УДК 519.651, 517.518.823

© *А. Н. Мзедавее, В. И. Родионов*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ ТРЕХМЕРНЫМ УРАВНЕНИЕМ ЛАПЛАСА

Определено однопараметрическое семейство конечномерных пространств, состоящих из специальных трехмерных сплайнов лагранжева типа (параметр N связан с размерностью пространства сплайнов). Решение краевой задачи для уравнения Лапласа, заданного в трехмерном параллелепипеде, допускает представление в виде суммы четырех слагаемых: функции, линейной по каждой из трех переменных, и решений трех частных краевых задач, порожденных исходным уравнением. В свою очередь, эти задачи порождают три задачи минимизации функционалов невязок, заданных в указанных пространствах сплайнов. Подобная декомпозиция позволяет исследовать лишь одну из трех задач оптимизации (две другие носят симметричный характер). Получена система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов оптимального сплайна, дающего наименьшую невязку. Показано, что система имеет единственное решение. Численное решение системы сводится к реализации метода прогонки (имеет место устойчивость данного метода). Численные эксперименты показывают, что с ростом N минимум функционала невязок стремится к нулю.

Ключевые слова: трехмерное уравнение Лапласа, интерполяция, многомерный сплайн.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-03

Введение

Работа продолжает исследования [1–5], посвященные численному решению простейших двумерных задач математической физики. В [3] исследовано уравнение теплопроводности, в [4] — волновое уравнение, в [5] — уравнение переноса. В настоящей работе исследуется стационарное трехмерное уравнение — уравнение Лапласа.

Уравнение $\Delta\,\mathrm{u} \doteq \mathrm{u}_{x_1x_1}+\mathrm{u}_{x_2x_2}+\mathrm{u}_{x_3x_3}=0$, заданное в трехмерном параллелепипеде, заменой переменных приводится к виду $\mathrm{c}_1\mathrm{u}_{x_1x_1}+\mathrm{c}_2\mathrm{u}_{x_2x_2}+\mathrm{c}_3\mathrm{u}_{x_3x_3}=0$ (в терминах новых переменных из куба $\Pi \doteq [0,1]^3$). Далее считаем, что числа c_1, c_2, c_3 — положительные, а непрерывные функции $\eta_{\ell\kappa}\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $(\ell,\kappa) \in \{1,2,3\} \times \{0,1\}$, таковы, что

$$\eta_{20}(x_1,0)=\eta_{30}(x_1,0), \quad \eta_{20}(x_1,1)=\eta_{31}(x_1,0), \quad \eta_{21}(x_1,0)=\eta_{30}(x_1,1), \quad \eta_{21}(x_1,1)=\eta_{31}(x_1,1),$$

$$\eta_{10}(x_2,0)=\eta_{30}(0,x_2), \quad \eta_{10}(x_2,1)=\eta_{31}(0,x_2), \quad \eta_{11}(x_2,0)=\eta_{30}(1,x_2), \quad \eta_{11}(x_2,1)=\eta_{31}(1,x_2),$$

$$\eta_{10}(0,x_3)=\eta_{20}(0,x_3), \quad \eta_{10}(1,x_3)=\eta_{21}(0,x_3), \quad \eta_{11}(0,x_3)=\eta_{20}(1,x_3), \quad \eta_{11}(1,x_3)=\eta_{21}(1,x_3).$$

Решение $\mathrm{u}=\mathrm{u}(x_1,x_2,x_3)$, $(x_1,x_2,x_3)\in\Pi$, задачи

$$\mathrm{c}_1\mathrm{u}_{x_1x_1}+\mathrm{c}_2\mathrm{u}_{x_2x_2}+\mathrm{c}_3\mathrm{u}_{x_3x_3}=0,$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=0}=\eta_{10}(x_2,x_3), \quad \mathrm{u}\big|_{x_2=0}=\eta_{20}(x_1,x_3), \quad \mathrm{u}\big|_{x_3=0}=\eta_{30}(x_1,x_2),$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=1}=\eta_{11}(x_2,x_3), \quad \mathrm{u}\big|_{x_2=1}=\eta_{21}(x_1,x_3), \quad \mathrm{u}\big|_{x_3=1}=\eta_{31}(x_1,x_2),$$

представимо в виде $\mathrm{u}=\varepsilon+\mathrm{u}^1+\mathrm{u}^2+\mathrm{u}^3$, где

$$\varepsilon=\varepsilon(x_1,x_2,x_3)\doteq\eta_{10}(0,0)\,(1-x_1)\,(1-x_2)\,(1-x_3)+\eta_{10}(0,1)\,(1-x_1)\,(1-x_2)\,x_3+$$

$$+\eta_{10}(1,0)\,(1-x_1)\,x_2\,(1-x_3)+\eta_{10}(1,1)\,(1-x_1)\,x_2\,x_3+\eta_{11}(0,0)\,x_1\,(1-x_2)\,(1-x_3)+$$

$$+\eta_{11}(0,1)\,x_1\,(1-x_2)\,x_3+\eta_{11}(1,0)\,x_1\,x_2\,(1-x_3)+\eta_{11}(1,1)\,x_1\,x_2\,x_3$$

— трилинейная функция, а функции $\mathrm{u}^\ell=\mathrm{u}^\ell(x_1,x_2,x_3)$, $\ell=1,2,3$, — это решения задач

$$\mathrm{c}_1\mathrm{u}_{x_1x_1}+\mathrm{c}_2\mathrm{u}_{x_2x_2}+\mathrm{c}_3\mathrm{u}_{x_3x_3}=0, \tag{1}$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=0}=0,\quad \mathrm{u}\big|_{x_2=0}=\tfrac12\big[\,\eta_{20}(x_1,x_3)-\varepsilon(x_1,0,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_3=0}=\tfrac12\big[\,\eta_{30}(x_1,x_2)-\varepsilon(x_1,x_2,0)\,\big],$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=1}=0,\quad \mathrm{u}\big|_{x_2=1}=\tfrac12\big[\,\eta_{21}(x_1,x_3)-\varepsilon(x_1,1,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_3=1}=\tfrac12\big[\,\eta_{31}(x_1,x_2)-\varepsilon(x_1,x_2,1)\,\big],$$

$$\mathrm{c}_1\mathrm{u}_{x_1x_1}+\mathrm{c}_2\mathrm{u}_{x_2x_2}+\mathrm{c}_3\mathrm{u}_{x_3x_3}=0, \tag{2}$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=0}=\tfrac12\big[\,\eta_{10}(x_2,x_3)-\varepsilon(0,x_2,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_2=0}=0,\quad \mathrm{u}\big|_{x_3=0}=\tfrac12\big[\,\eta_{30}(x_1,x_2)-\varepsilon(x_1,x_2,0)\,\big],$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=1}=\tfrac12\big[\,\eta_{11}(x_2,x_3)-\varepsilon(1,x_2,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_2=1}=0,\quad \mathrm{u}\big|_{x_3=1}=\tfrac12\big[\,\eta_{31}(x_1,x_2)-\varepsilon(x_1,x_2,1)\,\big],$$

$$\mathrm{c}_1\mathrm{u}_{x_1x_1}+\mathrm{c}_2\mathrm{u}_{x_2x_2}+\mathrm{c}_3\mathrm{u}_{x_3x_3}=0, \tag{3}$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=0}=\tfrac12\big[\,\eta_{10}(x_2,x_3)-\varepsilon(0,x_2,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_2=0}=\tfrac12\big[\,\eta_{20}(x_1,x_3)-\varepsilon(x_1,0,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_3=0}=0,$$

$$\mathrm{u}\big|_{x_1=1}=\tfrac12\big[\,\eta_{11}(x_2,x_3)-\varepsilon(1,x_2,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_2=1}=\tfrac12\big[\,\eta_{21}(x_1,x_3)-\varepsilon(x_1,1,x_3)\,\big],\quad \mathrm{u}\big|_{x_3=1}=0,$$

соответственно. В работе обсуждается специальная задача оптимизации, порожденная задачей (1), а аналогичные задачи, порожденные задачами (2) и (3), носят симметричный характер.

Задачу (1) запишем в новых обозначениях:

$$\mathrm{a}\,\mathrm{u}_{tt}+\mathrm{b}_0\mathrm{u}_{\xi_0\xi_0}+\mathrm{b}_1\mathrm{u}_{\xi_1\xi_1}=0, \tag{4}$$

$$\mathrm{u}\big|_{t=0}=0,\quad \mathrm{u}\big|_{\xi_0=0}=\varrho_{00}(t,\xi_1),\quad \mathrm{u}\big|_{\xi_1=0}=\varrho_{10}(t,\xi_0),$$

$$\mathrm{u}\big|_{t=1}=0,\quad \mathrm{u}\big|_{\xi_0=1}=\varrho_{01}(t,\xi_1),\quad \mathrm{u}\big|_{\xi_1=1}=\varrho_{11}(t,\xi_0),$$

где $t\doteq x_1,\ \xi_0\doteq x_2,\ \xi_1\doteq x_3,\ \mathrm{a}\doteq \mathrm{c}_1,\ \mathrm{b}_0\doteq \mathrm{c}_2,\ \mathrm{b}_1\doteq \mathrm{c}_3,$

$$\varrho_{00}(t,\xi_1)\doteq\tfrac12\big[\,\eta_{20}(t,\xi_1)-\varepsilon(t,0,\xi_1)\,\big],\qquad \varrho_{10}(t,\xi_0)\doteq\tfrac12\big[\,\eta_{30}(t,\xi_0)-\varepsilon(t,\xi_0,0)\,\big],$$

$$\varrho_{01}(t,\xi_1)\doteq\tfrac12\big[\,\eta_{21}(t,\xi_1)-\varepsilon(t,1,\xi_1)\,\big],\qquad \varrho_{11}(t,\xi_0)\doteq\tfrac12\big[\,\eta_{31}(t,\xi_0)-\varepsilon(t,\xi_0,1)\,\big].$$

Задача (4) порождает задачу поиска оптимального сплайна задачи

$$J(u)\doteq\big\|\,\mathrm{a}\,u_{tt}+\mathrm{b}_0u_{\xi_0\xi_0}+\mathrm{b}_1u_{\xi_1\xi_1}\,\big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)}\to\min,\qquad u\in\mathcal{S}_N(\Pi). \tag{5}$$

Через $\mathcal{S}_N(\Pi)$ обозначено пространство, состоящее из *допустимых* сплайнов (см. § 1), зависящих от коэффициентов $u^i_{11},\ u^i_{12},\ u^i_{21},\ u^i_{22},\ i=1,\dots,3N-1$ (где N — это параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы), и определенных в кубе Π. Пусть, далее,

$$n\doteq N-1,\qquad \tau\doteq\tfrac{1}{3N},\qquad h\doteq\tfrac13,\qquad \theta_0\doteq 9\,\mathrm{a}^{-1}\mathrm{b}_0\tau^2,\qquad \theta_1\doteq 9\,\mathrm{a}^{-1}\mathrm{b}_1\tau^2, \tag{6}$$

а точки $(\tau_i,h_j,h_r)\in\Pi$ таковы, что $\tau_i\doteq i\tau,\ i=0,1,\dots,3N,\ h_s\doteq sh,\ s=0,1,2,3.$ Полагаем параметр N таким, что

$$\theta_0+\theta_1<\tfrac57\iff N^2>\tfrac75\,\mathrm{a}^{-1}(\,\mathrm{b}_0+\mathrm{b}_1). \tag{7}$$

§ 1. Постановка задачи построения оптимального сплайна

Массив $\big(u^i_{jr}\big),\ i=0,1,\dots,3N,\ j,r=0,1,2,3,$ называется *допустимым* для задачи (5), порожденной уравнением (4), если

1) $u^0_{jr}=0,\ u^{3N}_{jr}=0$ для всех $j,r=0,1,2,3$;

2) $u^i_{0r}=\varrho_{00}(\tau_i,h_r),\ u^i_{3r}=\varrho_{01}(\tau_i,h_r)$ для всех $i=1,\dots,3N-1,\ r=0,1,2,3$;

3) $u^i_{j0}=\varrho_{10}(\tau_i,h_j),\ u^i_{j3}=\varrho_{11}(\tau_i,h_j)$ для всех $i=1,\dots,3N-1,\ j=0,1,2,3.$

Одномерные интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\omega_\kappa(\zeta)\doteq\prod_{\alpha=0,1,2,3:\ \alpha\neq\kappa}\frac{\zeta-\alpha}{\kappa-\alpha},\qquad \zeta\in\mathbb{R},\qquad \kappa=0,1,2,3, \tag{1.1}$$

(такие, что $\omega_\kappa(\mu)=\delta_{\kappa\mu}$ для всех $\kappa,\mu=0,1,2,3$, где $\delta_{\kappa\mu}$ — символ Кронекера), и допустимый массив $\left(u^i_{jr}\right)$, $i=0,1,\ldots,3N$, $j,r=0,1,2,3$, порождают семейство полиномов

$$Q^k(s,\sigma_0,\sigma_1)\doteq\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3}u^{3k-3+i}_{jr}\,\omega_i(s)\,\omega_j(\sigma_0)\,\omega_r(\sigma_1),\qquad s,\sigma_0,\sigma_1\in\mathbb{R},\qquad k=1,\ldots,N. \tag{1.2}$$

Пусть, далее, точки $(t,\xi_0,\xi_1)\in\Pi$ таковы, что $\tau_{3k-3}\leqslant t\leqslant\tau_{3k}$, $0\leqslant\xi_0\leqslant1$, $0\leqslant\xi_1\leqslant1$,

$$\begin{gathered}s\doteq\tfrac{t}{\tau}-3k+3,\quad \sigma_0\doteq\tfrac{\xi_0}{h}=3\,\xi_0,\quad \sigma_1\doteq\tfrac{\xi_1}{h}=3\,\xi_1,\\ P^k(t,\xi_0,\xi_1)\doteq\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3}u^{3k-3+i}_{jr}\,\omega_i\big(\tfrac{t}{\tau}-3k+3\big)\,\omega_j(3\,\xi_0)\,\omega_r(3\,\xi_1)=Q^k(s,\sigma_0,\sigma_1).\end{gathered} \tag{1.3}$$

Очевидно, для всех $k=1,\ldots,N$ и $\ell,\mu,\nu=0,1,2,3$ имеет место цепочка равенств

$$Q^k(\ell,\mu,\nu)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3}u^{3k-3+i}_{jr}\,\omega_i(\ell)\,\omega_j(\mu)\,\omega_r(\nu)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3}u^{3k-3+i}_{jr}\,\delta_{i\ell}\,\delta_{j\mu}\,\delta_{r\nu}=u^{3k-3+\ell}_{\mu\nu},$$

следовательно,

$$P^k(\tau_{3k-3+i},h_j,h_r)=P^k\big((3k-3+i)\,\tau,jh,rh\big)=Q^k(i,j,r)=u^{3k-3+i}_{jr} \tag{1.4}$$

для всех $k=1,\ldots,N$ и $i,j,r=0,1,2,3$, то есть полином $P^k(\cdot,\cdot,\cdot)$ является трехмерным интерполяционным многочленом Лагранжа, определенным в 64 узлах параллелепипеда

$$\Pi^k\doteq\big\{\,(t,\xi_0,\xi_1)\in\Pi:\ \ \tau_{3k-3}\leqslant t\leqslant\tau_{3k},\ \ 0\leqslant\xi_0\leqslant1,\ \ 0\leqslant\xi_1\leqslant1\,\big\}$$

(очевидно, $\bigcup\limits_{k=1}^{N}\Pi^k=\Pi$). В силу (1.4) для всех $k=1,\ldots,n$ и $j,r=0,1,2,3$ справедливы равенства $P^k(\tau_{3k},h_j,h_r)=u^{3k}_{jr}=P^{k+1}(\tau_{3k},h_j,h_r)$. Следовательно, при каждом $k=1,\ldots,n$ значения бикубических полиномов $P^k(\tau_{3k},\xi_0,\xi_1)$, $P^{k+1}(\tau_{3k},\xi_0,\xi_1)$, $(\xi_0,\xi_1)\in[0,1]^2$, совпадают в 16 точках $\big($при $(\xi_0,\xi_1)=(h_j,h_r)=(j/3,r/3)$, $j,r=0,1,2,3\big)$, поэтому

$$P^k(\tau_{3k},\xi_0,\xi_1)=P^{k+1}(\tau_{3k},\xi_0,\xi_1)$$

для всех $(\xi_0,\xi_1)\in[0,1]^2$. Значит, имеет место непрерывная стыковка полиномов P^k и P^{k+1} на плоскости $t=\tau_{3k}$ и, таким образом, определена непрерывная функция $u:\,\Pi\to\mathbb{R}$ такая, что $u(t,\xi_0,\xi_1)=P^k(t,\xi_0,\xi_1)$ при $(t,\xi_0,\xi_1)\in\Pi^k$. Другими словами, всякий допустимый массив $\left(u^i_{jr}\right)$, $i=0,1,\ldots,3N$, $j,r=0,1,2,3$, порождает сплайн u: $\Pi\to\mathbb{R}$, который мы называем *аппроксимирующим*. Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u^i_{11}, u^i_{12}, u^i_{21}, u^i_{22}, $i=1,\ldots,3N-1$. Это означает, что аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное пространство (размерности $12N-4$). Обозначим его как $\mathcal{S}(\Pi)=\mathcal{S}_N(\Pi)$.

Определим оператор D: $\mathcal{S}(\Pi)\to\mathrm{L}_2(\Pi)$, заданный следующим образом. Сплайн $u\in\mathcal{S}(\Pi)$ имеет все частные производные во всех точках множества Π, за исключением точек множества $M\doteq\Pi\,\cap\,\big\{\,(t,\xi_0,\xi_1):\ t=\tau_{3k}\,\big\}_{k=1}^{n}$ меры нуль. Пусть $(Du)(t,\xi_0,\xi_1)\doteq0$ во всех точках множества M, а в остальных точках параллелепипеда Π полагаем $(Du)(t,\xi_0,\xi_1)\doteq\mathrm{a}\,u_{tt}+\mathrm{b}_0u_{\xi_0\xi_0}+$ $+\mathrm{b}_1u_{\xi_1\xi_1}$. Тогда определена задача оптимизации вида (5):

$$J\doteq J(u)\doteq\big\|\,Du\,\big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)}=\big\|\,\mathrm{a}\,u_{tt}+\mathrm{b}_0u_{\xi_0\xi_0}+\mathrm{b}_1u_{\xi_1\xi_1}\,\big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)}\to\min,\qquad u\in\mathcal{S}_N(\Pi), \tag{1.5}$$

решение которой сводится в конечном счете к поиску чисел u^i_{11}, u^i_{12}, u^i_{21}, u^i_{22}, $i=1,\ldots,3N-1$, реализующих минимум $J_N\doteq\min J(\cdot)$ функционала (1.5).

