УДК 517.977

© *А. И. Бичурина*

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ГРУППЫ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}z_{ij} = u_i - v,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ функции f. Предполагается, что все убегающие используют одно и то же управление. Целью преследователей является поимка хотя бы одного из убегающих. Цель убегающих — всем уклониться от встречи. Убегающие используют кусочно-программные стратегии, преследователи — кусочно-программные контрстратегии. Множество допустимых управлений — шар с единичным радиусом с центром в начале координат, целевые множества — начала координат. В терминах начальных позиций и параметров игры получены достаточные условия поимки и достаточные условия уклонения.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, дробные производные.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-02

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей одного убегающего и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–6]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих. Цель группы преследователей — поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна [4–15].

Были получены [7] достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в дифференциальной игре со многими преследователями и убегающими при условии, что убегающие используют одно и то же управление. Задача простого преследования группы скоординированных убегающих без фазовых ограничений рассматривалась в [8, 9], с фазовыми ограничениями — в [10]. Задача преследования группы скоординированных убегающих в примере Л. С. Понтрягина рассматривалась в [11,12], в линейных дифференциальных играх — в [13,14]. Поимке двух скоординированных убегающих посвящены работы [15, 16].

В данной статье рассматривается задача о преследовании группой преследователей группы скоординированных убегающих при условии, что все участники обладают равными возможностями, а движение каждого описывается уравнением с дробными по Капуто производными и нулевой матрицей.

Получены достаточные условия поимки и достаточные условия уклонения.

§ 1. Постановка задачи

Определение 1.1. Пусть $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, число $\alpha \in (0,1)$. *Производной по Капуто порядка* α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$\left(D^{(\alpha)}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}\,ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \|u_i\| \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)}y_j = v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Здесь x_i, y_j, u_i, $v \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Введем новые переменные $z_{i,j} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$D^{(\alpha)}z_{i,j} = u_i - v, \quad z_{i,j}(0) = z_{i,j}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Будем предполагать выполнение следующих условий для начальных позиций x_i^0, y_j^0:

(а) если $n > k$, то для любого набора индексов $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $|I| \geqslant k+1$, справедливо $\operatorname{int}\operatorname{co}\left\{x_i^0, i \in I\right\} \neq \varnothing$;

(б) любые k векторов из совокупности $\left\{x_i^0 - y_j^0, y_s^0 - y_r^0, s \neq r\right\}$ линейно независимы.

Обозначим $V = \{v | \, \|v\| \leqslant 1\}$. Определим функции λ вида

$$\lambda(z_{i,j}^0, v) = \sup\left\{\lambda \geqslant 0 | -\lambda z_{i,j}^0 \in -v + V\right\}$$

и число

$$\delta_j(z^0) = \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(z_{i,j}^0, v).$$

Пусть $T > 0$ и $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q = T\}$ — разбиение отрезка $[0, T]$.

Определение 1.2. *Кусочно-программной стратегией Q* убегающих E_j, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений c^l, $l = 1, \ldots, q$, ставящих в соответствие величинам

$$(t_l, x_i(t_l), y_j(t_l), \min_{t \in [0, t_l]} \min_i \|x_i(t) - y_j(t)\|) \tag{1.4}$$

измеримую функцию $v(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$ и такую, что $\|v(t)\| \leqslant 1$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который по величинам (1.4) для всех убегающих E_j выбирает одно и то же управление $v(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 1.3. *Кусочно-программной контрстратегией U_i* преследователей P_i, соответствующей разбиению σ, будем называть семейство отображений c^l, $l = 0, 1, \ldots, q$, ставящих в соответствие величинам (1.4) и управлению $v(t)$, $t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u_i(t)$, определенную для $t \in [t_l, t_{l+1})$, и такую, что $\|u_i(t)\| \leqslant 1$, $t \in [t_l, t_{l+1})$.

Определение 1.4. В игре Γ *происходит уклонение* от встречи, если для любого $T > 0$ существуют разбиение σ интервала $[0, T]$ и стратегия Q убегающих E_j такие, что для любых траекторий $x_i(t)$ преследователей P_i имеет место $x_i(t) \neq y_j(t)$, $t \in [0, T]$.

Определение 1.5. В игре Γ *происходит поимка*, если существует $T > 0$ и для любой стратегии Q убегающих E_j существуют кусочно-программные контрстратегии U_i преследователей P_i, момент $\tau \in [0, T]$ и номера $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, такие, что $x_r(\tau) = y_s(\tau)$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Определение 2.1 (см. [17]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s$.

