УДК 519.766.2

© *Ю. М. Сметанин*

ВЕРИФИКАЦИЯ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

В статье рассматриваются приложения универсальной силлогистики (логики L_{S_2}) с областью интерпретации, задаваемой алгебраической системой с опорным множеством $\Sigma(\Omega)$ — семейством тех подмножеств универсума Ω, которые можно построить с помощью операций $\{\ \cdot,\ +,\ '\ \}$ из модельных множеств $\widetilde{\aleph}_n = \langle \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n \rangle$. В качестве отношений выступают отношения равенства и строгого включения множеств. Иллюстрируется использование неклассической многозначной логики L_{S_2} для решения задачи верификации рассуждений. Показано, что если задача верификации может быть сформулирована с использованием понятий соответствия между множествами, то проверку логического следования можно производить с использованием экстремальных свойств соответствий Галуа и семантических значений формул L_{S_2}. Семантическим значением формулы является одно или многоэлементное семейство конституентных множеств. Предлагаемый подход позволяет значительно уменьшить вычислительную сложность верификации рассуждений по сравнению с алгоритмами, которые применяются для логики предикатов первого порядка. Работа показывает возможности алгебраического подхода, заложенного Аристотелем, Жергонном, Булем, Порецким.

Ключевые слова: логические уравнения, силлогистика, алгебраическая онтология, конституентное множество, алгебраическая система, непарадоксальное логическое следование, булева алгебра, соответствие Галуа.

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-07

Рассматриваются вопросы верификации логического следования в семантическом смысле для неклассической многозначной логики L_{s_2}.

В работе обосновывается, что для некоторых случаев, когда постановка задач верификации рассуждений на естественном языке использует понятие соответствия, можно значительно уменьшить сложность логического вывода. Для этого нужно использовать исчисление конституентных множеств и логику L_{S_2} [1–6].

Атомарные суждения логики (0.1) выражают объемные отношения множеств в универсуме U. Семантика дана равносильностями (0.2)–(0.3).

$$NOB_S = \langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y), X \subset U, X = U \rangle, \tag{0.1}$$

$$A(X,Y) \equiv (X \subset Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U) \equiv G_{13}(X,Y), \tag{0.2}$$

$$Eq(X,Y) \equiv (X = Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U) \equiv G_9(X,Y),$$

$$IO(X,Y) \equiv (X \cdot Y \subset U) \cdot (X \cdot Y' \subset U) \cdot (X' \cdot Y \subset U) \cdot (X' \cdot Y' \subset U) \equiv G_{15}(X,Y). \tag{0.3}$$

Здесь множество $X \cdot Y'$ — пересечение X и дополнения Y' до универсума. Вместо X и Y можно подставить любые правильно построенные формулы (ППФ) $F_1(\widetilde{X}_n), F_2(\widetilde{X}_n)$ алгебры множеств $\widetilde{X}_n = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle$.

На примерах показано, что для логики предикатов с двуместными предикатами верификацию логического следования можно проводить с использованием простых рассуждений в терминах соответствий Галуа. Введено новое понятие — непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле ($\vDash_N$), позволяющее построить логику на основе простых атомарных высказываний (0.1). Семантическим значением формулы в L_{S_2} является семейство множеств из натуральных чисел. NOB_S является альтернативой базису силлогистики Аристотеля — $A_S = \langle AXY, EXY, IXY, OXY \rangle$, категорические суждения которого неоднозначно интерпретируются в 15-ти модельных схемах [7] (смотри рис. 1). Например, в NOB_S общеутвердительное суждение $AXY \equiv$«все X есть Y» для традиционной силлогистики имеет 2 смысла. $AXY \equiv \underbrace{Eq(X,Y)}_{G_9} + \underbrace{A(X,Y)}_{G_{13}}$. Из квадрата Пселла следует, что это же суждение в пятнадцати

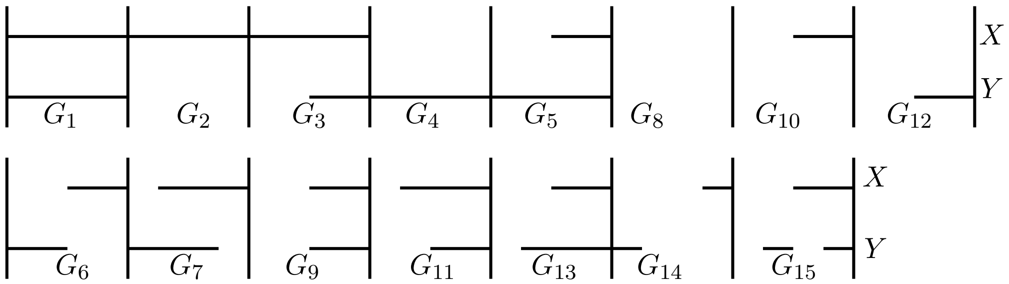

Рис. 1. Модельные схемы, отражающие жергонновы отношения между объемами терминов X, Y

модельных схемах имеет семь смыслов, задаваемых дизъюнкцией попарно несовместных конъюнкций атомов из (0.1):

$AXY \equiv \underbrace{(X = Y)\cdot(X = U)}_{G_1} + \underbrace{(X' = U)\cdot(Y = U)}_{G_4} + \underbrace{(X = Y)\cdot(X' = U)}_{G_8} + \underbrace{Eq(X,Y)}_{G_9} + \underbrace{A(X,Y)}_{G_{13}} +$
$+ \underbrace{(X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot(Y = U)}_{G_5} + \underbrace{(X' = U)\cdot(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)}_{G_{12}}$. В логике L_{S_2} используются три логические операции: отрицание, дизъюнкция и конъюнкция. Из атомарных суждений (0.1) можно составить конъюнкции — конъюнктивные формулы (КФ). Остальные правильно построенные формулы L_{S_2} являются неконъюнктивными формулами (НКФ). Показано, что любая НКФ может быть представлена как дизъюнкция КФ, являющихся попарно противоречивыми. Семантическим значением КФ является множество натуральных чисел либо пустое множество. Семантическим значением НКФ является семейство множеств из натуральных чисел либо пустое множество. В работах [2–4] введено релевантное (непарадоксальное) логическое следование ($\vDash_N$) между ППФ логики L_{S_2} (см. определение 1 из [3]). Согласно ему, из посылки следует следствие только в одном случае, если посылка или следствие не являются законами или противоречиями. Рассматривается верификация $\vDash_N$ в логике L_{S_2} с атомарными суждениями (0.1). В исследования ведущих специалистов по силлогистике (см. обзор в работе [7]) силлогистическая теория традиционно интерпретируется в логике предикатов. Наша работа продолжает новое направление исследования силлогистических теорий — не использующее погружение силлогистики в логику предикатов. Нами на примерах показана интерпретация логики предикатов в L_{S_2}.

Для интерпретации суждений силлогистик традиционно используется модельная схема (0.4), выражающая объемные соотношения между модельными множествами в виде диаграммы Венна (см. рис. 2). При этом логические соотношения между терминами рассуждений, построенных в базисе Аристотеля, выявляются в алгебраической системе (0.6) с одним бинарным отношением (нестрогим включением множеств).

$$M_S = \langle \Omega, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n \rangle, \quad \widetilde{\aleph}_i = \langle \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n \rangle, \tag{0.4}$$

где Ω — универсум, $\aleph_i \subseteq \Omega$ — модельные множества. Число таких схем не более $2^{(2^n)}$. Оно определяется семейством непустых конституент (0.5), составляемых из модельных множеств.

$$\aleph_1{}^{\sigma_1} \cdot \aleph_2{}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot \aleph_n{}^{\sigma_n}, \quad \aleph_i^{\sigma_i} = \begin{cases} \aleph_i, & \sigma_i = 1, \\ \aleph_i{}', & \sigma_i = 0. \end{cases} \tag{0.5}$$

Модельные множества $\widetilde{\aleph}_i$ схемы (0.4) являются элементами носителя алгебраической системы (АС) (0.6).

$$\Lambda = \langle \Sigma(\Omega, \widetilde{\aleph}_n), \{\ \cdot,\ +,\ '\ \}, \{\subseteq\} \rangle. \tag{0.6}$$

Носителем $\Sigma(\Omega, \widetilde{\aleph}_n)$ является семейство подмножеств универсума Ω, которые можно построить из модельных множеств $\aleph_i \subseteq \Omega$ в алгебре множеств. Удобство использования этой АС, в частности, в том, что по теореме Стоуна имеет место изоморфизм с моделью (0.7), лежащей в основе традиционной логики высказываний с вырожденной булевой алгеброй:

$$\lambda = \langle \sigma(\omega, \tilde{x}_n), \quad \{\ \cdot,\ +,\ \prime\ \},\ \{\leqslant\}\rangle, \quad \omega = \{1\}, \quad x_i \in \omega, \quad i = \overline{1,n}. \tag{0.7}$$

Недостатком является многосмысловость интерпретации суждений. В данной работе этот недостаток устранен за счет использования модели (1.1) на основе из конституентных множеств с двумя отношениями, $\subset$ и $=$. Морфизм в форме гомоморфизма с вырожденной моделью (0.7) устанавливается также с помощью характеристической функции множества $\aleph \subseteq \Omega$:

$$\forall e \in \Omega \quad \left(\chi(\aleph) = \begin{cases} 1, e \in \aleph \\ 0, e \notin \aleph \end{cases}\right), \quad x_i = \chi(\aleph_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

В работе [8] дается синтаксическая интерпретация категорических суждений, в которой символам общих имен посредством некоторой функции $\delta(\aleph)$, $\aleph \subseteq \Omega$ ставится в соответствие формула логики высказываний; таким образом, используется грубая модель с вырожденной булевой алгеброй. Это подтверждает правильность нашего подхода [1–6], в котором категорическим атрибутивным суждениям NOB_S и ППФ логики L_{S_2} алгоритмически ставится в соответствие формула алгебры множеств (множества являются конституентными, см. определение 1.1 из § 1). Семантическим значением формулы является конституентное множество либо семейство конституентных множеств.

Интенсиональной моделью для категорических суждений NOB_S и конъюнктивных ППФ L_{S_2} в нашем подходе является А-онтология — дискретный аналог модельной схемы (см. определение 1.2), преимуществом которой является ее представление конечным конституентным множеством. Несомненным достоинством подхода на основе невырожденной булевой алгебры является то, что построенная силлогистическая теория является универсальной, имеет синтаксическую экстенсиональную интерпретацию в виде формулы алгебры множеств, экстенсиональную интерпретацию в виде конституентного множества, вычисляемого по формуле. Таким образом, схема интерпретации алгоритмически разрешима. Предлагаемый подход иллюстрируется разнообразными приложениями, в частности возможностью построения логики соответствий как альтернативы логике предикатов.

Кроме того, в А-онтологии, как модели понятия неаристотелевого типа, четко разграничиваются логические и фактические объемы и содержание понятий посредством разграничения возможности и необходимости непустоты конституентного множества. Поэтому нет коллизий между интенсиональной и экстенсиональной семантикой. Например, высказывание «Некоторые клоуны являются долларовыми миллиардерами» с точки зрения обеих семантик является истинным, если его трактовать с точки зрения невозможности, возможности и необходимости. Таким образом безусловно истинным будет следующее суждение: «Невозможно, что некоторые клоуны являются долларовыми миллиардерами, или возможно, что некоторые клоуны являются долларовыми миллиардерами, или необходимо, что некоторые клоуны являются долларовыми милиардерами». Эти случаи различимы в А-онтологии, причем в первом множество пересечение клоунов и миллиардеров пусто. Необходимость модального истолкования таких утверждений отметил Маркин В. И. [9].