Для функционала (1.5) справедлива цепочка равенств

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{\Pi} \big[\, \mathrm{a}\, u_{tt} + \mathrm{b}_0 u_{\xi_0\xi_0} + \mathrm{b}_1 u_{\xi_1\xi_1}\,\big]^2 dt\, d\xi_0 d\xi_1 = \\
&= \sum_{k=1}^{N} \int_{\Pi^k} \big[\, \mathrm{a}\, P^k_{tt} + \mathrm{b}_0 P^k_{\xi_0\xi_0} + \mathrm{b}_1 P^k_{\xi_1\xi_1}\,\big]^2 dt\, d\xi_0 d\xi_1 = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\int_{\Pi^k} f_k^2(t,\xi_0,\xi_1)\, dt\, d\xi_0 d\xi_1}_{J^k} = \sum_{k=1}^{N} J^k,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где

$$
f_k(t,\xi_0,\xi_1) \doteq \mathrm{a}\, P^k_{tt}(t,\xi_0,\xi_1) + \mathrm{b}_0 P^k_{\xi_0\xi_0}(t,\xi_0,\xi_1) + \mathrm{b}_1 P^k_{\xi_1\xi_1}(t,\xi_0,\xi_1).
$$

В силу определений (1.2), (1.3) имеет место цепочка равенств

$$
f_k(t,\xi_0,\xi_1) = \mathrm{a}\, \partial^2 Q^k(s,\sigma_0,\sigma_1)/\partial t^2 + \mathrm{b}_0 \partial^2 Q^k(s,\sigma_0,\sigma_1)/\partial \xi_0^2 + \mathrm{b}_1 \partial^2 Q^k(s,\sigma_0,\sigma_1)/\partial \xi_1^2 =
$$

$$
= \frac{\mathrm{a}}{\tau^2} \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{r=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr}\, \omega_i''(s)\, \omega_j(\sigma_0)\, \omega_r(\sigma_1) +
$$

$$
+ \frac{\mathrm{b}_0}{h^2} \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{r=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr}\, \omega_i(s)\, \omega_j''(\sigma_0)\, \omega_r(\sigma_1) + \frac{\mathrm{b}_1}{h^2} \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{r=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr}\, \omega_i(s)\, \omega_j(\sigma_0)\, \omega_r''(\sigma_1).
$$

Далее используем 64 полинома (определение чисел θ_0 и θ_1 см. в (6))

$$
\Omega^i_{jr} \doteq \Omega^i_{jr}(s,\sigma_0,\sigma_1) \doteq \omega_i''(s)\, \omega_j(\sigma_0)\, \omega_r(\sigma_1) + \theta_0\, \omega_i(s)\, \omega_j''(\sigma_0)\, \omega_r(\sigma_1) + \theta_1\, \omega_i(s)\, \omega_j(\sigma_0)\, \omega_r''(\sigma_1), \tag{1.7}
$$

определенные для всех $i,j,r = 0,1,2,3$. Тогда имеет место формула

$$
f_k(t,\xi_0,\xi_1) = \frac{\mathrm{a}}{\tau^2} \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \sum_{r=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr}\, \Omega^i_{jr}. \tag{1.8}
$$

§ 2. Конечные разности аппроксимирующих сплайнов

Для каждого $i = 0,1,\ldots,3N$ определим матрицу

$$
U^i \doteq \begin{pmatrix} u^i_{00} & u^i_{01} & u^i_{02} & u^i_{03} \\ u^i_{10} & u^i_{11} & u^i_{12} & u^i_{13} \\ u^i_{20} & u^i_{21} & u^i_{22} & u^i_{23} \\ u^i_{30} & u^i_{31} & u^i_{32} & u^i_{33} \end{pmatrix} \tag{2.1}
$$

$\big($$i$-е сечение допустимого массива $\big(u^i_{jr}\big)$, состоящее из 16 элементов$\big)$ и конечные разности

$$
\begin{aligned}
x^i_{00} &\doteq U^i \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad
x^i_{01} \doteq U^i \circ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
x^i_{10} &\doteq U^i \circ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad
x^i_{01} \doteq U^i \circ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \\ 3 & -9 & 9 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь и далее через компактную запись $U^i \circ M$ мы обозначаем линейные формы

$$
U^i \circ M \doteq \sum_{j=0}^{3} \sum_{r=0}^{3} u^i_{jr}\, M_{jr},
$$

определенные для произвольных матриц $M = \big(M_{jr}\big)$, $j, r = 0,1,2,3$. Легко проверить, что

$$9\,x_{00}^i + 3\,x_{01}^i + 3\,x_{10}^i + x_{11}^i = 36\,u_{11}^i + U^i \circ M^{11}, \qquad 9\,x_{00}^i + 3\,x_{01}^i - 3\,x_{10}^i - x_{11}^i = 36\,u_{12}^i + U^i \circ M^{12},$$
$$9\,x_{00}^i - 3\,x_{01}^i + 3\,x_{10}^i - x_{11}^i = 36\,u_{21}^i + U^i \circ M^{21}, \qquad 9\,x_{00}^i - 3\,x_{01}^i - 3\,x_{10}^i + x_{11}^i = 36\,u_{22}^i + U^i \circ M^{22}, \tag{2.3}$$

где

$$M^{11} \doteq \begin{pmatrix} 16 & -24 & 0 & 8 \\ -24 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M^{12} \doteq \begin{pmatrix} 8 & 0 & -24 & 16 \\ -12 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -12 & 8 \end{pmatrix},$$
$$M^{21} \doteq \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & 0 & -12 \\ 16 & -24 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad M^{22} \doteq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -24 \\ 8 & 0 & -24 & 16 \end{pmatrix}.$$

Формула (1.8) допускает представление

$$\mathrm{a}^{-1}\tau^2 f_k(t,\xi_0,\xi_1) = \sum_{i=0}^{3} \Big[\, U^{3k-3+i} \circ \Omega^i + u_{11}^{3k-3+i}\,\Omega_{11}^i + u_{12}^{3k-3+i}\,\Omega_{12}^i + u_{21}^{3k-3+i}\,\Omega_{21}^i + u_{22}^{3k-3+i}\,\Omega_{22}^i \Big],$$

в котором линейная форма $U^{3k-3+i} \circ \Omega^i$ порождена матрицей

$$\Omega^i \doteq \begin{pmatrix} \Omega_{00}^i & \Omega_{01}^i & \Omega_{02}^i & \Omega_{03}^i \\ \Omega_{10}^i & 0 & 0 & \Omega_{13}^i \\ \Omega_{20}^i & 0 & 0 & \Omega_{23}^i \\ \Omega_{30}^i & \Omega_{31}^i & \Omega_{32}^i & \Omega_{33}^i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в силу формул (2.3) имеет место равенство

$$\begin{aligned} 36\,\mathrm{a}^{-1}\tau^2 f_k(t,\xi_0,\xi_1) = \sum_{i=0}^{3} \Big[\, & 36\,U^{3k-3+i} \circ \Omega^i + \\ & + 9\,x_{00}^{3k-3+i}\,\Omega_{11}^i + 3\,x_{01}^{3k-3+i}\,\Omega_{11}^i + 3\,x_{10}^{3k-3+i}\,\Omega_{11}^i + x_{11}^{3k-3+i}\,\Omega_{11}^i - U^{3k-3+i} \circ M^{11}\,\Omega_{11}^i + \\ & + 9\,x_{00}^{3k-3+i}\,\Omega_{12}^i + 3\,x_{01}^{3k-3+i}\,\Omega_{12}^i - 3\,x_{10}^{3k-3+i}\,\Omega_{12}^i - x_{11}^{3k-3+i}\,\Omega_{12}^i - U^{3k-3+i} \circ M^{12}\,\Omega_{12}^i + \\ & + 9\,x_{00}^{3k-3+i}\,\Omega_{21}^i - 3\,x_{01}^{3k-3+i}\,\Omega_{21}^i + 3\,x_{10}^{3k-3+i}\,\Omega_{21}^i - x_{11}^{3k-3+i}\,\Omega_{21}^i - U^{3k-3+i} \circ M^{21}\,\Omega_{21}^i + \\ & + 9\,x_{00}^{3k-3+i}\,\Omega_{22}^i - 3\,x_{01}^{3k-3+i}\,\Omega_{22}^i - 3\,x_{10}^{3k-3+i}\,\Omega_{22}^i + x_{11}^{3k-3+i}\,\Omega_{22}^i - U^{3k-3+i} \circ M^{22}\,\Omega_{22}^i \Big]. \end{aligned}$$

Процедура приведения подобных членов приводит к формуле

$$36\,\mathrm{a}^{-1}\tau^2 f_k(t,\xi_0,\xi_1) = \sum_{i=0}^{3} U^{3k-3+i} \circ M^i + \sum_{i=0}^{3} L_i^k, \tag{2.4}$$

в которой используются матрицы

$$M^i \doteq 36\,\Omega^i - M^{11}\,\Omega_{11}^i - M^{12}\,\Omega_{12}^i - M^{21}\,\Omega_{21}^i - M^{22}\,\Omega_{22}^i \tag{2.5}$$

и конечные разности (содержащие 16 элементов матрицы U^{3k-3+i}, см. определения (2.1), (2.2))

$$L_i^k \doteq 9\,x_{00}^{3k-3+i}\,\varepsilon_{00}^i + 3\,x_{01}^{3k-3+i}\,\varepsilon_{01}^i + 3\,x_{10}^{3k-3+i}\,\varepsilon_{10}^i + x_{11}^{3k-3+i}\,\varepsilon_{11}^i, \tag{2.6}$$

то есть линейные формы с функциональными коэффициентами (см. определения (1.7))

$$\varepsilon_{00}^i \doteq \Omega_{11}^i + \Omega_{12}^i + \Omega_{21}^i + \Omega_{22}^i, \qquad \varepsilon_{01}^i \doteq \Omega_{11}^i + \Omega_{12}^i - \Omega_{21}^i - \Omega_{22}^i,$$
$$\varepsilon_{10}^i \doteq \Omega_{11}^i - \Omega_{12}^i + \Omega_{21}^i - \Omega_{22}^i, \qquad \varepsilon_{11}^i \doteq \Omega_{11}^i - \Omega_{12}^i - \Omega_{21}^i + \Omega_{22}^i.$$

Для всех $k = 1,\dots,N$ и $\mu,\nu = 0,1$ определим конечные разности

$$X_{\mu\nu}^k \doteq x_{\mu\nu}^{3k-3} - x_{\mu\nu}^{3k-2} - x_{\mu\nu}^{3k-1} + x_{\mu\nu}^{3k}, \qquad Y_{\mu\nu}^k \doteq x_{\mu\nu}^{3k-3} - 3\,x_{\mu\nu}^{3k-2} + 3\,x_{\mu\nu}^{3k-1} - x_{\mu\nu}^{3k} \tag{2.7}$$

(каждая из них содержит 64 элемента допустимого массива $\big(u_{jr}^i\big)$, см. определения (2.2)).

§ 3. Вариативные компоненты функционала невязок

В соответствии с определениями (2.7) и (2.6) справедливы равенства

$$6\,x^{3k-2}_{\mu\nu} = 4\,x^{3k-3}_{\mu\nu} - 3\,X^k_{\mu\nu} - Y^k_{\mu\nu} + 2\,x^{3k}_{\mu\nu}, \qquad 6\,x^{3k-1}_{\mu\nu} = 2\,x^{3k-3}_{\mu\nu} - 3\,X^k_{\mu\nu} + Y^k_{\mu\nu} + 4\,x^{3k}_{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
6\,L^k_1 &= 9\left[\,4\,x^{3k-3}_{00} - 3\,X^k_{00} - Y^k_{00} + 2\,x^{3k}_{00}\,\right]\varepsilon^1_{00} + 3\left[\,4\,x^{3k-3}_{01} - 3\,X^k_{01} - Y^k_{01} + 2\,x^{3k}_{01}\,\right]\varepsilon^1_{01} + \\
&\quad +3\left[\,4\,x^{3k-3}_{10} - 3\,X^k_{10} - Y^k_{10} + 2\,x^{3k}_{10}\,\right]\varepsilon^1_{10} + \left[\,4\,x^{3k-3}_{11} - 3\,X^k_{11} - Y^k_{11} + 2\,x^{3k}_{11}\,\right]\varepsilon^1_{11}, \\
6\,L^k_2 &= 9\left[\,2\,x^{3k-3}_{00} - 3\,X^k_{00} + Y^k_{00} + 4\,x^{3k}_{00}\,\right]\varepsilon^2_{00} + 3\left[\,2\,x^{3k-3}_{01} - 3\,X^k_{01} + Y^k_{01} + 4\,x^{3k}_{01}\,\right]\varepsilon^2_{01} + \\
&\quad +3\left[\,2\,x^{3k-3}_{10} - 3\,X^k_{10} + Y^k_{10} + 4\,x^{3k}_{10}\,\right]\varepsilon^2_{10} + \left[\,2\,x^{3k-3}_{11} - 3\,X^k_{11} + Y^k_{11} + 4\,x^{3k}_{11}\,\right]\varepsilon^2_{11}.
\end{aligned}$$

Следовательно, в соответствии с определением (2.6) имеем

$$6\sum_{i=0}^{3} L^k_i = 54\,x^{3k-3}_{00}\,\varepsilon^0_{00} + 18\,x^{3k-3}_{01}\,\varepsilon^0_{01} + 18\,x^{3k-3}_{10}\,\varepsilon^0_{10} + 6\,x^{3k-3}_{11}\,\varepsilon^0_{11} +$$

$$\begin{gathered}
+\left[\,36\,x^{3k-3}_{00} - 27\,X^k_{00} - 9\,Y^k_{00} + 18\,x^{3k}_{00}\,\right]\varepsilon^1_{00} + \left[\,12\,x^{3k-3}_{01} - 9\,X^k_{01} - 3\,Y^k_{01} + 6\,x^{3k}_{01}\,\right]\varepsilon^1_{01} + \\
+\left[\,12\,x^{3k-3}_{10} - 9\,X^k_{10} - 3\,Y^k_{10} + 6\,x^{3k}_{10}\,\right]\varepsilon^1_{10} + \left[\,4\,x^{3k-3}_{11} - 3\,X^k_{11} - Y^k_{11} + 2\,x^{3k}_{11}\,\right]\varepsilon^1_{11} + \\
+\left[\,18\,x^{3k-3}_{00} - 27\,X^k_{00} + 9\,Y^k_{00} + 36\,x^{3k}_{00}\,\right]\varepsilon^2_{00} + \left[\,6\,x^{3k-3}_{01} - 9\,X^k_{01} + 3\,Y^k_{01} + 12\,x^{3k}_{01}\,\right]\varepsilon^2_{01} + \\
+\left[\,6\,x^{3k-3}_{10} - 9\,X^k_{10} + 3\,Y^k_{10} + 12\,x^{3k}_{10}\,\right]\varepsilon^2_{10} + \left[\,2\,x^{3k-3}_{11} - 3\,X^k_{11} + Y^k_{11} + 4\,x^{3k}_{11}\,\right]\varepsilon^2_{11} + \\
+54\,x^{3k}_{00}\,\varepsilon^3_{00} + 18\,x^{3k}_{01}\,\varepsilon^3_{01} + 18\,x^{3k}_{10}\,\varepsilon^3_{10} + 6\,x^{3k}_{11}\,\varepsilon^3_{11}.
\end{gathered}$$

Процедура приведения подобных членов приводит к равенству

$$6\sum_{i=0}^{3} L^k_i = 18\,x^{3k-3}_{00}\left(3\,\varepsilon^0_{00} + 2\,\varepsilon^1_{00} + \varepsilon^2_{00}\right) + 6\,x^{3k-3}_{01}\left(3\,\varepsilon^0_{01} + 2\,\varepsilon^1_{01} + \varepsilon^2_{01}\right) +$$

$$\begin{gathered}
+6\,x^{3k-3}_{10}\left(3\,\varepsilon^0_{10} + 2\,\varepsilon^1_{10} + \varepsilon^2_{10}\right) + 2\,x^{3k-3}_{11}\left(3\,\varepsilon^0_{11} + 2\,\varepsilon^1_{11} + \varepsilon^2_{11}\right) - 27\,X^k_{00}\left(\varepsilon^1_{00} + \varepsilon^2_{00}\right) - \\
-9\,Y^k_{00}\left(\varepsilon^1_{00} - \varepsilon^2_{00}\right) - 9\,X^k_{01}\left(\varepsilon^1_{01} + \varepsilon^2_{01}\right) - 3\,Y^k_{01}\left(\varepsilon^1_{01} - \varepsilon^2_{01}\right) - 9\,X^k_{10}\left(\varepsilon^1_{10} + \varepsilon^2_{10}\right) - \\
-3\,Y^k_{10}\left(\varepsilon^1_{10} - \varepsilon^2_{10}\right) - 3\,X^k_{11}\left(\varepsilon^1_{11} + \varepsilon^2_{11}\right) - Y^k_{11}\left(\varepsilon^1_{11} - \varepsilon^2_{11}\right) + 18\,x^{3k}_{00}\left(\varepsilon^1_{00} + 2\,\varepsilon^2_{00} + 3\,\varepsilon^3_{00}\right) + \\
+6\,x^{3k}_{01}\left(\varepsilon^1_{01} + 2\,\varepsilon^2_{01} + 3\,\varepsilon^3_{01}\right) + 6\,x^{3k}_{10}\left(\varepsilon^1_{10} + 2\,\varepsilon^2_{10} + 3\,\varepsilon^3_{10}\right) + 2\,x^{3k}_{11}\left(\varepsilon^1_{11} + 2\,\varepsilon^2_{11} + 3\,\varepsilon^3_{11}\right). \qquad (3.2)
\end{gathered}$$

Преобразуем функции $\varepsilon^i_{\mu\nu} = \varepsilon^i_{\mu\nu}(s,\sigma_0,\sigma_1)$. В соответствии с определением (1.7) для функций $\Omega^i_{jr} = \Omega^i_{jr}(s,\sigma_0,\sigma_1)$ справедливы формулы

$$\begin{gathered}
\varepsilon^i_{00} = \Omega^i_{11} + \Omega^i_{12} + \Omega^i_{21} + \Omega^i_{22} = \omega''_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) + \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) + \omega_2(\sigma_1)\right] + \\
+\,\theta_0\,\omega_i(s)\left[\,\omega''_1(\sigma_0) + \omega''_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) + \omega_2(\sigma_1)\right] + \theta_1\,\omega_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) + \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega''_1(\sigma_1) + \omega''_2(\sigma_1)\right], \\
\varepsilon^i_{01} = \Omega^i_{11} + \Omega^i_{12} - \Omega^i_{21} - \Omega^i_{22} = \omega''_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) - \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) + \omega_2(\sigma_1)\right] + \\
+\,\theta_0\,\omega_i(s)\left[\,\omega''_1(\sigma_0) - \omega''_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) + \omega_2(\sigma_1)\right] + \theta_1\,\omega_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) - \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega''_1(\sigma_1) + \omega''_2(\sigma_1)\right], \\
\varepsilon^i_{10} = \Omega^i_{11} - \Omega^i_{12} + \Omega^i_{21} - \Omega^i_{22} = \omega''_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) + \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) - \omega_2(\sigma_1)\right] + \\
+\,\theta_0\,\omega_i(s)\left[\,\omega''_1(\sigma_0) + \omega''_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) - \omega_2(\sigma_1)\right] + \theta_1\,\omega_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) + \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega''_1(\sigma_1) - \omega''_2(\sigma_1)\right], \\
\varepsilon^i_{11} = \Omega^i_{11} - \Omega^i_{12} - \Omega^i_{21} + \Omega^i_{22} = \omega''_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) - \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) - \omega_2(\sigma_1)\right] + \\
+\,\theta_0\,\omega_i(s)\left[\,\omega''_1(\sigma_0) - \omega''_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega_1(\sigma_1) - \omega_2(\sigma_1)\right] + \theta_1\,\omega_i(s)\left[\,\omega_1(\sigma_0) - \omega_2(\sigma_0)\right]\left[\,\omega''_1(\sigma_1) - \omega''_2(\sigma_1)\right].
\end{gathered}$$

Для интерполяционных многочленов Лагранжа справедливы тождества

$$\begin{gathered}\omega_1(\zeta)+\omega_2(\zeta)=\tfrac{1}{2}\,\zeta\,(\,3-\zeta\,), \qquad \omega_1''(\zeta)+\omega_2''(\zeta)=-1,\\ \omega_1(\zeta)-\omega_2(\zeta)=-\tfrac{1}{2}\;\zeta\,(\,3-\zeta\,)\,(\,2\,\zeta-3\,), \qquad \omega_1''(\zeta)-\omega_2''(\zeta)=3\,(\,2\,\zeta-3\,)\end{gathered} \tag{3.3}$$