Лемма 2.1 (см. [9]). *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис. Тогда для любых $b_l, b_{l+1}, \ldots, b_s$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для всех $\mu > \mu_0$*

$$a_1, \ldots, a_{j-1}, b_l + \mu a_l, \ldots, b_s + \mu a_s$$

образуют положительный базис.

С л е д с т в и е 2.1 (см. [9]). *Пусть векторы* $a_1, \ldots, a_s$ *образуют положительный базис. Тогда для любых векторов* $b_l, b_{l+1}, \ldots, b_s$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$ *существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что для всех* $\mu > \mu_0$ *положительный базис образуют системы векторов*

$$\{a_1, \ldots, a_{l-1}, b_l + \mu a_l, \ldots, b_s + \mu a_s\}, \quad \{a_1, \ldots, a_{l-1}, a_{\alpha_0}, b_r + \mu a_r, r \neq \alpha_0, r = l, \ldots, s\}.$$

Л е м м а 2.2 (см. [9]). *Векторы* $a_1, \ldots, a_s$ *образуют положительный базис тогда и только тогда, когда*

$$\min_{\|v\| \leqslant 1} \max_l \lambda(a_l, v) > 0.$$

Обозначим через $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ri} X$, $\operatorname{co} X$, $\operatorname{aff} X$ соответственно внутренность, относительную внутренность, выпуклую оболочку и аффинную оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Л е м м а 2.3 (см. [9]). *Пусть* $x_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \ldots, n$, $y_j \in \mathbb{R}^k$, $j = 1, \ldots, m$, *и выполнены следующие условия:*

(1) $n + m \geqslant k + 2$*;*

(2) *в совокупности* $\{x_i - y_j, y_r - y_q, r \neq q, x_s - x_l, s \neq l\}$ *существуют* k *линейно независимых векторов.*

Тогда $\operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_i\} \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{y_j\} \neq \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\{x_i - y_j\}$ *образуют положительный базис.*

Л е м м а 2.4 (см. [9]). *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ — *множество точек* $\mathbb{R}^k$, *причем* $n + m \geqslant k + 2$, *любые* $k+1$ *точки аффинно независимы и* $\operatorname{co} \{x_1, \ldots, x_n\} \cap \operatorname{co} \{y_1, \ldots, y_m\} \neq \varnothing$. *Тогда существуют множества* $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $J \subset \{1, \ldots, m\}$ *такие, что* $|I| + |J| = k + 2$, $\operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_1, \ldots, x_n\} \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{y_1, \ldots, y_m\} \neq \varnothing$ *и состоит из единственной точки.*

Л е м м а 2.5 (см. [9]). *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ — *множество точек* $\mathbb{R}^k$, *причем* $n + m = k + 2$, *любые* k *векторов из совокупности* $\{x_i - y_j, y_r - y_s, r \neq s\}$ *линейно независимы и, кроме того,* $\operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_i\} \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{y_j\} \neq \varnothing$, $x_{n+1} - y_{\beta_0} = \mu(y_{\beta_0} - y_1) = -\mu(y_1 - y_{\beta_0})$ *при некотором* $\mu > 0$, $\beta_0 \in \{2, \ldots, m\}$. *Тогда* $\operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_i, i = 1, \ldots, n\} \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{y_j, j = 2, \ldots, m\} \neq \varnothing$.

§ 3. Достаточные условия поимки и достаточные условия уклонения

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $m = 1$ *и* $\delta_1(z^0) > 0$. *Тогда в игре происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим стратегии преследователей P_i, полагая

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z^0_{i,1}, v(t)) z^0_{i,1}.$$

В силу определения $\lambda(z^0_{i,1}, v)$ значения $u_i(t) \in V$ для всех t, $i \in I$. Подставляя u_i в (1.3), имеем

$$D^{(\alpha)} z_{i,1} = -\lambda(z^0_{i,1}, v(t)) z^0_{i,1}.$$

Отсюда в силу [18] получаем

$$z_{i,1}(t) = \frac{z^0_{i,1}}{\Gamma(1)} + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(0, \alpha)(-\lambda(z^0_{i,1}, v(t)) z^0_{i,1})\, d\tau =$$
$$= z^0_{i,1} \left(1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \lambda(z^0_{i,1}, v(t))(t-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau\right),$$

где $E_{1/\beta}(B, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{B^k}{\Gamma(k\beta + \mu)}$ — обобщенная функция Миттаг-Леффлера.

