УДК 517.9

© *А. П. Бакланов*

О СВОЙСТВЕ ПЛОТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ СЛАБО АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫХ МЕР. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ[1]

Показана возможность погружения некоторых множеств ступенчатых функций и множеств равномерных пределов упомянутых функций в компактные в $*$-слабой топологии подмножества множества всех ограниченных конечно-аддитивных (к.-а.) мер в виде всюду плотного множества. В частности рассматривается множество всех ступенчатых функций, интеграл модуля которых по неотрицательной к.-а. мере λ равен единице. Для таких множеств установлена возможность упомянутого погружения без дополнительных предположений на меру λ, что существенно обобщает ранее полученные результаты. Используя разложение Собчика–Хаммера, было установлено, что если мера λ имеет конечное множество значений, то такие множества функций допускают погружение в единичную сферу (в сильной норме-вариации) пространства слабо абсолютно непрерывных к.-а. мер относительно λ в виде всюду плотного множества. Для меры λ с бесконечным множеством значений установлено, что упомянутые множества функций допускают погружение в единичный шар пространства слабо абсолютно непрерывных к.-а. мер относительно λ в виде всюду плотного множества. Результаты могут быть использованы в конструкциях расширения линейных задач управления в классе к.-а. мер для построения аналогов множеств достижимости, устойчивых относительно ограничений асимптотического характера.

Ключевые слова: конечно-аддитивные меры, слабая абсолютная непрерывность, *-слабая топология, неатомические меры, декомпозиция Собчика–Хаммера.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-01

Введение

В прикладных задачах управления распространенными являются различные ограничения на расход топлива, а управления полагаются кусочно-постоянными (к.-п.) или кусочно-непрерывными (к.-н.), что отвечает их физической реализуемости. Обсудим эти ограничения на содержательном уровне. При подходящей измеримой структуре такие управления естественно отождествлять со ступенчатыми и ярусными функциями (равномерные пределы ступенчатых функций), а топливные ограничения идеализированно задавать в виде неравенства на интеграл от функции. Пусть λ — неотрицательная конечно-аддитивная мера. Тогда, например, можно положить, что допустимыми являются неотрицательные к.-п. или к.-н. управления f, которые на заданном промежутке времени E удовлетворяют одному из условий:

$$\int_E f\, d\lambda = 1, \tag{0.1}$$

$$\int_E f\, d\lambda \leqslant 1. \tag{0.2}$$

Условие (0.1) может отвечать требованию на полный расход топлива управляемым объектом с нереверсируемым двигателем, условие (0.2) ослабляет это требование, определяя лишь запас топлива. Отметим также, что условие (0.1) естественным образом появляется в задачах, связанных с использованием плотностей вероятностей (см., например, [15]). Убрав условие неотрицательности для к.-п. или к.-н. управления f, мы можем потребовать, чтобы на заданном промежутке времени E управление удовлетворяло одному из условий:

$$\int_E |f|\, d\lambda \leqslant 1, \tag{0.3}$$

$$\int_E |f|\, d\lambda = 1. \tag{0.4}$$

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16–31–00177 мол_а.

Условия (0.3) и (0.4) задают ограничение на доступное количество топлива и требование на его полный расход в случае управляемого объекта с реверсируемым двигателем.

Известно, что во многих задачах при использовании «обычных управлений» оптимальный результат не достигается, а область достижимости не является замкнутым множеством. Это мотивирует расширение класса «обычных управлений» до обобщенных управлений. Впервые расширение линейных задач управления с импульсным ограничением было предложено Н. Н. Красовским [8]. Для задач с геометрическими ограничениями были предложены конструкции расширения в классе мерозначных функций [4, 5] и в классе стратегических мер [9]. В линейных задачах с импульсным ограничением и разрывным коэффициентом при управляющем воздействии свою эффективность доказало расширение в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер [14, 16, 17]. Для последнего класса задач процедура расширения заключается в погружении множеств допустимых управлений (0.1)–(0.4) в компактные в *-слабой топологии подмножества множества всех к.-а. мер ограниченной вариации в виде всюду плотного множества. Отметим, что в работе [16, (15.37), (15.41), (15.42)] для ограничений (0.1)–(0.3) были указаны компакты, дающие возможность такого погружения. Мы же изучаем возможность упомянутого погружения для множества всех управлений, удовлетворяющих (0.4). Исследование данного вопроса было начато автором в работе [12], где было рассмотрено два наиболее простых случая: мера λ полагалась неатомической либо имела конечное множество значений. Было показано, что эти два случая являются существенно различными, то есть факт наличия атомов у упомянутой «базовой» меры λ влиял на возможность погружения множества всех управлений, удовлетворяющих (0.4). Отметим, что при ограничениях (0.1)–(0.3) наличие атомов не имело значения при компактификации.

В работе [12] остался открытым вопрос: а что если «базовая» мера содержит атомы, но не является мерой с конечным множеством значений? Данная статья разрешает этот вопрос, используя теорему Собчика–Хаммера [18], которая указывает на возможность разложения любой к.-а. меры в сумму двух к.-а. мер, одна из которых непрерывная, а вторая является не более чем счетной взвешенной суммой $(0, 1)$-мер. В работе показано, что определяющим фактором для упомянутого погружения является не факт наличия атомов у «базовой» меры, а существование в любом конечном разбиении множества, которое не является атомом.