(тождества, связанные с кубическими многочленами (1.1), легко проверяемы), поэтому

$$\begin{gathered}\varepsilon_{00}^{i}=\tfrac{1}{4}\,\omega_i''(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)-\tfrac{1}{2}\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)-\tfrac{1}{2}\,\theta_1\,\omega_i(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0)=\\ =\tfrac{81}{64}\,\omega_i''(s)\,(\,1-\beta_0^2\,)\,(\,1-\beta_1^2\,)-\tfrac{9}{8}\,\omega_i(s)\,\big[\,\theta_0(\,1-\beta_1^2\,)+\theta_1(\,1-\beta_0^2\,)\,\big]=\tfrac{81}{64}\,\omega_i''(s)\,R-\tfrac{9}{8}\,\omega_i(s)\,S.\end{gathered}$$

Здесь и далее мы используем новые переменные:

$$\alpha\doteq\tfrac{2}{3}\,s-1, \qquad \beta_0\doteq\tfrac{2}{3}\,\sigma_0-1, \qquad \beta_1\doteq\tfrac{2}{3}\,\sigma_1-1 \tag{3.4}$$

$\big($обратное преобразование имеет вид $s=\frac{3}{2}\,(\,1+\alpha\,)$, $\sigma_0=\frac{3}{2}\,(\,1+\beta_0)$, $\sigma_1=\frac{3}{2}\,(\,1+\beta_1)\big)$. Кроме того, определены четные многочлены

$$\begin{gathered}P\doteq3\,\theta_0(\,1-\beta_1^2\,)+\theta_1(\,1-\beta_0^2\,), \qquad Q\doteq\theta_0(\,1-\beta_1^2\,)+3\,\theta_1(\,1-\beta_0^2\,),\\ S\doteq\tfrac{1}{4}\,(P+Q), \qquad U\doteq3\,S, \qquad R\doteq(\,1-\beta_0^2\,)\,(\,1-\beta_1^2\,).\end{gathered} \tag{3.5}$$

Аналогичным образом получаем равенства

$$\begin{gathered}\varepsilon_{01}^{i}=-\tfrac{1}{4}\,\omega_i''(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0)\,(\,2\,\sigma_0-3\,)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)+\\ +\tfrac{3}{2}\,\theta_0\,\omega_i(s)\,(\,2\,\sigma_0-3\,)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)+\tfrac{1}{2}\,\theta_1\,\omega_i(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0)\,(\,2\,\sigma_0-3\,)=\\ =-\tfrac{243}{64}\,\omega_i''(s)\,\beta_0(\,1-\beta_0^2\,)\,(\,1-\beta_1^2\,)+\tfrac{27}{8}\,\omega_i(s)\,\beta_0\,\big[\,3\,\theta_0(\,1-\beta_1^2\,)+\theta_1(\,1-\beta_0^2\,)\,\big]=\\ =-\tfrac{243}{64}\,\omega_i''(s)\,\beta_0R+\tfrac{27}{8}\,\omega_i(s)\,\beta_0P.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{10}^{i}=-\tfrac{1}{4}\,\omega_i''(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)\,(\,2\,\sigma_1-3\,)+\\ +\tfrac{1}{2}\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)\,(\,2\,\sigma_1-3\,)+\tfrac{3}{2}\,\theta_1\,\omega_i(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0)\,(\,2\,\sigma_1-3\,)=\\ =-\tfrac{243}{64}\,\omega_i''(s)\,\beta_1(\,1-\beta_0^2\,)\,(\,1-\beta_1^2\,)+\tfrac{27}{8}\,\omega_i(s)\,\beta_1\,\big[\,\theta_0(\,1-\beta_1^2\,)+3\,\theta_1(\,1-\beta_0^2\,)\,\big]=\\ =-\tfrac{243}{64}\,\omega_i''(s)\,\beta_1R+\tfrac{27}{8}\,\omega_i(s)\,\beta_1Q.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}^{i}=\tfrac{1}{4}\,\omega_i''(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0)\,(\,2\,\sigma_0-3\,)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)\,(\,2\,\sigma_1-3\,)-\\ -\tfrac{3}{2}\,\theta_0\,\omega_i(s)\,(\,2\,\sigma_0-3\,)\,\sigma_1(\,3-\sigma_1)\,(\,2\,\sigma_1-3\,)-\tfrac{3}{2}\,\theta_1\,\omega_i(s)\,\sigma_0(\,3-\sigma_0\,)(\,2\,\sigma_0-3\,)\,(\,2\,\sigma_1-3\,)=\\ =\tfrac{729}{64}\,\omega_i''(s)\,\beta_0\beta_1(\,1-\beta_0^2\,)\,(\,1-\beta_1^2\,)-\tfrac{243}{8}\,\omega_i(s)\,\beta_0\beta_1\,\big[\,\theta_0(\,1-\beta_1^2\,)+\theta_1(\,1-\beta_0^2\,)\,\big]=\\ =\tfrac{729}{64}\,\omega_i''(s)\,\beta_0\beta_1R-\tfrac{81}{8}\,\omega_i(s)\,\beta_0\beta_1U.\end{gathered}$$

Далее вычислим необходимые линейные комбинации функций $\varepsilon_{\mu\nu}^{i}=\varepsilon_{\mu\nu}^{i}(s,\sigma_0,\sigma_1)$. Так как

$$\begin{gathered}3\,\omega_0(s)+2\,\omega_1(s)+\omega_2(s)=3-s=\tfrac{3}{2}\,(\,1-\alpha\,), \qquad 3\,\omega_0''(s)+2\,\omega_1''(s)+\omega_2''(s)=0,\\ \omega_1(s)+2\,\omega_2(s)+3\,\omega_3(s)=s=\tfrac{3}{2}\,(\,1+\alpha\,), \qquad \omega_1''(s)+2\,\omega_2''(s)+3\,\omega_3''(s)=0\end{gathered} \tag{3.6}$$

(данные тождества следуют непосредственно из определений (1.1) и (3.4)), то

$$3\,\varepsilon_{00}^{0}+2\,\varepsilon_{00}^{1}+\varepsilon_{00}^{2}=-\tfrac{27}{16}\,(\,1-\alpha\,)\,S, \qquad 3\,\varepsilon_{01}^{0}+2\,\varepsilon_{01}^{1}+\varepsilon_{01}^{2}=\tfrac{81}{16}\,(\,1-\alpha\,)\,\beta_0P,$$

$$3\,\varepsilon_{10}^{0}+2\,\varepsilon_{10}^{1}+\varepsilon_{10}^{2}=\tfrac{81}{16}\,(1-\alpha)\,\beta_1 Q,\qquad 3\,\varepsilon_{11}^{0}+2\,\varepsilon_{11}^{1}+\varepsilon_{11}^{2}=-\tfrac{243}{16}\,(1-\alpha)\,\beta_0\beta_1 U,$$

$$\varepsilon_{00}^{1}+2\,\varepsilon_{00}^{2}+3\,\varepsilon_{00}^{3}=-\tfrac{27}{16}\,(1+\alpha)\,S,\qquad \varepsilon_{01}^{1}+2\,\varepsilon_{01}^{2}+3\,\varepsilon_{01}^{3}=\tfrac{81}{16}\,(1+\alpha)\,\beta_0 P,$$

$$\varepsilon_{10}^{1}+2\,\varepsilon_{10}^{2}+3\,\varepsilon_{10}^{3}=\tfrac{81}{16}\,(1+\alpha)\,\beta_1 Q,\qquad \varepsilon_{11}^{1}+2\,\varepsilon_{11}^{2}+3\,\varepsilon_{11}^{3}=-\tfrac{243}{16}\,(1+\alpha)\,\beta_0\beta_1 U.$$

В силу формул (3.3) и (3.4) справедливы равенства

$$\omega_1(s)+\omega_2(s)=\tfrac{9}{8}\,(1-\alpha^2),\qquad \omega_1''(s)+\omega_2''(s)=-1,$$

$$\omega_1(s)-\omega_2(s)=-\tfrac{27}{8}\,\alpha\,(1-\alpha^2),\qquad \omega_1''(s)-\omega_2''(s)=9\,\alpha,$$

поэтому

$$\varepsilon_{00}^{1}+\varepsilon_{00}^{2}=-\tfrac{81}{64}\,R-\tfrac{81}{64}\,(1-\alpha^2)\,S,\qquad \varepsilon_{01}^{1}+\varepsilon_{01}^{2}=\tfrac{243}{64}\,\beta_0 R+\tfrac{243}{64}\,(1-\alpha^2)\,\beta_0 P,$$

$$\varepsilon_{10}^{1}+\varepsilon_{10}^{2}=\tfrac{243}{64}\,\beta_1 R+\tfrac{243}{64}\,(1-\alpha^2)\,\beta_1 Q,\qquad \varepsilon_{11}^{1}+\varepsilon_{11}^{2}=-\tfrac{729}{64}\,\beta_0\beta_1 R-\tfrac{729}{64}\,(1-\alpha^2)\,\beta_0\beta_1 U,$$

$$\varepsilon_{00}^{1}-\varepsilon_{00}^{2}=\tfrac{729}{64}\,\alpha\,R+\tfrac{243}{64}\,\alpha\,(1-\alpha^2)\,S,\qquad \varepsilon_{01}^{1}-\varepsilon_{01}^{2}=-\tfrac{2187}{64}\,\alpha\,\beta_0 R-\tfrac{729}{64}\,\alpha\,(1-\alpha^2)\,\beta_0 P,$$

$$\varepsilon_{10}^{1}-\varepsilon_{10}^{2}=-\tfrac{2187}{64}\,\alpha\,\beta_1 R-\tfrac{729}{64}\,\alpha\,(1-\alpha^2)\,\beta_1 Q,\qquad \varepsilon_{11}^{1}-\varepsilon_{11}^{2}=\tfrac{6561}{64}\,\alpha\,\beta_0\beta_1 R+\tfrac{2187}{64}\,\alpha\,(1-\alpha^2)\,\beta_0\beta_1 U.$$

Подставив полученные выражения в формулу (3.2), получаем равенство

$$\tfrac{16}{81}\sum_{i=0}^{3} L_i^k=$$

$$\begin{gathered}
=-x_{00}^{3k-3}\,(1-\alpha)\,S+x_{01}^{3k-3}\,(1-\alpha)\;\beta_0 P+x_{10}^{3k-3}\,(1-\alpha)\;\beta_1 Q-x_{11}^{3k-3}\,(1-\alpha)\;\beta_0\beta_1 U+\\
+\tfrac{9}{8}\,X_{00}^{k}\left[R+(1-\alpha^2)\,S\right]-\tfrac{9}{8}\,Y_{00}^{k}\left[3\,\alpha\,R+\alpha\,(1-\alpha^2)\,S\right]-\\
-\tfrac{9}{8}\,X_{01}^{k}\left[\beta_0 R+(1-\alpha^2)\,\beta_0 P\right]+\tfrac{9}{8}\,Y_{01}^{k}\left[3\,\alpha\,\beta_0 R+\alpha\,(1-\alpha^2)\,\beta_0 P\right]-\\
-\tfrac{9}{8}\,X_{10}^{k}\left[\beta_1 R+(1-\alpha^2)\,\beta_1 Q\right]+\tfrac{9}{8}\,Y_{10}^{k}\left[3\,\alpha\,\beta_1 R+\alpha\,(1-\alpha^2)\,\beta_1 Q\right]+\\
+\tfrac{9}{8}\,X_{11}^{k}\left[\beta_0\beta_1 R+(1-\alpha^2)\,\beta_0\beta_1 U\right]-\tfrac{9}{8}\,Y_{11}^{k}\left[3\,\alpha\,\beta_0\beta_1 R+\alpha\,(1-\alpha^2)\,\beta_0\beta_1 U\right]-\\
-x_{00}^{3k}\,(1+\alpha)\,S+x_{01}^{3k}\,(1+\alpha)\;\beta_0 P+x_{10}^{3k}\,(1+\alpha)\;\beta_1 Q-x_{11}^{3k}\,(1+\alpha)\;\beta_0\beta_1 U.
\end{gathered}$$

Следовательно, имеет место представление

$$\tfrac{16}{81}\sum_{i=0}^{3} L_i^k=\mathrm{g}_0^k+\alpha\,\mathrm{g}_1^k+\beta_0\mathrm{g}_2^k+\alpha\,\beta_0\mathrm{g}_3^k+\beta_1\mathrm{g}_4^k+\alpha\,\beta_1\mathrm{g}_5^k+\beta_0\beta_1\mathrm{g}_6^k+\alpha\,\beta_0\beta_1\mathrm{g}_7^k,\tag{3.7}$$

где четные полиномы $\mathrm{g}_\ell^k=\mathrm{g}_\ell^k(\alpha,\beta_0,\beta_1)$, $\ell=0,1,\ldots,7$, определены следующим образом:

$$\begin{gathered}
\mathrm{g}_0^k\doteq-\left[x_{00}^{3k-3}+x_{00}^{3k}\right]S+\tfrac{9}{8}\,X_{00}^{k}\left[R+(1-\alpha^2)\,S\right],\quad \mathrm{g}_1^k\doteq\left[x_{00}^{3k-3}-x_{00}^{3k}\right]S-\tfrac{9}{8}\,Y_{00}^{k}\left[3R+(1-\alpha^2)\,S\right],\\
\mathrm{g}_2^k\doteq\left[x_{01}^{3k-3}+x_{01}^{3k}\right]P-\tfrac{9}{8}\,X_{01}^{k}\left[R+(1-\alpha^2)\,P\right],\quad \mathrm{g}_3^k\doteq-\left[x_{01}^{3k-3}-x_{01}^{3k}\right]P+\tfrac{9}{8}\,Y_{01}^{k}\left[3R+(1-\alpha^2)\,P\right],\\
\mathrm{g}_4^k\doteq\left[x_{10}^{3k-3}+x_{10}^{3k}\right]Q-\tfrac{9}{8}\,X_{10}^{k}\left[R+(1-\alpha^2)\,Q\right],\quad \mathrm{g}_5^k\doteq-\left[x_{10}^{3k-3}-x_{10}^{3k}\right]Q+\tfrac{9}{8}\,Y_{10}^{k}\left[3R+(1-\alpha^2)\,Q\right],\\
\mathrm{g}_6^k\doteq-\left[x_{11}^{3k-3}+x_{11}^{3k}\right]U+\tfrac{9}{8}\,X_{11}^{k}\left[R+(1-\alpha^2)\,U\right],\quad \mathrm{g}_7^k\doteq\left[x_{11}^{3k-3}-x_{11}^{3k}\right]U-\tfrac{9}{8}\,Y_{11}^{k}\left[3R+(1-\alpha^2)\,U\right].
\end{gathered}\tag{3.8}$$

§ 4. Стационарные компоненты функционала невязок

Мы преобразовали вариативное слагаемое $\sum\limits_{i=0}^{3} L_i^k$ формулы (2.4) к виду, удобному для интегрирования. Далее преобразуем стационарную часть $\sum\limits_{i=0}^{3} U^{3k-3+i} \circ M^i$ (стационарность означает, что сюда входят лишь граничные, неизменяемые, элементы допустимого массива $\left(u_{jr}^i\right)$). Анализ формулы (2.5) порождает для 16-ти элементов матрицы $M^i = \left(M_{jr}^i\right)$ равенства

$$
\begin{aligned}
&M_{00}^i = 36\,\Omega_{00}^i - 16\,\Omega_{11}^i - 8\,\Omega_{12}^i - 8\,\Omega_{21}^i - 4\,\Omega_{22}^i, && M_{01}^i = 36\,\Omega_{01}^i + 24\,\Omega_{11}^i + 12\,\Omega_{21}^i,\\
&M_{02}^i = 36\,\Omega_{02}^i + 24\,\Omega_{12}^i + 12\,\Omega_{22}^i, && M_{03}^i = 36\,\Omega_{03}^i - 8\,\Omega_{11}^i - 16\,\Omega_{12}^i - 4\,\Omega_{21}^i - 8\,\Omega_{22}^i,\\
&M_{10}^i = 36\,\Omega_{10}^i + 24\,\Omega_{11}^i + 12\,\Omega_{12}^i, \quad M_{11}^i = M_{12}^i = 0, && M_{13}^i = 12\,\Omega_{11}^i + 24\,\Omega_{12}^i + 36\,\Omega_{13}^i,\\
&M_{20}^i = 36\,\Omega_{20}^i + 24\,\Omega_{21}^i + 12\,\Omega_{22}^i, \quad M_{21}^i = M_{22}^i = 0, && M_{23}^i = 12\,\Omega_{21}^i + 24\,\Omega_{22}^i + 36\,\Omega_{23}^i,\\
&M_{30}^i = 36\,\Omega_{30}^i - 8\,\Omega_{11}^i - 4\,\Omega_{12}^i - 16\,\Omega_{21}^i - 8\,\Omega_{22}^i, && M_{31}^i = 12\,\Omega_{11}^i + 24\,\Omega_{21}^i + 36\,\Omega_{31}^i,\\
&M_{32}^i = 12\,\Omega_{12}^i + 24\,\Omega_{22}^i + 36\,\Omega_{32}^i, && M_{33}^i = 36\,\Omega_{33}^i - 4\,\Omega_{11}^i - 8\,\Omega_{12}^i - 8\,\Omega_{21}^i - 16\,\Omega_{22}^i.
\end{aligned}
$$

В соответствии с определением (1.7) функций Ω_{jr}^i и тождествами (3.6) справедливо

$$
\begin{aligned}
36\,\Omega_{0r}^i + 24\,\Omega_{1r}^i + 12\,\Omega_{2r}^i &= 12\,\omega_i''(s)\,(3-\sigma_0)\,\omega_r(\sigma_1) + 12\,\theta_1\,\omega_i(s)\,(3-\sigma_0)\,\omega_r''(\sigma_1) =\\
&= 18\,\omega_i''(s)\,(1-\beta_0)\,\omega_r\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_1)\big) + 18\,\theta_1\,\omega_i(s)\,(1-\beta_0)\,\omega_r''\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_1)\big),\\
36\,\Omega_{j0}^i + 24\,\Omega_{j1}^i + 12\,\Omega_{j2}^i &= 12\,\omega_i''(s)\,\omega_j(\sigma_0)\,(3-\sigma_1) + 12\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\omega_j''(\sigma_0)\,(3-\sigma_1) =\\
&= 18\,\omega_i''(s)\,\omega_j\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_0)\big)\,(1-\beta_1) + 18\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\omega_j''\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_0)\big)\,(1-\beta_1),\\
12\,\Omega_{1r}^i + 24\,\Omega_{2r}^i + 36\,\Omega_{3r}^i &= 12\,\omega_i''(s)\,\sigma_0\,\omega_r(\sigma_1) + 12\,\theta_1\,\omega_i(s)\,\sigma_0\,\omega_r''(\sigma_1) =\\
&= 18\,\omega_i''(s)\,(1+\beta_0)\,\omega_r\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_1)\big) + 18\,\theta_1\,\omega_i(s)\,(1+\beta_0)\,\omega_r''\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_1)\big),\\
12\,\Omega_{j1}^i + 24\,\Omega_{j2}^i + 36\,\Omega_{j3}^i &= 12\,\omega_i''(s)\,\omega_j(\sigma_0)\,\sigma_1 + 12\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\omega_j''(\sigma_0)\,\sigma_1 =\\
&= 18\,\omega_i''(s)\,\omega_j\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_0)\big)\,(1+\beta_1) + 18\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\omega_j''\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\beta_0)\big)\,(1+\beta_1).
\end{aligned}
$$