§ 1. Исчисление конституентных множеств

Область интерпретации ППФ L_{S_2} построена из образов n-арных модельных схем вида (0.4).

Определение 1.1. Набор $\mathbf{M}$ непустых конституент схемы (0.4) называется в [1] ее *характеристическим множеством.* Модельное множество равно объединению некоторых конституент из $\mathbf{M}$. Это множество можно задать множеством номеров конституент (конституентным множеством).

Таким образом, универсум Ω и модельные множества можно рассматривать как множества из номеров конституент, составляющих $\mathbf{M}$ (*конституентные множества*). Нумерацию естественно производить, зафиксировав порядок индексов модельных множеств. При этом каждой

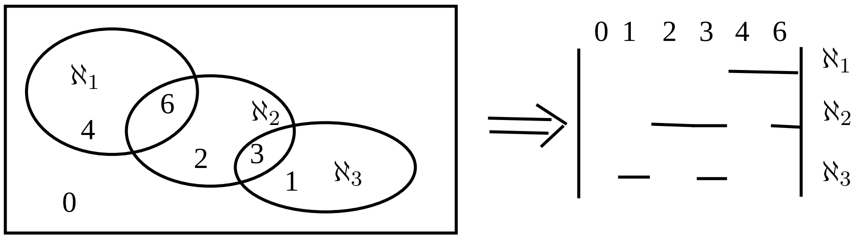

Рис. 2. Преобразование модельной схемы в А-онтологию

конституенте (0.5) сопоставляется набор из нулей и единиц $\langle\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\rangle$ и соответствующее ему десятичное число, которое будем называть номером конституенты (см. рис. 2). Рассмотрим модель для представления n-арной модельной схемы. Обозначим через $B(\widetilde{X}_n)$ семейство из всех конституентных подмножеств универсума, которые могут быть построены из конечной системы $\widetilde{X}_n = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle$ конституентных множеств модельной схемы (0.4) посредством операций объединения, пересечения и дополнения до универсума. Семейство $B(\widetilde{X}_n)$ включает также конституентное множество-универсум (U) и пустое множество. Рассмотрим алгебраическую систему (АС) (1.1), где W_F=$\{+, \cdot, '\}$, W_R=$\{=, \subset\}$ [1],

$$\langle B(\widetilde{X}_n), \quad \mathrm{W}_F, \quad \mathrm{W}_R\rangle. \tag{1.1}$$

Модельной схеме (0.4) однозначно сопоставляется кортеж

$$I_n = \langle U, X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle, \tag{1.2}$$

выражающий ее через конституентные множества универсума и модельных множеств. Например, для рис. 2 $I_3 = \langle U = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}, X_1 = \{4, 6\}, X_2 = \{2, 3, 6\}, X_3 = \{1, 3\}\rangle$.

О п р е д е л е н и е 1.2. *Единицей* M *АС* (1.1) называется множество номеров ее непустых конституент $M = U$. Нулем называется множество $N = U^0 \setminus M$, $U^0 = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Конституентные множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$ также будем называть *модельными.* Кортеж (1.2) будем называть *алгебраической онтологией* (*А-онтологией*).

А-онтология $I_n^0 = \langle U^0, X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0\rangle$; $M(I_n^0) = U^0$ называется *канонической*, если $U^0 = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Все конституенты соответствующей ей модельной схемы непусты (см. рис. 4). Будем называть модельную схему для канонической А-онтологии I_n^0 *отношением независимости в совокупности* ее модельных множеств.

З а м е ч а н и е 1. АС (1.1) с занумерованными модельными множествами задается А-онтологией (1.2), которая является формой, выражающей n-арную модельную схему (0.4)[2].

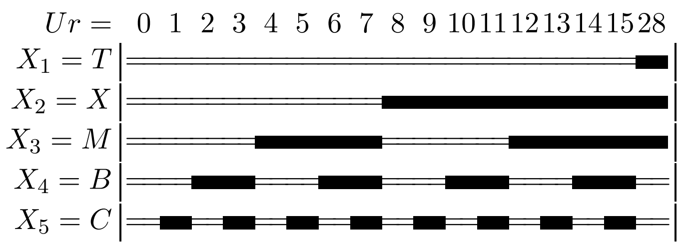

Рис. 3. Контекст понятия «тигры»: $T \subset X \cap M \cap B' \cap C'$

Например, высказывание «все тигры хищные млекопитающие, не живущие в воде и не приспособленные к жизни в условиях Крайнего Севера» — $A(T, X \cdot M \cdot B' \cdot C')$ представляется

[1] $\mathrm{W}_F = \{+, \cdot, '\}$ — операции объединения, пересечения, дополнения до универсума алгебры множеств.

[2] Наглядно А-онтологию будем изображать в виде линейной диаграммы (см. рис. 2, 4, 5).

А-онтологией на рис. 3. Она иллюстрирует его неаристотелевское строение [10]. Достоинством такой модели понятия является то, что оно содержит контекст (хотя и ограниченный); ему можно сопоставить алгоритм вычисления объема по логическому содержанию. Алгоритмическая составляющая этих понятий проиллюстрирована в [6]. Контекст понятия можно изменять.

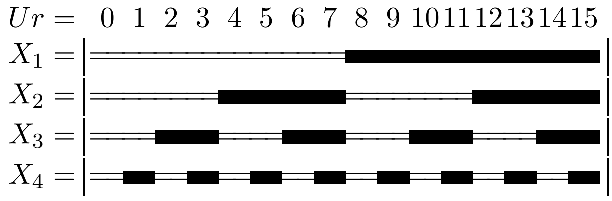

Рис. 4. Каноническая А-онтология для $n = 4$

Множество всех бинарных отношений между модельными множествами для заданной А-онтологии I_n будем называть *полным бинарным инвариантом,* $BIN(I_n)$ [4]. Конъюнкцию составленную из бинарных отношений, входящих в $BIN(I_N)$, обозначим как $FBIN(I_n)$. Для сокращения $FBIN(I_n)$ из $n \cdot (n-1)/2$ бинарных отношений, составляющих $BIN(I_n)$, будем опускать $IO(X_i, X_j)$-отношения независимости пары модельных множеств. Каждому BIN соответствует не менее одной А-онтологии. *Максимальной* среди них называется та, которая имеет единицу с наибольшим числом номеров конституент. Добавление к ее единице любого не входящего в нее номера выводит эту А-онтологию из данного BIN (см. рис. 3, 5).

Замечание 2. Логическое содержание максимальной А-онтологии I_n выражается ее $FBIN(I_n)$. Логическое содержание немаксимальной А-онтологии с данным BIN выражается конъюнкцией суждений ее BIN в совокупности с суждениями NOB_S, выражающими пустоту констиуент, которые не входят в данную А-онтологию по сравнению с максимальной. Бинарный инвариант $BIN = \{A(X_1', X_2);\ IO(X_1, X_2);\ A(X_1', X_4);\ A(X_2', X_3');\ IO(X_2, X_3);\ A(X_3, X_4)\}$ определяет две А-онтологии, одна из которых максимальная (см. рис. 5). Легко проверить, что $FBIN$ для немаксимальной А-онтологии с этого рисунка выражаются КФ $F(\widetilde{X}_4) = A(X_1', X_2) \cdot A(X_1', X_4) \cdot A(X_2', X_3) \cdot A(X_3, X_4) \cdot \big((X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot X_4)' = U\big)$.

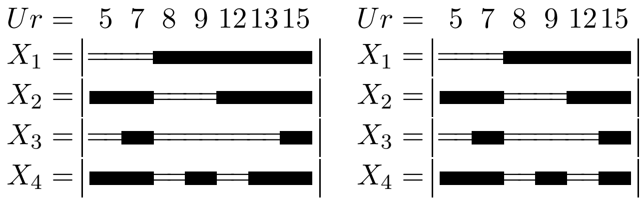

Рис. 5. Две А-онтологии и их $FBIN = A(X_1', X_2) \cdot A(X_1', X_4) \cdot A(X_2', X_3) \cdot A(X_3, X_4)$

Единица А-онтологии I_n позволяет выразить модельную схему (0.4) в виде атомарного суждения $F(\widetilde{X}_n) = M(I_n)$, называемого далее МЛ-уравнением, здесь $F(\widetilde{X}_n)$ — ППФ алгебры множеств, равносильная совершенной нормальной форме Кантора $SNFK$, сопоставляемой $M(I_n)$.

Например, максимальная А-онтология рис. 5 представляется как МЛ-уравнения с левой частью в форме $SNFK(FBIN(\widetilde{X}_4))$ (1.3) либо равносильной ей ППФ, $X_1 \cdot {X_3}' + X_2 \cdot X_4 = U$.

$$\begin{aligned} &{X_1}' \cdot X_2 \cdot {X_3}' \cdot X_4 + {X_1}' \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 + X_1 \cdot {X_2}' \cdot {X_3}' \cdot {X_4}' + \\ &+ X_1 \cdot X_2' \cdot {X_3}' \cdot X_4 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3' \cdot {X_4}' + X_1 \cdot X_2 \cdot {X_3}' \cdot X_4 + \\ &+ X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 = U. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Изменять А-онтологии позволяет исчисление конституентных множеств (см. теоремы 1.1, 1.2).

Т е о р е м а 1.1. *Для А-онтологии I_n с n модельными множествами X_i и универсумом $U(I_n)$ выполняются соотношения*

$$M = \bigcap_{i \in N} D(i'), \quad i' = 2^n - i - 1, \quad X_i = U(I_n) \cdot X_i^0 = M(I_n) \cdot X_i{}^0, \quad i = 1, n, \tag{1.4}$$

X_i^0 — модельные множества канонической А-онтологии.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно заметить, что $D(i') = U^0 \backslash \{i\}$. Здесь $U^0 = M(I_n^0)$ — единица канонической А-онтологии. $D(i') = K(i)'$, $i' = 2^n - 1$, — i-дизституента, двойственная i-й конституенте. Принцип нумерации дизституент такой же, как у конституент. $K(2)' = (X_1' \cdot X_2 \cdot X_3')' = D(5) = X_1 + X_2' + X3$. □

Из соотношения (1.4) теоремы 1.1 следует, что объемы модельных множеств А-онтологии I полностью определяются ее единицей $M(I)$.

Теорема 1.2 позволяет последовательно вводить в исходную А-онтологию бинарные отношения (суждения NOB_S), если они в ней отсутствуют.

Т е о р е м а 1.2. 1. *Чтобы ввести в n-арную А-онтологию отношение $X \subset U$, достаточно добавить к ее единице хотя бы одну конституенту с номером из конституентного множества $X\ ' = U^0 \setminus X$, где U^0 — универсум n-арной канонической А-онтологии.*
2. *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X = U$, необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами из конституентного множества $X\ ' = U \setminus X$.*
3. *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X \subset Y$, необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами, образующими конституентное множество $X \cdot Y\ '$.*
4. *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $X = Y$, необходимо и достаточно убрать из нее все конституенты с номерами, образующими контситуентное множество $X\ ' \cdot Y + X \cdot Y\ '$.*
5. *Чтобы ввести в А-онтологию отношение $IO(X, Y)$, достаточно добавить в нее хотя бы по одному номеру из конституентных множеств $X\ ' \cdot Y\ '$, $X\ ' \cdot Y$, $X \cdot Y\ '$, $X \cdot Y$, которые являются в ней пустыми.*

Справедливость теоремы доказывается рассмотрением ее утверждений для всех пятнадцати бинарных модельных схем.

На основе теорем 1.1 и 1.2 разработан M-алгоритм, использующий утверждения 2–4 теоремы 1.2, для вычисления А-онтологии $I(Q)$ сопоставленной конъюнкции Q суждений (0.1) [1,3,4] и ее единицы $M(I(Q))$.