Один из основных результатов работы, теорема 3.2, указывает на то, что во многих линейных задачах с импульсными управлениями и разрывными коэффициентами при управляющем воздействии мы можем не различать ограничения (0.3) и (0.4) при исследовании асимптотических аналогов областей достижимости (множеств притяжения, см. [14, 16, 17]) и асимптотики значений максиминов (в русле работ [1, 2, 11]). То есть имеется эквивалентность по результату в случаях различных множеств программных управлений (отвечающих (0.3), (0.4)). Упомянутая эквивалентность обусловлена совпадением множеств обобщенных управлений для таких множеств программных управлений в случае, когда λ не является мерой с конечным множеством значений. Для меры λ с конечным множеством значений подобная эквивалентность не имеет места.

Отметим, что в работе мы не будем ставить задачу управления и приводить конструкции расширения в классе к.-а. мер, подобный материал уже достаточно подробно изложен ранее (см. [14, 16, 17]). Мы сосредоточимся лишь на абстрактном исследовании возможности погружения множеств ступенчатых и ярусных функций (удовлетворяющих (0.4)), определенных на алгебре измеримых множеств, в компактные в *-слабой топологии подмножества множества всех к.-а. мер ограниченной вариации в виде всюду плотного множества.

§ 1. Основные обозначения и определения

Мы используем кванторы, пропозициональные связки, а также принимаем аксиому выбора. Через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению. Семейством будем называть множество, все элементы которого сами являются множествами. Если S — множество, то через $\mathcal{P}(S)$ обозначаем семейство всех подмножеств множества S. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ — натуральный ряд и $\overline{1, s} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant s\}$ $\forall s \in \mathbb{N}$. В дальнейшем линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных (в/з) функций определяем поточечно. Если $s \in \mathbb{N}$, то через $\mathbb{R}^s$ обозначаем множество всех кортежей $(x_i)_{i \in \overline{1,s}} : \overline{1,s} \to \mathbb{R}$, получая фактически s-мерное арифметические пространство; $\tau_{\mathbb{R}}$ есть обычная $|\cdot|$-топология $\mathbb{R}$.

Если (X, τ) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $cl(A, \tau)$ есть по определению замыкание множества A в ТП (X, τ), а $\tau|_A \overset{\triangle}{=} \{A \cap G : G \in \tau\}$ — топология множества A, индуцированная из ТП (X, τ). Если же (X, τ) — ТП и $x \in X$, то полагаем

$$N_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \big\{Y \in \mathcal{P}(X) \big| \ \exists G \in \tau : (G \subset Y) \& (x \in G)\big\}, \tag{1.1}$$

получая в (1.1) фильтр [3, гл. I] окрестностей x в ТП (X, τ).

Направленностью [7, гл. 2] в множестве H называется всякий триплет $(D, \preceq, f)$, где $(D, \preceq)$ — непустое направленное множество [7, гл. 2], а f — отображение из D в H. Если $(D, \preceq, f)$ есть направленность в H, оснащенном топологией τ, и $h \in H$, то сходимость $(D, \preceq, f)$ к h определяется следующим образом:

$$\big((D, \preceq, f) \overset{\tau}{\to} h\big) \overset{\text{def}}{\iff} \big(\forall S \in N_\tau(h) \ \exists d \in D \ \forall \delta \in D \ (d \preceq \delta) \Rightarrow (f(\delta) \in S)\big). \tag{1.2}$$

Фиксируем непустое множество E и алгебру [3, гл. I] $\mathcal{L}$ подмножеств E. Через $(add)_+[\mathcal{L}]$ обозначаем конус всевозможных неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, а через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейное пространство (всех) в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию. Мера $\mu \in (add)_+[\mathcal{L}]$ называется $(0,1)$-мерой на $\mathcal{L}$, если $\mu(E) = 1$ и $\big(\mu(L) = 0\big) \vee \big(\mu(L) = 1\big) \ \ \forall L \in \mathcal{L}$. Если $\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то по определению v_η есть вариация η как функция множеств (см. [6, гл. III, § 1]) и

$$\mathcal{L}[\eta] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \eta(L) \neq 0\}.$$

Через $B_0(E, \mathcal{L})$ обозначим множество всех ступенчатых, в смысле $(E, \mathcal{L})$, в/з функций на множестве E [10, гл. 2]), а через $B(E, \mathcal{L})$ — замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $||\cdot||_E$ (см. [6, гл. IV, § 2]) пространства $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных в/з функций на E; функции из $B(E, \mathcal{L})$ называют ярусными (в смысле $(E, \mathcal{L})$). Отметим, что в общем случае измеримого пространства $(E, \mathcal{L})$ имеем, что $B(E, \mathcal{L})$, как подпространство $(\mathbb{B}(E), ||\cdot||_E)$, является банаховым пространством, причем пространство $B^*(E, \mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(E, \mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме, определяемой как полная вариация (см. [10, § 3.6]). Конкретный изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(E, \mathcal{L})$ определяется простейшей операцией интегрирования [10, § 3.3], используемой ниже без дополнительных пояснений. Итак, $(B(E, \mathcal{L}), \mathbb{A}(\mathcal{L}))$ есть двойственность, что позволяет оснащать $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ стандартной *-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$(см. [6, гл. 5]).