Следовательно, для всех $(j,r) \in \big[\,\{0,3\} \times \{1,2\}\,\big] \cup \big[\,\{1,2\} \times \{0,3\}\,\big]$ имеет место равенство

$$
M_{jr}^i = a_{jr}\,\omega_i''(s) + b_{jr}\,\omega_i(s), \tag{4.1}
$$

где фигурируют следующие полиномы:

$$
\begin{aligned}
a_{01} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1-\beta_0)\,(1-3\,\beta_1)\,(1-\beta_1^2), & b_{01} &\doteq -9\,\theta_1(1-\beta_0)\,(1-9\,\beta_1),\\
a_{02} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1-\beta_0)\,(1+3\,\beta_1)\,(1-\beta_1^2), & b_{02} &\doteq -9\,\theta_1(1-\beta_0)\,(1+9\,\beta_1),\\
a_{31} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1+\beta_0)\,(1-3\,\beta_1)\,(1-\beta_1^2), & b_{31} &\doteq -9\,\theta_1(1+\beta_0)\,(1-9\,\beta_1),\\
a_{32} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1+\beta_0)\,(1+3\,\beta_1)\,(1-\beta_1^2), & b_{32} &\doteq -9\,\theta_1(1+\beta_0)\,(1+9\,\beta_1),\\
a_{10} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1-3\,\beta_0)\,(1-\beta_1)\,(1-\beta_0^2), & b_{10} &\doteq -9\,\theta_0(1-9\,\beta_0)\,(1-\beta_1),\\
a_{20} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1+3\,\beta_0)\,(1-\beta_1)\,(1-\beta_0^2), & b_{20} &\doteq -9\,\theta_0(1+9\,\beta_0)\,(1-\beta_1),\\
a_{13} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1-3\,\beta_0)\,(1+\beta_1)\,(1-\beta_0^2), & b_{13} &\doteq -9\,\theta_0(1-9\,\beta_0)\,(1+\beta_1),\\
a_{23} &\doteq \tfrac{81}{8}\,(1+3\,\beta_0)\,(1+\beta_1)\,(1-\beta_0^2), & b_{23} &\doteq -9\,\theta_0(1+9\,\beta_0)\,(1+\beta_1).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Так как $M^i_{jr} = 0$ для всех $(j,r) \in \{1,2\}^2$, то можно считать, что формула (4.1) верна и для этих индексов (полагаем по определению $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$). Осталось преобразовать к виду (4.1) «угловые» элементы M^i_{jr}, $(j,r) \in \{0,3\}^2$. В построениях используются четный многочлен $T \doteq \frac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2$ и полиномы

$$\omega_{21}(\zeta) \doteq 2\,\omega_1(\zeta) + \omega_2(\zeta) = \tfrac{1}{2}\,\zeta\,(\,3-\zeta\,)^2, \qquad \omega_{12}(\zeta) \doteq \omega_1(\zeta) + 2\,\omega_2(\zeta) = \tfrac{1}{2}\,\zeta^2\,(\,3-\zeta\,),$$

порожденные многочленами Лагранжа (1.1), такие, что

$$\omega_{21}\big(\tfrac{3}{2}\,(\,1{+}\lambda\,)\big) = \tfrac{27}{16}\,(\,1{-}\lambda\,)\,(\,1{-}\lambda^2), \qquad \omega''_{21}\big(\tfrac{3}{2}\,(\,1{+}\lambda\,)\big) = -\tfrac{3}{2}\,(\,1{-}3\,\lambda\,),$$

$$\omega_{12}\big(\tfrac{3}{2}\,(\,1{+}\lambda\,)\big) = \tfrac{27}{16}\,(\,1{+}\lambda\,)\,(\,1{-}\lambda^2), \qquad \omega''_{12}\big(\tfrac{3}{2}\,(\,1{+}\lambda\,)\big) = -\tfrac{3}{2}\,(\,1{+}3\,\lambda\,).$$

В соответствии с этими определениями и определением (1.7) справедлива цепочка равенств

$$M^i_{00} = 36\,\Omega^i_{00} - 16\,\Omega^i_{11} - 8\,\Omega^i_{12} - 8\,\Omega^i_{21} - 4\,\Omega^i_{22} =$$

$$= 36\,\omega''_i(s)\,\omega_0(\sigma_0)\,\omega_0(\sigma_1) + 36\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\omega''_0(\sigma_0)\,\omega_0(\sigma_1) + 36\,\theta_1\,\omega_i(s)\,\omega_0(\sigma_0)\,\omega''_0(\sigma_1) -$$

$$- 4\,\omega''_i(s)\,\omega_{21}(\sigma_0)\,\omega_{21}(\sigma_1) - 4\,\theta_0\,\omega_i(s)\,\omega''_{21}(\sigma_0)\,\omega_{21}(\sigma_1) - 4\,\theta_1\omega_i(s)\,\omega_{21}(\sigma_0)\,\omega''_{21}(\sigma_1) =$$

$$= \tfrac{9}{64}\,\omega''_i(s)\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}9\,\beta_0^2)\,(\,1{-}\beta_1)\,(\,1{-}9\,\beta_1^2) - \tfrac{9}{8}\,\theta_0\,\omega_i(s)\,(\,1{-}3\,\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1)\,(\,1{-}9\,\beta_1^2) -$$

$$- \tfrac{9}{8}\,\theta_1\omega_i(s)\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}9\,\beta_0^2)\,(\,1{-}3\,\beta_1) - \tfrac{729}{64}\,\omega''_i(s)\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}\beta_0^2)\,(\,1{-}\beta_1)\,(\,1{-}\beta_1^2) +$$

$$+ \tfrac{81}{8}\,\theta_0\,\omega_i(s)\,(\,1{-}3\,\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1)\,(\,1{-}\beta_1^2) + \tfrac{81}{8}\,\theta_1\omega_i(s)\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}\beta_0^2)\,(\,1{-}3\,\beta_1) =$$

$$= -\tfrac{81}{8}\,\omega''_i(s)\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1)\,T + 9\,\theta_0\,\omega_i(s)\,(\,1{-}3\,\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1) + 9\,\theta_1\,\omega_i(s)\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}3\,\beta_1).$$

Следовательно, имеет место формула $M^i_{00} = a_{00}\,\omega''_i(s) + b_{00}\,\omega_i(s)$ вида (4.1), в которой

$$a_{00} \doteq -\tfrac{81}{8}\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1)\,\big(\,\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\big), \qquad b_{00} \doteq 9\,\theta_0(\,1{-}3\,\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1) + 9\,\theta_1(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{-}3\,\beta_1). \tag{4.3}$$

Формула вида (4.1) верна и для индексов $(j,r) \in \big\{(0,3),(3,0),(3,3)\big\}$. Здесь справедливы аналогичные выкладки, в результате которых получаем формулы

$$a_{03} \doteq -\tfrac{81}{8}\,(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{+}\beta_1)\,\big(\,\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\big), \qquad b_{03} \doteq 9\,\theta_0(\,1{-}3\,\beta_0)\,(\,1{+}\beta_1) + 9\,\theta_1(\,1{-}\beta_0)\,(\,1{+}3\,\beta_1),$$

$$a_{30} \doteq -\tfrac{81}{8}\,(\,1{+}\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1)\,\big(\,\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\big), \qquad b_{30} \doteq 9\,\theta_0(\,1{+}3\,\beta_0)\,(\,1{-}\beta_1) + 9\,\theta_1(\,1{+}\beta_0)\,(\,1{-}3\,\beta_1),$$

$$a_{33} \doteq -\tfrac{81}{8}\,(\,1{+}\beta_0)\,(\,1{+}\beta_1)\,\big(\,\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\big), \qquad b_{33} \doteq 9\,\theta_0(\,1{+}3\,\beta_0)\,(\,1{+}\beta_1) + 9\,\theta_1(\,1{+}\beta_0)\,(\,1{+}3\,\beta_1). \tag{4.4}$$

§ 5. Регулярное представление функционала невязок

Мы показали, что для всех многочленов M^i_{jr}, $(j,r) \in \big\{0,1,2,3\big\}^2$ имеет место представление (4.1). Определим, далее, двумерное множество индексов $I \doteq \big\{0,1,2,3\big\}^2 \backslash \big\{1,2\big\}^2$ и его подмножества $K \doteq \big\{0,3\big\}^2$, $K_0 \doteq \big\{1,2\big\} \times \big\{0,3\big\}$, $K_1 \doteq \big\{0,3\big\} \times \big\{1,2\big\}$. Справедлива цепочка равенств

$$\sum_{i=0}^{3} U^{3k-3+i} \circ M^{\,i} = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr} M^i_{jr} = \sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3}\Big[\,\sum_{i=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr} M^i_{jr}\,\Big] =$$

$$= \sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3} a_{jr}\,\Big\{\sum_{i=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr}\omega''_i(s)\Big\} + \sum_{j=0}^{3}\sum_{r=0}^{3} b_{jr}\,\Big\{\sum_{i=0}^{3} u^{3k-3+i}_{jr}\omega_i(s)\Big\} = \sum_{(j,r)\in I}\Big[\,a_{jr}\,\varphi^k_{jr} + b_{jr}\,\psi^k_{jr}\,\Big].$$

Обозначили суммы, стоящие в фигурных скобках, через φ_{jr}^k и ψ_{jr}^k соответственно. Для всех $(j,r)\in I$ определим граничные конечные разности

$$
\begin{aligned}
z_{jr}^k &\doteq u_{jr}^{3k-3}-u_{jr}^{3k-2}-u_{jr}^{3k-1}+u_{jr}^{3k}, \qquad & w_{jr}^k &\doteq u_{jr}^{3k-3}-3\,u_{jr}^{3k-2}+3\,u_{jr}^{3k-1}-u_{jr}^{3k},\\
p_{jr}^k &\doteq u_{jr}^{3k-3}-9\,u_{jr}^{3k-2}-9\,u_{jr}^{3k-1}+u_{jr}^{3k}, \qquad & q_{jr}^k &\doteq u_{jr}^{3k-3}-27\,u_{jr}^{3k-2}+27\,u_{jr}^{3k-1}-u_{jr}^{3k}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Тогда в соответствии с определением (1.1) многочленов $\omega_i(s)=\omega_i\big(\tfrac{3}{2}\,(1+\alpha)\big)$ справедливо

$$
\varphi_{jr}^k=\tfrac12\left[\,u_{jr}^{3k-3}-u_{jr}^{3k-2}-u_{jr}^{3k-1}+u_{jr}^{3k}\,\right]-\tfrac32\,\alpha\left[\,u_{jr}^{3k-3}-3\,u_{jr}^{3k-2}+3\,u_{jr}^{3k-1}-u_{jr}^{3k}\,\right]=\tfrac12\,z_{jr}^k-\tfrac32\,\alpha\,w_{jr}^k,
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{jr}^k=-\tfrac{1}{16}\left[\,u_{jr}^{3k-3}-9\,u_{jr}^{3k-2}-9\,u_{jr}^{3k-1}+u_{jr}^{3k}\,\right]+\tfrac{1}{16}\,\alpha\left[\,u_{jr}^{3k-3}-27\,u_{jr}^{3k-2}+27\,u_{jr}^{3k-1}-u_{jr}^{3k}\,\right]+\\
+\tfrac{9}{16}\,\alpha^2\left[\,u_{jr}^{3k-3}-u_{jr}^{3k-2}-u_{jr}^{3k-1}+u_{jr}^{3k}\,\right]-\tfrac{9}{16}\,\alpha^3\left[\,u_{jr}^{3k-3}-3\,u_{jr}^{3k-2}+3\,u_{jr}^{3k-1}-u_{jr}^{3k}\,\right]=\\
=-\tfrac{1}{16}\,p_{jr}^k+\tfrac{1}{16}\,\alpha\,q_{jr}^k+\tfrac{9}{16}\,\alpha^2 z_{jr}^k-\tfrac{9}{16}\,\alpha^3\,w_{jr}^k.
\end{aligned}
$$

Следовательно, имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
16\sum_{i=0}^{3}U^{3k-3+i}\circ M^i=16\sum_{(j,r)\in I}\Big[a_{jr}\,\varphi_{jr}^k+b_{jr}\,\psi_{jr}^k\Big]=8\sum_{(j,r)\in I}a_{jr}\,z_{jr}^k-24\,\alpha\sum_{(j,r)\in I}a_{jr}\,w_{jr}^k-\\
-\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}\,p_{jr}^k+\alpha\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}\,q_{jr}^k+9\,\alpha^2\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}\,z_{jr}^k-9\,\alpha^3\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}\,w_{jr}^k.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Для полиномов a_{jr}, b_{jr}, определенных формулами (4.2)–(4.4), справедливы представления

$$
a_{jr}=\tfrac{81}{8}\left[\,a_{jr}^{00}+\beta_0 a_{jr}^{01}+\beta_1 a_{jr}^{10}+\beta_0\beta_1\,a_{jr}^{11}\,\right]\Lambda_{jr}, \qquad b_{jr}=9\left[\,b_{jr}^{00}+\beta_0 b_{jr}^{01}+\beta_1 b_{jr}^{10}+\beta_0\beta_1 b_{jr}^{11}\,\right],
$$

где числа $a_{jr}^{\mu\nu}$, $b_{jr}^{\mu\nu}$ и четные полиномы Λ_{jr} сведены в единую таблицу.

Таблица 1

	(j,r)	a_{jr}^{00}	a_{jr}^{01}	a_{jr}^{10}	a_{jr}^{11}	Λ_{jr}	b_{jr}^{00}	b_{jr}^{01}	b_{jr}^{10}	b_{jr}^{11}
K	$(0,0)$	-1	1	1	-1	$\frac{10}{9}-\beta_0^2-\beta_1^2$	$\theta_0+\theta_1$	$-3\,\theta_0-\theta_1$	$-\theta_0-3\,\theta_1$	$3\,\theta_0+3\,\theta_1$
	$(0,3)$	-1	1	-1	1		$\theta_0+\theta_1$	$-3\,\theta_0-\theta_1$	$\theta_0+3\,\theta_1$	$-3\,\theta_0-3\,\theta_1$
	$(3,0)$	-1	-1	1	1		$\theta_0+\theta_1$	$3\,\theta_0+\theta_1$	$-\theta_0-3\,\theta_1$	$-3\,\theta_0-3\,\theta_1$
	$(3,3)$	-1	-1	-1	-1		$\theta_0+\theta_1$	$3\,\theta_0+\theta_1$	$\theta_0+3\,\theta_1$	$3\,\theta_0+3\,\theta_1$
K_0	$(1,0)$	1	-3	-1	3	$1-\beta_0^2$	$-\theta_0$	$9\,\theta_0$	θ_0	$-9\,\theta_0$
	$(1,3)$	1	-3	1	-3		$-\theta_0$	$9\,\theta_0$	$-\theta_0$	$9\,\theta_0$
	$(2,0)$	1	3	-1	-3		$-\theta_0$	$-9\,\theta_0$	θ_0	$9\,\theta_0$
	$(2,3)$	1	3	1	3		$-\theta_0$	$-9\,\theta_0$	$-\theta_0$	$-9\,\theta_0$
K_1	$(0,1)$	1	-1	-3	3	$1-\beta_1^2$	$-\theta_1$	θ_1	$9\,\theta_1$	$-9\,\theta_1$
	$(0,2)$	1	-1	3	-3		$-\theta_1$	θ_1	$-9\,\theta_1$	$9\,\theta_1$
	$(3,1)$	1	1	-3	-3		$-\theta_1$	$-\theta_1$	$9\,\theta_1$	$9\,\theta_1$
	$(3,2)$	1	1	3	3		$-\theta_1$	$-\theta_1$	$-9\,\theta_1$	$-9\,\theta_1$

Преобразуем шесть сумм из формулы (5.2). Имеет место равенство

$$
\tfrac19\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}\,p_{jr}^k=\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}^{00}\,p_{jr}^k+\beta_0\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}^{01}\,p_{jr}^k+\beta_1\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}^{10}\,p_{jr}^k+\beta_0\beta_1\sum_{(j,r)\in I}b_{jr}^{11}\,p_{jr}^k=
$$

$$= \left\langle b^{00}, p^k \right\rangle^I + \beta_0 \left\langle b^{01}, p^k \right\rangle^I + \beta_1 \left\langle b^{10}, p^k \right\rangle^I + \beta_0\beta_1 \left\langle b^{11}, p^k \right\rangle^I. \tag{5.3}$$

(Здесь и далее для линейных форм вида $\sum\limits_{(j,r)\in I} b^{00}_{jr}\, p^k_{jr}$ используем обозначение $\left\langle b^{00}, p^k \right\rangle^I$.) Аналогичным образом получаем еще три равенства, содержащие числа $b^{\mu\nu}_{jr}$:

$$\tfrac{1}{9} \sum_{(j,r)\in I} b_{jr}\, q^k_{jr} = \left\langle b^{00}, q^k \right\rangle^I + \beta_0 \left\langle b^{01}, q^k \right\rangle^I + \beta_1 \left\langle b^{10}, q^k \right\rangle^I + \beta_0\beta_1 \left\langle b^{11}, q^k \right\rangle^I,$$

$$\tfrac{1}{9} \sum_{(j,r)\in I} b_{jr}\, z^k_{jr} = \left\langle b^{00}, z^k \right\rangle^I + \beta_0 \left\langle b^{01}, z^k \right\rangle^I + \beta_1 \left\langle b^{10}, z^k \right\rangle^I + \beta_0\beta_1 \left\langle b^{11}, z^k \right\rangle^I,$$

$$\tfrac{1}{9} \sum_{(j,r)\in I} b_{jr}\, w^k_{jr} = \left\langle b^{00}, w^k \right\rangle^I + \beta_0 \left\langle b^{01}, w^k \right\rangle^I + \beta_1 \left\langle b^{10}, w^k \right\rangle^I + \beta_0\beta_1 \left\langle b^{11}, w^k \right\rangle^I. \tag{5.4}$$

Справедливы две цепочки равенств, содержащие константы $a^{\mu\nu}_{jr}$:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{8}{81} \sum_{(j,r)\in I} a_{jr}\, z^k_{jr} = \\
&\quad = \sum_{(j,r)\in I} a^{00}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, z^k_{jr} + \beta_0 \sum_{(j,r)\in I} a^{01}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, z^k_{jr} + \beta_1 \sum_{(j,r)\in I} a^{10}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, z^k_{jr} + \beta_0\beta_1 \sum_{(j,r)\in I} a^{11}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, z^k_{jr} = \\
&\quad = \left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{00}, z^k \right\rangle^K + (1-\beta_0^2) \left\langle a^{00}, z^k \right\rangle^{K_0} + (1-\beta_1^2) \left\langle a^{00}, z^k \right\rangle^{K_1} + \\
&\quad + \beta_0\left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{01}, z^k \right\rangle^K + \beta_0(1-\beta_0^2) \left\langle a^{01}, z^k \right\rangle^{K_0} + \beta_0(1-\beta_1^2) \left\langle a^{01}, z^k \right\rangle^{K_1} + \\
&\quad + \beta_1\left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{10}, z^k \right\rangle^K + \beta_1(1-\beta_0^2) \left\langle a^{10}, z^k \right\rangle^{K_0} + \beta_1(1-\beta_1^2) \left\langle a^{10}, z^k \right\rangle^{K_1} + \\
&\quad + \beta_0\beta_1\left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{11}, z^k \right\rangle^K + \beta_0\beta_1(1-\beta_0^2) \left\langle a^{11}, z^k \right\rangle^{K_0} + \beta_0\beta_1(1-\beta_1^2) \left\langle a^{11}, z^k \right\rangle^{K_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{8}{81} \sum_{(j,r)\in I} a_{jr}\, w^k_{jr} = \\
&\quad = \sum_{(j,r)\in I} a^{00}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, w^k_{jr} + \beta_0 \sum_{(j,r)\in I} a^{01}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, w^k_{jr} + \beta_1 \sum_{(j,r)\in I} a^{10}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, w^k_{jr} + \beta_0\beta_1 \sum_{(j,r)\in I} a^{11}_{jr}\,\Lambda_{jr}\, w^k_{jr} = \\
&\quad = \left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{00}, w^k \right\rangle^K + (1-\beta_0^2) \left\langle a^{00}, w^k \right\rangle^{K_0} + (1-\beta_1^2) \left\langle a^{00}, w^k \right\rangle^{K_1} + \\
&\quad + \beta_0\left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{01}, w^k \right\rangle^K + \beta_0(1-\beta_0^2) \left\langle a^{01}, w^k \right\rangle^{K_0} + \beta_0(1-\beta_1^2) \left\langle a^{01}, w^k \right\rangle^{K_1} + \\
&\quad + \beta_1\left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{10}, w^k \right\rangle^K + \beta_1(1-\beta_0^2) \left\langle a^{10}, w^k \right\rangle^{K_0} + \beta_1(1-\beta_1^2) \left\langle a^{10}, w^k \right\rangle^{K_1} + \\
&\quad + \beta_0\beta_1\left(\tfrac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2\right) \left\langle a^{11}, w^k \right\rangle^K + \beta_0\beta_1(1-\beta_0^2) \left\langle a^{11}, w^k \right\rangle^{K_0} + \beta_0\beta_1(1-\beta_1^2) \left\langle a^{11}, w^k \right\rangle^{K_1}.
\end{aligned}$$

