|^2 \cdot 1 = (a_2)^2$, аналогично получаем для вектора $\overrightarrow{DA}$: $|\overrightarrow{DA}|^2 = |a_3 \vec{k}|^2 = (a_3)^2$. И так, длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ в квадрате может быть найдена по формуле $|\vec{a}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2$.

Формула для вычисления длины (модуля) вектора через его координаты в ортонормированном базисе имеет вид:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

На плоскости $\vec{a} = (a_1; a_2)$ и $|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$.

С помощью полученной формулы можно находить расстояние $d(M_1, M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Искомое расстояние будет равно модулю вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$, т.е. $d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = |\overrightarrow{M_1 M_2}|$. Координаты вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ в ортонормированном базисе имеют вид $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Тогда

$$d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$$\text{На плоскости } d(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

11. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение будем обозначать $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Свойства скалярного произведения.

1. Переместительный закон $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

В случае, когда сомножители – векторы на плоскости, закон может быть доказан, исходя из четности косинуса

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(-(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

2. Вынесение скалярного множителя за знак скалярного произведения.

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}); \quad \vec{a} \cdot (\beta \vec{b}) = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b}); \quad (\alpha \vec{a}) \cdot (\beta \vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Распределительный закон $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

4. Скалярный квадрат вектора $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Рассмотрим скалярное произведение двух равных векторов, которое называется скалярным квадратом вектора.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2, \text{ т.е.}$$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ - скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора.

5. Условие равенства нулю скалярного произведения.

Для того, чтобы скалярное произведение было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы вектора – сомножители были перпендикулярны.

Доказательство.

Необходимость. Дано, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, т.е. $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Это означает, что либо $|\vec{a}| = 0$, либо $|\vec{b}| = 0$, либо $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Если длины векторов равны нулю, то мы имеем дело с нулевыми векторами. Пользуясь тем, что нулевой вектор не имеет своего направления, можно считать, что он перпендикулярен любому вектору. Если же нулю равен косинус угла между векторами, то это означает, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 90° , т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Достаточность. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$, следовательно, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$. Что и требовалось доказать.

Скалярное произведение в координатной форме.

Рассмотрим два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, разложенные по ортонормированному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ или $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$;
 $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ или $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Перемножим эти вектора скалярно, применяя свойства скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1\vec{i} \cdot \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \cdot \vec{j} + a_1b_3\vec{i} \cdot \vec{k} + a_2b_1\vec{j} \cdot \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \cdot \vec{j} + a_2b_3\vec{j} \cdot \vec{k} + a_3b_1\vec{k} \cdot \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \cdot \vec{j} + a_3b_3\vec{k} \cdot \vec{k}.$$

Так как $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$, а в силу перпендикулярности базисных векторов их скалярные произведения равны нулю, т.е. $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, равно сумме произведений их одноименных координат.

Применение скалярного произведения.

1. Нахождение модуля (длины) вектора.

Так как $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, то длина вектора может быть найдена по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

2. Нахождение угла между векторами.

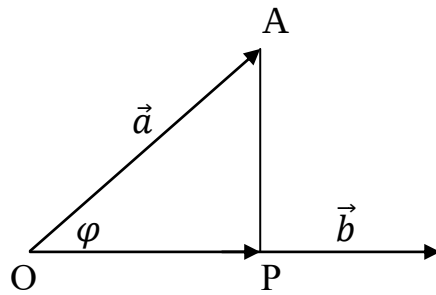
Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \quad (11.1)$$

Знак (плюс или минус) косинуса угла между двумя векторами определяется знаком скалярного произведения (знаменатель дроби всегда положительный). Поэтому, если скалярное произведение больше нуля, то и косинус угла тоже больше нуля и угол между векторами острый. Если же скалярное произведение отрицательно, то косинус угла тоже меньше нуля и угол между векторами тупой. В случае, если скалярное произведение равно нулю, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ и угол равен 90° , т.е. вектора перпендикулярны.

3. Нахождение проекции одного вектора на другой.

Расположим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы они выходили из одного общего начала – точки О. А угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначим φ : $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \varphi$.