Через $\tau_0(\mathcal{L})$ обозначим топологию тихоновской степени пространства $(\mathbb{R}, \tau_\partial)$ с индексным множеством $\mathcal{L}$, где τ_∂ — дискретная топология $\mathbb{R}$. Подробно о топологиях $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$ см. в [17, § 2.6, 4.6; 14, с. 41–46; 16, с. 1113–1115]. Отметим, что для любого ограниченного (в смысле нормы-вариации) множества $H, H \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$, выполняется

$$\tau_*(\mathcal{L})|_H \subset \tau_0(\mathcal{L})|_H. \tag{1.3}$$

Через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначим семейство всех конечных подмножеств X. Приведем далее описание фундаментальной системы окрестностей для $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ в ТП $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$ и $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}))$:

$$N_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\nu) \overset{\triangle}{=} \big\{\{\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \nu(L) = \eta(L) \ \forall L \in \mathcal{K}\} : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\big\}; \tag{1.4}$$

$$N_{\mathcal{L}}^*(\nu) \overset{\triangle}{=} \Big\{\{\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \Big|\int_E f \, d\eta - \int_E f \, d\nu\Big| < \varepsilon \ \forall f \in \mathcal{K}\} : \varepsilon > 0, \ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(B(E, \mathcal{L}))\Big\}.$$

Если $\mu \in (add)_+[\mathcal{L}]$, то по определению

$$\mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \big\{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \ \big| \ \forall L \in \mathcal{L} \ \big((\mu(L) = 0) \Rightarrow (\nu(L) = 0)\big)\big\}. \tag{1.5}$$

В (1.5) определено множество мер ограниченной вариации, слабо абсолютно непрерывных относительно μ. Если Y — непустое множество, то через χ_Y обозначим индикатор Y; $\chi_Y \in B_0(E,\mathcal{L})$ $\forall Y \in \mathcal{L}$. Для ярусной функции $f \in B(I,\mathcal{L})$ и меры $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ введем $f * \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, что отвечает неопределенному μ-интегралу f (см., например, [10, определение 3.7.1]). Отметим, что $\displaystyle\int_E gf\,d\mu = \int_E g\,d(f*\mu)\ \ \forall g \in B(I,\mathcal{L})$.

Пусть $\Delta(E,\mathcal{L})$ — множество всех конечных разбиений множества E элементами $\mathcal{L}$. Напомним определение полной вариации меры произвольной к.-а. меры ν, $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$:

$$v_\nu(E) = \sup\bigl(\{\xi \in [0,\infty[\ \mid k \in \mathbb{N}, Y_{i\in\overline{1,k}} \in \Delta(E,\mathcal{L}), \xi = \sum_{i=1}^{k} |\nu(Y_i)|\}\bigr). \tag{1.6}$$

Через $\mathbf{D}$ обозначим множество всех неупорядоченных конечных разбиений E (см. [14, (3.6.10)]) элементами $\mathcal{L}$; $\{E\} \in \mathbf{D}$. Множество $\mathbf{D}$ оснастим естественным направлением, характеризуемым свойством вписанности одного разбиения в другое: $\forall \mathcal{Z} \in \mathbf{D}\ \ \forall \mathcal{R} \in \mathbf{D}$

$$(\mathcal{Z} \prec \mathcal{R}) \Longleftrightarrow (\forall R \in \mathcal{R}\ \exists Z \in \mathcal{Z} : R \subset Z).$$

§ 2. Теорема Собчика–Хаммера

В этом параграфе мы приводим теорему Собчика–Хаммера и соответствующие необходимые определения.

Определение 2.1 (см. [13, Definition 5.1.4]). К.-а. мера μ на алгебре $\mathcal{L}$ является *строго непрерывной*, если $\forall \epsilon > 0$ существует такое конечное $\mathcal{L}$-разбиение $\{L_1,\ldots,L_n\}$ множества E, что $\nu_\mu(L_i) \leqslant \epsilon\ \forall i$.

Теорема 2.1 (Sobczyk–Hammer Decomposition Theorem, см. [13, Theorem 5.2.7]). *Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра подмножеств E, μ — положительная к.-а. мера. Тогда существуют последовательность различных ограниченных положительных к.-а. мер μ_i, $i \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, и последовательность неотрицательных чисел α_i, $i \in \mathbb{N}$, для которых выполняются следующие свойства:*

(1) *μ_0 есть строго непрерывная мера на $\mathcal{L}$;*

(2) *μ_i — $(0,1)$-мера на $\mathcal{L}$ для всех $i \geqslant 1$;*

(3) $\sum\limits_{i\geqslant 1} \alpha_i \leqslant \infty$;

(4) $\mu = \mu_0 + \sum\limits_{i\geqslant 1} \alpha_i\mu_i$.