Пусть, далее, $I_0 \doteq K\cup K_0 = \{0,1,2,3\}\times\{0,3\}$, $I_1 \doteq K\cup K_1 = \{0,3\}\times\{0,1,2,3\}$. В соответствии с тождеством $\frac{10}{9} - \beta_0^2 - \beta_1^2 = -\frac{8}{9} + (1-\beta_0^2) + (1-\beta_1^2)$ справедлива перегруппировка слагаемых:

$$\begin{aligned}
\tfrac{8}{81} \sum_{(j,r)\in I} a_{jr}\, z^k_{jr} &= -\tfrac{8}{9} \left\langle a^{00}, z^k \right\rangle^K + (1-\beta_0^2) \left\langle a^{00}, z^k \right\rangle^{I_0} + (1-\beta_1^2) \left\langle a^{00}, z^k \right\rangle^{I_1} - \\
&- \tfrac{8}{9}\beta_0 \left\langle a^{01}, z^k \right\rangle^K + \beta_0(1-\beta_0^2) \left\langle a^{01}, z^k \right\rangle^{I_0} + \beta_0(1-\beta_1^2) \left\langle a^{01}, z^k \right\rangle^{I_1} - \\
&- \tfrac{8}{9}\beta_1 \left\langle a^{10}, z^k \right\rangle^K + \beta_1(1-\beta_0^2) \left\langle a^{10}, z^k \right\rangle^{I_0} + \beta_1(1-\beta_1^2) \left\langle a^{10}, z^k \right\rangle^{I_1} - \\
&- \tfrac{8}{9}\beta_0\beta_1 \left\langle a^{11}, z^k \right\rangle^K + \beta_0\beta_1(1-\beta_0^2) \left\langle a^{11}, z^k \right\rangle^{I_0} + \beta_0\beta_1(1-\beta_1^2) \left\langle a^{11}, z^k \right\rangle^{I_1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{8}{81}\sum_{(j,r)\in I} a_{jr}\, w^k_{jr} \ &= -\tfrac{8}{9}\left\langle a^{00}, w^k\right\rangle^K + (1-\beta_0^2)\left\langle a^{00}, w^k\right\rangle^{I_0} + (1-\beta_1^2)\left\langle a^{00}, w^k\right\rangle^{I_1} - \\
&- \tfrac{8}{9}\beta_0\left\langle a^{01}, w^k\right\rangle^K + \beta_0(1-\beta_0^2)\left\langle a^{01}, w^k\right\rangle^{I_0} + \beta_0(1-\beta_1^2)\left\langle a^{01}, w^k\right\rangle^{I_1} - \\
&- \tfrac{8}{9}\beta_1\left\langle a^{10}, w^k\right\rangle^K + \beta_1(1-\beta_0^2)\left\langle a^{10}, w^k\right\rangle^{I_0} + \beta_1(1-\beta_1^2)\left\langle a^{10}, w^k\right\rangle^{I_1} - \\
&- \tfrac{8}{9}\beta_0\beta_1\left\langle a^{11}, w^k\right\rangle^K + \beta_0\beta_1(1-\beta_0^2)\left\langle a^{11}, w^k\right\rangle^{I_0} + \beta_0\beta_1(1-\beta_1^2)\left\langle a^{11}, w^k\right\rangle^{I_1}.
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

В силу (5.3)–(5.5) формула (5.2) получает представление, аналогичное формуле (3.7):

$$
\tfrac{16}{81}\sum_{i=0}^{3} U^{3k-3+i}\circ M^{\,i} = h^k_0 + \alpha\, h^k_1 + \beta_0 h^k_2 + \alpha\,\beta_0 h^k_3 + \beta_1 h^k_4 + \alpha\,\beta_1 h^k_5 + \beta_0\beta_1 h^k_6 + \alpha\,\beta_0\beta_1 h^k_7, \tag{5.6}
$$

где четные полиномы $h^k_\ell = h^k_\ell(\alpha,\beta_0,\beta_1)$, $\ell = 0,1,\dots,7$, определены следующим образом:

$$
\begin{aligned}
h^k_0 &\doteq -\tfrac{1}{9}\left\langle b^{00}, p^k\right\rangle^I - \tfrac{8}{9}\left\langle a^{00}, z^k\right\rangle^K + (1-\beta_0^2)\left\langle a^{00}, z^k\right\rangle^{I_0} + (1-\beta_1^2)\left\langle a^{00}, z^k\right\rangle^{I_1} + \alpha^2\left\langle b^{00}, z^k\right\rangle^I, \\
h^k_1 &\doteq \tfrac{1}{9}\left\langle b^{00}, q^k\right\rangle^I + \tfrac{8}{3}\left\langle a^{00}, w^k\right\rangle^K - 3(1-\beta_0^2)\left\langle a^{00}, w^k\right\rangle^{I_0} - 3(1-\beta_1^2)\left\langle a^{00}, w^k\right\rangle^{I_1} - \alpha^2\left\langle b^{00}, w^k\right\rangle^I, \\
h^k_2 &\doteq -\tfrac{1}{9}\left\langle b^{01}, p^k\right\rangle^I - \tfrac{8}{9}\left\langle a^{01}, z^k\right\rangle^K + (1-\beta_0^2)\left\langle a^{01}, z^k\right\rangle^{I_0} + (1-\beta_1^2)\left\langle a^{01}, z^k\right\rangle^{I_1} + \alpha^2\left\langle b^{01}, z^k\right\rangle^I, \\
h^k_3 &\doteq \tfrac{1}{9}\left\langle b^{01}, q^k\right\rangle^I + \tfrac{8}{3}\left\langle a^{01}, w^k\right\rangle^K - 3(1-\beta_0^2)\left\langle a^{01}, w^k\right\rangle^{I_0} - 3(1-\beta_1^2)\left\langle a^{01}, w^k\right\rangle^{I_1} - \alpha^2\left\langle b^{01}, w^k\right\rangle^I, \\
h^k_4 &\doteq -\tfrac{1}{9}\left\langle b^{10}, p^k\right\rangle^I - \tfrac{8}{9}\left\langle a^{10}, z^k\right\rangle^K + (1-\beta_0^2)\left\langle a^{10}, z^k\right\rangle^{I_0} + (1-\beta_1^2)\left\langle a^{10}, z^k\right\rangle^{I_1} + \alpha^2\left\langle b^{10}, z^k\right\rangle^I, \\
h^k_5 &\doteq \tfrac{1}{9}\left\langle b^{10}, q^k\right\rangle^I + \tfrac{8}{3}\left\langle a^{10}, w^k\right\rangle^K - 3(1-\beta_0^2)\left\langle a^{10}, w^k\right\rangle^{I_0} - 3(1-\beta_1^2)\left\langle a^{10}, w^k\right\rangle^{I_1} - \alpha^2\left\langle b^{10}, w^k\right\rangle^I, \\
h^k_6 &\doteq -\tfrac{1}{9}\left\langle b^{11}, p^k\right\rangle^I - \tfrac{8}{9}\left\langle a^{11}, z^k\right\rangle^K + (1-\beta_0^2)\left\langle a^{11}, z^k\right\rangle^{I_0} + (1-\beta_1^2)\left\langle a^{11}, z^k\right\rangle^{I_1} + \alpha^2\left\langle b^{11}, z^k\right\rangle^I, \\
h^k_7 &\doteq \tfrac{1}{9}\left\langle b^{11}, q^k\right\rangle^I + \tfrac{8}{3}\left\langle a^{11}, w^k\right\rangle^K - 3(1-\beta_0^2)\left\langle a^{11}, w^k\right\rangle^{I_0} - 3(1-\beta_1^2)\left\langle a^{11}, w^k\right\rangle^{I_1} - \alpha^2\left\langle b^{11}, w^k\right\rangle^I.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

В силу (3.7) и (5.6) формула (2.4) принимает вид $f_k(t,\xi_0,\xi_1) = \frac{9}{64}\,\mathrm{a}\,\tau^{-2}F_k(\alpha,\beta_0,\beta_1)$, где

$$
F_k(\alpha,\beta_0,\beta_1) \doteq f^k_0 + \alpha\, f^k_1 + \beta_0 f^k_2 + \alpha\,\beta_0 f^k_3 + \beta_1 f^k_4 + \alpha\,\beta_1 f^k_5 + \beta_0\beta_1 f^k_6 + \alpha\,\beta_0\beta_1 f^k_7,
$$

а четные полиномы

$$
f^k_\ell \doteq \mathrm{g}^k_\ell + h^k_\ell, \qquad \ell = 0,1,\dots,7, \tag{5.8}
$$

определены, в свою очередь, через многочлены (3.8) и (5.7). Согласно (1.3), (3.4) справедливо $\alpha = \frac{2t}{3\tau} - 2k + 1$, $\beta_0 = 2\,\xi_0 - 1$, $\beta_1 = 2\,\xi_1 - 1$ (как следствие, $dt = \frac{3}{2}\,\tau\, d\alpha$, $d\xi_0 = \frac{1}{2}\, d\beta_0$, $d\xi_1 = \frac{1}{2}\, d\beta_1$). Следовательно, для слагаемых J^k функционала (1.6) имеет место цепочка равенств

$$
J^k = \int_{\Pi^k} f_k^2(t,\xi_0,\xi_1)\, dt\, d\xi_0 d\xi_1 = 3^4\, 2^{-12}\, \mathrm{a}^2\, \tau^{-4} \int_{(3k-3)\,\tau}^{3k\,\tau}\int_0^1\int_0^1 F_k^2(\alpha,\beta_0,\beta_1)\, dt\, d\xi_0 d\xi_1 =
$$

$$
= 3^5\, 2^{-15}\, \mathrm{a}^2\, \tau^{-3}\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 F_k^2(\alpha,\beta_0,\beta_1)\, d\alpha\, d\beta_0 d\beta_1,
$$

причем в силу четности всех полиномов $f^k_\ell = f^k_\ell(\alpha,\beta_0,\beta_1)$ справедливо представление

$$
\begin{aligned}
3^{-5}\, 2^{15}\, \mathrm{a}^{-2}\, \tau^3\, J^k = \int_M \Big[& \left(f^k_0\right)^2 + \alpha^2\left(f^k_1\right)^2 + \beta_0^2\left(f^k_2\right)^2 + \alpha^2\beta_0^2\left(f^k_3\right)^2 + \\
& + \beta_1^2\left(f^k_4\right)^2 + \alpha^2\beta_1^2\left(f^k_5\right)^2 + \beta_0^2\beta_1^2\left(f^k_6\right)^2 + \alpha^2\beta_0^2\beta_1^2\left(f^k_7\right)^2 \Big]\, d\mu.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Здесь и далее для интегралов, определенных в кубе $M \doteq [-1,1]^3$, применяем обозначения

$$\int_M F\,d\mu \doteq \int_M F(\alpha,\beta_0,\beta_1)\,d\mu \doteq \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 F(\alpha,\beta_0,\beta_1)\,d\alpha\,d\beta_0 d\beta_1.$$

Итак, мы представили функционал (1.5) в виде суммы из N слагаемых (см. (1.6)), причем каждое слагаемое J^k само является суммой восьми интегральных слагаемых, входящих в формулу (5.9). Эти слагаемые, в свою очередь, порождены полиномами (5.8) (точнее, полиномами (3.8) и (5.7)) и в совокупности зависят от некоторых переменных (2.2) и от всех переменных (2.7), а именно, они зависят от $12N-4$ переменных

$$x_{00}^{3k},\ x_{01}^{3k},\ x_{10}^{3k},\ x_{11}^{3k},\quad k=1,\dots,n,\quad X_{00}^k,\ Y_{00}^k,\ X_{01}^k,\ Y_{01}^k,\ X_{10}^k,\ Y_{10}^k,\ X_{11}^k,\ Y_{11}^k,\quad k=1,\dots,N.$$

(Заметим еще, что матрица перехода от этих переменных к искомым переменным u_{11}^i, u_{12}^i, u_{21}^i, u_{22}^i, $i=1,\dots,3N-1$, — невырожденная.) Для нахождения минимума функционала (1.5) необходимо вычислить его частные производные по всем указанным переменным.

§ 6. Простые частные производные функционала невязок

Вычисления настоящего параграфа опираются на формулы (5.8), (3.8), (5.9) и (3.5).

6.1. Согласно формулам (5.8) и (3.8) для всех $k=1,\dots,N$ справедливо равенство

$$f_0^k = -\big[\,x_{00}^{3k-3}+x_{00}^{3k}\,\big]\,S + \tfrac{9}{8}\,X_{00}^k\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big] + h_0^k. \tag{6.1}$$

Следовательно, вычислив с помощью формулы (5.9) частную производную $\partial J/\partial X_{00}^k$ (переменная X_{00}^k не входит в полиномы $f_1^k,\dots,f_7^k$) и приравняв ее к нулю, получаем равенства

$$3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J\,/\partial X_{00}^k\,\big] = 3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J^k/\partial X_{00}^k\,\big] = \tfrac{8}{9}\int_M f_0^k\,\big[\,\partial f_0^k\,/\partial X_{00}^k\,\big]\,d\mu,$$

$$0 = A_0\big[\,x_{00}^{3k-3}+x_{00}^{3k}\,\big] + B_0 X_{00}^k + H_0^k, \tag{6.2}$$

где

$$\begin{aligned}
A_0 &\doteq -\int_M S\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu = -\tfrac{128}{135}\,\big(\,3\,\theta_0+3\,\theta_1+3\,\theta_0^2+5\,\theta_0\theta_1+3\,\theta_1^2\,\big),\\
B_0 &\doteq \tfrac{9}{8}\int_M \big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]^2 d\mu = \tfrac{64}{75}\,\big(\,3+5\,\theta_0+5\,\theta_1+3\,\theta_0^2+5\,\theta_0\theta_1+3\,\theta_1^2\,\big),\\
H_0^k &\doteq \int_M h_0^k\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Вычисление интегралов в (6.3) опирается на формулы (3.5) и требует определенных усилий.

Далее мы приводим без комментариев еще 7 совокупностей аналогичных формул. Считаем уместным лишь напомнить, что в вычислениях используются формулы (5.8), (3.8), (5.9), (3.5).

6.2. Для всех $k=1,\dots,N$ справедливо

$$f_1^k = \big[\,x_{00}^{3k-3}-x_{00}^{3k}\,\big]\,S - \tfrac{9}{8}\,Y_{00}^k\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big] + h_1^k, \tag{6.4}$$

$$3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J\,/\partial Y_{00}^k\,\big] = 3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J^k/\partial Y_{00}^k\,\big] = \tfrac{8}{9}\int_M \alpha^2 f_1^k\,\big[\,\partial f_1^k\,/\partial Y_{00}^k\,\big]\,d\mu,$$

$$0 = A_1\big[\,x_{00}^{3k-3}-x_{00}^{3k}\,\big] + B_1 Y_{00}^k + H_1^k, \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &\doteq -\int_M \alpha^2 S\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu = -\tfrac{128}{675}\,\big(\,15\,\theta_0+15\,\theta_1+3\,\theta_0^2+5\,\theta_0\theta_1+3\,\theta_1^2\,\big),\\
B_1 &\doteq \tfrac{9}{8}\int_M \alpha^2\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]^2 d\mu = \tfrac{64}{525}\,\big(\,63+21\,\theta_0+21\,\theta_1+3\,\theta_0^2+5\,\theta_0\theta_1+3\,\theta_1^2\,\big),\\
H_1^k &\doteq -\int_M \alpha^2 h_1^k\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

6.3. Для всех $k = 1, \ldots, N$ справедливо

$$f_2^k = \left[x_{01}^{3k-3} + x_{01}^{3k} \right] P - \tfrac{9}{8} X_{01}^k \left[R + (1-\alpha^2) P \right] + h_2^k, \tag{6.7}$$

$$3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J / \partial X_{01}^k \right] = 3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J^k / \partial X_{01}^k \right] = \tfrac{8}{9} \int_M \beta_0^2 f_2^k \left[\partial f_2^k / \partial X_{01}^k \right] d\mu,$$

$$0 = A_2 \left[x_{01}^{3k-3} + x_{01}^{3k} \right] + B_2 X_{01}^k + H_2^k, \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} A_2 &\doteq -\int_M \beta_0^2 P \left[R + (1-\alpha^2) P \right] d\mu = -\tfrac{128}{1575} \left(21\theta_0 + 5\theta_1 + 105\theta_0^2 + 35\theta_0\theta_1 + 5\theta_1^2 \right), \\ B_2 &\doteq \tfrac{9}{8} \int_M \beta_0^2 \left[R + (1-\alpha^2) P \right]^2 d\mu = \tfrac{64}{525} \left(3 + 21\theta_0 + 5\theta_1 + 63\theta_0^2 + 21\theta_0\theta_1 + 3\theta_1^2 \right), \\ H_2^k &\doteq -\int_M \beta_0^2 h_2^k \left[R + (1-\alpha^2) P \right] d\mu. \end{aligned} \tag{6.9}$$

6.4. Для всех $k = 1, \ldots, N$ справедливо

$$f_3^k = -\left[x_{01}^{3k-3} - x_{01}^{3k} \right] P + \tfrac{9}{8} Y_{01}^k \left[3R + (1-\alpha^2) P \right] + h_3^k, \tag{6.10}$$

$$3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J / \partial Y_{01}^k \right] = 3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J^k / \partial Y_{01}^k \right] = \tfrac{8}{9} \int_M \alpha^2 \beta_0^2 f_3^k \left[\partial f_3^k / \partial Y_{01}^k \right] d\mu,$$

$$0 = A_3 \left[x_{01}^{3k-3} - x_{01}^{3k} \right] + B_3 Y_{01}^k + H_3^k, \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} A_3 &\doteq -\int_M \alpha^2 \beta_0^2 P \left[3R + (1-\alpha^2) P \right] d\mu = -\tfrac{128}{1575} \left(21\theta_0 + 5\theta_1 + 21\theta_0^2 + 7\theta_0\theta_1 + \theta_1^2 \right), \\ B_3 &\doteq \tfrac{9}{8} \int_M \alpha^2 \beta_0^2 \left[3R + (1-\alpha^2) P \right]^2 d\mu = \tfrac{64}{6125} \left(105 + 147\theta_0 + 35\theta_1 + 105\theta_0^2 + 35\theta_0\theta_1 + 5\theta_1^2 \right), \\ H_3^k &\doteq \int_M \alpha^2 \beta_0^2 h_3^k \left[3R + (1-\alpha^2) P \right] d\mu. \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.5. Для всех $k = 1, \ldots, N$ справедливо

$$f_4^k = \left[x_{10}^{3k-3} + x_{10}^{3k} \right] Q - \tfrac{9}{8} X_{10}^k \left[R + (1-\alpha^2) Q \right] + h_4^k, \tag{6.13}$$

$$3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J / \partial X_{10}^k \right] = 3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J^k / \partial X_{10}^k \right] = \tfrac{8}{9} \int_M \beta_1^2 f_4^k \left[\partial f_4^k / \partial X_{10}^k \right] d\mu,$$

$$0 = A_4 \left[x_{10}^{3k-3} + x_{10}^{3k} \right] + B_4 X_{10}^k + H_4^k, \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} A_4 &\doteq -\int_M \beta_1^2 Q \left[R + (1-\alpha^2) Q \right] d\mu = -\tfrac{128}{1575} \left(5\theta_0 + 21\theta_1 + 5\theta_0^2 + 35\theta_0\theta_1 + 105\theta_1^2 \right), \\ B_4 &\doteq \tfrac{9}{8} \int_M \beta_1^2 \left[R + (1-\alpha^2) Q \right]^2 d\mu = \tfrac{64}{525} \left(3 + 5\theta_0 + 21\theta_1 + 3\theta_0^2 + 21\theta_0\theta_1 + 63\theta_1^2 \right), \\ H_4^k &\doteq -\int_M \beta_1^2 h_4^k \left[R + (1-\alpha^2) Q \right] d\mu. \end{aligned} \tag{6.15}$$