Рассмотрим функции $h_i(t) = 1 - \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t \lambda(z^0_{i,1}, v(s))(t-\tau)^{\alpha-1}\, ds$. Отметим, что $h_i(0) = 1$ и h_i — непрерывные функции. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^n h_i(t) = n - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \sum_{i=1}^n \lambda(z^0_{i,1}, v(s))(t-\tau)^{\alpha-1}\, ds. \tag{3.1}$$

Так как
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda(z_{i,1}^0,v(s))\geqslant\max_i\lambda(z_{i,1}^0,v(s))\geqslant\delta_1(z^0)>0,$$
то из (3.1) получаем
$$\sum_{i=1}^{n}h_i(t)\leqslant n-\frac{\delta_1(z^0)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\,ds=n-\frac{\delta_1(z^0)t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}.$$
Так как правая часть стремится к $-\infty$ при $t\to+\infty$, то для любой допустимой функции $v(\cdot)$ найдутся номер l и момент τ, $\tau\in[0,T]$, где $T=\sqrt[\alpha]{\dfrac{\alpha n\Gamma(\alpha)}{\delta_1(z^0)}}$, такие, что $h_l(\tau)=0$. Отсюда $z_l(\tau)=0$. Таким образом, в игре происходит поимка. Теорема доказана. $\square$

Т е о р е м а 3.2. *Пусть*
$$\operatorname{int}\operatorname{co}\left\{x_i^0\right\}\cap\operatorname{co}\left\{y_j^0\right\}\neq\varnothing. \tag{3.2}$$
Тогда в игре Γ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что $n+m\geqslant k+2$. Согласно лемме 4 существуют множества $I\subset\{1,\ldots,n\}$, $J\subset\{1,\ldots,m\}$ такие, что
$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\left\{x_i^0,i\in I\right\}\cap\operatorname{ri}\operatorname{co}\left\{y_j^0,j\in J\right\}\neq\varnothing \tag{3.3}$$
и $|I|+|J|=k+2$. Будем считать, что $I=\{1,\ldots,q\}$, $J=\{1,\ldots,l\}$, причем $q+l=k+2$.

По лемме 2.3, $\left\{z_{i,j}^0,i\in I,j\in J\right\}$ образуют положительный базис. Если $|J|=1$, то поимка следует из теоремы 3.1. Считаем, что $|J|\geqslant 2$.

Обозначим $c_\beta^\gamma=y_\gamma^0-y_\beta^0$. Тогда $z_{i,\gamma}^0=z_{i,1}^0+c_1^\gamma$ для всех $i\in I,\gamma\in J,\gamma\neq 1$. Поэтому $\left\{z_{i,1}^0,i\in I,c_1^\gamma,\gamma\in J,\gamma\neq 1\right\}$ образуют положительный базис. Так как $n\geqslant k+1$, то $q+\gamma-1\in$ $\in\{q+1,\ldots,n\}$ для всех $\gamma\in J$, $\gamma\neq 1$.

В силу следствия 2.1, набор $\left\{z_{i,1}^0,i\in I,z_{q+\gamma-1,1}^0+\mu c_1^\gamma,\gamma\in J,\gamma\neq 1\right\}$ образует положительный базис при некотором $\mu>0$.

Задаем стратегии преследователей P_i следующим образом ($t\in[0,T]$):
$$u_i(t)=v(t)-\lambda(z_{i,1}^0,v(t))z_{i,1}^0,\quad i\in I,$$
$$u_{q+\gamma-1}(t)=v(t)-\lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0+\mu c_1^\gamma,v(t))(z_{q+\gamma-1,1}^0+\mu c_1^\gamma),\quad \gamma\in J,\quad \gamma\neq 1.$$
Управления остальных преследователей задаем произвольно. Момент времени T определим далее.

Подставим заданные управления преследователей в систему (1.3) и обозначим
$$h_i(t)=1-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\lambda(z_{i,1}^0,v(\tau))\,(t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau,$$
$$h_{q+\gamma-1}(t)=1-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0+\mu c_1^\gamma,v(\tau))\,(t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau,\quad \gamma\in J,\quad \gamma\neq 1.$$
Тогда из системы (1.3) получаем
$$\begin{gathered} z_{i,1}(t)=z_{i,1}^0h_i(t),\quad i\in I,\\ z_{q+\gamma-1,1}(t)+\mu c_1^\gamma=\left(z_{q+\gamma-1,1}^0+\mu c_1^\gamma\right)h_{q+\gamma-1}(t),\quad \gamma\in J,\quad \gamma\neq 1.\end{gathered} \tag{3.4}$$
Из леммы 2.2 следует, что существуют момент T и номер r такие, что $h_r(T)=0$. Если $r\in I$, то $z_{r,1}(T)=0$, и, следовательно, в игре Γ произойдет поимка.