Кроме того, представление (4) *единственно.*

Определение 2.2 (см. [13, Definition 5.1.1]). Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра измеримых подмножеств E и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Тогда множество $L_a \in \mathcal{L}$ является *μ-атомом*, если выполнены следующие условия:

(i) $\mu(L_a) \neq 0$;

(ii) если $(E \in \mathcal{L}\ \&\ E \subset L_a)$, то $\mu(E) = 0$ либо $\mu(L_a \setminus E) = 0$.

Через $\mathcal{L}_\mu$ мы обозначаем семейство всех измеримых множеств, которые не являются μ-атомами.

Определение 2.3 (см. [13, Definition 5.1.2]). Неотрицательную к.-а. меру ν на алгебре $\mathcal{L}$ будем называть *неатомической*, если $\forall L \in \mathcal{L}[\nu]\ \exists L_* \in \mathcal{L}[\nu]$: $(L_* \subset L)\&(\nu(L_*) < \nu(L))$. Эквивалентно: неотрицательная к.-а. мера ν на алгебре $\mathcal{L}$ является неатомической тогда и только тогда, когда $\forall L \in \mathcal{L}[\nu]\ \exists L_* \in \mathcal{L}[\nu]$: $\ (L_* \subset L)\&(L \setminus L_* \in \mathcal{L}[\nu])$.

Отметим, что любая строго непрерывная к.-а. мера является неатомической (см. [13, Theorem 5.1.6]). Следовательно, к.-а. мера μ_0 в представлении теоремы 2.1 является неатомической.

Определение 2.4 (см. [13, § 11.1]). Мера $\mu, \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, называется *мерой с конечным множеством значений*, если $\{\mu(L) : L \in \mathcal{L}\}$ есть конечное множество.

Разложение в теореме 2.1 допускает только следующие случаи:

(a) $\mu_0(L) = 0 \ \forall L \in \mathcal{L}$, и последовательность μ_i является конечной (то есть μ — мера с конечным множеством значений, см. [13, Lemma 11.1.3]);

(b) $\mu_0(L) = 0 \ \forall L \in \mathcal{L}$, и последовательность является бесконечной;

(c) $\mu(E) > \mu_0(E) > 0$, и последовательность является конечной;

(d) $\mu_0(E) > 0$, и последовательность является бесконечной;

(e) последовательность состоит только из неатомической меры μ_0.

Случаи (a) и (e) были рассмотрены ранее в работе [12]. В этой статье мы рассмотрим свойства плотности для случаев (b), (c) и (d).

§ 3. Свойство плотности

В этом параграфе мы исследуем возможность погружения множеств ступенчатых и ярусных функций (удовлетворяющих (0.4)) в случае, когда слабая абсолютная непрерывность определяется относительно неотрицательной к.-а. меры для случаев (b), (c) и (d), которые отвечают теореме Собчика–Хаммера.

Зафиксируем измеримое пространство $(E, \mathcal{L})$ с алгеброй подмножеств. Если $\lambda \in (add)_+[\mathcal{L}]$, то по определению (см. определение полной вариации в (1.6))

$$\widehat{\mathbf{F}}_\lambda \triangleq \Big\{ f * \lambda \colon f \in B_0(E, \mathcal{L}), \int_E |f| \, d\lambda = 1 \Big\}, \quad \mathbf{F}_\lambda \triangleq \Big\{ f * \lambda \colon f \in B(E, \mathcal{L}), \int_E |f| \, d\lambda = 1 \Big\},$$

$$\mathbf{S}_\lambda \triangleq \big\{ \mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \ \big| \ v_\mu(E) = 1 \big\}, \quad \mathbf{B}_\lambda \triangleq \big\{ \mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \ \big| \ v_\mu(E) \leqslant 1 \big\}.$$

Два последних множества являются сферой и шаром пространства слабо абсолютно непрерывных мер соответственно. Отметим, что в задачах управления с импульсными ограничениями естественно полагать λ мерой Лебега (или ее следом). В таком случае множества $\widehat{\mathbf{F}}_\lambda$ и $\mathbf{F}_\lambda$ формализуют на абстрактном уровне требование на полный расход топлива для системы с реверсируемым двигателем (см. (0.4)). Подобное требование является достаточно распространенным в задачах космической навигации. Отметим, что при этом λ отвечает случаю (e).

Л е м м а 3.1. *Пусть* λ_0, $(\lambda_i)_{i \in \overline{1,n}}$ *и* $(\alpha_i)_{i \in \overline{1,n}}, n \in \mathbb{N}$, *определяют представление* (4) *в теореме* 2.1 *для неотрицательной к.-а. меры* λ *на алгебре* $\mathcal{L}$ *в случае* (c). *Тогда в любом конечном разбиении множества* E *измеримыми подмножествами существует элемент* (*измеримое подмножество*), *который не является атомом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дано некоторое разбиение $\mathcal{K}$ множества E измеримыми подмножествами. Так как λ_0 является положительной к.-а. мерой, то в разбиении существует элемент $L_* \in \mathcal{K}$ такой, что $\lambda_0(L_*) > 0$. Из неатомичности λ_0 следует, что $L_* \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$. Так как в разложении меры λ участвуют только неотрицательные меры, то $L_* \in \mathcal{L}_{\lambda_0}$ влечет $L_* \in \mathcal{L}_\lambda$. $\square$

Отметим, что данное доказательство легко обобщить и на случай (e).