6.6. Для всех $k = 1, \ldots, N$ справедливо

$$f_5^k = -\left[x_{10}^{3k-3} - x_{10}^{3k} \right] Q + \tfrac{9}{8} Y_{10}^k \left[3R + (1-\alpha^2) Q \right] + h_5^k, \tag{6.16}$$

$$3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J / \partial Y_{10}^k \right] = 3^{-7} 2^{17} \mathrm{a}^{-2} \tau^3 \left[\partial J^k / \partial Y_{10}^k \right] = \tfrac{8}{9} \int_M \alpha^2 \beta_1^2 f_5^k \left[\partial f_5^k / \partial Y_{10}^k \right] d\mu,$$

$$0 = A_5 \left[x_{10}^{3k-3} - x_{10}^{3k} \right] + B_5 Y_{10}^k + H_5^k, \tag{6.17}$$

$$A_5 \doteq -\int_M \alpha^2\beta_1^2\, Q\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,Q\,\big]\,d\mu = -\tfrac{128}{1575}\,\big(\,5\,\theta_0+21\,\theta_1+\theta_0^2+7\,\theta_0\theta_1+21\,\theta_1^2\,\big),$$
$$B_5 \doteq \tfrac{9}{8}\int_M \alpha^2\beta_1^2\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,Q\,\big]^2 d\mu = \tfrac{64}{6125}\,\big(\,105+35\,\theta_0+147\,\theta_1+5\,\theta_0^2+35\,\theta_0\theta_1+105\,\theta_1^2\,\big),$$
$$H_5^k \doteq \int_M \alpha^2\beta_1^2\, h_5^k\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,Q\,\big]\,d\mu. \tag{6.18}$$

6.7. Для всех $k=1,\ldots,N$ справедливо

$$f_6^k = -\big[\,x_{11}^{3k-3}+x_{11}^{3k}\,\big]\,U+\tfrac{9}{8}\,X_{11}^k\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]+h_6^k, \tag{6.19}$$

$$3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J\,/\partial X_{11}^k\,\big] = 3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J^k/\partial X_{11}^k\,\big] = \tfrac{8}{9}\int_M \beta_0^2\,\beta_1^2 f_6^k\,\big[\,\partial f_6^k\,/\partial X_{11}^k\,\big]\,d\mu,$$
$$0 = A_6\big[\,x_{11}^{3k-3}+x_{11}^{3k}\,\big]+B_6X_{11}^k+H_6^k, \tag{6.20}$$

$$A_6 \doteq -\int_M \beta_0^2\,\beta_1^2\,U\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]\,d\mu = -\tfrac{128}{525}\,\big(\,\theta_0+\theta_1+5\,\theta_0^2+7\,\theta_0\theta_1+5\,\theta_1^2\,\big),$$
$$B_6 \doteq \tfrac{9}{8}\int_M \beta_0^2\,\beta_1^2\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]^2 d\mu = \tfrac{64}{6125}\,\big(\,5+35\,\theta_0+35\,\theta_1+105\,\theta_0^2+147\,\theta_0\theta_1+105\,\theta_1^2\,\big),$$
$$H_6^k \doteq \int_M \beta_0^2\,\beta_1^2\,h_6^k\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]\,d\mu. \tag{6.21}$$

6.8. Для всех $k=1,\ldots,N$ справедливо

$$f_7^k = \big[\,x_{11}^{3k-3}-x_{11}^{3k}\,\big]\,U-\tfrac{9}{8}\,Y_{11}^k\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]+h_7^k, \tag{6.22}$$

$$3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J\,/\partial Y_{11}^k\,\big] = 3^{-7}\,2^{17}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J^k/\partial Y_{11}^k\,\big] = \tfrac{8}{9}\int_M \alpha^2\beta_0^2\beta_1^2 f_7^k\,\big[\,\partial f_7^k\,/\partial Y_{11}^k\,\big]\,d\mu,$$
$$0 = A_7\big[\,x_{11}^{3k-3}-x_{11}^{3k}\,\big]+B_7Y_{11}^k+H_7^k, \tag{6.23}$$

$$A_7 \doteq -\int_M \alpha^2\beta_0^2\beta_1^2\,U\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]\,d\mu = -\tfrac{128}{2625}\,\big(\,5\,\theta_0+5\,\theta_1+5\,\theta_0^2+7\,\theta_0\theta_1+5\,\theta_1^2\,\big),$$
$$B_7 \doteq \tfrac{9}{8}\int_M \alpha^2\beta_0^2\beta_1^2\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]^2 d\mu = \tfrac{192}{6125}\,\big(\,5+7\,\theta_0+7\,\theta_1+5\,\theta_0^2+7\,\theta_0\theta_1+5\,\theta_1^2\,\big), \tag{6.24}$$
$$H_7^k \doteq -\int_M \alpha^2\beta_0^2\beta_1^2\,h_7^k\,\big[\,3R+(\,1-\alpha^2)\,U\,\big]\,d\mu.$$

§ 7. Составные частные производные функционала невязок

7.1. При каждом $k=1,\ldots,n$ переменная x_{00}^{3k} входит в состав ровно двух слагаемых функционала J (в J^k и в J^{k+1}), следовательно, в силу (5.9) имеет место цепочка равенств

$$3^{-5}\,2^{14}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J\,/\partial x_{00}^{3k}\,\big] = 3^{-5}\,2^{14}\,\mathrm{a}^{-2}\,\tau^3\,\big[\,\partial J^k/\partial x_{00}^{3k}+\partial J^{k+1}/\partial x_{00}^{3k}\,\big] =$$

$$= \int_M \Big(\,f_0^k\,\big[\,\partial f_0^k\,/\partial x_{00}^{3k}\,\big]+\alpha^2 f_1^k\,\big[\,\partial f_1^k\,/\partial x_{00}^{3k}\,\big]+f_0^{k+1}\,\big[\,\partial f_0^{k+1}\,/\partial x_{00}^{3k}\,\big]+\alpha^2 f_1^{k+1}\,\big[\,\partial f_1^{k+1}\,/\partial x_{00}^{3k}\,\big]\,\Big)\,d\mu.$$

Воспользовались тем обстоятельством, что переменная x_{00}^{3k} входит только в полиномы f_0^k, f_1^k. Приравняв частную производную $\partial J\,/\partial x_{00}^{3k}$ нулю, получаем уравнение

$$0 = -\int_M \Big[\,f_0^k+f_0^{k+1}+\alpha^2\big(\,f_1^k-f_1^{k+1}\big)\,\Big]\,S\,d\mu.$$

Применили равенства (6.1) и (6.4). В силу этих же равенств имеем

$$f_0^k+f_0^{k+1} = -\big[\,x_{00}^{3k-3}+2\,x_{00}^{3k}+x_{00}^{3k+3}\,\big]\,S+\tfrac{9}{8}\,\big[\,X_{00}^k+X_{00}^{k+1}\,\big]\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]+h_0^k+h_0^{k+1},$$

$$f_1^k - f_1^{k+1} = \big[\, x_{00}^{3k-3} - 2\, x_{00}^{3k} + x_{00}^{3k+3} \,\big]\, S - \tfrac{9}{8} \big[\, Y_{00}^k - Y_{00}^{k+1} \,\big] \big[\, 3R + (\, 1-\alpha^2)\, S \,\big] + h_1^k - h_1^{k+1}.$$

Следовательно, уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} 0 = C_0 \big[\, x_{00}^{3k-3} + 2\, x_{00}^{3k} + x_{00}^{3k+3} \,\big] + \tfrac{9}{8}\, A_0 \big[\, X_{00}^k + X_{00}^{k+1} \,\big] + G_0^k + G_0^{k+1} - \\ - C_1 \big[\, x_{00}^{3k-3} - 2\, x_{00}^{3k} + x_{00}^{3k+3} \,\big] - \tfrac{9}{8}\, A_1 \big[\, Y_{00}^k - Y_{00}^{k+1} \,\big] + G_1^k - G_1^{k+1}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

в котором числа A_0 и A_1 определены формулами (6.3) и (6.6),

$$\begin{aligned} C_0 &\doteq \int_M S^2\, d\mu = \tfrac{64}{45} \left(3\, \theta_0^2 + 5\, \theta_0 \theta_1 + 3\, \theta_1^2 \right), & G_0^k &\doteq - \int_M h_0^k\, S\, d\mu, \\ C_1 &\doteq \int_M \alpha^2 S^2\, d\mu = \tfrac{64}{135} \left(3\, \theta_0^2 + 5\, \theta_0 \theta_1 + 3\, \theta_1^2 \right), & G_1^k &\doteq - \int_M \alpha^2 h_1^k\, S\, d\mu. \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.2. При каждом $k = 1, \ldots, n$ переменная x_{01}^{3k} входит в состав ровно двух слагаемых функционала J (в J^k и в J^{k+1}), следовательно, в силу (5.9) имеет место цепочка равенств

$$3^{-5}\, 2^{14}\, \mathrm{a}^{-2}\, \tau^3 \left[\, \partial J / \partial x_{01}^{3k} \,\right] = 3^{-5}\, 2^{14}\, \mathrm{a}^{-2}\, \tau^3 \left[\, \partial J^k / \partial x_{01}^{3k} + \partial J^{k+1} / \partial x_{01}^{3k} \,\right] =$$

$$\begin{aligned} = \int_M \Big(\beta_0^2 f_2^k \left[\, \partial f_2^k / \partial x_{01}^{3k} \,\right] + \alpha^2 \beta_0^2 f_3^k \left[\, \partial f_3^k / \partial x_{01}^{3k} \,\right] + \\ + \beta_0^2 f_2^{k+1} \left[\, \partial f_2^{k+1} / \partial x_{01}^{3k} \,\right] + \alpha^2 \beta_0^2 f_3^{k+1} \left[\, \partial f_3^{k+1} / \partial x_{01}^{3k} \,\right] \Big)\, d\mu. \end{aligned}$$

Воспользовались тем обстоятельством, что переменная x_{01}^{3k} входит только в полиномы f_2^k, f_3^k. Приравняв частную производную $\partial J / \partial x_{01}^{3k}$ нулю, получаем уравнение

$$0 = \int_M \Big[\, \beta_0^2 \big(\, f_2^k + f_2^{k+1} \big) + \alpha^2 \beta_0^2 \big(\, f_3^k - f_3^{k+1} \big) \,\Big]\, P\, d\mu.$$

Применили равенства (6.7) и (6.10). В силу этих же равенств имеем

$$\begin{aligned} f_2^k + f_2^{k+1} &= \big[\, x_{01}^{3k-3} + 2\, x_{01}^{3k} + x_{01}^{3k+3} \,\big]\, P - \tfrac{9}{8} \big[\, X_{01}^k + X_{01}^{k+1} \,\big] \big[\, R + (\, 1-\alpha^2)\, P \,\big] + h_2^k + h_2^{k+1}, \\ f_3^k - f_3^{k+1} &= - \big[\, x_{01}^{3k-3} - 2\, x_{01}^{3k} + x_{01}^{3k+3} \,\big]\, P + \tfrac{9}{8} \big[\, Y_{01}^k - Y_{01}^{k+1} \,\big] \big[\, 3R + (\, 1-\alpha^2)\, P \,\big] + h_3^k - h_3^{k+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} 0 = C_2 \big[\, x_{01}^{3k-3} + 2\, x_{01}^{3k} + x_{01}^{3k+3} \,\big] + \tfrac{9}{8}\, A_2 \big[\, X_{01}^k + X_{01}^{k+1} \,\big] + G_2^k + G_2^{k+1} - \\ - C_3 \big[\, x_{01}^{3k-3} - 2\, x_{01}^{3k} + x_{01}^{3k+3} \,\big] - \tfrac{9}{8}\, A_3 \big[\, Y_{01}^k - Y_{01}^{k+1} \,\big] + G_3^k - G_3^{k+1}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

в котором числа A_2 и A_3 определены формулами (6.9) и (6.12),

$$\begin{aligned} C_2 &\doteq \int_M \beta_0^2 P^2\, d\mu = \tfrac{64}{105} \left(21\, \theta_0^2 + 7\, \theta_0 \theta_1 + \theta_1^2 \right), & G_2^k &\doteq \int_M \beta_0^2 h_2^k\, P\, d\mu, \\ C_3 &\doteq \int_M \alpha^2 \beta_0^2 P^2\, d\mu = \tfrac{64}{315} \left(21\, \theta_0^2 + 7\, \theta_0 \theta_1 + \theta_1^2 \right), & G_3^k &\doteq \int_M \alpha^2 \beta_0^2 h_3^k\, P\, d\mu. \end{aligned} \tag{7.4}$$

7.3. При каждом $k = 1, \ldots, n$ переменная x_{10}^{3k} входит в состав ровно двух слагаемых функционала J (в J^k и в J^{k+1}), следовательно, в силу (5.9) имеет место цепочка равенств

$$3^{-5}\, 2^{14}\, \mathrm{a}^{-2}\, \tau^3 \left[\, \partial J / \partial x_{10}^{3k} \,\right] = 3^{-5}\, 2^{14}\, \mathrm{a}^{-2}\, \tau^3 \left[\, \partial J^k / \partial x_{10}^{3k} + \partial J^{k+1} / \partial x_{10}^{3k} \,\right] =$$

$$\begin{aligned} = \int_M \Big(\beta_1^2 f_4^k \left[\, \partial f_4^k / \partial x_{10}^{3k} \,\right] + \alpha^2 \beta_1^2 f_5^k \left[\, \partial f_5^k / \partial x_{10}^{3k} \,\right] + \\ + \beta_1^2 f_4^{k+1} \left[\, \partial f_4^{k+1} / \partial x_{10}^{3k} \,\right] + \alpha^2 \beta_1^2 f_5^{k+1} \left[\, \partial f_5^{k+1} / \partial x_{10}^{3k} \,\right] \Big)\, d\mu. \end{aligned}$$

Воспользовались тем обстоятельством, что переменная x_{10}^{3k} входит только в полиномы f_4^k, f_5^k. Приравняв частную производную $\partial J/\partial x_{10}^{3k}$ нулю, получаем уравнение

$$0 = \int_M \Big[\, \beta_1^2 \big(f_4^k + f_4^{k+1} \big) + \alpha^2 \beta_1^2 \big(f_5^k - f_5^{k+1} \big) \Big]\, Q\, d\mu.$$

Применили равенства (6.13) и (6.16). В силу этих же равенств имеем

$$f_4^k + f_4^{k+1} = \big[\, x_{10}^{3k-3} + 2\, x_{10}^{3k} + x_{10}^{3k+3} \,\big]\, Q - \tfrac{9}{8} \big[\, X_{10}^k + X_{10}^{k+1} \,\big] \big[\, R + (1-\alpha^2)\, Q \,\big] + h_4^k + h_4^{k+1},$$

$$f_5^k - f_5^{k+1} = -\big[\, x_{10}^{3k-3} - 2\, x_{10}^{3k} + x_{10}^{3k+3} \,\big]\, Q + \tfrac{9}{8} \big[\, Y_{10}^k - Y_{10}^{k+1} \,\big] \big[\, 3R + (1-\alpha^2)\, Q \,\big] + h_5^k - h_5^{k+1}.$$

Следовательно, уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} 0 = C_4 \big[\, x_{10}^{3k-3} + 2\, x_{10}^{3k} + x_{10}^{3k+3} \,\big] + \tfrac{9}{8}\, A_4 \big[\, X_{10}^k + X_{10}^{k+1} \,\big] + G_4^k + G_4^{k+1} - \\ - C_5 \big[\, x_{10}^{3k-3} - 2\, x_{10}^{3k} + x_{10}^{3k+3} \,\big] - \tfrac{9}{8}\, A_5 \big[\, Y_{10}^k - Y_{10}^{k+1} \,\big] + G_5^k - G_5^{k+1}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

в котором числа A_4 и A_5 определены формулами (6.15) и (6.18),

$$\begin{aligned} C_4 &\doteq \int_M \beta_1^2 Q^2\, d\mu = \tfrac{64}{105} \big(\theta_0^2 + 7\, \theta_0 \theta_1 + 21\, \theta_1^2 \big), & G_4^k &\doteq \int_M \beta_1^2 h_4^k\, Q\, d\mu, \\ C_5 &\doteq \int_M \alpha^2 \beta_1^2 Q^2\, d\mu = \tfrac{64}{315} \big(\theta_0^2 + 7\, \theta_0 \theta_1 + 21\, \theta_1^2 \big), & G_5^k &\doteq \int_M \alpha^2 \beta_1^2 h_5^k\, Q\, d\mu. \end{aligned} \tag{7.6}$$

7.4. При каждом $k = 1, \ldots, n$ переменная x_{11}^{3k} входит в состав ровно двух слагаемых функционала J (в J^k и в J^{k+1}), следовательно, в силу (5.9) имеет место цепочка равенств

$$3^{-5}\, 2^{14}\, \mathrm{a}^{-2}\, \tau^3 \big[\, \partial J/\partial x_{11}^{3k} \,\big] = 3^{-5}\, 2^{14}\, \mathrm{a}^{-2}\, \tau^3 \big[\, \partial J^k/\partial x_{11}^{3k} + \partial J^{k+1}/\partial x_{11}^{3k} \,\big] =$$

$$\begin{aligned} = \int_M \Big(\beta_0^2 \beta_1^2 f_6^k \big[\, \partial f_6^k/\partial x_{11}^{3k} \,\big] + \alpha^2 \beta_0^2 \beta_1^2 f_7^k \big[\, \partial f_7^k/\partial x_{11}^{3k} \,\big] + \\ + \beta_0^2 \beta_1^2 f_6^{k+1} \big[\, \partial f_6^{k+1}/\partial x_{11}^{3k} \,\big] + \alpha^2 \beta_0^2 \beta_1^2 f_7^{k+1} \big[\, \partial f_7^{k+1}/\partial x_{11}^{3k} \,\big] \Big)\, d\mu. \end{aligned}$$

Воспользовались тем обстоятельством, что переменная x_{11}^{3k} входит только в полиномы f_6^k, f_7^k. Приравняв частную производную $\partial J/\partial x_{11}^{3k}$ нулю, получаем уравнение

$$0 = -\int_M \Big[\, \beta_0^2 \beta_1^2 \big(f_6^k + f_6^{k+1} \big) + \alpha^2 \beta_0^2 \beta_1^2 \big(f_7^k - f_7^{k+1} \big) \Big]\, U\, d\mu.$$

Применили равенства (6.19) и (6.22). В силу этих же равенств имеем

$$f_6^k + f_6^{k+1} = -\big[\, x_{11}^{3k-3} + 2\, x_{11}^{3k} + x_{11}^{3k+3} \,\big]\, U + \tfrac{9}{8} \big[\, X_{11}^k + X_{11}^{k+1} \,\big] \big[\, R + (1-\alpha^2)\, U \,\big] + h_6^k + h_6^{k+1},$$

$$f_7^k - f_7^{k+1} = \big[\, x_{11}^{3k-3} - 2\, x_{11}^{3k} + x_{11}^{3k+3} \,\big]\, U - \tfrac{9}{8} \big[\, Y_{11}^k - Y_{11}^{k+1} \,\big] \big[\, 3R + (1-\alpha^2)\, U \,\big] + h_7^k - h_7^{k+1}.$$