Если $h_{q+\gamma_0-1}(T)=0$ при некотором $\gamma_0\in J$, $\gamma_0\neq 1$, то $z_{q+\gamma_0-1,1}(T)=-\mu c_1^{\gamma_0}$.

Покажем, что

$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\{x_i(T), i\in I\}\cap\operatorname{ri}\operatorname{co}\{y_j(T), j\in J\}\neq\varnothing. \tag{3.5}$$

Из (3.4) имеем $z_{i,1}^0=\dfrac{z_{i,1}(T)}{h_i(T)}$. Кроме того, для всех $\gamma\in J$, $\gamma\neq 1$ справедливо

$$z_{i,\gamma}(T)=z_{i,1}(T)+c_1^\gamma=z_{i,1}(T)+z_{i,\gamma}^0-z_{i,1}^0.$$

Поэтому для всех $\gamma\in J$, $\gamma\neq 1$

$$z_{i,\gamma}^0=z_{i,\gamma}(T)-z_{i,1}(T)+z_{i,1}^0=z_{i,\gamma}(T)+\frac{1-h_i(T)}{h_i(T)}z_{i,1}(T).$$

По условию, система $\left\{z_{i,j}^0, i\in I, j\in J\right\}$ образует положительный базис. Поэтому положительный базис образует

$$\left\{\frac{z_{i,1}(T)}{h_i(T)}, z_{i,\gamma}(T)+\frac{1-h_i(T)}{h_i(T)}z_{i,1}(T), \gamma\in J, \gamma\neq 1\right\}.$$

Так как $h_i(T)\in(0,1]$, то система векторов $\{z_{i,j}(T), i\in I, j\in J\}$ образует положительный базис.

Используя лемму 2.3, получаем (3.5). Так как $z_{q+\gamma_0-1,1}(T)=-\mu c_1^{\gamma_0}$ и выполнено условие (3.5), то согласно лемме 2.5 имеем

$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\{x_i(T), i\in I, x_{q+\gamma_0-1}(T)\}\cap\operatorname{ri}\operatorname{co}\{y_j(T), j\in J, j\neq 1\}\neq\varnothing.$$

Считаем, что $\gamma_0=2$. Далее полагаем $I=\{1,2,\ldots,q+1\}$, $J=\{2,\ldots,l\}$. Для полученных множеств I, J справедливо условие (3.3), при этом число убегающих, участвующих в данном условии, уменьшилось на 1. Принимая момент T за начальный, будем повторять рассуждения до тех пор, пока число убегающих не станет равным 1. Получим, что $\operatorname{ri}\operatorname{co}\{x_i(\tau), i\in I\}\cap\{y_j(\tau), j\in J\}\neq\varnothing$ в некоторый момент $\tau>0$, причем $|I|=k+1$, $|J|=1$. Теперь поимка следует из теоремы 3.1. Теорема доказана. $\square$

Т е о р е м а 3.3. *Пусть*

$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\left\{x_i^0, i\in I\right\}\neq\varnothing \text{ и } \operatorname{ri}\operatorname{co}\left\{x_i^0, i\in I\right\}\cap\operatorname{co}\left\{y_j^0, j\in J\right\}=\varnothing. \tag{3.6}$$

Тогда в игре происходит уклонение от встречи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.6) следует, что множества $\operatorname{co}\left\{x_i^0, i\in I\right\}$ и $\operatorname{co}\left\{y_j^0, j\in J\right\}$ отделимы. Это означает, что существует $p\in\mathbb{R}^k$, $\|p\|=1$, и такой, что $\left(p, x_i^0\right)\leqslant 0$ для всех $i\in I$, $\left(p, y_j^0\right)\geqslant 0$ для всех $j\in J$. Отсюда $\left(p, z_{ij}^0\right)\leqslant 0$ для всех i,j. Задаем управления убегающих E_j, полагая $v(t)=p$ для всех $t\geqslant 0$. Пусть $\{u_i(t)\}_{i\in I}$ — произвольные управления преследователей. Из (1.3) получаем

$$z_{i,j}(t)=z_{i,j}^0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}u_i(\tau)\,d\tau-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau\cdot p.$$

Обозначим

$$\hat{u}_i(t)=\frac{\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}u_i(\tau)\,d\tau}{\displaystyle\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau}.$$