О п р е д е л е н и е 3.1 (см. [13, Definition 5.2.1]). Последовательность к.-а. $(0,1)$-мер μ_i, $i \in \mathbb{N}$, на алгебре $\mathcal{L}$ является *конечно-дизъюнктной*, если $\forall i \in \mathbb{N}$ существует такое конечное $\mathcal{L}$-разбиение $\{L_1, \ldots, L_i\}$ множества E, что $\mu_j(L_j) = 1 \ \forall j = 1, \ldots, i$.

Фактически данное определение соответствует тому, что последовательность состоит из различных мер [13, Proposition 5.2.2].

Л е м м а 3.2. *Пусть* $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *и* $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *определяют представление* (4) *в теореме* 2.1 *для неотрицательной к.-а. меры* λ *на алгебре* $\mathcal{L}$ *в случае* (b). *Тогда в любом конечном разбиении множества* E *измеримыми подмножествами существует элемент* (*измеримое подмножество*), *который не является атомом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{L_1, \ldots, L_n\}$ есть конечное разбиение множества E измеримыми подмножествами. Из определения $(0,1)$-меры имеем, что $\forall i \in \mathbb{N} \ \exists! j \in \overline{1,n} \colon \ \lambda(L_j) = 1$.

Следовательно, для некоторого элемента разбиения $\widetilde{L}$ имеем бесконечную (под)последовательность мер λ_k, принимающих значение 1 на этом множестве. Пусть меры $\nu, \widetilde{\nu}$ есть некоторые элементы этой последовательности. В силу конечной дизъюнктности последовательности мер из исходного разложения λ, существует разбиение $\widetilde{L}$ элементами $\widetilde{L}_1 \in \mathcal{L}[\nu]$ и $\widetilde{L}_2 \in \mathcal{L}[\widetilde{\nu}]$. Так как в разложении меры λ участвуют только неотрицательные меры, то $\widetilde{L}, \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2 \in \mathcal{L}[\lambda]$, а значит $\widetilde{L}$ не является атомом. □

Л е м м а 3.3. *Пусть* $\lambda_0, (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *определяют представление* (4) *в теореме* 2.1 *для неотрицательной к.-а. меры* λ *на алгебре* $\mathcal{L}$ *в случае* (d). *Тогда в любом конечном разбиении множества* E *измеримыми подмножествами существует элемент* (*измеримое подмножество*), *который не является атомом.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.

Подчеркнем, что в случаях (b)–(e) в любом конечном разбиении множества E измеримыми подмножествами существует элемент (измеримое подмножество), который не является атомом. Покажем, что в общем случае это неверно для разложения (a).

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть* $(\lambda_i)_{i\in\overline{1,n}}$ *и* $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}}, n \in \mathbb{N}$, *определяют представление* (4) *в теореме* 2.1 *для неотрицательной к.-а. меры* λ *на алгебре* $\mathcal{L}$ *в случае* (a). *Тогда существует такое конечное разбиение множества* E *измеримыми подмножествами, что все его элементы являются атомами.*

Доказательство вытекает из факта конечной дизъюнктности мер λ_i и конечности последовательности этих $(0,1)$-мер в случае (a).

Отметим, что измеримые множества из разбиений, которые не являются атомами (см. леммы 3.1–3.3), играют ключевую роль в доказательстве следующий ниже теоремы. Такие множества позволяют так конструировать ступенчатые функции, что отвечающие им меры (неопределенные интегралы) принимают требуемые значения и вариацию. В этой связи мы приводим следующую лемму.

Л е м м а 3.4. *Пусть* λ — *ограниченная неотрицательная к.-а. мера на алгебре* $\mathcal{L}$, $\mu \in \mathbf{B}_\lambda$, $L \in \mathcal{L}_\lambda$. *Тогда существует* $\widetilde{f} \in B_0(E, \mathcal{L})$ *такая, что* $\forall \gamma \in [1 - v_\mu(E \setminus L), 1]$ *выполняется*

$$\int_L \widetilde{f}\, d\lambda = (\widetilde{f} * \lambda)(L) = \mu(L), \qquad \int_L |\widetilde{f}|\, d\lambda = \gamma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существуют $L_1,\ L_2 \in \mathcal{L}[\lambda]$, и $L = L_1 \cup L_2$, так как L не является λ-атомом. Пусть $a_1 \triangleq \lambda(L_1)$, $a_2 \triangleq \lambda(L_2)$. Рассмотрим систему уравнений $x_1 a_1 + x_2 a_2 = \mu(L)$ и $|x_1| a_1 + |x_2| a_2 = \gamma$, где $\gamma \in [1 - v_\mu(E \setminus L), 1]$. Отметим, что $|\mu(L)| \leqslant v_\mu(L) \leqslant 1 - v_\mu(E \setminus L)$. Нетрудно установить, что данная система уравнений всегда имеет не менее одного решения, в котором неизвестные x_1 и x_2 не равны нулю. Пусть $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1)$ есть решение системы, тогда для ступенчатой функции $\widetilde{f} \triangleq \widetilde{x}_1 \chi_{L_1} + \widetilde{x}_2 \chi_{L_2}$ выполняется

$$\int_L \widetilde{f}\, d\lambda = (\widetilde{f} * \lambda)(L) = \mu(L), \qquad \int_L |\widetilde{f}|\, d\lambda = v_{\widetilde{f} * \lambda}(L) = \gamma.$$