С л е д с т в и е 1.1. *Доказано, что А-онтология, получаемая по M-алгоритму для случаев* 2–4 *теоремы* 1.2, *является максимальной по числу номеров непустых конституент.*

Т е о р е м а 1.3. *Имеет место функциональная полнота атомарных суждений* (0.1), *то есть любая А-онтология может быть выражена КФ в L_{S_2}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того чтобы представить единицу любой А-онтологии I как КФ логики L_{S_2}, достаточно записать ее $FBIN$ и найти $M(FBIN(I))$, используя теорему 1.2. Получится максимальная А-онтология с данным BIN. Если исходная А-онтология не совпадает с максимальной, необходимо достроить $FBIN$ до КФ $FBIN \cdot D(i_1') \cdot D(i_2') \cdot \ldots \cdot D(i_k')$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = M(FBIN(I)) \setminus M(I)$. Тогда согласно теореме 1.1

$$M\big(I\big) = M\big(FBIN \cdot D(i_1') \cdot D(i_2') \ldots \cdot D(i_k')\big)$$

□

Например, для того, чтобы выразить логическое содержание правой А-онтологии на рис. 5 в $FBIN$, нужно добавить множитель $D(2) = U$, который утверждает пустоту конституенты $K(13)$, $13' = 2^4 - 13 - 1 = 2$, $D(2) = (X_1' + X_2' + X_3 + X_4') = U$.

Рассмотрим совершенную нормальную форму Кантора

$$SNFK(\widetilde{X}_n) = \bigcup_{i \in M(I_n) \subset \{0,1,2,\ldots,2^n-1\}} \mathbf{K}(i),$$

построенную по единице $M(I_n)$ неканонической А-онтологии I_n. Все ППФ алгебры множеств $F_i(\widetilde{X}_n)$ такие, что $F_i(\widetilde{X}_n) \equiv SNFK(\widetilde{X}_n)$, $i = \overline{1,m}$, образуют класс эквивалентности. Из них можно составить m МЛ-уравнений вида

$$F_i(\widetilde{X}_n) = U,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{1.5}$$

О п р е д е л е н и е 1.3. Класс эквивалентности из левых частей (1.5) называется *общим решением*, определяющим все равносильные следствия любого МЛ-уравнения из (1.5).

Частными решениями называются его нетождественные следствия (МЛ-уравнения), которые неравносильны исходному и несут только часть его логического содержания[3].

А-онтологии I_n можно сопоставить МЛ-уравнение $SNFK(M(I_n)) = U$. Выразим равносильное ему МЛ-уравнение через нуль: $N(I_n) = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\} \setminus M(I_n)$ — дизъюнкцию пустых конституент.

О п р е д е л е н и е 1.4. $M(I_n) = U^0 \setminus N(I_n)$ можно представить в виде конъюнкции утверждений (1.6) из суждений (0.1).

$$\big(D(i'_1) = U\big) \cdot \big(D(i'_2) = U\big) \cdot \ldots \cdot \big(D(i'_k) = U\big), \tag{1.6}$$

где $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = N(I_n)$, $i'_j = 2^n - 1 - i_j$; $j = \overline{1,k}$. Здесь j-й «множитель» конъюнкции (1.6) выражает множество $U \setminus \{i_j\}$. Утверждение (1.6) равносильно утверждению (1.7).

$$\bigcap_{i \in N(I_n)} D(i') = U, \tag{1.7}$$

где $i' = 2^n - i - 1$. Левая часть этого равенства выражает единицу А-онтологии I.

$$M(I_n) = \bigcap_{i \in N(I_n)} D(i').$$

Левую часть (1.7) назовем *канонической формой логического содержания А-онтологии I_n*.

Имеет место теорема 1.4 [3–5].

Т е о р е м а 1.4. *Логическое содержание А-онтологии I_2 $Log(I_2)$ является частью логического содержания А-онтологии I_1 $Log(I_1)$ тогда и только тогда, когда их единицы (объемы универсумов) находятся в соотношении $M(I_1) \subseteq M(I_2)$. При этом строгое включение выполняется только тогда, когда*

$$\big(Log(I_1) \vDash_N Log(I_2)\big) \cdot \big(Log(I_2) \nvDash Log(I_1)\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из сравнения логических содержаний I_1 и I_2, представленных в каноническом виде. □

Теорема 1.4 позволяет проверять, является ли данное МЛ-уравнение частным решением МЛ-уравнения с таким же числом переменных. Для проверки, является ли МЛ-уравнение $F_2(\widetilde{X}_m) = U$ следствием МЛ-уравнения $F_1(\widetilde{X}_n)$ в случае, когда $(\widetilde{X}_n)$ и $(\widetilde{X}_m)$ являются несовпадающими, их приводят к одной системе модельных множеств.

В [1,4] указан способ вычисления всех выполняющих подстановок для равенства $F(\widetilde{x}_n) = 1$, где $F(\widetilde{x}_n)$ ППП алгебры логики, за счет вычисления единицы соответственного МЛ-уравнения $F(\widetilde{X}_n) = U$. Указан способ эффективного распараллеливания алгоритма вычислений [4].

Разработана программа для вычисления единиц $M(I_n(Q))$ по логическому содержанию КФ Q, выраженному конъюнкцией атомарных суждений из (0.1) для $n \leqslant 22$. Арность используемых модельных схем можно значительно увеличить за счет распараллеливания вычислений.

Далее каждой конъюнктивной ППФ логики L_{S_2} ставится в соответствие множество номеров непустых конституент, которое называется семантическим значением этой ППФ. Каждому множеству конституентных номеров соответствует одна модельная схема.

[3]Логическое содержание можно выразить различными способами, например как $FBIN(I_n)$.

§ 2. Неклассическая многозначная логика L_{S_2} с интерпретацией семантических значений ППФ в конституентных множествах

На основе жергонновых отношений, конечной канонической А-онтологии I_n^0 и семейства модельных множеств $\widetilde{X}_n$ и NOB_S построена многозначная логика $L_{S_2}(I^0(\widetilde{X}_n))$ (пропозициональная) (далее — просто L_{S_2}). А-онтологию I_n^0 будем называть сопряженной с $L_{S_2}(I^0(\widetilde{X}_n))$.

Определение 2.1. *Конъюнктивными базовыми суждениями* (*базовыми конъюнктами*) в логике L_{S_2} являются суждения 1–5:
1) $F(\widetilde{X}_n) = U$; 2) $F(\widetilde{X}_n) \subset U$; 3) $A(F(\widetilde{X}_n), \Phi(\widetilde{X}_n))$; 4) $Eq(F(\widetilde{X}_n), \Phi(\widetilde{X}_n))$; 5) $IO(F(\widetilde{X}_n), \Phi(\widetilde{X}_n))$.
Для удобства записи посылок введем *неконъюнктивные суждения* 6–8.
6) $F(\widetilde{X}_n) = \Phi(\widetilde{X}_n)$; 7) $F(\widetilde{X}_n) \subset \Phi(\widetilde{X}_n)$; 8) $F(\widetilde{X}_n) \neq \varnothing$.

Конъюнкции суждений 1–5, выражающие жергонновы отношения с рис. 1, разрешается записывать с использованием обозначений этих отношений как $G_k(X_i, X_j)$, $k = \overline{1, 15}$. Базовые конъюнкты есть ППФ в L_{S_2}. *Конъюнктивными ППФ* (*КФ*) логики называются базовые конъюнкты и конъюнкции базовых конъюнктов. Все остальные ППФ, удовлетворяющие условиям 1–4, называются *неконъюнктивными формулами* (*НКФ*). Следовательно:
(1) если Q есть ППФ, то $(Q)'$ (читается как «неверно, что Q») есть НКФ;
(2) если Q_1 или Q_2 есть (НКФ), то $(Q_1 \cdot Q_2)$ и $(Q_1 + Q_2)$ тоже НКФ;
(3) суждения 6, 7, 8 есть НКФ;
(4) НКФ, построенных по другим правилам нет.

Сопряженная с логикой каноническая А-онтология, составленная из n модельных множеств, называется областью интерпретации. ППФ логики интерпретируется в области интерпретации, посредством вычисления Sem(ППФ) — ее семантического значения, а также путем вычисления значения ее выполнимости и выполнимости в совокупности с другими ППФ.

Определение 2.2. *Семантическим значением КФ Q логики L_{S_2}* называется единица максимальной А-онтологии $M(I(Q))$, при условии, что в этой максимальной онтологии все утверждения, соответствующие базовым конъюнктам из Q, выполняются. Если не выполняется хотя бы одно из этих утверждений, то тогда семантическим значением является пустое множество.

Определение 2.3. Если А-онтология содержит все логическое содержание КФ Q, то *Q в этой онтологии имеет значение выполнимости «истина»*, в противном случае Q имеет в этой А-онтологии *значение выполнимости «ложь»*.

Из определений 2.2 и 2.3 следует, что любой КФ Q можно сопоставить ее семантическое значение и значение выполнимости в некоторой А-онтологии. Пусть Set_Q — семейство КФ:

$$Set_Q = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\},$$

их конъюнкция может быть противоречива, то есть иметь пустую единицу:

$$M(I((Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots, \cdot Q_n))) = \varnothing. \tag{2.1}$$

Это означает, что не существует А-онтологии (возможного мира), в которой содержалось бы все логическое содержание конъюнкции $Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n$, при этом могут существовать А-онтологии, в которых содержится логическое содержание одной отдельной или нескольких подформул из (2.1). Это означает, что КФ семейства несовместны в совокупности.

Определение 2.4. КФ семейства $Set_Q = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ называются *совместными в совокупности*, если $M(Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots, \cdot Q_n) \neq \{\varnothing\}$. Иначе КФ семейства являются *несовместными в совокупности.* При этом КФ $\Theta = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_n$ и каждой из входящих в него КФ Q_i приписывается значение выполнимости, при совместной интерпретации, «истина». КФ из семейства несовместных в совокупности конъюнктов присваивается значение выполнимости, при совместной интерпретации, «ложь».

О п р е д е л е н и е 2.5. КФ, единица которой есть пустое множество, является *противоречием.* КФ, не являющаяся противоречием или законом, является *выполнимой формулой.*

О п р е д е л е н и е 2.6. КФ Q_1 и Q_2 называются *равносильными*, если их семантические значения совпадают после приведения их к одной системе модельных множеств, например, к системе модельных множеств, сопряженной с логикой канонической А-онтологии. Равносильность будем обозначать традиционным способом: $Q_1 \equiv Q_2$.

О п р е д е л е н и е 2.7. КФ Q_1 и Q_2 называются *ортогональными*, если их конъюнкция имеет пустое семантическое значение. Ортогональность будем обозначать как $Q_1 \perp Q_2$. КФ из некоторого семейства называются ортогональными в совокупности, если они попарно ортогональны.

П р и м е р 2.1. КФ Q_1, Q_2 равносильны.
$Q_1 = A(S, Y+G) \cdot A(Y\,', X' + G\,') \cdot A(X, S+G) \cdot A(G\,', S+X) \cdot A(X, (Y \cdot S\,' \cdot G)')$;
$Q_2 = Eq(G \cdot X' + S \cdot Y, U)$. Проверка производится вычислением $M(I(Q_i))$, $i = 1, 2$.

Т е о р е м а 2.1. *Любая неконъюнктивная ППФ логики L_{S_2} представляется как дизъюнкция попарно ортогональных конъюнкций, составленных из базовых конъюнктов* (*ДОКБК*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из определения базовых конъюнктов и способа построения ППФ и равносильностей логики L_{S_2}. □

О п р е д е л е н и е 2.8. *Семантическим значением* ППФ логики L_{S_2} называется набор конституентных множеств Sem(ППФ), составленный по правилу 1.

