

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
**Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова**  
Российской академии наук

**УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**  
*(конференция Пятницкого)*

Материалы XIV Международной  
научной конференции

*30 мая – 1 июня 2018 г.*

**Москва  
ИПУ РАН  
2018**

**УДК 681.51**  
**ББК 32.96**  
**У81**

**Устойчивость и колебания нелинейных систем управления:**  
Материалы XIV Международной научной конференции (30 мая – 1 июня 2018г., Москва) / [Ред. В.Н. Тхай]. – М.: ИПУ РАН, 2018. – 499 с.  
– ISBN 978-5-91450-214-7.

В научное издание включены материалы XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Рассматриваются вопросы устойчивости, стабилизации, управления, колебаний, нелинейной динамики в различных областях.

Издание предназначено для научных работников и специалистов в области фундаментальной теории управления, теории устойчивости, теории колебаний, прикладных задач управления.

**Утверждено к печати Программным комитетом конференции**

Программный комитет конференции: В. Ажмяков, А.Ю. Александров, И.М. Ананьевский, А.С. Андреев, И.Н. Барабанов, Н.Н. Болотник, С.Н. Васильев, А.В. Карапетян, А.М. Ковалев, А.П. Крищенко, А.Б. Куржанский, Ю.С. Ледаев, Г.А. Леонов, А.А. Мартынюк, Л.Б. Рапопорт, Е.Я. Рубинович, А.А. Тихонов, В.Н. Тхай, Т.Ф. Филиппова, Ф.Л. Черноусько

**Конференция проводится при поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект № 18-01-20029-г)**

# On the Domain of Dependence for Scalar Conservation Laws

*N. I. Pogodaev*

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS,  
Irkutsk, Russia  
npogo@mail.ru

An upper estimate for the domain of dependence of a scalar multi-dimensional conservation law is constructed. This estimate is given by a controllability set of a certain differential inclusion. Its prove is based on the modified version of the classical Kružkov uniqueness theorem.

УДК 517.929.2+517.977

## К свойству пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова систем с дискретным временем

*С. Н. Попова<sup>1</sup>, И. Н. Банщикова<sup>2</sup>*

УдГУ, Ижевск, Россия; ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия<sup>1</sup>

УдГУ, Ижевск, Россия<sup>2</sup>

udsu.popova.sn@gmail.com

Исследуется вопрос о пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова каждой системы, принадлежащей оболочке Бебутова заданной линейной управляемой системы с дискретным временем. Получены условия, обеспечивающие эквивалентность равномерной полной управляемости исходной системы и пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова каждой системы из оболочки Бебутова.

**Ключевые слова:** показатели Ляпунова, задача о назначении спектра, нестационарная система с дискретным временем, равномерная полная управляемость, динамическая система сдвигов

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$(1) \quad x(k+1) = A_0(k)x(k) + B_0(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Будем предполагать, что функция  $B_0(\cdot)$  ограничена на  $\mathbb{N}$ , а  $A_0(\cdot)$  вполне ограничена [1], то есть при каждом  $k$  существует  $A_0^{-1}(k)$ , и найдется такое  $a_0$ , что  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_0(k)\| \leq a_0$ ,  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_0^{-1}(k)\| \leq a_0$ .

Пусть  $X_0(k, s)$  — матрица Коши [2, с. 13–14] соответствующей свободной системы

$$(2) \quad x(k+1) = A_0(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

В исследованиях вопросов управляемости важнейшую роль играет матрица управляемости Калмана, которая при  $k > s$  задается равенством

$$W(k, s) = \sum_{j=k}^{s-1} X_0(k, j+1)B_0(j)B_0^T(j)X_0^T(k, j+1).$$

**Определение 1** ([3, р. 34]). Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся  $\gamma > 0$  и  $K \in \mathbb{N}$  такие, что при всех  $k \in \mathbb{N}$  имеет место неравенство  $W(k, k+K) \geq \gamma E$ .