Проведем перпендикуляр из конца вектора $\vec{a}$ на прямую, вдоль которой расположен вектор $\vec{b}$. Получим вектор $\overrightarrow{OP}$, который называется геометрической проекцией вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$. Так как вектор $\overrightarrow{OP}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, то он будет коллинеарен и его орт вектору $\vec{b}^0$. Тогда можно записать $\overrightarrow{OP} = \alpha \vec{b}^0$, где число α называется **алгебраической проекцией** (или просто проекцией) вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ и обозначается $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$. Тогда вектор $\overrightarrow{OP}$ может быть представлен в виде:

$$\overrightarrow{OP} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} \cdot \vec{b}^0 \quad (11.2)$$

В случае если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, то из прямоугольного треугольника OAP можно найти длину вектора $\overrightarrow{OP}$: $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Вектор $\overrightarrow{OP}$ можно представить как произведение его модуля на орт-вектор: $\overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}| \cdot \overrightarrow{OP}^0$. Так как угол φ между векторами острый, то вектор $\overrightarrow{OP}$ и вектор $\vec{b}$ сонаправлены, а это значит, что их орт векторы равны, т.е. $\overrightarrow{OP}^0 = \vec{b}^0$.

$$\text{Следовательно, } \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OP}| \cdot \vec{b}^0 = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \cdot \vec{b}^0$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (11.2), можно записать $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Заменяя выражение косинуса угла между векторами из формулы (11.1), получим

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

или

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой, то проекция будет отрицательной.

Аналогично получается формула проекции вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

Пример 1. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (1; 2; -3)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = 28$.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{b}$ неизвестными x, y и z , т.е. $\vec{b} = (x; y; z)$. Так как вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то их соответствующие координаты пропорциональны

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} = \lambda,$$

где λ - пока неизвестный коэффициент. Тогда координаты вектора $\vec{b}$ могут быть записаны $x = \lambda; y = 2\lambda; z = -3\lambda$ или $\vec{b} = (\lambda; 2\lambda; -3\lambda)$. Воспользуемся формулой скалярного произведения в координатной форме для нахождения $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \lambda + 2 \cdot 2\lambda + (-3) \cdot (-3\lambda) = 14\lambda.$$

По условию задачи это скалярное произведение равно 28, т.е. $14\lambda = 28$, откуда $\lambda = 2$. Следовательно, $\vec{b} = (2; 4; -6)$.

Пример 2. Даны три вектора $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 10\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c}$, $\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{c})$.

Решение. Для нахождения проекций вначале найдем координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - 3\vec{c}$. Запишем вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в координатной форме $\vec{a} = (1; -2; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -2)$, $\vec{c} = (10; 4; 2)$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 + 2; -2 + 1; 2 + (-2)) = (3; -1; 0)$$

$$2\vec{a} = (2 \cdot 1; 2 \cdot (-2); 2 \cdot 2) = (2; -4; 4), \quad 3\vec{c} = (3 \cdot 10; 3 \cdot 4; 3 \cdot 2) = (30; 12; 6)$$

$$2\vec{a} - 3\vec{c} = (2 - 30; -4 - 12; 4 - 6) = (-28; -16; -2)$$

Формула для нахождения первой проекции имеет вид

$$\text{пр}_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} + \vec{b}|}.$$

Вычислим скалярное произведение в координатной форме:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 3 \cdot 10 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 26.$$

Найдем длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$, в итоге

$$\text{пр}_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c} = \frac{26}{\sqrt{10}}.$$

Запишем формулу для вычисления второй проекции

$$\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{c}) = \frac{(2\vec{a} - 3\vec{c}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Найдем скалярное произведение:

$$(2\vec{a} - 3\vec{c}) \cdot \vec{b} = -28 \cdot 2 + (-16) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = -68$$

и длину вектора $\vec{b}$: $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Окончательный результат

$$\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{c}) = -\frac{68}{3}.$$

12. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, обладающий следующими свойствами:

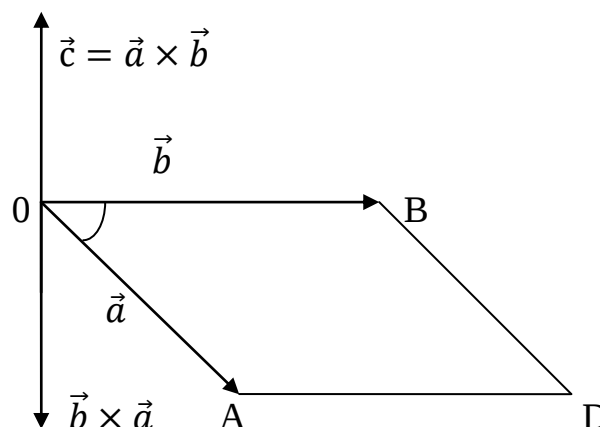
- а) вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;
- б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- в) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению длин векторов –

сомножителей на синус угла между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Векторное произведение принято обозначать $\vec{a} \times \vec{b}$.