Правило 1 (правило построения семантического значения).
Этап 1. Привести ППФ к виду ДОКБК.
Этап 2. Вычислить все семантические значения конъюнктов составляющих ДОКБК.
Этап 3. Составить Sem(ППФ), из различных семантических значений вычисленных в п. 2.

О п р е д е л е н и е 2.9. НКФ называется *противоречием*, если ее семантическое значение является пустым. То есть все конъюнкты в ее представлении в виде ДКБК имеют пустое семантическое значение. НКФ есть *закон*, если ее семантическое значение состоит из семейства конституентных множеств, каждый член которого является универсумом некоторой канонической А-онтологии. Все остальные НКФ называются *выполнимыми.*

П р и м е р 2.2. Пример противоречия:
$$G_5(X,Y) \cdot G_{13}(X,Y) \cdot \Big((X = U) + G_5(Y,Z)\Big) \equiv$$
$$\equiv \underbrace{G_5(X,Y) \cdot G_{13}(X,Y) \cdot (X = U)}_{(\underline{X \subset U}) \cdot (X' \subset U) \cdot (\underline{X = U})} + \underbrace{G_5(X,Y) \cdot G_{13}(X,Y) \cdot G_5(Y,Z)}_{(\underline{Y = U}) \cdot (\underline{Y \subset U}) \cdot (Y' \subset U) \cdot (Z = U)}.$$
Пример закона:
$$Sem\Big(IO(X,Y) \cdot (IO(Y,Z) \cdot IO(X,T)\Big) = \{0, 1, \ldots, 2^4 - 1\}.$$

Исключая выполнение одной из пятнадцати модельных схем, мы утверждаем выполнение одной из четырнадцати оставшихся. В работе [7] это утверждение названо законом исключенного шестнадцатого. Нельзя провести аналогию с законом исключенного третьего, так как ППФ $G_1(X,Y) + G_2(X,Y) + G_3(X,Y) + G_4(X,Y) + G_5(X,Y) + G_6(X,Y) + G_7(X,Y) + G_8(X,Y) + G_9(X,Y) + G_{10}(X,Y) + G_{11}(X,Y) + G_{12}(X,Y) + G_{13}(X,Y) + G_{14}(X,Y) + G_{15}(X,Y)$ является выполнимой формулой в логике L_{S_2}.

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Для базовых конъюнктов* (1)–(2)[4] *из определения* 2.1 *имеют место равносильности* 1 *и* 2.

1. $(X = U)' \equiv X \subset U$;

[4] Эти конъюнкты следует интерпретировать в трех модельных схемах с одним модельным множеством и непустым универсумом: $X = \varnothing$, $X = U$, $(X \neq \varnothing) \cdot (X \neq U)$ и $X = U \equiv \Big((X = \varnothing) + (X \neq \varnothing) \cdot (X \neq U)\Big)'$.

2. $(X \subset U)' \equiv (X = U)$[5].

Пусть $G_{k_1}(X,Y)$, $G_{k_2}(X,Y)$, $G_{k_3}(X,Y)$, $G_{k_4}(X,Y)$, $G_{k_5}(X,Y)$, $G_{k_6}(X,Y)$, $G_{k_7}(X,Y)$, $G_{k_8}(X,Y)$, $G_{k_9}(X,Y)$, $G_{k_{10}}(X,Y)$, $G_{k_{11}}(X,Y)$, $G_{k_{12}}(X,Y)$, $G_{k_{13}}(X,Y)$, $G_{k_{14}}(X,Y)$, $G_{k_{15}}(X,Y)$ *— жергонновы отношения между* X *и* Y. *Они выражаются ортогональными в совокупности базовыми конъюнктами из определения* 2.1. *Имеют место соотношения* 3–5.

3. $(G_{k_i}(X,Y) \cdot G_{k_j}(X,Y))' \equiv G_{k_i}(X,Y)' + G_{k_j}(X,Y)' \equiv G_1(X,Y) + G_2(X,Y) + G_3(X,Y) + G_4(X,Y) + G_5(X,Y) + G_6(X,Y) + G_7(X,Y) + G_8(X,Y) + G_9(X,Y) + G_{10}(X,Y) + G_{11}(X,Y) + G_{12}(X,Y) + G_{13}(X,Y) + G_{14}(X,Y) + G_{15}(X,Y)$, $i \neq j$. *Таким образом, отрицание противоречия не есть закон в логике* L_{S_2} *(см. определение* 2.9*).*

4. $G_{k_1}(X,Y)' \equiv G_{k_2}(X,Y) + G_{k_3}(X,Y) + G_{k_4}(X,Y) + G_{k_5}(X,Y) + G_{k_6}(X,Y) + G_{k_7}(X,Y) + G_{k_8}(X,Y) + G_{k_9}(X,Y) + G_{k_{10}}(X,Y) + G_{k_{11}}(X,Y) + G_{k_{12}}(X,Y) + G_{k_{13}}(X,Y) + G_{k_{14}}(X,Y) + G_{k_{15}}(X,Y)$.

5. $(G_{k_1}(X,Y) + G_{k_2}(X,Y))' \equiv G_{k_1}(X,Y)' \cdot G_{k_2}(X,Y)' \equiv \Big(G_{k_3}(X,Y) + G_{k_4}(X,Y) + G_{k_5}(X,Y) + G_{k_6}(X,Y) + G_{k_7}(X,Y) + G_{k_8}(X,Y) + G_{k_9}(X,Y) + G_{k_{10}}(X,Y) + G_{k_{11}}(X,Y) + G_{k_{12}}(X,Y) + G_{k_{13}}(X,Y) + G_{k_{14}}(X,Y) + G_{k_{15}}(X,Y)\Big)$.

Имеет место равносильность 6 *и аналогичные равносильности, состоящие из* $G_{k_i}(X,Y)$.

6. $(G_{k_1}(X,Y) + G_{k_2}(X,Y) + G_{k_3}(X,Y))' \equiv G_{k_1}(X,Y)' \cdot G_{k_2}(X,Y)' \cdot G_{k_3}(X,Y)' \equiv \Big(G_{k_4}(X,Y) + G_{k_5}(X,Y) + G_{k_6}(X,Y) + G_{k_7}(X,Y) + G_{k_8}(X,Y) + G_{k_9}(X,Y) + G_{k_{10}}(X,Y) + G_{k_{11}}(X,Y) + G_{k_{12}}(X,Y) + G_{k_{13}}(X,Y) + G_{k_{14}}(X,Y) + G_{k_{15}}(X,Y)\Big)$.

Пусть Q_1, Q_2 *— КФ, тогда имеют место равносильности* 7–11.

7. $Q_1 \equiv Q_2 \models_N Q_1 \cdot Q_2 \equiv Q_1$.

8. $Q_1 \perp Q_2 \models_N M(I(Q_1 \cdot Q_2)) = \varnothing$.

9. $Q_1 \perp Q_2 \not\models M(I(Q_1)) \cdot M(I(Q_2)) = \varnothing$.

Пусть КФ Q_1 *— закон и КФ* Q_2 *— выполнимая формула, тогда справедливо утверждения* 10–11.

10. $Q_1 \cdot Q_2$ *— выполнимая формула либо противоречие. Например, если* $Q_1 = IO(X_1, X_2) \cdot IO(X_2, X_3) \cdot IO(X_1, X_3)$ *и* $Q_2 = A(X_1, X_2)$, *то* $Q_1 \cdot Q_2$ *— противоречие.*

11. Q_1 *— противоречие* $\models_N$, $Q_1 \cdot Q_2$*-противоречие.*

Равносильности 3–6 *выражают закон исключенного шестнадцатого* [7]. *Равносильности* 7–11 *— свойства законов и противоречий.*

Равносильности 12–16 *дают способ приведения ППФ к дизъюнкции ортогональных конъюнктов из базовых конъюнктов ДОКБК.*

12. $Q_1 + Q_2 \equiv Q_1 \cdot Q_2 + Q_1' \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_2' \equiv (Q_1' \cdot Q_2')'$.

13. $Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3' + Q_1 \cdot Q_2' \cdot Q_3 + Q_1' \cdot Q_2 \cdot Q_3 + Q_1 \cdot Q_2' \cdot Q_3' + Q_1' \cdot Q_2' \cdot Q_3 + Q_1' \cdot Q_2 \cdot Q_3' \equiv (Q_1' \cdot Q_2' \cdot Q_3')'$.

14. $(Q_1 + Q_2)' \equiv Q_1' \cdot Q_2'$.

15. $(Q_1 + Q_2 + Q_3)' \equiv Q_1' \cdot Q_2' \cdot Q_3'$.

16. $(Q_1 \cdot Q_2)' \equiv Q_1' + Q_2' \equiv Q_1 \cdot Q_2' + Q_1' \cdot Q_2 + Q_1' \cdot Q_2'$.

Доказательство равносильностей очевидно следует из их событийной интерпретации. Например, равносильность 12 формулируется в виде следующих утверждений:

1) значение выполнимости «истина» для НКФ $Q_1 + Q_2$ имеет место тогда и только тогда, когда значение выполнимости «истина» имеет в точности одна из КФ либо обе;

2) значение выполнимости «истина» для НКФ $Q_1 + Q_2$ имеет место тогда и только тогда, когда значение выполнимости «ложь» имеет формула $Q_1' \cdot Q_2'$, что равносильно по смыслу тому, что значение выполнимости «истина» имеет только конъюнкт Q_1, либо Q_2, либо оба. То есть $Q_1 + Q_2 \equiv Q_1 \cdot Q_2 + Q_1' \cdot Q_2 + Q_1 \cdot Q_2' \equiv (Q_1' \cdot Q_2')'$. Из этого следует также, что $(Q_1 + Q_2)' \equiv Q_1' \cdot Q_2'$. Вторая часть утверждения 2 равносильна по смыслу второй части утверждения 1. Это доказывает равносильности 12 и 14.

[5]Равносильность означает, что в случае, когда значение выполнимости (в том числе значение выполнимости в совокупности с другими конъюнктами) левой части принимает значение «истина» либо «ложь», точно такое же значение принимает конъюнкт в правой части.