Тогда $\|\hat{u}_i(t)\| \leqslant 1$ для всех i и $t > 0$. Получаем $z_{i,j}(t) = z_{i,j}^0 + \dfrac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\hat{u}_i(t) - \dfrac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}p$. Отсюда, в силу выбора p, имеем

$$\|z_{i,j}(t)\| = \left\|z_{i,j}^0 + \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\hat{u}_i(t) - \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}p\right\| \geqslant \left\|z_{i,j}^0 - \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}p\right\| - \left\|\frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\hat{u}_i(t)\right\| \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\left\|z_{i,j}^0\right\|^2 - 2\frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(z_{i,j}^0, p\right) + \left(\frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right)^2} - \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} > \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} = 0.$$

Тем самым доказано, что в игре происходит уклонение от встречи.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $\mathrm{ri}\,\mathrm{co}\left\{x_i^0, i \in I\right\} = \varnothing$. *Тогда в игре происходит уклонение от встречи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично доказательству теоремы 7.4 [6, с. 77].

Список литературы

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент: Фан, 1989. 232 с.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
6. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009. 266 с.
7. Сатимов Н., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узбекской ССР. 1983. Т. 4. С. 3–6.
8. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89–96.
9. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования групп жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
10. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 238–245.
11. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Преследование группы убегающих в примере Понтрягина // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 623–628.
12. Благодатских А.И. Две нестационарные задачи преследования жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 1. С. 47–60. DOI: 10.20537/vm080104
13. Благодатских А.И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. DOI: 10.20537/vm160104
14. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 29–37.
15. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 3–8. DOI: 10.20537/vm110401
16. Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48.
17. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.
18. Чикрий А.А., Матичин И.И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповiдi Нацiональної академiї наук України. 2007. № 1. С. 50–55.

Поступила в редакцию 01.10.2017

Бичурина Алёна Игоревна, студент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

A. I. Bichurina

Persecution of a group of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 13–20 (in Russian).

Keywords: differential game, group persecution, pursuer, runaway, fractional derivatives.

MSC2010: 91A23, 49N70

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-02

In the finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuit of a group of evaders by a pursuit group is considered, which is described by a system of the form

$$D^{(\alpha)}z_{ij} = u_i - v,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of order $\alpha \in (0,1)$ of the function f. It is assumed that all evaders use the same control. The goal of the pursuers is to catch at least one of the evaders. The goal of the fleeing is to evade the meeting. The evaders use piecewise-program strategies, while the pursuers use piecewise-program counterstrategies. The set of admissible controls is a ball of unit radius with the center at the origin, the target sets being the origin. Sufficient conditions for the capture and sufficient conditions for the evasion are obtained in terms of initial positions and game parameters.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, issue 3, pp. 484–485. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036
2. Chernous'ko F.L. A problem of evasion from many pursuers, *J. Appl. Math. Mech.*, 1976, vol. 40, issue 1, pp. 11–20. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90105-2
3. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nye igry s prostym dvizheniem* (Differential games with simple mothion), Tashkent: Fan, 1989, 232 p.
4. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes*, Springer Netherlands, 1997, XX+404 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
5. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple dynamic processes), Moscow: Moscow State University, 1990, 197 p.
6. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009, 266 p.
7. Satimov N., Mamatov M.Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting and differential games between groups of pursuers and evaders, *Dokl. Akad. Nauk Uzbekskoi SSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian).
8. Petrov N.N. Simple pursuit after a group of evaders, *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 12, pp. 1914–1919.
9. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753.
10. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints, *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 225–232. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00027-8
11. Vagin D.A., Petrov N.N. Pursuit of a group of evaders in the Pontryagin example, *J. Appl. Math. Mech.*, 2004, vol. 68, issue 4, pp. 555–560. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2004.07.008
12. Blagodatskikh A.I. Two non-stationary pursuit problems of a rigidly connected evaders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mech. Komp'yut. Nauki*, 2008, no. 1, pp. 47–60 (in Russian). DOI: 10.20537/vm080104
13. Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mech. Komp'yut. Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57 (in Russian). DOI: 10.20537/vm160104
14. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 770–778. DOI: 10.1134/S1064230712060081

15. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mech. Komp'yut. Nauki*, 2011, issue 4, pp. 3–8 (in Russian). DOI: 10.20537/vm110401
16. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian).
17. Petrov N.N. About controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian).
18. Chikrii A.A., Matichin I.I. On an analogue of the Cauchy formula for linear systems of any fractional order, *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian).

Received 01.10.2017

Bichurina Alena Igorevna, Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru