Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Международный институт прикладного системного анализа

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Материалы Международной конференции,
посвященной памяти академика А. В. Кряжимского,
Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г.

SYSTEMS ANALYSIS: MODELING AND CONTROL

Materials of the International Conference
in memory of Academician A. V. Kryazhimskiy,
Moscow, May 31 – June 1, 2018

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
МАКС Пресс
Москва – 2018

УДК 517.9
ББК 22.16
С40

*Конференция проводится при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект 18-01-20021)*

Программный комитет:

Ю. С. Осипов (председатель), *Н. Л. Григоренко* (зам. председателя), *В. И. Максимов* (зам. председателя), *Е. А. Ровенская* (секретарь), *Е. И. Моисеев, М. С. Никольский, А. М. Тарасьев, А. Г. Ченцов*

Организационный комитет:

Н. Л. Григоренко (председатель), *С. М. Асеев* (зам. председателя), *Л. А. Артемьева* (секретарь), *К. О. Бесов, А. И. Смирнов, Н. В. Стрелковский, А. А. Дряженков, С. М. Орлов*

Ответственный редактор *К. О. Бесов*

С40 **Системный анализ: моделирование и управление:** Материалы Международной конференции, посвященной памяти академика А. В. Кряжимского, Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г. / Отв. ред. К. О. Бесов. – Москва : Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук : МАКС Пресс, 2018. – 124 с.

ISBN 978-5-98419-079-4 (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)
ISBN 978-5-317-05838-8 (МАКС Пресс)

В сборнике содержатся материалы докладов, представленных на Международной конференции «Системный анализ: моделирование и управление», посвященной памяти академика А. В. Кряжимского, Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г.

Ключевые слова: системный анализ, моделирование, оптимальное управление, численные медоды.

ISBN 978-5-98419-079-4
ISBN 978-5-317-05838-8

СОДЕРЖАНИЕ • CONTENTS

On shift of the Lyapunov spectrum for linear stationary control systems in Banach spaces*

Vasilii Zaitsev

Udmurt State University, Izhevsk, Russia

verba@udm.ru

Let X and U be Banach spaces. Consider a linear control system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \qquad 0 \leq t < +\infty, \tag{1}$$

where $x(t) \in X$, $u(t) \in U$, $A(t) \in L(X, X)$, $B(t) \in L(U, X)$, $t \geq 0$; $L(Q_1, Q_2)$ is the Banach space of linear bounded operators $P\colon Q_1 \to Q_2$. We suppose that $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$ are piecewise continuous and, for some $M_1 > 0$, for all $t \geq 0$, the following inequalities hold: $\|B(t)\| \leq M_1$ and

$$\|A(t)\| \leq M_1. \tag{2}$$

Consider the corresponding free system

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \qquad 0 \leq t < +\infty. \tag{3}$$

Denote by Σ_A the (*upper*) *Lyapunov spectrum* of system (3) [1, Ch. III, Sect. 4, p. 117]. By (2), we have $\Sigma_A \subset [-M_2, M_2] \subset (-\infty, +\infty)$ for some $M_2 > 0$. In particular, if $X = \mathbb{R}^n$ and $A(t) \equiv A$ then $\Sigma_A = \{\operatorname{Re} \mu_j : j = \overline{1, n}\}$, where μ_j $(j = \overline{1, n})$ are eigenvalues of A [1, p. 117].

Let us construct a linear state feedback control

$$u(t) = K(t)x(t), \qquad 0 \leq t < +\infty, \tag{4}$$

where $K(t) \in L(X, U)$ for $t \geq 0$, $K(\cdot)$ is piecewise continuous, and $\|K(t)\| \leq M_3$, $t \geq 0$, for some $M_3 > 0$ (we will call such an operator $K(t)$ admissible). The closed-loop system has the form

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K(t))x(t). \tag{5}$$

Definition 1. We say that *the Lyapunov spectrum of system* (5) *is arbitrarily shiftable* if for any $\lambda \in \mathbb{R}$ there exists an admissible operator $K(t)$ such that $\Sigma_{A+BK} = \Sigma_A + \lambda$.

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00346) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the basic part (project no. 1.5211.2017/8.9).

Consider a stationary system (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad 0 \le t < +\infty, \tag{6}$$

where $A \in L(X, X)$ and $B \in L(U, X)$.

Definition 2. The control system (6) is said to be *exactly controllable on* $[0, T]$ [2, Ch. 3, p. 51] if for any points $x^0, x^1 \in X$ there exists a control function $\widehat{u} \in L^2([0, T], U)$ such that the solution $x(t)$ of system (6) with $u(t) = \widehat{u}(t)$ with the initial condition $x(0) = x^0$ satisfies the condition $x(T) = x^1$.

System (6) in closed loop with (4) becomes

$$\dot{x}(t) = (A + BK(t))x(t). \tag{7}$$

Theorem. *Assume that X is a reflexive Banach space and U is a Hilbert space. Let system* (6) *be exactly controllable on some* $[0, T]$*. Then the Lyapunov spectrum of the closed-loop system* (7) *is arbitrarily shiftable.*

For the case $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, the theorem follows from [3, 4]. For system (6), obvious corollaries on stabilization or destabilization (by means of linear state feedback (4)) follow from the above theorem.

References

1. *Daleckii Ju.L., Krein M.G.* Stability of solutions of differential equations in Banach space. Am. Math. Soc., 1974.
2. *Curtain R.F., Pritchard A.J.* Infinite dimensional linear systems theory. Springer, 1978. (Lect. Notes Control Inf. Sci.; V. 8).
3. *Makarov E.K., Popova S.N.* On the global controllability of central exponents of linear systems // Russ. Math. 1999. V. 43, N 2. P. 56–63.
4. *Zaitsev V.A.* Lyapunov reducibility and stabilization of nonstationary systems with an observer // Diff. Eqns. 2010. V. 46, N 3. P. 437–447.