Докажем одну из равносильностей 4.

$$
\begin{gathered}
G_1(X,Y)' \equiv [(X=U)\cdot(Y=U)]' \equiv \\
\equiv (X=U)'\cdot(Y=U)+(X=U)\cdot(Y=U)'+(X=U)'\cdot(Y=U)' \equiv \\
\equiv (X\subset U)\cdot(Y=U)+(X=U)\cdot(Y\subset U)+(X\subset U)\cdot(Y\subset U) \equiv \\
\equiv [(X'=U)+(X\subset U)\cdot(X'\subset U)]\cdot(Y=U)+(X=U)\cdot[(Y'=U)+(Y\subset U)\cdot(Y'\subset U)]+ \\
+[(X'=U)+(X\subset U)\cdot(X'\subset U)]\cdot[(Y'=U)+(Y\subset U)\cdot(Y'\subset U)] \equiv \\
\equiv \underbrace{(X'=U)\cdot(Y=U)}_{G_4}+\underbrace{(X\subset U)\cdot(X'\subset U)\cdot(Y=U)}_{G_5}+\underbrace{(X=U)\cdot(Y'=U)}_{G_2}+ \\
+\underbrace{(X=U)\cdot(Y\subset U)\cdot(Y'\subset U)}_{G_3}+\underbrace{(X'=U)\cdot(Y'=U)}_{G_8}+\underbrace{(X'=U)\cdot(Y\subset U)\cdot(Y'\subset U)}_{G_{12}}+ \\
+\underbrace{(X\subset U)\cdot(X'\subset U)\cdot(Y'=U)}_{G_{10}}+\underbrace{(X\subset U)\cdot(X'\subset U)\cdot(Y\subset U)\cdot(Y'\subset U)}_{G_6+G_7+G_9+G_{11}+G_{13}+G_{14}+G_{15}} \equiv \\
\equiv G_2(X,Y)+G_3(X,Y)+G_4(X,Y)+G_5(X,Y)+G_6(X,Y)+G_7(X,Y)+G_8(X,Y)+ \\
+G_9(X,Y)+G_{10}(X,Y)+G_{11}(X,Y)+G_{12}(X,Y)+G_{13}(X,Y)+G_{14}(X,Y)+G_{15}(X,Y).
\end{gathered}
$$

П р и м е р 2.3. Семантическое значением НКФ:
$G_{13}(G\cdot S,X)\cdot(G+S=U)+G_9(X,Y)$; выражено семейством конституентных множеств приведенным ниже:

$$
\begin{aligned}
Sem = \Big\{ & \underbrace{\{4,7,8,11,15\}}_{1},\underbrace{\{\varnothing\}}_{2}\underbrace{\{3,7,11,12\}}_{3},\underbrace{\{3,7,11,12,15\}}_{4},\underbrace{\{0,4,8,15\}}_{5}, \\
& \underbrace{\{0,3,4,7,8,12,15\}}_{6},\underbrace{\{0,3,4,7,8,11,12\}}_{7},\underbrace{\{0,3,4,7,8,11,12,15\}}_{8}, \\
& \underbrace{\{0,3,4,7,8,11,15\}}_{9},\underbrace{\{5,7,9,11,15\}}_{10},\underbrace{\{0,3,47,8,11\}}_{11},\underbrace{\{5,6,9,10,14\}}_{12}, \\
& \underbrace{\{5,6,7,9,10,11,14,15\}}_{13},\underbrace{\{4,6,8,10,14\}}_{14},\underbrace{\{4,6,7,8,10,11,14,15\}}_{15}, \\
& \underbrace{\{4,5,7,9,9,11,15\}}_{16},\underbrace{\{4,5,6,7,8,9,10,11,14,15\}}_{17},\underbrace{\{4,5,6,8,9,10,14\}}_{18}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Вычисления проводились по правилу 1 с помощью программы для вычисления единицы КФ.

О п р е д е л е н и е 2.10. *Непарадоксальным логическим следствием в логике L_{S_2} ($G \vDash_N B$)* называется отношение между ДОКБК посылки $G = g_1 + g_2 + \ldots + g_m$ и ДОКБК заключения $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, при котором каждое МЛ-уравнение $g_i = U,\ i = \overline{1,m}$, составленное из КФ посылки, имеет частное решение, выраженное хотя бы одним из МЛ-уравнений $b_j = U$, $j = \overline{i,n}$ составленных из конъюнктов заключения. При этом *детализацией логического следования $G \vDash_N B$* назовем список

$$SL = \langle (g_1, Sle_{g_1}),\ (g_2, Sle_{g_2}), \ldots, (g_m, Sle_{g_m})\rangle,$$

где Sle_{g_i} — непустое множество КФ заключения, МЛ-уравнения которых являются следствием (частным решением) МЛ-уравнения $g_i = U$.

Логическое содержание КФ Q можно выразить канонической формой логического содержания (1.6) А-онтологии $I(Q)$, сопоставленной семантическому значению Q, поэтому справедлив аналог теоремы 1.4.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть конъюнктивные ППФ Q_1 и Q_2 — выполнимые КФ. Тогда*

$$Q_1 \vDash_N Q_2 \equiv M(Q_1) \subseteq M(Q_2),$$

причем равенство $M(Q_1) = M(Q_2)$ имеет место, только когда $Q_1 \equiv Q_2$.

Построена неклассическая, многозначная, конструктивная, пропозициональная логика L_{S_2}, в которой выполняется тождество закон шестнадцатого для 15 модельных схем.

Для выявления семантического значения ППФ и значения выполнимости (выполнимости в совокупности), а также следования $\vDash_N$ между ППФ посылки и следствия применяются правило 1, теорема 2.2 и разработанный на основе теоремы 1.2 M-алгоритм, реализованный программно [4].

Построенная прикладная силлогистика, являющаяся обобщением построенного П. С. Порецким исчисления равенств, помимо прочих достоинств, является модельно полной.

§ 3. Соответствие Галуа

Рассмотрим соответствие Галуа, следуя работе [11].

Соответствие R между множествами $X \subseteq U_X$ и $Y \subseteq U_Y$ есть любое подмножество их декартова произведения, обозначается как (R, X, Y) или $R(X, Y)$. Для конечных множеств соответствия задаются как бинарные отношения. Все соответствия $R(X, Y)$ образуют алгебру Буля с нулем в виде пустого множества и единицей в виде $X \times Y$.

Определение 3.1. Множество $D_R(X) = \{x \in X | \exists y \in Y \langle x, y\rangle \in R\}$ называется областью определения для R, а множество $B_R(Y) = \{y \in Y | \exists x \in X \langle x, y\rangle \in R\}$ — *областью значений для соответствия* R. Также R называется *полностью определенным*, если $D_R(X) = X$, иначе — *частично определенным*. Говорят, что $R(X, Y)$ *сюръективно*, если $B_R(Y) = Y$.

Определение 3.2. Пусть задано соответствие $R(X, Y)$. Если $\langle x, y\rangle \in R$, то элемент $y \in Y$ называют *образом элемента* $x \in X$ *по соответствию* R, а элемент x — *прообразом элемента* y *по соответствию* R. Обозначается как $y = R(x)$, $x = R^*(y)$.

Определение 3.3. Для каждого элемента $x \in X$ множество

$$\mathrm{Im}_R x = \begin{cases} \{y \in Y | \langle x, y\rangle \in R\}, \\ \varnothing, \forall y \in Y \langle x, y\rangle \notin R \end{cases}$$

называется *полным образом элемента* x *по соответствию* R. Для каждого $y \in Y$ множество

$$\mathrm{Coim}_R y = \begin{cases} \{x \in X | \langle x, y\rangle \in R\}, \\ \varnothing, \forall x \in X \langle x, y\rangle \notin R \end{cases}$$

называется *полным прообразом* y *по соответствию* R.

Определение 3.4. Пусть $R(X, Y)$ — соответствие, $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$. Множество $R(A) = \{R(a) \in B | a \in A\}$ называется *образом множества* A *в множестве* B *по соответствию* R. Множество$R^*(B) = \{R^*(b) \in A | b \in B\}$ называется *прообразом множества* B *в множестве* A *по соответствию* R. Также X называют *областью отправления*, а Y — *областью прибытия*.

Образ $R(X) = B_R(Y) \subseteq Y$, а прообраз $R^*(Y) = D_R(X) \subseteq X$.

Определение 3.5. Каждое соответствие $R(X,Y)$ определяет *соответствие Галуа между подмножествами множества* X *и множества* Y. Соответствие Галуа для $R(X, Y)$ каждому подмножеству $A \subseteq X$ сопоставляет множество $B = R(A) = \bigcup\limits_{x \in A} \mathrm{Im}_R x \subseteq Y$, $R(\varnothing) = \varnothing$. Обозначим соответствие Галуа как $Gl_R(X, Y) = \{\langle A, B\rangle | A \subseteq X, B = \bigcup\limits_{x \in A} \mathrm{Im}_R x \subseteq Y\}$. *Сопряженное к* R *соответствие* R^* каждому подмножеству $B \subseteq Y$ сопоставляет множество $A = R^*(B) = \bigcup\limits_{y \in B} \mathrm{Coim}_R y \subseteq X$.

Определение 3.6. Соответствие $R(X, Y)$ называется *функциональным*, если любой элемент из X или не имеет образов, или имеет единственный образ по R. То есть

$$(\langle x, y_1\rangle \in R) \cdot (\langle x, y_2\rangle \in R) \vDash_N (y_1 = y_2).$$

Соответствие $R(X,Y)$ называем *инъективным*, если любой элемент из области прибытия Y или не имеет прообразов, или имеет единственный прообраз по R в области отправления X. То есть

$$(\langle x_1, y\rangle \in R)\cdot(\langle x_2, y\rangle \in R) \vDash_N (x_1 = x_2).$$

Соответствие $R(X,Y)$ называется *сюръективным* (см. определение 3.1), если любой элемент y из области прибытия $y \in Y$ имеет непустой прообраз: $\forall y \in Y\ \mathrm{Coim}_R y \neq \varnothing$.

Из определения 3.6 вытекает, что соответствие, сопряженное к всюду определенному соответствию, является сюръективным. Соответствие, сопряженное к сюръективному, всюду определено. Соответствие, сопряженное к функциональному, является инъективным. Соответствие, сопряженное инъективному, является функциональным.

Определение 3.7. Соответствие Галуа, сопоставленное сюръективному и полностью определенному соответствию $R(X^0, Y^0) = R(X,Y)$, где $X^0 = R^*(Y)$, $Y^0 = R(X)$ называется *каноническим соответствием Галуа* на основе соответствия $R(X,Y)$. Каноническое соответствие Галуа на основе соответствия $R(X,Y)$ является полностью определенным. Обозначим каноническое соответствие Галуа как $Gl^0_R(X,Y) = \{\langle A,B\rangle\,|A \subseteq X^0, B = \bigcup\limits_{x\in A} \mathrm{Im}_R x \subseteq Y^0\}$. Таким образом, $Gl^0_R(X,Y) = Gl_R(R^*(Y), R(X))$.

Из определения 3.7 следует справедливость утверждения 3.1

Утверждение 3.1. *Пусть $Gl^0_R(X,Y) = Gl_R(X^0,Y^0)$ — каноническое соответствие Галуа на основе соответствия $R(X,Y)$. В силу сюръективности и полной определенности соответствия $R(X^0,Y^0) = R(R^*(X), R(Y)); R(X^0,Y^0) \subseteq R(X,Y)$ для любого непустого множества $Y \in 2^{Y^0}$ существует непустое множество $X \in 2^{X^0}$ такое, что $R^*(Y) = X$ и $R(X) = Y$. Поэтому каноническое соответствие Галуа $Gl^0_R(X,Y)$ на основе соответствия $R(X,Y)$ является полностью определенным и сюръективным.*

Введем отношение $<$ строгого частичного порядка порядка на элементах соответствия Галуа $Gl_R(X,Y)$, порождаемого произвольным соответствием $R(X,Y)$.

Определение 3.8. Пусть $\langle X_1,Y_1\rangle$, $\langle X_2,Y_2\rangle \in Gl_R(X,Y)$, тогда пары $\langle X_1,Y_1\rangle$, $\langle X_2,Y_2\rangle \equiv (X_1 \subset X_2)$ *находятся в отношении строгого частичного порядка* $\langle X_1,Y_1\rangle < \langle X_2,Y_2\rangle$ тогда и только тогда, когда $(X_1 \subset X_2)$. Очевидно, что $\langle X_1,Y_1\rangle < \langle X_2,Y_2\rangle \vDash_N Y_1 \subseteq Y_2$.

Частично упорядоченное, по отношению $<$, множество $Gl^0_R(X,Y) = Gl_R(X^0,Y^0)$ имеет верхнюю грань $\langle X^0,Y^0\rangle$ и нижнюю грань $\langle\varnothing,\varnothing\rangle$.

Полностью определенное и сюръективное соответствие $R(X^0,Y^0)$, определяющее каноническое соответствие Галуа, для соответствия $R(X,Y)$ является экстремальным среди всех других соответствий $R(\hat X,\hat Y) = R(X,Y)$, $X^0 \subseteq \hat X \subset U_1$; $Y^0 \subseteq \hat Y \subset U_2$. Для каждого из этих соответствий, совпадающих по объему с $R(X,Y)$, выполняются равенства $R(\hat X) = Y^0$ и $R^*(\hat Y) = X^0$.