□

В связи с последней леммой нам потребуется инструмент, который позволял бы для набора λ, $L \in \mathcal{L}_\lambda$, $(k_1, k_2) \in [-1, 1] \times [0, 1]$, $k_2 \geqslant |k_1|$, осуществлять построение ступенчатой функции $\widetilde{f}$. Леммы 3.1–3.3 гарантируют, что $\mathcal{L}_\lambda \neq \varnothing$ в случаях (b)–(d). Пусть $\mathbf{c}_\lambda(L, k_1, k_2)\colon \mathcal{L}_\lambda \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to$ $\to B_0(E, \mathcal{L})$ есть некоторое отображение, которое «генерирует» ступенчатые функции $\widetilde{f} \triangleq$ $\triangleq \widetilde{x}_1 \chi_{L_1} + \widetilde{x}_2 \chi_{L_2}$ со свойством

$$\int_L \widetilde{f}\, d\lambda = (\widetilde{f} * \lambda)(L) = k_1, \qquad \int_L |\widetilde{f}|\, d\lambda = v_{\widetilde{f} * \lambda}(L) = k_2,$$

где $\widetilde{L} = L_1 \cup L_2$, $L_1, L_2 \in \mathcal{L}[\lambda]$ и $L_2 = L \setminus L_1$ (существование такой функции следует из аксиомы выбора и леммы 3.4).

Введем отображение $\mathbf{i}\colon \mathbf{D} \to \mathcal{L}_\lambda$, которое способно «выделять» из разбиений $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$ элемент, который не является атомом, следующим образом: $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{i}(\mathcal{K}) \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}_\lambda.$$

Очевидно, что для случаев (b)–(d) данное отображение определено корректно.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть разложение неотрицательной к.-а. меры λ на алгебре $\mathcal{L}$, согласно теореме* 2.1 *отвечает случаям* (b), (c) *или* (d). *Тогда*

$$cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau) = \mathbf{B}_\lambda \ \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем очевидную цепочку $\widehat{\mathbf{F}}_\lambda \subset \mathbf{F}_\lambda \subset \mathbf{S}_\lambda \subset \mathbf{B}_\lambda$. Из теоремы Алаоглу и (1.3) имеем, что $\mathbf{B}_\lambda = cl(\mathbf{B}_\lambda, \tau) \ \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}$. Как следствие, $cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau) \subset cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau) \subset$ $\subset cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau) \subset \mathbf{B}_\lambda \ \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}$. Следовательно,

$$cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})) \subset \mathbf{B}_\lambda, \tag{3.1}$$

$$cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset \mathbf{B}_\lambda. \tag{3.2}$$

Покажем, что $\mathbf{B}_\lambda \subset cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L}))$. Зафиксируем произвольную меру $\mu \in \mathbf{B}_\lambda$ ($v_\mu(E) \leqslant 1$). Для произвольного разбиения $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$ зададим ступенчатую функцию $\Phi_\mu[\mathcal{K}]\colon E \to \mathbb{R}$ по правилу $\forall K \in \mathcal{K}, e \in K$:

$$(\lambda(K) = 0) \Rightarrow (\Phi_\mu[\mathcal{K}](e) \stackrel{\triangle}{=} 0),$$

$$(K \neq \mathbf{i}(\mathcal{K}) \ \& \ \lambda(K) \neq 0) \Rightarrow \Big(\Phi_\mu[\mathcal{K}](e) \stackrel{\triangle}{=} \frac{\mu(K)}{\lambda(K)}\chi_K(e)\Big),$$

$$(K = \mathbf{i}(\mathcal{K})) \Rightarrow \Big(\Phi_\mu[\mathcal{K}](e) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{c}_\lambda\big(L, \mu(L), 1 - \sum_{S \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{i}(\mathcal{K})\}} |\mu(K)|\big)(e)\Big).$$

Легко убедиться, что $\Phi_\mu[\mathcal{K}] \in B_0(E, \mathcal{L})$. Остановимся подробнее на $\Phi_\mu[\mathcal{K}]$. На множестве $\mathbf{i}(\mathcal{K})$ функция «состоит из двух ступенек». При этом согласно лемме 3.4 мы имеем, что $(\Phi_\mu[\mathcal{K}] *$ $* \lambda)\big(\mathbf{i}(\mathcal{K})\big) = \mu\big(\mathbf{i}(\mathcal{K})\big)$ и

$$\int_{\mathbf{i}(\mathcal{K})} |\Phi_\mu[\mathcal{K}]| \, d\lambda = 1 - \sum_{S \in \mathcal{K} \setminus \{\mathbf{i}(\mathcal{K})\}} |\mu(K)|.$$

Учитывая определение $\Phi_\mu[\mathcal{K}]$, мы убеждаемся, что $\displaystyle\int_E |\Phi_\mu[\mathcal{K}]| \, d\lambda = 1$ и $(\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)(K) =$ $= \mu(K) \ \forall K \in \mathcal{K}$.