Систему (1) отождествим с функцией

$$k \mapsto \sigma_0(k) \doteq (A_0(k), B_0(k)) \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}.$$

Обозначим  $\sigma_s(k) \doteq \sigma_0(k+s)$  — сдвиг  $\sigma_0$  на  $s \in \mathbb{N}$  и рассмотрим множество  $\mathfrak{R}(\sigma_0)$  — замыкание множества  $\{\sigma_s(\cdot) : s \in \mathbb{N}\}$  в топологии, порожденной поточечной сходимостью. Метрика в  $\mathfrak{R}(\sigma_0)$  может быть задана равенством  $\rho(\sigma, \hat{\sigma}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \min\{\|\sigma(k) - \hat{\sigma}(k)\|, k^{-1}\}$ . Пространство  $(\mathfrak{R}(\sigma_0), \rho)$  компактно [4, р. 34]. Оно называется *оболочкой Бebutова* системы  $\sigma_0$ .

Каждый элемент  $\sigma(\cdot) \doteq (A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$  отождествим с линейной управляемой системой

$$(3) \quad x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.$$

Замкнем систему (3) линейной обратной связью  $u(k) = U(k)x(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , получим систему

$$(4) \quad x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Замкнутую систему (4) также отождествляем с  $\sigma(\cdot) \doteq (A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ . Будем называть функцию  $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  *матричным управлением* для системы (4). Матричное управление  $U(\cdot)$  называется *допустимым* для системы (4), если матрица коэффициентов  $A(\cdot) + B(\cdot)U(\cdot)$  этой системы вполне ограничена на  $\mathbb{N}$ .

Пусть матричное управление  $U(\cdot)$  допустимо для системы (4). Тогда для этой системы определен полный спектр показателей Ляпунова [2, с. 57]  $\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU)$ , то есть набор показателей Ляпунова нетривиальных решений системы (4) с учетом их кратностей.

**Определение 2.** Полный спектр показателей Ляпунова системы (4) называется *пропорционально локально управляемым*, если существуют такие  $\delta > 0$  и  $\ell > 0$ , что для любого набора чисел  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ , такого, что  $\max_{j=1, \dots, n} |\mu_j - \lambda_j(A)| \leq \delta$ , найдется допустимое для (4) управление  $U(\cdot)$ , удовлетворяющее оценке

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|U(n)\| \leq \ell \max_{j=1, \dots, n} |\mu_j - \lambda_j(A)|$$

и обеспечивающее выполнение равенств  $\lambda_j(A + BU) = \mu_j$  при всех  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Здесь  $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$  — полный спектр показателей Ляпунова свободной системы, то есть системы (4) с нулевым управлением.

**Определение 3.** Система (2) называется *системой с интегральной разделенностью*, если она имеет фундаментальную систему решений  $x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)$ , такую, что при некоторых  $d > 0$ ,  $a > 1$  и всех натуральных  $j < k$  выполнены неравенства

$$\frac{\|x^{i+1}(k)\|}{\|x^{i+1}(j)\|} \geq da^{k-j} \frac{\|x^i(k)\|}{\|x^i(j)\|}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

**Теорема 1.** Пусть (2) — система с интегральной разделенностью. Система (1) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда каждая система  $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$  обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 16-01-00346).

### Список литературы

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.
3. Halanay A., Ionescu V. Time-Varying Discrete Linear Systems: Input-Output Operators, Riccati Equations, Disturbance Attenuation. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1994.

4. *Sell G.R.* Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. London: Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

## **On the Property of Proportional Local Controllability of the Lyapunov Exponents of Discrete-Time Systems**

*S. N. Popova<sup>1</sup>, I. N. Banshchikova<sup>2</sup>*

Udmurt State University, Izhevsk, Russia; Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russia<sup>1</sup>

Udmurt State University, Izhevsk, Russia<sup>2</sup>  
udsu.popova.sn@gmail.com

We investigate the question of the proportional local controllability of the Lyapunov exponents of every system belonging to the Bebutov shell of a given linear control system with discrete time. We have obtained conditions that ensure the equivalence of the uniform complete controllability of a given system and the proportional local controllability of the Lyapunov exponents of each system from the Bebutov shell.