Определение 3.9. Полностью определенное и сюръективное соответствие $R(X^0,Y^0)$, определяющее каноническое соответствие Галуа (см. определение 3.7), для соответствия $R(X,Y)$ называется *минимальным соответствием, совпадающим с* $R(X,Y)$, или *минимальным соответствием для* $R(X,Y)$.

Утверждения 3.2, 3.3 следуют из введенных выше определений 3.1, 3.3, 3.4.

Утверждение 3.2. *Для соответствия $R(X,Y) \subseteq U_1 \times U_2$ имеют место утверждения* 1–4.

1. $R(X,Y) = R\big(R^*(Y), R(X)\big)$.
2. $R(X,Y) \neq \varnothing \vDash_N R\big(R^*(Y), R(X)\big) \neq \varnothing$.
3.

$$\big(R(U_1,Y) \neq \varnothing\big)\cdot\big(R^*(Y) = U_1\big) \vDash_N \Big(\forall\ \varnothing \subset X \subseteq U_1\ \big(R(X, R(X)) \neq \varnothing\big)\Big)\cdot\langle X, R(X)\rangle \in Gl^0_R(U_1, Y).$$

4.

$$\big(R(X,U_2)\neq\varnothing\big)\cdot\big(R(X)=U_2\big)\vDash_N$$
$$\Big(\forall\ \varnothing\subset Y\subseteq U_2\ \ R(R^*(Y),Y)\neq\varnothing\Big)\cdot\langle R^*(Y),Y\rangle\in Gl^0_R(X,U_2).$$

У т в е р ж д е н и е 3.3. *Пусть $R(X,Y)\neq\varnothing\subseteq U_1\times U_2$ — произвольное соответствие. Пусть $R(X^0,Y^0)$ — минимальное соответствие для $R(X,Y)$ и $Gl^0_R(,X,Y)$ — каноническое соответствие Галуа для $R(X,Y)$. Пусть*

$$Gl^0_R(X,Y)=Gl_R(X^0,Y^0)=\{\langle\hat{X_0},\hat{Y_0}\rangle,\langle\hat{X_1},\hat{Y_1}\rangle,\dots,\langle\hat{X_m},\hat{Y_m}\rangle\},$$

где $\langle\hat{X_0},\hat{X_1},\dots,\hat{X_m}\rangle$ — все возможные подмножества множества X^0, $m=2^{X^0}$, $\hat{X_0}=\varnothing$ и $\hat{X_m}=X^0$, а $\hat{Y_i}=R(\hat{X_i})$. Тогда $\forall\ i\neq 0\ R(\hat{X_i})\neq\varnothing$ (см. утверждение 3.1).

Понятие соответствия Галуа и его свойства позволяют вычислять непарадоксальное логическое следование в семантическом смысле посредством исчисления конституентных множеств и интерпретации рассуждений логики предикатов в терминах соответствий.

§ 4. Примеры верификации логического следования

Ниже на примерах показано, что верификация логического следования посредством исчисления конституентных множеств и соответствий Галуа может служить альтернативой методу резолюций и методу аналитических таблиц.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим пример из работы [12]. Пусть требуется доказать, что справедлива импликация $A\equiv p\cdot(p\Rightarrow q)\cdot(s\Rightarrow t)\cdot(t\Rightarrow w)\Rightarrow w$. Через U обозначим, универсум, моделируемый конституентным множеством. Модельные множества есть P, Q, S, T, W. Пусть $F_1(p,q,s,t,w)=p\cdot(p\Rightarrow q)\cdot(s\Rightarrow t)\cdot(t\Rightarrow w)$ есть посылка, а заключение есть $F_2(p,q,s,t,w)=w$. Будем верифицировать $F_1\vDash_N F_2$. Исключим импликацию $p\cdot(p\Rightarrow q)\cdot(s\Rightarrow t)\cdot(t\Rightarrow w)\equiv F_1(p,q,s,t,w)=p\cdot(p'+q)\cdot(s'+t)\cdot(t'+w)$. Проверим, имеет ли место $F_1=1\vDash_N C=1$. Для этого перейдем к соответственным МЛ-уравнениям, которые являются ППФ логики L_{S_2}, и найдем единицы $P\cdot(P'+Q)\cdot(S'+T)\cdot(T'+W)=U$ и $(W=U)$. Для верификации $\vDash_N$ применим теорему 1.4:

$$\begin{aligned}&M(P\cdot(P'+Q)\cdot(S'+T)\cdot(T'+W)=U)=\{24,25,27,31\}\not\subseteq\\&\not\subseteq\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31\}=(W=U).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Соотношение (4.1) показывает, что импликация A не является тавтологией. При этом констиуента с номером 24 не содержится в единице предполагаемого заключения, $\{24\}\notin$ $\notin M(W=U)$. Чтобы заключение имело место, достаточно добавить к посылке утверждение о пустоте этой конституенты. $K(24)=P\cdot Q\cdot S'\cdot T'\cdot W'=\varnothing\equiv D(7)=P'+Q'+S+T+W=U$. Таким образом, доказано, что $p\cdot(p\Rightarrow q)\cdot(s\Rightarrow t)\cdot(t\Rightarrow w)\cdot(p'+q'+s+t+w)\Rightarrow w$.

П р и м е р 4.2. Проблема Гилмора (Gilmore problem). Пусть требуется доказать логическое следование:

$$\forall x\exists y\Big[\underbrace{[\{F(y)\to G(y)\}\leftrightarrow F(x)]}_{1}\,\&\,\underbrace{[\{F(y)\to H(y)\}\leftrightarrow G(x)]}_{2}\,\&$$
$$\&\ \underbrace{\Big[[\{F(y)\to G(y)\}\to Y(y)]\leftrightarrow H(x)\Big]}_{3}\Big]\vDash_N\forall z\{F(z)\&G(z)\&H(z)\}.$$

Выразим эту общезначимую формулу в логике L_{S_2}. Для этого перейдем в базис **и** $(\cdot)$ **или** $(+)$ **не** $(')$, то есть избавимся от операций импликации и эквиваленции.

$$\forall x\,\exists y\,\Big[\underbrace{[\big(F(y)'+G(y)\big)\cdot F(x)+F(y)\cdot G(y)'\cdot F(x)']}_{1}\cdot$$
$$\cdot\underbrace{[\big(F(y)'+H(y)\big)\cdot G(x)+F(y)\cdot H(y)'\cdot G(x)']}_{2}\cdot$$
$$\cdot\underbrace{[[\big(F(y)'+G(y)\big)\cdot H(y)+F(y)\cdot G(y)'\cdot H(x)']]}_{3}\Big]\vDash_N \forall z\{F(z)\cdot G(z)\cdot H(z)\}$$

И наконец:

$$\forall x\,\exists y\,\Big[[\big(F(y)'+G(y)\big)\cdot F(x)+F(y)\cdot G(y)'\cdot F(x)'=1]\cdot$$
$$\cdot[\big(F(y)'+H(y)\big)\cdot G(x)+F(y)\cdot H(y)'\cdot G(x)'=1]\cdot$$
$$\cdot\,[[\big(F(y)'+G(y)\big)\cdot H(y)+F(y)\cdot G(y)'\cdot H(x)']]=1\Big]\vDash_N \forall z\{F(z)\cdot G(z)\cdot H(z)=1\}.$$

Равносильное утверждение имеет вид:

$$\forall x\,\exists y\,\Big[[\big(F(y)'+G(y)\big)\cdot F(x)+F(y)\cdot G(y)'\cdot F(x)']\cdot$$
$$\cdot[\big(F(y)'+H(y)\big)\cdot G(x)+F(y)\cdot H(y)'\cdot G(x)']\cdot$$
$$\cdot\,[[\big(F(y)'+G(y)\big)\cdot H(y)+F(y)\cdot G(y)'\cdot H(x)']]=1\Big]\vDash_N \forall z\{F(z)\cdot G(z)\cdot H(z)=1\}.$$

Подготовительная работа для представления исходного утверждения в виде конъюнктивной формулы логики L_{S_2} проделана. Получим конъюнктивную ППФ логики L_{S_2}, выражающую исходное утверждение. Для этого необходимо заменить предикаты одноименными модельными множествами F, G, H и ввести в рассмотрение еще одно непустое одно- или многоэлементное модельное множество Y, существование которого предопределено квантором существования. Операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания между одноместными предикатами заменяются операциями пересечения, объединения и дополнения до универсума между сопоставленными с ними модельными множествами. Равенство единице заменяется на равенство универсуму. Имеет место однозначное соответствие между формулами булевой алгебры в базисе $\langle\cdot,+,'\rangle$ и формулами алгебры множеств $F(\widetilde{x}_n)\rightleftarrows F(\widetilde{X}_n)$, при выполнении условий $X_i\subseteq U$, $i=\overline{1,n}$, и $\forall e\in U\Big(x_i=\begin{cases}1, e\in X_i\\ 0, e\notin X_i\end{cases}\Big)$, которое требует, чтобы булевы переменные $\widetilde{x}_n$ являлись характеристическими функциями модельных множеств $\widetilde{X}_n$, где $\widetilde{x}_n=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle\rightleftarrows\widetilde{X}_n=$ $=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle$. Также имеет место соответствие $F(\widetilde{x}_n)=1\rightleftarrows F(\widetilde{X}_n)=U$.

Все одноместные предикаты, входящие в область действия квантора всеобщности, заменяем на соответствующие модельные множества: кванторы всеобщности убираем. Все одноместные предикаты $P(y)$, входящие в область действия квантора существования, связывающие переменную y, заменяются формулой $Y\cdot P(x)$. В результате получим конъюнктивную ППФ логики L_{S_2}, выражающую исходное утверждение, в виде:

$$(Y\subseteq U)\cdot\Big(\Big[[\big(Y\cdot F'+Y\cdot G\big)\cdot F+Y\cdot F\cdot G'\cdot F']\cdot[\big(Y\cdot F'+Y\cdot H\big)\cdot G+$$
$$+Y\cdot F\cdot H'\cdot G']\cdot[\big(Y\cdot F'+Y\cdot G\big)\cdot Y\cdot H+Y\cdot F\cdot Y\cdot G'\cdot H']\Big]=U\Big)\vDash_N\{F\cdot G\cdot H\}=U.$$

Раскроем круглые скобки и проведем некоторые тривиальные преобразования.

$$(Y\subseteq U)\cdot\Big(\Big[[\underbrace{Y\cdot F'\cdot F}_{\varnothing}+Y\cdot G\cdot F+\underbrace{Y\cdot F\cdot G'\cdot F'}_{\varnothing}]\cdot[Y\cdot F'\cdot G+Y\cdot H\cdot G+Y\cdot F\cdot H'\cdot G']\cdot$$
$$\cdot\big[Y\cdot F'\cdot H+Y\cdot G\cdot H+F\cdot Y\cdot G'\cdot H'\big]\Big]=U\Big)\vDash_N\{F\cdot G\cdot H\}=U.$$

Далее,

$$(Y \subseteq U) \cdot \Big(\Big[[Y \cdot G \cdot F] \cdot [Y \cdot F' \cdot G \cdot H + Y \cdot F' \cdot G \cdot H + \varnothing + Y \cdot H \cdot F' \cdot G + \\ + Y \cdot G \cdot H + \varnothing + \varnothing + \varnothing + Y \cdot F \cdot G' \cdot H']\Big] = U\Big) \vDash_N \{F \cdot G \cdot H\} = U.$$

После тривиальных преобразований имеем $(Y \subseteq U) \cdot \Big(Y \cdot G \cdot F \cdot H = U\Big) \vDash_N \big(F \cdot G \cdot H = U\big)$.