Следовательно, уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} 0 = C_6 \big[\, x_{11}^{3k-3} + 2\, x_{11}^{3k} + x_{11}^{3k+3} \,\big] + \tfrac{9}{8}\, A_6 \big[\, X_{11}^k + X_{11}^{k+1} \,\big] + G_6^k + G_6^{k+1} - \\ - C_7 \big[\, x_{11}^{3k-3} - 2\, x_{11}^{3k} + x_{11}^{3k+3} \,\big] - \tfrac{9}{8}\, A_7 \big[\, Y_{11}^k - Y_{11}^{k+1} \,\big] + G_7^k - G_7^{k+1}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

в котором числа A_6 и A_7 определены формулами (6.21) и (6.24),

$$\begin{aligned} C_6 &\doteq \int_M \beta_0^2 \beta_1^2 U^2\, d\mu = \tfrac{64}{175} \big(5\, \theta_0^2 + 7\, \theta_0 \theta_1 + 5\, \theta_1^2 \big), & G_6^k &\doteq -\int_M \beta_0^2 \beta_1^2 h_6^k\, U\, d\mu, \\ C_7 &\doteq \int_M \alpha^2 \beta_0^2 \beta_1^2 U^2\, d\mu = \tfrac{64}{525} \big(5\, \theta_0^2 + 7\, \theta_0 \theta_1 + 5\, \theta_1^2 \big), & G_7^k &\doteq -\int_M \alpha^2 \beta_0^2 \beta_1^2 h_7^k\, U\, d\mu. \end{aligned} \tag{7.8}$$

§ 8. Система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна

8.1. В силу формул (6.2) и (6.5) для всех $k = 1, \ldots, n$ справедливы равенства

$$0 = A_0\bigl[\,x_{00}^{3k-3} + 2\,x_{00}^{3k} + x_{00}^{3k+3}\,\bigr] + B_0\bigl[\,X_{00}^{k} + X_{00}^{k+1}\,\bigr] + H_0^k + H_0^{k+1},$$

$$0 = A_1\bigl[\,x_{00}^{3k-3} - 2\,x_{00}^{3k} + x_{00}^{3k+3}\,\bigr] + B_1\bigl[\,Y_{00}^{k} - Y_{00}^{k+1}\,\bigr] + H_1^k - H_1^{k+1}.$$

Следовательно, вычислив линейную комбинацию трех уравнений (двух данных уравнений и уравнения (7.1)) с коэффициентами $-9\,A_0B_1$, $9\,A_1B_0$ и $8\,B_0B_1$ соответственно, получаем уравнение, содержащее лишь переменные x_{00}^{3k-3}, x_{00}^{3k}, x_{00}^{3k+3}:

$$0 = d_{00}\,x_{00}^{3k-3} + 2\,D_{00}\,x_{00}^{3k} + d_{00}\,x_{00}^{3k+3} + V_{00}^k. \tag{8.1}$$

Коэффициенты уравнения вычислимы через числа (6.3), (6.6) и (7.2):

$$D_{00} \doteq B_1\bigl(\,8\,B_0C_0 - 9A_0^2\,\bigr) + B_0\bigl(\,8\,B_1C_1 - 9A_1^2\,\bigr), \qquad d_{00} \doteq B_1\bigl(\,8\,B_0C_0 - 9A_0^2\,\bigr) - B_0\bigl(\,8\,B_1C_1 - 9A_1^2\,\bigr),$$

$$V_{00}^k \doteq 8\,B_0B_1\bigl[\,G_0^k + G_0^{k+1} + G_1^k - G_1^{k+1}\,\bigr] - 9\,A_0B_1\bigl[\,H_0^k + H_0^{k+1}\,\bigr] + 9\,A_1B_0\bigl[\,H_1^k - H_1^{k+1}\,\bigr]. \tag{8.2}$$

8.2. В силу формул (6.8) и (6.11) для всех $k = 1, \ldots, n$ справедливы равенства

$$0 = A_2\bigl[\,x_{01}^{3k-3} + 2\,x_{01}^{3k} + x_{01}^{3k+3}\,\bigr] + B_2\bigl[\,X_{01}^{k} + X_{01}^{k+1}\,\bigr] + H_2^k + H_2^{k+1},$$

$$0 = A_3\bigl[\,x_{01}^{3k-3} - 2\,x_{01}^{3k} + x_{01}^{3k+3}\,\bigr] + B_3\bigl[\,Y_{01}^{k} - Y_{01}^{k+1}\,\bigr] + H_3^k - H_3^{k+1}.$$

Следовательно, вычислив линейную комбинацию трех уравнений (двух данных уравнений и уравнения (7.3)) с коэффициентами $-9\,A_2B_3$, $9\,A_3B_2$ и $8\,B_2B_3$ соответственно, получаем уравнение, содержащее лишь переменные x_{01}^{3k-3}, x_{01}^{3k}, x_{01}^{3k+3}:

$$0 = d_{01}\,x_{01}^{3k-3} + 2\,D_{01}\,x_{01}^{3k} + d_{01}\,x_{01}^{3k+3} + V_{01}^k. \tag{8.3}$$

Коэффициенты уравнения вычислимы через числа (6.9), (6.12) и (7.4):

$$D_{01} \doteq B_3\bigl(\,8\,B_2C_2 - 9A_2^2\,\bigr) + B_2\bigl(\,8\,B_3C_3 - 9A_3^2\,\bigr), \qquad d_{01} \doteq B_3\bigl(\,8\,B_2C_2 - 9A_2^2\,\bigr) - B_2\bigl(\,8\,B_3C_3 - 9A_3^2\,\bigr),$$

$$V_{01}^k \doteq 8\,B_2B_3\bigl[\,G_2^k + G_2^{k+1} + G_3^k - G_3^{k+1}\,\bigr] - 9\,A_2B_3\bigl[\,H_2^k + H_2^{k+1}\,\bigr] + 9\,A_3B_2\bigl[\,H_3^k - H_3^{k+1}\,\bigr]. \tag{8.4}$$

8.3. В силу формул (6.14) и (6.17) для всех $k = 1, \ldots, n$ справедливы равенства

$$0 = A_4\bigl[\,x_{10}^{3k-3} + 2\,x_{10}^{3k} + x_{10}^{3k+3}\,\bigr] + B_4\bigl[\,X_{10}^{k} + X_{10}^{k+1}\,\bigr] + H_4^k + H_4^{k+1},$$

$$0 = A_5\bigl[\,x_{10}^{3k-3} - 2\,x_{10}^{3k} + x_{10}^{3k+3}\,\bigr] + B_5\bigl[\,Y_{10}^{k} - Y_{10}^{k+1}\,\bigr] + H_5^k - H_5^{k+1}.$$

Следовательно, вычислив линейную комбинацию трех уравнений (двух данных уравнений и уравнения (7.5)) с коэффициентами $-9\,A_4B_5$, $9\,A_5B_4$ и $8\,B_4B_5$ соответственно, получаем уравнение, содержащее лишь переменные x_{10}^{3k-3}, x_{10}^{3k}, x_{10}^{3k+3}:

$$0 = d_{10}\,x_{10}^{3k-3} + 2\,D_{10}\,x_{10}^{3k} + d_{10}\,x_{10}^{3k+3} + V_{10}^k. \tag{8.5}$$

Коэффициенты уравнения вычислимы через числа (6.15), (6.18) и (7.6):

$$D_{10} \doteq B_5\bigl(\,8\,B_4C_4 - 9A_4^2\,\bigr) + B_4\bigl(\,8\,B_5C_5 - 9A_5^2\,\bigr), \qquad d_{10} \doteq B_5\bigl(\,8\,B_4C_4 - 9A_4^2\,\bigr) - B_4\bigl(\,8\,B_5C_5 - 9A_5^2\,\bigr),$$

$$V_{10}^k \doteq 8\,B_4B_5\bigl[\,G_4^k + G_4^{k+1} + G_5^k - G_5^{k+1}\,\bigr] - 9\,A_4B_5\bigl[\,H_4^k + H_4^{k+1}\,\bigr] + 9\,A_5B_4\bigl[\,H_5^k - H_5^{k+1}\,\bigr]. \tag{8.6}$$

8.4. В силу формул (6.20) и (6.23) для всех $k = 1, \ldots, n$ справедливы равенства

$$0 = A_6\bigl[\,x_{11}^{3k-3} + 2\,x_{11}^{3k} + x_{11}^{3k+3}\,\bigr] + B_6\bigl[\,X_{11}^{k} + X_{11}^{k+1}\,\bigr] + H_6^k + H_6^{k+1},$$

$$0 = A_7\bigl[\, x_{11}^{3k-3} - 2\, x_{11}^{3k} + x_{11}^{3k+3} \,\bigr] + B_7\bigl[\, Y_{11}^{k} - Y_{11}^{k+1} \,\bigr] + H_7^k - H_7^{k+1}.$$

Следовательно, вычислив линейную комбинацию трех уравнений (двух данных уравнений и уравнения (7.7)) с коэффициентами $-9\, A_6 B_7$, $9\, A_7 B_6$ и $8\, B_6 B_7$ соответственно, получаем уравнение, содержащее лишь переменные x_{11}^{3k-3}, x_{11}^{3k}, x_{11}^{3k+3}:

$$0 = d_{11}\, x_{11}^{3k-3} + 2\, D_{11}\, x_{11}^{3k} + d_{11}\, x_{11}^{3k+3} + V_{11}^{k}. \tag{8.7}$$

Коэффициенты уравнения вычислимы через числа (6.21), (6.24) и (7.8):

$$D_{11} \doteq B_7\bigl(\, 8\, B_6 C_6 - 9 A_6^2 \,\bigr) + B_6\bigl(\, 8\, B_7 C_7 - 9 A_7^2 \,\bigr), \qquad d_{11} \doteq B_7\bigl(\, 8\, B_6 C_6 - 9 A_6^2 \,\bigr) - B_6\bigl(\, 8\, B_7 C_7 - 9 A_7^2 \,\bigr),$$

$$V_{11}^{k} \doteq 8\, B_6 B_7\bigl[\, G_6^k + G_6^{k+1} + G_7^k - G_7^{k+1} \,\bigr] - 9\, A_6 B_7\bigl[\, H_6^k + H_6^{k+1} \,\bigr] + 9\, A_7 B_6\bigl[\, H_7^k - H_7^{k+1} \,\bigr]. \tag{8.8}$$

8.5. Таким образом, мы получили итоговую систему

$$0 = d_{ij}\, x_{ij}^{3k-3} + 2\, D_{ij}\, x_{ij}^{3k} + d_{ij}\, x_{ij}^{3k+3} + V_{ij}^{k}, \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad (i,j) \in \{0,1\}^2, \tag{8.9}$$

$$\begin{aligned}
&0 = A_0\bigl[\, x_{00}^{3k-3} + x_{00}^{3k} \,\bigr] + B_0 X_{00}^k + H_0^k, &&0 = A_1\bigl[\, x_{00}^{3k-3} - x_{00}^{3k} \,\bigr] + B_1 Y_{00}^k + H_1^k, &&k = 1, \ldots, N,\\
&0 = A_2\bigl[\, x_{01}^{3k-3} + x_{01}^{3k} \,\bigr] + B_2 X_{01}^k + H_2^k, &&0 = A_3\bigl[\, x_{01}^{3k-3} - x_{01}^{3k} \,\bigr] + B_3 Y_{01}^k + H_3^k, &&k = 1, \ldots, N,\\
&0 = A_4\bigl[\, x_{10}^{3k-3} + x_{10}^{3k} \,\bigr] + B_4 X_{10}^k + H_4^k, &&0 = A_5\bigl[\, x_{10}^{3k-3} - x_{10}^{3k} \,\bigr] + B_5 Y_{10}^k + H_5^k, &&k = 1, \ldots, N,\\
&0 = A_6\bigl[\, x_{11}^{3k-3} + x_{11}^{3k} \,\bigr] + B_6 X_{11}^k + H_6^k, &&0 = A_7\bigl[\, x_{11}^{3k-3} - x_{11}^{3k} \,\bigr] + B_7 Y_{11}^k + H_7^k, &&k = 1, \ldots, N,
\end{aligned} \tag{8.10}$$

линейных алгебраических уравнений относительно линейных комбинаций

$$x_{00}^{3k},\ x_{01}^{3k},\ x_{10}^{3k},\ x_{11}^{3k}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad X_{00}^k,\ Y_{00}^k,\ X_{01}^k,\ Y_{01}^k,\ X_{10}^k,\ Y_{10}^k,\ X_{11}^k,\ Y_{11}^k, \quad k = 1, \ldots, N,$$

коэффициентов оптимального аппроксимирующего сплайна. Совокупность (8.9) представляет собой единообразную запись уравнений (8.1), (8.3), (8.5), (8.7). Совокупность (8.10) — это уравнения (6.2), (6.5), (6.8), (6.11), (6.14), (6.17), (6.20), (6.23). Количество уравнений в системе (8.9)–(8.10) равно $12N-4$, количество неизвестных такое же.

Т е о р е м а 1. *Система* (8.9)–(8.10) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы составляет содержание следующего параграфа. Здесь же отметим лишь основные аспекты поцедуры решения системы. При каждом $(i,j) \in \{0,1\}^2$ матрица системы $0 = d_{ij}\, x_{ij}^{3k-3} + 2\, D_{ij}\, x_{ij}^{3k} + d_{ij}\, x_{ij}^{3k+3} + V_{ij}^{k}$ относительно неизвестных $x_{ij}^{3}, \ldots, x_{ij}^{3k}, \ldots, x_{ij}^{3n}$ имеет трехдиагональный вид (из определений допустимого массива и (2.2) справедливы равенства $x_{ij}^{0} = x_{ij}^{3N} = 0$). Одним из достаточных условий ее однозначной разрешимости является условие доминирования главной диагонали, то есть выполнение неравенства $|\, D_{ij}\, | > |\, d_{ij}\, |$ (что действительно имеет место). Таким образом, решив (например, методом прогонки) каждую из четырех подсистем системы (8.9), находим все значения

$$x_{00}^{3k},\ x_{01}^{3k},\ x_{10}^{3k},\ x_{11}^{3k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

После этого из уравнений (8.10) явно вычисляем все значения

$$X_{00}^k,\ Y_{00}^k,\ X_{01}^k,\ Y_{01}^k,\ X_{10}^k,\ Y_{10}^k,\ X_{11}^k,\ Y_{11}^k, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Полученные значения позволяют найти по формулам (3.1) все значения

$$x_{00}^{3k-2},\ x_{01}^{3k-2},\ x_{10}^{3k-2},\ x_{11}^{3k-2},\ x_{00}^{3k-1},\ x_{01}^{3k-1},\ x_{10}^{3k-1},\ x_{11}^{3k-1}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

и в конечном счете найти по формулам (2.3) все искомые величины

$$u_{11}^{i},\ u_{12}^{i},\ u_{21}^{i},\ u_{22}^{i}, \quad i = 1, \ldots, 3N-1.$$

§ 9. Доказательство теоремы

Достаточно показать четыре неравенства $|\,D_{ij}\,| > |\,d_{ij}\,|$, $(i,j) \in \{0,1\}^2$.

9.1. Пусть $(i,j) = (0,0)$. Определим локальные числа $a \doteq \theta_0 + \theta_1$, $b \doteq 3\,\theta_0^2 + 5\,\theta_0\theta_1 + 3\,\theta_1^2$, $c \doteq a^{-2}b$. Тогда $b = c\,a^2$, а в соответствии с формулами (6.3), (6.6) и (7.2) справедливы равенства

$$A_0 = -\tfrac{128}{135}\,a\,(3 + c\,a), \qquad B_0 = \tfrac{64}{75}\,(3 + 5\,a + c\,a^2), \qquad C_0 = \tfrac{64}{45}\,c\,a^2,$$

$$A_1 = -\tfrac{128}{675}\,a\,(15 + c\,a), \qquad B_1 = \tfrac{64}{525}\,(63 + 21\,a + c\,a^2), \qquad C_1 = \tfrac{64}{135}\,c\,a^2.$$

Пусть, далее, $\gamma \doteq 2^{21}\,3^{-5}\,5^{-6}\,7^{-1}\,a^2$,

$$\Delta \doteq 945\,(2\,c - 5) + 630\,(2\,c - 5)\,a + 9\,(29\,c - 50)\,c\,a^2 + 30\,c^2a^3 + 2\,c^3a^4,$$

$$\delta \doteq 945\,(2\,c - 5) - 315\,(2\,c - 5)\,a + 9\,(75 - 13\,c)\,c\,a^2 + 45\,c^2a^3 + c^3a^4.$$

Проверка справедливости равенств

$$B_1\big(\,8\,B_0C_0 - 9A_0^2\,\big) + B_0\big(\,8\,B_1C_1 - 9A_1^2\,\big) = 2\,\gamma\,\Delta, \qquad B_1\big(\,8\,B_0C_0 - 9A_0^2\,\big) - B_0\big(\,8\,B_1C_1 - 9A_1^2\,\big) = \gamma\,\delta$$

требует определенных усилий. Следовательно, две первые формулы (8.2) приобретают вид $D_{00} = 2\,\gamma\,\Delta$ и $d_{00} = \gamma\,\delta$ соответственно, а для уравнений (8.9) имеет место представление

$$0 = \delta\,x_{00}^{3k-3} + 4\Delta\,x_{00}^{3k} + \delta\,x_{00}^{3k+3} + \gamma^{-1}V_{00}^k, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Пусть $\lambda \doteq \theta_1/\theta_0 > 0$, тогда $\theta_1 = \lambda\,\theta_0$ и

$$c = a^{-2}b = (\,\theta_0 + \theta_1)^{-2}\,(\,3\,\theta_0^2 + 5\,\theta_0\theta_1 + 3\,\theta_1^2) = (1 + \lambda)^{-2}\,(\,3 + 5\,\lambda + 3\,\lambda^2).$$

Так как $dc/d\lambda = (1+\lambda)^{-3}\,(\,\lambda - 1)$, то рациональная функция $\lambda \in (0,\infty) \to c \in \mathbb{R}$ ведет себя следующим образом: она монотонно убывает на интервале $(0,1)$ от значения 3 до $\frac{11}{4}$, а на интервале $(1,\infty)$ она монотонно растет, асимптотически приближаясь к числу 3. Таким образом, $c \in \big[\,\frac{11}{4}, 3\,\big)$. В силу этого обстоятельства справедливы оценки $2\,c - 5 > 0$ и $29\,c - 50 > 0$, поэтому $\Delta > 0$, а так как $3 - a = 3 - \theta_0 - \theta_1 > \frac{5}{7} - \theta_0 - \theta_1 > 0$ (см. (7)), то

$$\delta = 315\,(2\,c - 5)\,(3 - a) + 9\,(75 - 13\,c)\,c\,a^2 + 45\,c^2a^3 + c^3a^4 > 0.$$

Кроме того, $3\Delta - 2\,\delta = 945\,(2\,c - 5) + 2520\,(2\,c - 5)\,a + 9\,(113\,c - 300)\,c\,a^2 + 4\,c^3a^4 > 0$. Следовательно, $|\,4\Delta\,| - 2\,|\,\delta\,| = 4\Delta - 2\,\delta > 3\Delta - 2\,\delta > 0$, поэтому $|\,D_{00}\,| > |\,d_{00}\,|$.