Итак, согласно определению, имеем $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, если

- а) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка;
- б) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- в) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

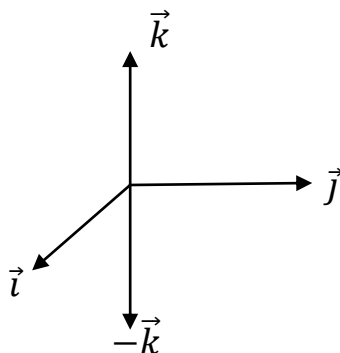


Векторное произведение координатных ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Векторным произведением ортов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ является орт $\vec{k}$, так как

а) тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - правая; б) вектор $\vec{k}$ перпендикулярен векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$; в) $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}||\vec{j}|\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1 = |\vec{k}|$. Следовательно, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

Векторное произведение ортов $\vec{j} \times \vec{i}$ не есть вектор $\vec{k}$, так как эти векторы $\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}$ образуют левую тройку, а условия б) и в) здесь те же, что и в предыдущем случае, поэтому $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$.



Аналогичным образом

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Свойства векторного произведения.

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак:
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

2. Числовой (скалярный) множитель можно выносить за знак векторного произведения:

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\beta \vec{b}) = \beta(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(\alpha \vec{a}) \times (\beta \vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3. Векторное произведение подчиняется распределительному закону, то есть при векторном умножении можно раскрывать скобки обычным образом, не забывая, следить за порядком сомножителей:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

5. Условие равенства нулю векторного произведения.

Для того чтобы векторное произведение было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы векторы – сомножители были коллинеарны.

Доказательство.

Необходимость. Дано, что $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, но длина нулевого вектора равна нулю, т.е. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Это означает, что либо $|\vec{a}| = 0$, либо $|\vec{b}| = 0$, либо $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Если длины векторов равны нулю, то мы имеем дело с нулевыми векторами. Пользуясь тем, что нулевой вектор не имеет своего направления, можно считать его коллинеарным любому вектору. Если же нулю равен синус угла между векторами, то это означает, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен или 0° или 180° , т.е. $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Достаточность. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$, следовательно, $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Тогда $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$. А если длина вектора равна нулю, то такой вектор называют нулевым вектором, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Что и требовалось доказать.

В частности, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, так как любой вектор коллинеарен самому себе, и угол между векторами – сомножителями равен нулю.

Поэтому, $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

Векторное произведение в координатной форме.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в координатной форме $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ или $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$.

Пользуясь свойствами векторного произведения, раскроем скобки, не изменяя при этом порядок сомножителей:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + \\ &+ a_1b_3\vec{i} \times \vec{k} + a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} + a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} + a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} + \\ &+ a_3b_3\vec{k} \times \vec{k}.\end{aligned}$$

Учитывая полученные выше результаты умножения координатных ортов, а также условие равенства нулю векторного произведения, можно упростить полученное выражение.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).\end{aligned}$$

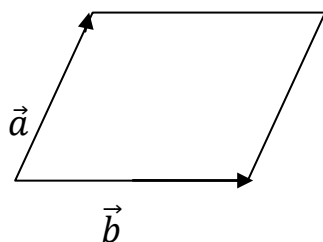
Полученную формулу можно представить в виде символического определителя

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

который раскрывается по элементам первой строки согласно теореме разложения, с учетом соответствующих действий над векторами.

Применение векторного произведения.

1. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.



Площадь параллелограмма, построенного на векторах сомножителях $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю векторного произведения указанных векторов. Обозначим эту площадь $S_{\square}$.

$$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площадь треугольника, построенного на этих же векторах, в два раза меньше и равна $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

2. Нахождение вектора, перпендикулярного двум данным неколлинеарным векторам.

Если вектор $\vec{c}$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$, то вектор $\vec{c}$ может быть найден по формуле $\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Пример. Упростить выражение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 5\vec{b})$.