Единица посылки $M(F \cdot G \cdot G \cdot Y = U) = \{13\} \subset \{13, 15\} = M(F \cdot G \cdot G = U)$ включена в единицу заключения в случае $Y \subset U$ и совпадает с ней в случае $Y = U$.

П р и м е р 4.3. Некоторые пациенты любят всех докторов. Ни один пациент не любит знахаря. Следовательно, никакой доктор не является знахарем. Формализация этого текста (Васильев С. Н.): $A_1 \cdot A_2 \to B$, где

$$A_1 = \exists x(P(x) \cdot \forall y(D(y) \to L(x, y))),$$
$$A_2 = \forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to L(x, y)')),$$
$$B = \forall x D(x) \to Q(x)'.$$

Рассмотрим верификацию логического следования. Введем в рассмотрение множества P, D, Q (одноименные с одноместными предикатами $P(x)$, $D(x)$, $Q(x)$) и множество V, которое образует вместе с множеством P пару $\langle P, V\rangle \in Gl_L(X, Y)$, где соотношение Галуа построено на соответствии $L(X, Y)$, определяемом предикатом $L(x, y)$ — «любит x y-ка».

$$V = \{y | \forall x(x \in P) \wedge (L(x, y)\}.$$

Таким образом, множество V в данной нотации обозначает множество людей, которых любят пациенты. Очевидно, что вследствие условия A_1 выполняется утверждение $D \subseteq V$: «Все доктора входят в множество тех, кого любят пациенты» (A_1 и $D \subseteq V$ равносильны).

Условие A_2 переформулируем в равносильное $V \subseteq Q\,'$: «Множество тех, кого любят пациенты, не включает знахарей». С помощью теоремы 1.4 формально из утверждений $D \subseteq V$ и $V \subseteq Q\,'$ следует $D \subseteq Q\,'$: «Все врачи не знахари», равносильное B.

А-онтология, выражающая смысл посылки $(D \subset V) \cdot (V \subset Q')$, изображена на рис. 6.

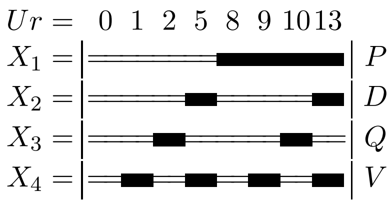

Рис. 6. Семантический смысл посылок задачи о пациентах

Полисиллогизм, соответствующий данной задаче, выраженный НКФ в L_{S_2}, имеет вид

$$[(D \subset V) + (D = V)] \cdot [(V \subset Q') + (V = Q')] \vDash_N [(D \subset Q') + (D = Q')].$$

П р и м е р 4.4. Пример взят из работы [13]. Пусть имеется общий универсум U для всех предметных переменных. Доказать, что имеет место следствие из трех посылок:

$$\forall x\ \exists y\ F(x, y),\ \forall x\ \exists y\ G(x, y),\ \forall x\ \exists y\ F(x, y) + G(x, y) \to \forall z\big(F(y, z) + G(y, z) \to H(x, z)\big) \vDash_N \\ \forall x\ \exists y\ H(x, y).$$

Перепишем в терминах соответствий. Множества Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 являются непустыми подмножествами универсума U.

$$\begin{gathered} \exists Y_1\,(F(U, Y_1) \neq \varnothing) \cdot (D_F(U) = U),\quad \exists Y_2\,(G(U, Y_2) \neq \varnothing) \cdot (D_G(U) = U), \\ \exists Y_3\ \underbrace{F(U, Y_3) + G(U, Y_3) \neq \varnothing}_{A} \to \Big(\underbrace{F(Y_3, U) + G(Y_3, U) \neq \varnothing}_{B} \to \\ \to (H(U, U) \neq \varnothing) \cdot (D_H(U) = U)\Big) \vDash_N \exists Y_4 (H(U, Y_4) \neq \varnothing) \cdot (D_H(U) = U). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Избавимся от одной импликации в третьей посылке.

1. $\exists Y_1\,(F(U,Y_1)\neq\varnothing)\cdot(D_F(U)=U)$.

2. $\exists Y_2\,(G(U,Y_2)\neq\varnothing)\cdot(D_G(U)=U)$.

3. $\exists Y_3\ \underbrace{(F(U,Y_3)+G(U,Y_3)\neq\varnothing)}_{A}\cdot\underbrace{(F(Y_3,U)+G(Y_3,U)\neq\varnothing)}_{B}\rightarrow$

$\rightarrow(H(U,U)\neq\varnothing)\cdot(D_H(U)=U)\vDash_N \exists Y_4(H(U,Y_4)\neq\varnothing)\cdot(D_H(U)=U)$.

Пусть посылки рассуждения (4.2) выполняются. Выполнение условия $\exists Y_4(H(U,Y_4)\neq\varnothing)\cdot$ $\cdot(D_H(U)=U)$ третьей посылки, которое гарантирует выполнение заключения $\exists Y_4(H(U,Y_4)\neq$ $\neq\varnothing)\cdot(D_H(U)=U)$, возможно только в случае, когда выполнены подформулы A и B. Примем $Y_1=F(U)$, $Y_2=G(U)$. Это означает, что соотношения $F(U,Y_1)$ и $G(U,Y_2)$ являются минимальными соответствиями для $F(U,Y_1+Y_2)$ и $G(U,Y_1+Y_2)$ (см. определение 3.9). Поэтому выполнение подформулы A гарантируется выбором $Y_3=Y_1+Y_2$. Это следует из того, что $F(U,Y_3)=F(U,Y_1+Y_2)=F(U,Y_1)\neq\varnothing$ и $G(U,Y_3)=G(U,Y_1+Y_2)=G(U,Y_2)\neq\varnothing$.

Выполнение подформулы B имеет место, так как $F^*(U)=U$ и $G^*(U)=U$, поэтому $F(Y_3,U)=F(Y_3,F(Y_3))$; $\big(D_F(U)=U\big)\vDash_N F(Y_3)\neq\varnothing$, отсюда $F(Y_3)\neq\varnothing$ (см. утверждение 3.3). Точно так же $G(Y_3,U)=G(Y_3,F(Y_3))$; $\big(D_G(U)=U\big)\vDash_N G(Y_3)\neq\varnothing$, отсюда $G(Y_3)\neq\varnothing$. Таким образом, при $Y_3=Y_1+Y_2$ выполняются условия A и B, что гарантирует $H(U,U)\neq\varnothing$. Это, в свою очередь, обеспечивает выполнимость заключения $\exists Y_4 H(U,Y_4)\neq\varnothing$.

П р и м е р 4.5. Задача о паровом катке. Сконструирована специально для испытания метода резолюций. Волки (V), лисицы (L), птицы (P), гусеницы (G) и улитки (U) являются животными, и существует хотя бы один экземпляр каждого из них. Также существует злак (Z), и злаки являются растениями (R). Каждое животное любит есть либо все растения, либо всех травоядных животных, которые намного меньше его. Гусеницы и улитки намного меньше птиц, которые намного меньше лисиц, которые, в свою очередь, намного меньше волков. Волки не любят есть лисиц или злаки, а птицы любят есть гусениц, но не любят улиток. Гусеницы и улитки любят есть некоторые растения. Доказать, что существует животное, которое любит есть животных, поедающих злаки.

Пусть (0) Ur — универсум (растения и животные) — X_0); (1) A — животные —X_1; (2) V — волки — X_2; (3) L — лисицы — X_3; (4) P — птицы — X_4; (5) G — гусеницы — X_5; (6) U — улитки — X_6; (7) R — растения — X_7; (8) Z — злаки — X_8. По смыслу задачи классы животных и растений с заданными выше именами образуют разбиение универсума.

$$(9)\ X_iX_j=\varnothing, j\neq i; i,j=2,6,7; A\,(X_8,X_7), X_2+X_3+X_4+X_5+X_6=X_1.$$

Доказать, что существует животное, которое любит есть животных, поедающих злаки:

$$\exists(x)\exists(y)\exists(z)\exists(t)(x,y,z\in X_1)\cdot(t\in X_8)\cdot(LE(x,y))\cdot(LE(y,z))\cdot(LE(z,t)).$$

С помощью программы, реализующей M-алгоритм построена А-онтология, удовлетворяющую соотношениям объемов указанных классов (см. рис. 7):

(10) $X_1+X_7=X_0$: животные и растения составляют универсум;

$Eq(X_1,X_2+X_3+X_4+X_5+X_6)$: животные — это волки, или лисицы, или птицы, или гусеницы, или улитки;

(11) $A(X_8,X_7)$: злаки являются растениями;

(12) $X_7\cdot X_1={X_0}'$; $X_2\cdot(X_3+X_4+X_5+X_6)={X_0}'$;

$X_3\cdot(X_4+X_5+X_6)={X_0}'$; $X_4\cdot(X_5+X_6)={X_0}'$;

$X_5\cdot X_6={X_0}'$: попарные пересечения видов животных пусты;

(13) $X_7\cdot X_1={X_0}'$: пересечение множеств животных и растений пусто.

Введем в рассмотрение множества X_9–X_{15}, построенные исходя из условий задачи.

(14) $X_9=X_1\cdot{X_2}'$: множество животных меньше волка;

(15) $X_{10}=X_1\cdot X'\cdot{X_3}'$: множество животных меньше лисы;

(16) $X_{11}=X_1\cdot{X_2}'\cdot{X_3}'\cdot{X_4}'$: множество животных меньше птиц;

(17) $X_{12}=(X_1+X_7)\cdot{X_2}'\cdot{X_3}'{X_8}'$: множество растений и животных, которыми любят питаться волки;

Таблица 1. Релевантные пары из Gl_{B_b}

много больше (Bb)	V	L	P	G	U
$X_2 = V$	0	1	1	1	1
$X_3 = L$	0	0	1	1	1
$X_4 = P$	0	0	0	1	1
$X_5 = G$	0	0	0	0	0
$X_6 = U$	0	0	0	0	0

Таблица 2. Релевантные пары из Gl_{L_e}

любит есть (Le)	V	L	P	G	U	$R = X_7$	$Z = X_8$
$X_2 = V$	0	0	1	1	1	1	0
$X_3 = L$	0	0	1	1	1	1	1
$X_4 = P$	0	0	0	1	0	1	1
$X_5 = G$	0	0	0	0	0	1	1
$X_6 = U$	0	0	0	0	0	1	1

(18) $X_{13} = (X_1 + X_7) \cdot X_2{}' X_3{}'$: множество растений и животных, которыми питаются лисицы;

(19) $X_{14} = (X_1 + X_7) \cdot X_2{}' \cdot X_3{}' \cdot X_4{}' X_6{}'$: множество растений и животных, которыми питаются птицы;

(20) $X_{15} = (X_1 + X_7) \cdot X_2{}' \cdot X_3{}' \cdot X_4{}' \cdot X_5{}' \cdot X_6{}'$: множество растений, которыми питаются улитки и гусеницы.

Пусть $Bb(X,Y) \subset X_1^2$ — соответствие, выражающее отношение «быть больше» на множестве животных, и $Le(X,Y) \subset X_0^2$ — соответствие, выражающее отношение «любит есть» на элементах универсума. Каждому из них сопоставляется свое соответствие Галуа. Элементы этого соответствия, релевантные условиям задачи, показаны в таблицах 1, 2.