УДК 517.956.45

## **Однозначная слабая разрешимость гиперболической системы с распределенными параметрами на графе**

*В. В. Провоторов*

Воронежский ГУ, Воронеж, Россия  
wwprov@mail.ru

Доказана однозначная разрешимость гиперболической системы в слабой постановке с распределенными параметрами на графе. Общая схема исследования классическая: выбирается функциональное пространство, в котором решается начально-краевая задача и специальный базис для него; для приближений решения задачи устанавливаются априорные оценки типа энергетических неравенств; показывается слабая компактность семейства приближений, единственность и непрерывность решения по исходным данным. Полученные результаты являются основополагающими при исследовании задач оптимального управления колебаниями сетеподобных промышленных конструкций.

**Ключевые слова:** гиперболическая система, распределенные параметры на графе, слабая однозначная разрешимость

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Garziera R.	285	Бутырин С. А.	408 404
Hwang S. S.	118	Волковицкий А. К.	201
Lin C. H.	118	Волокитин Д. А.	363
Su F. -С.	144	Гавриков А. А.	7
Yeh C. -H.	144	Гаджиян В. А.	98
Аверина Т. А.	4	Галяев А. А.	101
Акуленко Л. Д.	7	Гарбуз М. А.	104
Александров А. Ю.	10 13	Гелиг А. Х.	174
Алесова И. М.	16	Генералов А. А.	422
Алферов Г. В.	177	Глазков Т. В.	108
Ананьев Б. И.	20	Глумов В. М.	112 115
Ананьевский И. М.	24	Голуб А. П.	118 104
Анашкин О. В.	27	Голубев А. Е.	108
Андреев А. С.	30	Голубев Ю. Ф.	121 125
Андрианова О. Г.	33	Горовенко П. А.	177
Антипов А. С.	36	Грезина А. В.	128
Антоновская О. Г.	39	Губар А. Е.	131
Ахметзянов А. В.	43	Гусев М. И	271
Баладин Д. В.	50 47	Димова А. С.	134
Банников А. С.	53	Дмитрук А. В.	138
Банщикова И. Н.	339	Долгий Ю. Ф.	141 486
Барabanов И. Н.	57	Досаев М. З.	144
Барсегян В. Р.	60	Дружинина О. В.	148
Батхин А. Б.	63	Елфимов А. Н.	151
Белов А. А.	33	Епифанов Р. Ю.	226
Белова И. А.	67	Желонкина Н. И.	154
Берсенев Н. В.	70	Житкова Е. М.	131
Бильченко Г. Г.	77 73	Завалищн Д. С.	158
Бильченко Н. Г.	77	Зайцев В. А.	161 164
Бирюков Р. С.	47	Зимовщиков А. С.	167
Бойченко В. А.	81	Зиновьев Г. С.	67
Болотник Н. Н.	84	Золотухин Ю. Н.	170
Бортакoвский А. С.	87	Зубер И. Е.	174
Булгакова М. А.	91	Иванов Г. Г.	177
Буре В. М.	264 318	Игумнов Л. А.	181
Буркин И. М.	94	Изместьев И. В.	448