Решение. Воспользуемся свойствами векторного произведения

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a} \times \vec{a} + 15\vec{a} \times \vec{b} - 4\vec{b} \times \vec{a} - 10\vec{b} \times \vec{b}.$$

Так как $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0$ и $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$, получим

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 5\vec{b}) = 15\vec{a} \times \vec{b} + 4\vec{a} \times \vec{b} = 19\vec{a} \times \vec{b}.$$

13. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.

Если вектор $\vec{a}$ умножить векторно на вектор $\vec{b}$, а затем полученный результат умножить скалярно на вектор $\vec{c}$, то получится число, которое называется **смешанным произведением** трех данных векторов.

Обозначить смешанное произведение можно $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Например, $(\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k}$. В разделе 12 было вычислено векторное произведение $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Тогда $(\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$.

Пусть вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$.

Запишем смешанное произведение в координатной форме.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right); \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 = \\ &= (-1)^{3+1} c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой теорему разложения определителя третьего порядка по третьей строке. Таким образом, получается

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, составленного из координат этих векторов.

Свойства смешанного произведения.

1. Операции скалярного и векторного умножений в смешанном произведении можно менять местами, не изменяя порядка сомножителей, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Докажем это свойство воспользовавшись свойствами определителя третьего порядка (при перестановке двух соседних параллельных рядов определитель меняет знак) и переместительным законом скалярного произведения.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.\end{aligned}$$

В силу этого свойства смешанное произведение принято коротко записывать в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, где опущены знаки действий и скобки, поскольку безразлично, какие два из рядом стоящих вектора перемножаются векторно, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Если поменять местами два соседних сомножителя, то смешанное произведение изменит знак: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.

Это свойство следует из свойства определителя о перестановке двух соседних рядов.

3. Условие равенства нулю смешанного произведения.

Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда перемножаемые вектора компланарны.

Применение смешанного произведения.

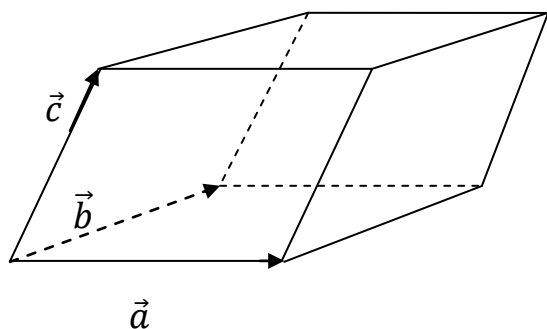
1. Определение взаимного расположения векторов.

Если смешанное произведение положительно: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то вектора образуют правую тройку.

Если смешанное произведение отрицательно: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то вектора образуют левую тройку.

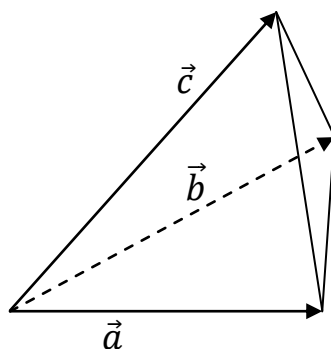
Если смешанное произведение равно нулю: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, то вектора компланарны.

2. Вычисление объема параллелепипеда и пирамиды.



Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов

$$V_{\text{пар.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$



$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\Delta} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\square} \cdot h = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}}$$

И так, объём пирамиды равен одной шестой объёма параллелепипеда, т.е.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2003. – 208 с.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – СПб.: Лань, 2017. – 224 с.
3. Макаров С.И. Математика для экономистов: учебное пособие. – М.: КНОРУС, 2007. – 264 с.
4. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – СПб.: Лань, 2009. – 336 с.
5. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 2007. – 600 с.
6. Шпилькин И.А. Векторная алгебра. – Ижевск: ИжГТУ, 1995. – 103 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Основные понятия	3
2. Умножение вектора на число	4
3. Сложение и вычитание векторов	6
4. Линейные комбинации векторов	8
5. Линейная зависимость и независимость векторов	9
6. Ранг и базис системы векторов	10
7. Действия с векторами в координатной форме	13
8. Координаты точки в произвольной системе координат	15
9. Деление отрезка в данном отношении	16
10. Прямоугольная система координат	17
11. Скалярное произведение векторов	19
12. Векторное произведение векторов	24
13. Смешанное произведение векторов	27
Литература	31