Пусть $\Phi_\mu[\cdot] * \lambda \stackrel{\triangle}{=} (\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}}$. Обратимся теперь к определению сходимости направленности (см. (1.2)) и определению фундаментальной системы окрестностей топологии $\tau_0(\mathcal{L})$ (см. (1.4)). Пусть $T \in N_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\mu)$, тогда существует семейство $\mathcal{K}_*$, которое порождает T (см. (1.4)). По построению функции $\Phi_\mu[\cdot]$ имеем, что $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D} \ \forall K \in \mathcal{K}_* \ \big(\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}\big) \Rightarrow \big((\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)(K) =$ $= (\Phi_\mu[\mathcal{K}_*] * \lambda)(K) = \mu(K)\big)$. Последнее означает, что $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D} \ \ \big(\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}\big) \Rightarrow \big(\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda \in T\big)$. Согласно (1.2) направленность $(\mathbf{D}, \prec, \Phi_\mu[\cdot] * \lambda)$ сходится к μ в $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$. Следовательно, $\mu \in cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L}))$. В силу произвольности выбора $\mu \in \mathbf{B}_\lambda$ мы получили, что $\mathbf{B}_\lambda \subset cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L}))$. Комбинируя это с (3.1) и (3.2), мы завершаем доказательство. □

Отметим, что ключевым моментом в доказательстве является возможность выбора в любом конечном разбиении множества, которое не является атомом. Предложение 3.1 указывает, что для меры с конечным множеством значений это возможно не всегда, а поэтому невозможно предъявить направленность из ступенчатых функций, которая удовлетворяла бы интегральным ограничениям и обеспечивала бы требуемую сходимость для неопределенных интегралов.

§ 3.1. Эквивалентность расширений

Теорема 3.2. *Если λ — ограниченная неотрицательная к.-а. мера на алгебре $\mathcal{L}$, которая не является мерой с конечным множеством значений, то*

$$cl(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda,\tau)=cl(\mathbf{F}_\lambda,\tau)=cl(\mathbf{S}_\lambda,\tau)=\mathbf{B}_\lambda=cl\big(\big\{f*\lambda: f\in B_0(E,\mathcal{L}),\int_E |f|\,d\lambda\leqslant 1\big\},\tau\big)=$$

$$=cl\big(\big\{f*\lambda: f\in B(E,\mathcal{L}),\int_E |f|\,d\lambda\leqslant 1\big\},\tau\big)\ \forall\tau\in\{\tau_*(\mathcal{L});\tau_0(\mathcal{L})\}.$$

Доказательство теоремы получается комбинацией теоремы 3.1 (см. [12, теорема 2] и соотношений [16, (15.37)].

Аналог теоремы 3.2 не имеет места в случае, когда слабая абсолютная непрерывность определяется относительно меры с конечным множеством значений.

Теорема 3.3 (см. [12, теорема 3]). *Для к.-а. меры λ с конечным множеством значений выполняется цепочка равенств:*

$$cl\big(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda,\tau_*(\mathcal{L})\big)=cl\big(\mathbf{F}_\lambda,\tau_*(\mathcal{L})\big)=cl\big(\widehat{\mathbf{F}}_\lambda,\tau_0(\mathcal{L})\big)=cl\big(\mathbf{F}_\lambda,\tau_0(\mathcal{L})\big)=\mathbf{S}_\lambda\neq\mathbf{B}_\lambda.$$

Отметим, что теоремы 3.1–3.3 являются логическим завершением исследований [14,16,17], касающихся возможности погружения множеств управлений, удовлетворяющих (0.1)–(0.3), в компакты.

Список литературы

1. Бакланов А.П. Об одной игровой задаче асимптотически импульсного управления // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 3. С. 3–14. DOI: 10.20537/vm110301
2. Бакланов А.П. К вопросу о представлении максимина в одной задаче импульсного управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 3. С. 49–69.
3. Бурбаки Н. Элементы математики. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
4. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
5. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд. Тбилис. ун-та, 1975. 254 с.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 895 с.
7. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 432 с.
8. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
9. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
10. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2008.
11. Ченцов А.Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 104–119. DOI: 10.20537/vm100312
12. Baklanov A.P. On density properties of weakly absolutely continuous measures // CEUR Workshop Proceedings. 2016. Vol. 1662. P. 62–72.
13. Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M. Theory of charges. A study of finitely additive measures. New York: Academic Press, 1983. 315 p. DOI: 10.1016/s0079-8169(09)x6004-6
14. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht: Kluwer, 1997. 322 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0805-0
15. Chentsov A.G. Correct expansion of some unstable problems of statistical information processing // Cybernet. Systems Anal. 2001. Vol. 37. No. 2. P. 235–250. DOI: 10.1023/A:1016751120054
16. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // J. Math. Sci. (N.Y.). 2006. Vol. 133. No. 2. P. 1045–1206. DOI: 10.1007/s10958-006-0030-0
17. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht: Kluwer, 2002. 408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
18. Sobczyk A., Hammer P.C. A decomposition of additive set functions // Duke Math. J. 1944. Vol. 11. No. 4. P. 839–846. DOI: 10.1215/s0012-7094-44-01172-5