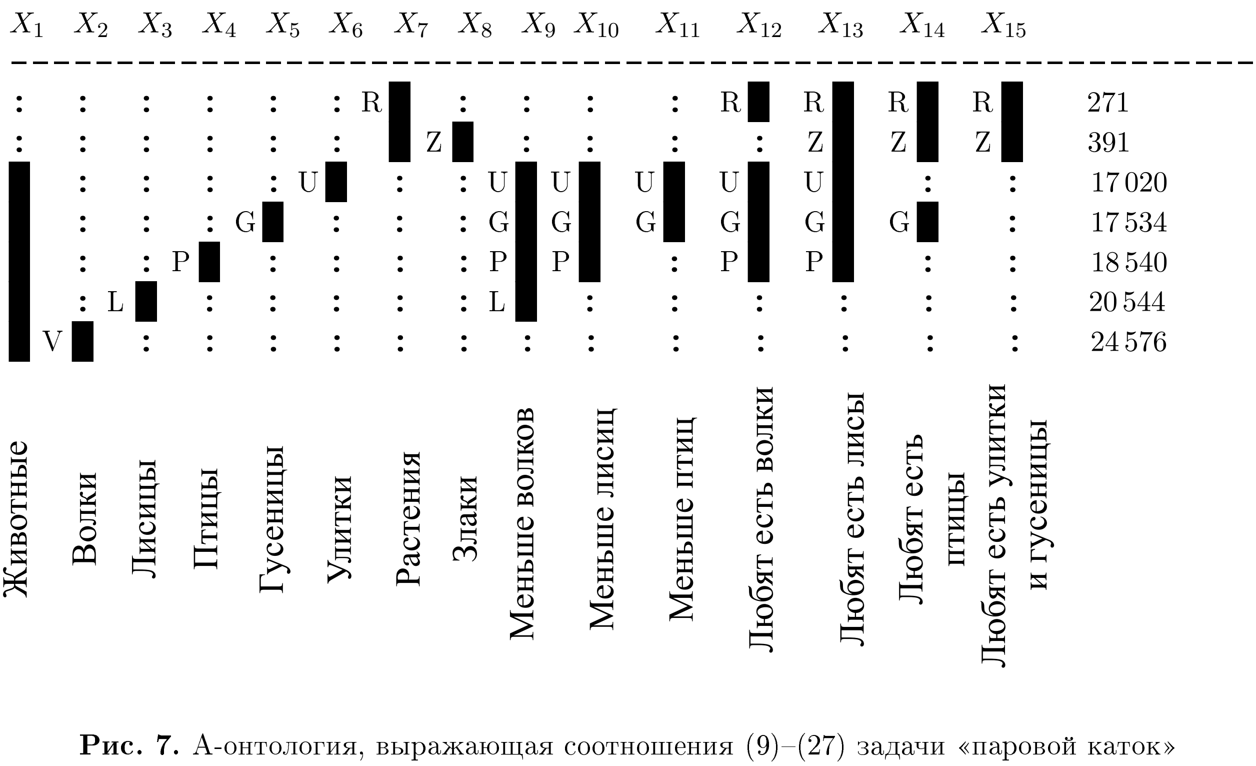

Рис. 7. А-онтология, выражающая соотношения (9)–(27) задачи «паровой каток»

Каждое животное любит есть либо все растения, либо всех травоядных животных, которые намного меньше его. Соответствие Gl_{Bb} отчасти совпадает с Gl_{Le} (см. таблицы 1, 2). Оно включает пары $\langle G, R\rangle$, $\langle G, Z\rangle$, $\langle U, R\rangle$, $\langle U, Z\rangle$, и в нем отсутствуют пары-исключения $\langle V, L\rangle$, $\langle V, Z\rangle$, $\langle P, U\rangle$.

Множества X_9–X_{15} построены. Добавим равенства, определяющие эти множества в А-онтологию (см. рис. 7).

(21) $Eq(X_9, X_1 \cdot X_2{}')$; X_9 — множество животных меньше волков;

(22) $Eq(X_{10}, X_1 \cdot X2' \cdot X_3{}')$; X_{10} — множество животных меньше лисиц;

(23) $Eq(X_{11}, X_1 \cdot X_2{}' \cdot X_3{}' \cdot X_4{}')$; X_{11} — множество животных меньше птиц;

(24) $Eq(X_{12}, (X_1 + X_7) \cdot X_2{}' \cdot X_3{}' \cdot X_8{}')$; X_{12} — множество животных (и растений), которых любят есть волки;

(25) $Eq(X_{13}, (X_1 + X_7) \cdot X_2{}' \cdot X_3{}')$; X_{13} — множество животных и растений, которых любят есть лисы;

(26) $Eq(X_{14}, (X_1 + X_7) \cdot X_2{}' \cdot X_3{}' \cdot X_4{}' \cdot X_6{}')$; X_{14} — множество растений и животных, которых любят есть птицы;

(27) $Eq(X_{15}, X_7)$; X_{15} — множество растений, которых любят есть гусеницы и улитки.

Для решения задачи нужно перебрать пары элементов из таблицы 2 с целью составления хотя бы одной пищевой цепочки вида $\big[\langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, D\rangle\big]$, где A, B, $C \in X_1$ и $D \in X_8$. Такая цепочка существует. Например, «волки (x) любят кушать птиц (y)», «птицы (y) любят кушать гусениц (z)», «гусеницы (z) любят кушать злаки (t)». Этот же результат можно визуально считать с рис. 7.

Список литературы

1. Сметанин Ю.М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 172–185. DOI: 10.20537/vm100418
2. Smetanin Iu. Syllogistical system on the basis of the propositional multivalued logic // 2015 International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP). IEEE, 2015. P. 596–599. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342215
3. Сметанин Ю.М. Многозначная пропозициональная логика с непарадоксальным логическим следованием // Девятые Смирновские чтения по логике: материалы Международной научной конференции. М.: Современные тетради, 2015. С. 36–38.
4. Сметанин Ю.М. Непарадоксальное логическое следование и проблема решения МЛ-уравнений // Программные системы: теория и приложения. 2016. Т. 7. № 1 (28). С. 99–115. http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_99-115.pdf
5. Сметанин Ю.М. Верификация логического следования с использованием исчисления конституентных множеств и соответствий Галуа // Программные системы: теория и приложения. 2017. Т. 8. № 2 (33). С. 69–93. http://psta.psiras.ru/read/psta2017_2_69-93.pdf
6. Сметанин Ю.М., Сметанина Л.П. Логико-семантическая модель для решения задач распознавания и расчета рисков // Вестник Удмуртского университета. Серия Биология. Науки о земле. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 131–141.
7. Бочаров В.А., Маркин В.И. Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.
8. Шалак В.И. Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 1. С. 60–78.
9. Маркин В.И. Силлогистика фактических объемов и логических содержаний понятий // Десятые Смирновские чтения по логике: материалы Международной научной конференции. М.: Современные тетради, 2017. С. 90–93.
10. Финн В.К. О неаристотелевском строении понятий // Логические исследования. 2015. Т. 21. № 1. С. 9–48.
11. Левич А.П. Искусство и метод в моделировании систем: вариационные методы в экологии сообществ, структурные и экстремальные принципы, категории и функторы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 728 с.
12. Васильев С.Н. Метод синтеза условий выводимости хорновских и некоторых других формул // Сибирский математический журнал. 1997. Т. 38. № 5. С. 1034–1046.
13. Вагин В.Н., Зо М.Х. Параллельный вывод в методе аналитических таблиц // Программные продукты и системы. 2011. № 3. С. 8–13.

Поступила в редакцию 01.10.2017

Сметанин Юрий Михайлович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: gms1234gms@rambler.ru

Yu. M. Smetanin
Verification of the logical sequence in nonclassical multivalued logic

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2017, vol. 50, pp. 62–82 (in Russian).

Keywords: logical equations, syllogistic, algebraic ontology, algebraic system, nonparadoxical logical consequence, Boolean algebra, Galois correspondence.

MSC2010: 03B70, 03G25, 03C90

DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-07

The article discusses the use of the proposed nonclassical multivalued logics L_{S_2}. The interpretation of the formulae of this logic is constructed using the algebraic system. $\Sigma(\Omega)$ is a set support, a collection of subsets of the universe Ω. This collection can be created using the operations $\{\ \cdot,\ +,\ '\ \}$ from the model of sets $\tilde{\aleph}_n = \langle \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n \rangle$. This work illustrates the use of multiple-valued logic L_{S_2} to solve the problem of the verification of reasoning. It is shown that if the task of verification can be formulated in terms of a correspondence between sets, then the verification of a logical sequence can be made using the extremal properties of the Galois-correspondence. It is necessary to use semantic values of formulas of L_{S_2}. The semantic value of a formula is a single or multi-element family of constituency sets. The proposed approach allows one to significantly reduce the computational complexity of verification of reasoning in comparison with the algorithms used for the logic of predicates of first order. The paper illustrates the possibility of an algebraic approach laid down by Aristotle, Gergonne, Boole, and Poretsky.

REFERENCES

1. Smetanin Yu.M. Algorithm for solving polisillogizm in the orthogonal basis by calculating the constituent sets, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2010, issue 4, pp. 172–185. DOI: 10.20537/vm100418
2. Smetanin Iu. Syllogistical system on the basis of the propositional multivalued logic, *2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP)*, IEEE, 2015, pp. 596–599. DOI: 10.1109/SCP.2015.7342215
3. Smetanin Iu.M. Multivalued propositional logic with unparadoxical logical consequence, *Devyatye Smirnovskie chteniya po logike: materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Ninth Smirnov Readings on Logic: Proceedings of the International Scientific Conference), Moscow: Sovremennye tetradi, 2015, pp. 36–39 (in Russian).
4. Smetanin Yu.M. Non-paradoxical logical consequence and the problem of solving ML-equations, *Programmnye Sistemy: Teoriya i Prilozheniya*, 2016, vol. 7, no. 1 (28), pp. 99–115 (in Russian). http://psta.psiras.ru/read/psta2016_1_99-115.pdf
5. Smetanin Yu.M. Verification of logical consequence, using the calculus of constituent sets and correspondences of Galois, *Programmnye Sistemy: Teoriya i Prilozheniya*, 2017, vol. 8, no. 2 (33), pp. 69–93 (in Russian). http://psta.psiras.ru/read/psta2017_2_69-93.pdf
6. Smetanin Yu.M., Smetanina L.P. Logical-semantic model for solving problems of pattern recognition and calculation of risks, *Bulletin of Udmurt University. Series Biology. Earth Sciences*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 131–141 (in Russian).
7. Bocharov V.A., Markin V.I. *Sillogisticheskie teorii* (Syllogistic theories), Moscow: Progress-Traditsiya, 2010, 336 p.
8. Shalak V.I. Syntactic interpretation of categorical attributive propositions, *Logicheskie Issledovaniya*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 60–78 (in Russian).
9. Markin V.I. Syllogistics of actual volumes and logical maintenance of concepts, *Desyatye Smirnovskie chteniya po logike: materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Tenth Smirnov Readings on Logic: Proceedings of the International Scientific Conference), Moscow: Sovremennye tetradi, 2015, pp. 90–93 (in Russian).
10. Finn V.K. On the non-Aristotelian structure of concepts, *Logicheskie Issledovania*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 9–48 (in Russian).
11. Levich A.P. *Iskusstvo i metod v modelirovanii sistem: variatsionnye metody v ekologii soobshchestv, strukturnye i ekstremal'nye printsipy, kategorii i funktory* (The art and the method in systems' simulation:

variational methods in community ecology, structural and extremal principles, categories and functors), Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2012, 728 p.
12. Vasil'ev S.N. A method for synthesis of the derivability conditions of the horn and some other formulas, *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, issue 5, pp. 896–906. DOI: 10.1007/BF02673030
13. Vagin V.N., Zo M.Kh. Parallel inference in the method of analytical tables, *Programmnye Produkty i Sistemy*, 2011, no. 3, pp. 8–13 (in Russian).

Received 01.10.2017

Smetanin Yurii Mikhailovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: gms1234gms@rambler.ru