Исанькин М. А.	184	Ложкин А.	264
Ишханян Т. А.	24	Локшин Б. Я.	204
Каледина Е. А.	148	Лысенко П. В.	101
Каленова В. И.	295	Лычагин В. В.	43
Калинин А. И.	187	Лычев С. А.	267
Калитин Б. С.	191	Макаренко А. В.	274
Каменецкий В. А.	194	Малафеев О. А.	277
Канатников А. Н.	197	Маликов А. И.	184 281
Карелин В. В.	151	Мартыненко А. В.	433
Карцев Н. М.	208	Масина О. Н.	148
Каршаков Е. В.	201	Мастерова А. А.	285
Ким И. Г.	164	Матвийчук О. Г.	288
Климина Л. А.	104 204	Мелкумова Е. В.	121
Коган М. М.	50 47	Метрикин В. С.	181
Коньков А. Е.	208 212	Митришкин Ю. В.	208 291
Коренев П. С.	291	Морозов В. М.	295
Корнеев В. А.	84 215	Морозов Ю. В.	298
Королев В. С.	167	Мухарьямов Р. Г.	301
Корянов В. В.	125	Мырзаев Р. С.	439
Костин Г. В.	219 267	Нефедов Г. А.	305
Костоусова Е. К.	222	Никифорова И. В.	181
Котов К. Ю.	170 226	Окунев Ю. М.	308
Кочетков С. А.	229	Омарова У. Ш.	439
Красинский А. Я.	232	Онегин Е. Е.	311
Краснов Д. В.	234	Павлов Б. В.	201
Краснова С. А.	36 237	Пак Э. Е.	395
Крищенко А. П.	241	Панасенко А. Г.	128
Кугушев Е. И.	244	Панкратова Я. Б.	334
Кудашкина И. В.	324	Пантелеев А. В.	314
Кузенков О. А.	247	Парилина Е. М.	318
Кузнецов Е. А.	250	Перегудова О. А.	321 324
Кузнецова О. И.	94	Пестерев А. В.	328
Кулешов А. С.	254	Петров Н. Н.	331
Кумакшев С. А.	257	Петрова М. С.	415
Кумачева С. Ш.	131	Петросян Л. А.	91 334
Курдюков А. П.	476	Погодаев Н. И.	337
Кушнер А. Г.	43	Поляхова Е. Н.	167
Лавринович Л. И.	187	Попова С. Н.	339
Левин М. А.	244	Попова Т. В.	244
Ли Инь	261	Привалова О. Г.	308



Провоторов В. В.	342	Теклина Л. Г.	426
Прохоров А. А.	291	Тимин В. Н.	429
Пучков А. М.	115	Тимофеева Г. А.	433
Рапопорт Л. Б.	346 349	Тимошин С. А.	368
Рассадин Ю. М.	353	Тихонов А. А.	13
Рединских Н. Д.	277	Толкачев Д. Е.	372
Решмин А. И.	356	Томилина Г. А.	131
Решмин С. А.	356 359	Тормагов Т. А.	346
Родионова Д. А.	314	Трофимова И. В.	436
Рукавишникова А. С.	232	Турешбаев А. Т.	439
Румянцев Д. С.	363	Тхай В. Н.	57 442
Рутковский В. Ю.	112	Утина Н. В.	395
Рыбаков К. А.	4	Уткин А. В.	234 445
Палис С.	267	Уткин В. А.	70 445
Сальникова Т. В.	366	Ухоботов В. И.	448
Самсонов В. А.	308	Федюков А. А.	451
Самсонок О. Н.	368 372	Фетисов Д. А.	455
Самыловский И. А.	138	Филиппова Т. Ф.	459
Саурин В. В.	267 375	Халина А. С.	462
Свитова А. М.	170	Хасанова Р. И.	324
Седаков А. А.	379	Хлебников М. В.	466
Седова Н. О.	381	Хрусталёв М. М.	311 462
Селюцкий Ю. Д.	144 285	Хрящев С. М.	469
Сергеев В. С.	385	Царьков К. А.	363 472
Сергеев И. Н.	388	Чайковский М. М.	476
Сесекин А. Н.	154	Черноусько Ф. Л.	479
Симонов П. М.	392	Чжэнь М.	379
Смирнова В. Б.	395	Чэнь Я.	10
Соболев М. А.	170	Шамолин М. В.	482
Соколов Б. В.	436	Шевченко Р. И.	486
Соколов В. Ф.	398	Шинкарьюк А. Г.	353
Соловьев А. С.	115	Шматков А. М.	257
Солодуша С. В.	401	Щенников В. Н.	148
Сомов Е. И.	408 404	Щенникова Е. В.	148
Сомов С. Е.	404	Щербакова Е. В.	98
Сомова Т. Е.	408	Юркевич В. Д.	67 489
Староверова К. Ю.	411	Юрченков А. В.	429 492
Стребуляев С. Н.	415		
Талагаев Ю. В.	418		
Татарников Д. В.	422		