Поступила в редакцию 28.10.2017

Бакланов Артем Павлович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
Международный институт прикладного системного анализа, A-2361, Австрия, г. Лаксенбург, Шлоссплац, 1.
E-mail: artem.baklanov@gmail.com

A. P. Baklanov

On a density property of weakly absolutely continuous measures. General case

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 3–12 (in Russian).

Keywords: finitely additive measures, weak absolute continuity, weak-star topology, nonatomic or atomless measures, Sobczyk–Hammer decomposition.

MSC2010: 54H99

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-01

It is shown that some set of all step functions (and the set of all uniform limits of such functions) allows an embedding into a compact subset (with respect to weak-star topology) of the set of all finitely additive measures of bounded variation in the form of an everywhere dense subset. In particular, we consider the set of all step functions (the set of all uniform limits of such functions) such that an integral of absolute value of the functions with respect to nonnegative finitely additive measure λ is equal to unity. For these sets, the possibility of embedding is proved without any additional assumptions on λ; this generalizes the previous results. Using the Sobczyk–Hammer decomposition theorem, we show that for λ with the finite range, the above-mentioned sets of functions allow an embedding into the unit sphere (in the strong norm-variation) of weakly absolutely continuous measures with respect to λ in the form of an everywhere dense subset. For λ with an infinite range, the above-mentioned sets of functions allow an embedding into the unit ball of weakly absolutely continuous measures with respect to λ in the form of an everywhere dense subset. The results can be helpful for an extension of linear impulse control problems in the class of finitely additive measures to obtain robust representations of reachable sets given by constraints of asymptotic character.

REFERENCES

1. Baklanov A.P. A game problem with asymptotic impulse control, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2011, issue 3, pp. 3–14 (in Russian). DOI: 10.20537/vm110301
2. Baklanov A.P. On the representation of maximin of an impulse control problem, *Differentsial'nye Uravneniya i Protsessy Upravleniya*, 2012, no. 3, pp. 49–69 (in Russian).
3. Bourbaki N. *Topologie Générale* (General Topology), Paris: Hermann, 1961. Translated under the title *Elementy matematiki. Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury*, Moscow: Nauka, 1968, 385 p.
4. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972, 531 p. DOI: 10.1016/c2013-0-11669-8
Translated under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami*, Moscow: Nauka, 1977, 624 p.
5. Gamkrelidze R. *Principles of optimal control theory*, New York: Plenum, 1978, 175 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-7398-8
Original Russian text published in Gamkrelidze R.V. *Osnovy optimal'nogo upravleniya*, Tbilisi: Tbilisi State University, 1975, 254 p.
6. Dunford N.J., Schwartz J.T. *Linear operators. Part I: general theory*, New York: Interscience, 1958, 874 p. Translated under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*, Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, 895 p.
7. Kelley J.L. *General Topology*, New York: Van Nostrand, 1955, 298 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Nauka, 1968, 385 p.
8. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of motion control), Moscow: Nauka, 1968, 476 p.
9. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* (Optimization of guarantee in control problems), Moscow: Nauka, 1981, 287 p.
10. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery. I* (The elements of finitely additive measures theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2008.
11. Chentsov A.G. About presentation of maximin in the game problem with constraints of asymptotic character, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, issue 3, pp. 104–119 (in Russian). DOI: 10.20537/vm100312

12. Baklanov A.P. On density properties of weakly absolutely continuous measures, *CEUR Workshop Proceedings*, 2016, vol. 1662, pp. 62–72.
13. Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M. *Theory of charges. A study of finitely additive measures*, New York: Academic Press, 1983, 315 p. DOI: 10.1016/s0079-8169(09)x6004-6
14. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht: Kluwer, 1997, 322 p. DOI: 10.1007/978-94-017-0805-0
15. Chentsov A.G. Correct expansion of some unstable problems of statistical information processing, *Cybernet. Systems Anal.*, 2001, vol. 37, no. 2, pp. 235–250. DOI: 10.1023/A:1016751120054
16. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2006, vol. 133, no. 2, pp. 1045–1206. DOI: 10.1007/s10958-006-0030-0
17. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht: Kluwer, 2002, 408 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1527-0
18. Sobczyk A., Hammer P.C. A decomposition of additive set functions, *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, no. 4, pp. 839–846. DOI: 10.1215/s0012-7094-44-01172-5

Received 28.10.2017

Baklanov Artem Pavlovich, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;

International Institute for Applied Systems Analysis, Schlossplatz, 1, Laxenburg, A-2361, Austria.

E-mail: artem.baklanov@gmail.com