9.2. Пусть $(i,j) = (0,1)$. Определим числа $a \doteq 21\,\theta_0 + 5\,\theta_1$, $b \doteq 21\,\theta_0^2 + 7\,\theta_0\theta_1 + \theta_1^2$, $c \doteq a^{-2}b$. Тогда $b = c\,a^2$, а в соответствии с формулами (6.9), (6.12) и (7.4) справедливы равенства

$$A_2 = -\tfrac{128}{1575}\,a\,(1 + 5\,c\,a), \qquad B_2 = \tfrac{64}{525}\,(3 + a + 3\,c\,a^2), \qquad C_2 = \tfrac{64}{105}\,c\,a^2,$$

$$A_3 = -\tfrac{128}{1575}\,a\,(1 + c\,a), \qquad B_3 = \tfrac{64}{6125}\,(105 + 7\,a + 5\,c\,a^2), \qquad C_3 = \tfrac{64}{315}\,c\,a^2.$$

Пусть, далее, $\gamma \doteq 2^{21}\,3^{-3}\,5^{-7}\,7^{-4}\,a^2$,

$$\Delta \doteq 105\,(30\,c - 1) + 14\,(30\,c - 1)\,a + 15\,(87\,c - 2)\,c\,a^2 + 30\,c^2a^3 + 30\,c^3a^4,$$

$$\delta \doteq 105\,(30\,c - 1) - 7\,(30\,c - 1)\,a + 45\,(1 - 13\,c)\,c\,a^2 + 45\,c^2a^3 + 15\,c^3a^4.$$

Проверка справедливости равенств

$$B_3\big(\,8\,B_2C_2 - 9A_2^2\,\big) + B_2\big(\,8\,B_3C_3 - 9A_3^2\,\big) = 2\,\gamma\,\Delta, \qquad B_3\big(\,8\,B_2C_2 - 9A_2^2\,\big) - B_2\big(\,8\,B_3C_3 - 9A_3^2\,\big) = \gamma\,\delta$$

требует определенных усилий. Следовательно, две первые формулы (8.4) приобретают вид $D_{01} = 2\,\gamma\,\Delta$ и $d_{01} = \gamma\,\delta$ соответственно, а для уравнений (8.9) имеет место представление

$$0 = \delta\,x_{01}^{3k-3} + 4\Delta\,x_{01}^{3k} + \delta\,x_{01}^{3k+3} + \gamma^{-1}V_{01}^k, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Пусть $\lambda \doteq \theta_1/\theta_0 > 0$, тогда $\theta_1 = \lambda\,\theta_0$ и

$$c = a^{-2}b = (\,21\,\theta_0 + 5\,\theta_1)^{-2}\,(\,21\,\theta_0^2 + 7\,\theta_0\theta_1 + \theta_1^2) = (21 + 5\,\lambda)^{-2}\,(\,21 + 7\,\lambda + \lambda^2).$$

Так как $dc/d\lambda = 7\,(21{+}5\,\lambda)^{-3}\,(\,\lambda{-}9)$, то рациональная функция $\lambda \in (0,\infty) \to c \in \mathbb{R}$ ведет себя следующим образом: она монотонно убывает на интервале $(0,9)$ от значения $\frac{1}{21}$ до $\frac{5}{132}$, а на интервале $(9,\infty)$ она монотонно растет, асимптотически приближаясь к числу $\frac{1}{25}$. Таким образом, $c \in \big[\,\frac{5}{132}, \frac{1}{21}\,\big)$. В силу этого обстоятельства справедливы оценки $30\,c{-}1 > 0$, $87\,c{-}2 > 0$, поэтому $\Delta > 0$, а так как $15 - a = 15 - 21\,\theta_0 - 5\,\theta_1 > 21\,(\,\frac{5}{7} - \theta_0 - \theta_1) > 0$, то

$$\delta = 7\,(30\,c - 1)\,(15 - a) + 45\,(1 - 13\,c)\,c\,a^2 + 45\,c^2a^3 + 15\,c^3a^4 > 0.$$

Кроме того, $3\Delta - 2\,\delta = 105\,(30\,c - 1) + 56\,(30\,c - 1)\,a + 45\,(113\,c - 4)\,c\,a^2 + 60\,c^3a^4 > 0$. Следовательно, $|\,4\Delta\,| - 2\,|\,\delta\,| = 4\Delta - 2\,\delta > 3\Delta - 2\,\delta > 0$, поэтому $|\,D_{01}\,| > |\,d_{01}\,|$.

9.3. Пусть $(i,j) = (1,0)$. Определим числа $a \doteq 5\,\theta_0 + 21\,\theta_1$, $b \doteq \theta_0^2 + 7\,\theta_0\theta_1 + 21\,\theta_1^2$, $c \doteq a^{-2}b$. Тогда $b = c\,a^2$, а в соответствии с формулами (6.15), (6.18) и (7.6) справедливы равенства

$$A_4 = -\tfrac{128}{1575}\,a\,(1 + 5\,c\,a), \qquad B_4 = \tfrac{64}{525}\,(3 + a + 3\,c\,a^2), \qquad C_4 = \tfrac{64}{105}\,c\,a^2,$$

$$A_5 = -\tfrac{128}{1575}\,a\,(1 + c\,a), \qquad B_5 = \tfrac{64}{6125}\,(105 + 7\,a + 5\,c\,a^2), \qquad C_5 = \tfrac{64}{315}\,c\,a^2.$$

Пусть, далее, $\gamma \doteq 2^{21}\,3^{-3}\,5^{-7}\,7^{-4}\,a^2$,

$$\Delta \doteq 105\,(30\,c - 1) + 14\,(30\,c - 1)\,a + 15\,(87\,c - 2)\,c\,a^2 + 30\,c^2a^3 + 30\,c^3a^4,$$

$$\delta \doteq 105\,(30\,c - 1) - 7\,(30\,c - 1)\,a + 45\,(1 - 13\,c)\,c\,a^2 + 45\,c^2a^3 + 15\,c^3a^4.$$

Проверка справедливости равенств

$$B_5\big(\,8\,B_4C_4 - 9A_4^2\,\big) + B_4\big(\,8\,B_5C_5 - 9A_5^2\,\big) = 2\,\gamma\,\Delta, \qquad B_5\big(\,8\,B_4C_4 - 9A_4^2\,\big) - B_4\big(\,8\,B_5C_5 - 9A_5^2\,\big) = \gamma\,\delta$$

требует определенных усилий. Следовательно, две первые формулы (8.6) приобретают вид $D_{10} = 2\,\gamma\,\Delta$ и $d_{10} = \gamma\,\delta$ соответственно, а для уравнений (8.9) имеет место представление

$$0 = \delta\,x_{10}^{3k-3} + 4\Delta\,x_{10}^{3k} + \delta\,x_{10}^{3k+3} + \gamma^{-1}V_{10}^k, \qquad k = 1,\dots,n.$$

Пусть $\lambda \doteq \theta_0/\theta_1 > 0$, тогда $\theta_0 = \lambda\,\theta_1$ и

$$c = a^{-2}b = (\,5\,\theta_0 + 21\,\theta_1)^{-2}\,(\,\theta_0^2 + 7\,\theta_0\theta_1 + 21\,\theta_1^2) = (5\,\lambda + 21)^{-2}\,(\,\lambda^2 + 7\,\lambda + 21).$$

Так как $dc/d\lambda = 7\,(5\,\lambda{+}21)^{-3}\,(\,\lambda{-}9)$, то рациональная функция $\lambda \in (0,\infty) \to c \in \mathbb{R}$ ведет себя следующим образом: она монотонно убывает на интервале $(0,9)$ от значения $\frac{1}{21}$ до $\frac{5}{132}$, а на интервале $(9,\infty)$ она монотонно растет, асимптотически приближаясь к числу $\frac{1}{25}$. Таким образом, $c \in \big[\,\frac{5}{132}, \frac{1}{21}\,\big)$. В силу этого обстоятельства справедливы оценки $30\,c{-}1 > 0$, $87\,c{-}2 > 0$, поэтому $\Delta > 0$, а так как $15 - a = 15 - 5\,\theta_0 - 21\,\theta_1 > 21\,(\,\frac{5}{7} - \theta_0 - \theta_1) > 0$, то

$$\delta = 7\,(30\,c - 1)\,(15 - a) + 45\,(1 - 13\,c)\,c\,a^2 + 45\,c^2a^3 + 15\,c^3a^4 > 0.$$

Кроме того, $3\Delta - 2\,\delta = 105\,(30\,c - 1) + 56\,(30\,c - 1)\,a + 45\,(113\,c - 4)\,c\,a^2 + 60\,c^3a^4 > 0$. Следовательно, $|\,4\Delta\,| - 2\,|\,\delta\,| = 4\Delta - 2\,\delta > 3\Delta - 2\,\delta > 0$, поэтому $|\,D_{10}\,| > |\,d_{10}\,|$.

9.4. Пусть $(i,j) = (1,1)$. Определим числа $a \doteq \theta_0 + \theta_1$, $b \doteq 5\,\theta_0^2 + 7\,\theta_0\theta_1 + 5\,\theta_1^2$, $c \doteq a^{-2}b$. Тогда $b = c\,a^2$, а в соответствии с формулами (6.21), (6.24) и (7.8) справедливы равенства

$$A_6 = -\tfrac{128}{525}\,a\,(1 + c\,a), \qquad B_6 = \tfrac{64}{6125}\,(5 + 35\,a + 21\,c\,a^2), \qquad C_6 = \tfrac{64}{175}\,c\,a^2,$$

$$A_7 = -\tfrac{128}{2625}\,a\,(5 + c\,a), \qquad B_5 = \tfrac{192}{6125}\,(5 + 7\,a + c\,a^2), \qquad C_7 = \tfrac{64}{525}\,c\,a^2.$$

Пусть, далее, $\gamma \doteq 2^{21}\,5^{-9}\,7^{-5}\,a^2$,

$$\Delta \doteq 125\,(2\,c-7)+350\,(2\,c-7)\,a+15\,(29\,c-70)\,c\,a^2+210\,c^2a^3+42\,c^3a^4,$$

$$\delta \doteq 125\,(2\,c-7)-175\,(2\,c-7)\,a+15\,(105-13\,c)\,c\,a^2+315\,c^2a^3+21\,c^3a^4.$$

Проверка справедливости равенств

$$B_7\big(\,8\,B_6C_6-9A_6^2\,\big)+B_6\big(\,8\,B_7C_7-9A_7^2\,\big)=2\,\gamma\,\Delta, \qquad B_7\big(\,8\,B_6C_6-9A_6^2\,\big)-B_6\big(\,8\,B_7C_7-9A_7^2\,\big)=\gamma\,\delta$$

требует определенных усилий. Следовательно, две первые формулы (8.8) приобретают вид $D_{11}=2\,\gamma\,\Delta$ и $d_{11}=\gamma\,\delta$ соответственно, а для уравнений (8.9) имеет место представление

$$0=\delta\,x_{11}^{3k-3}+4\Delta\,x_{11}^{3k}+\delta\,x_{11}^{3k+3}+\gamma^{-1}V_{11}^k, \qquad k=1,\dots,n.$$

Пусть $\lambda \doteq \theta_1/\theta_0>0$, тогда $\theta_1=\lambda\,\theta_0$ и

$$c=a^{-2}b=(\,\theta_0+\theta_1)^{-2}\,(\,5\,\theta_0^2+7\,\theta_0\theta_1+5\,\theta_1^2)=(1+\lambda)^{-2}\,(\,5+7\,\lambda+5\,\lambda^2).$$

Так как $dc/d\lambda = 3\,(1+\lambda)^{-3}\,(\,\lambda-1)$, то рациональная функция $\lambda\in(0,\infty)\to c\in\mathbb{R}$ ведет себя следующим образом: она монотонно убывает на интервале $(0,1)$ от значения 5 до $\frac{17}{4}$, а на интервале $(1,\infty)$ она монотонно растет, асимптотически приближаясь к числу 5. Таким образом, $c\in\big[\,\frac{17}{4},5\,\big)$. В силу этого обстоятельства справедливы оценки $2\,c-7>0,\ 29\,c-70>0$, поэтому $\Delta>0$, а так как $5-7\,a=5-7\,\theta_0-7\,\theta_1>0$, то

$$\delta=25\,(2\,c-7)\,(5-7\,a)+15\,(105-13\,c)\,c\,a^2+315\,c^2a^3+21\,c^3a^4>0.$$

Кроме того, $3\Delta-2\,\delta=125\,(2\,c-7)+1400\,(2\,c-7)\,a+15\,(113\,c-420)\,c\,a^2+84\,c^3a^4>0$. Следовательно, $|\,4\Delta\,|-2\,|\,\delta\,|=4\Delta-2\,\delta>3\Delta-2\,\delta>0$, поэтому $|\,D_{11}\,|>|\,d_{11}\,|$.

§ 10. Формулы для свободных коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений

В предыдущих построениях значения свободных коэффициентов

$$H_0^k,\ \dots\ ,H_7^k, \quad k=1,\dots,N, \quad V_{00}^k,\ V_{01}^k,\ V_{10}^k,\ V_{11}^k, \quad k=1,\dots,n,$$

системы (8.9)–(8.10) не были востребованы. Полагаем, однако, что для удобства реализации процедуры решения системы необходимо привести эти значения в полном объеме. Уместно также отметить следующее важное обстоятельство. Каждый свободный коэффициент является линейной комбинацией как минимум 48-ми граничных элементов допустимого массива $\big(\,u_{jr}^i\,\big)$, $i=0,1,\dots,3N,\ j,r=0,1,2,3$. Поясним сказанное на примере вычисления величин H_0^k и G_0^k.

10.1. Согласно (6.3) и (5.7) имеет место цепочка равенств

$$H_0^k=-\tfrac{1}{9}\Big[\big\langle\,b^{00},p^k\big\rangle^I+8\,\big\langle\,a^{00},z^k\big\rangle^K\Big]\int_M\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu+$$

$$+\big\langle\,a^{00},z^k\big\rangle^{I_0}\int_M(\,1-\beta_0^2)\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu+\big\langle\,a^{00},z^k\big\rangle^{I_1}\int_M(\,1-\beta_1^2)\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu+$$

$$+\big\langle\,b^{00},z^k\big\rangle^I\int_M\alpha^2\,\big[\,R+(\,1-\alpha^2)\,S\,\big]\,d\mu,$$

а в силу определений (3.5) вычислимы все интегралы:

$$H_0^k=-\tfrac{32}{81}\,\big(\,1+\theta_0+\theta_1\big)\,\Big[\big\langle\,b^{00},p^k\big\rangle^I+8\,\big\langle\,a^{00},z^k\big\rangle^K\Big]+\tfrac{64}{135}\,\big(\,6+5\,\theta_0+6\,\theta_1\big)\,\big\langle\,a^{00},z^k\big\rangle^{I_0}+$$

$$+\tfrac{64}{135}\,\big(\,6+6\,\theta_0+5\,\theta_1\big)\,\big\langle\,a^{00},z^k\big\rangle^{I_1}+\tfrac{32}{135}\,\big(\,5+3\,\theta_0+3\,\theta_1\big)\,\big\langle\,b^{00},z^k\big\rangle^I.$$

Следовательно, имеет место представление

$$H_0^k = -\tfrac{32}{81}\left(1+\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\,p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{00}\,z_{jr}^k\Big] + \tfrac{64}{135}\left(6+5\,\theta_0+6\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{00}\,z_{jr}^k +$$

$$+\tfrac{64}{135}\left(6+6\,\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{00}\,z_{jr}^k + \tfrac{32}{135}\left(5+3\,\theta_0+3\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\,z_{jr}^k,$$

в котором фигурируют константы a_{jr}^{00} и b_{jr}^{00}, определенные в таблице 1, и граничные конечные разности z_{jr}^k, w_{jr}^k, p_{jr}^k, q_{jr}^k, определенные в (5.1) и являющиеся линейными комбинациями граничных элементов допустимого массива $\left(u_{jr}^i\right)$, $i=0,1,\ldots,3N$, $j,r=0,1,2,3$.

Аналогичным образом получаем формулы для остальных коэффициентов $H_1^k,\ldots,H_7^k$ (отталкиваясь от определений (6.6), (6.9), (6.12), (6.15), (6.18), (6.21), (6.24)):

$$H_1^k = -\tfrac{32}{405}\left(5+\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\,q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{00}\,w_{jr}^k\Big] + \tfrac{64}{225}\left(30+5\,\theta_0+6\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{00}\,w_{jr}^k +$$

$$+\tfrac{64}{225}\left(30+6\,\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{00}\,w_{jr}^k + \tfrac{32}{105}\left(7+\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\,w_{jr}^k,$$

$$H_2^k = \tfrac{32}{405}\left(1+5\,\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\,p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{01}\,z_{jr}^k\Big] - \tfrac{64}{315}\left(2+7\,\theta_0+2\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{01}\,z_{jr}^k -$$

$$-\tfrac{64}{675}\left(6+30\,\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{01}\,z_{jr}^k - \tfrac{32}{675}\left(5+15\,\theta_0+3\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\,z_{jr}^k,$$

$$H_3^k = \tfrac{32}{2025}\left(5+5\,\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\,q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{01}\,w_{jr}^k\Big] - \tfrac{64}{525}\left(10+7\,\theta_0+2\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{01}\,w_{jr}^k -$$

$$-\tfrac{64}{225}\left(6+6\,\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{01}\,w_{jr}^k - \tfrac{32}{525}\left(7+5\,\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\,w_{jr}^k,$$

$$H_4^k = \tfrac{32}{405}\left(1+\theta_0+5\,\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\,p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{10}\,z_{jr}^k\Big] - \tfrac{64}{675}\left(6+5\,\theta_0+30\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{10}\,z_{jr}^k -$$

$$-\tfrac{64}{315}\left(2+2\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{10}\,z_{jr}^k - \tfrac{32}{675}\left(5+3\,\theta_0+15\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\,z_{jr}^k,$$

$$H_5^k = \tfrac{32}{2025}\left(5+\theta_0+5\,\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\,q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{10}\,w_{jr}^k\Big] - \tfrac{64}{225}\left(6+\theta_0+6\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{10}\,w_{jr}^k -$$

$$-\tfrac{64}{525}\left(10+2\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{10}\,w_{jr}^k - \tfrac{32}{525}\left(7+\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\,w_{jr}^k,$$

$$H_6^k = -\tfrac{32}{2025}\left(1+5\,\theta_0+5\,\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\,p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{11}\,z_{jr}^k\Big] + \tfrac{64}{1575}\left(2+7\,\theta_0+10\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{11}\,z_{jr}^k +$$

$$+\tfrac{64}{1575}\left(2+10\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{11}\,z_{jr}^k + \tfrac{32}{675}\left(1+3\,\theta_0+3\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\,z_{jr}^k,$$

$$H_7^k = -\tfrac{32}{2025}\left(1+\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\,q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{11}\,w_{jr}^k\Big] + \tfrac{64}{2625}\left(10+7\,\theta_0+10\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{11}\,w_{jr}^k +$$

$$+\tfrac{64}{2625}\left(10+10\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{11}\,w_{jr}^k + \tfrac{32}{2625}\left(7+5\,\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\,w_{jr}^k.$$

10.2. Согласно (7.2) и (5.7) имеет место цепочка равенств

$$G_0^k = \tfrac{1}{9}\Big[\left\langle b^{00}, p^k\right\rangle^I + 8\left\langle a^{00}, z^k\right\rangle^K\Big]\int_M S\,d\mu - \left\langle a^{00}, z^k\right\rangle^{I_0}\int_M (1-\beta_0^2)\,S\,d\mu -$$

$$
-\left\langle a^{00}, z^k\right\rangle^{I_1} \int_M (1-\beta_1^2)\, S\, d\mu - \left\langle b^{00}, z^k\right\rangle^{I} \int_M \alpha^2\, S\, d\mu,
$$

а в силу определений (3.5) вычислимы все интегралы:

$$
G_0^k = \tfrac{16}{27}\left(\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\, p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{00}\, z_{jr}^k\Big] - \tfrac{32}{45}\left(5\,\theta_0+6\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{00}\, z_{jr}^k -
$$

$$
-\tfrac{32}{45}\left(6\,\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{00}\, z_{jr}^k - \tfrac{16}{9}\left(\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\, z_{jr}^k.
$$

Аналогичным образом получаем формулы для остальных коэффициентов $G_1^k, \ldots, G_7^k$ (отталкиваясь от определений (7.2), (7.4), (7.6), (7.8)):

$$
G_1^k = -\tfrac{16}{81}\left(\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\, q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{00}\, w_{jr}^k\Big] + \tfrac{32}{45}\left(5\,\theta_0+6\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{00}\, w_{jr}^k +
$$

$$
+\tfrac{32}{45}\left(6\,\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{00}\, w_{jr}^k + \tfrac{16}{15}\left(\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{00}\, w_{jr}^k,
$$

$$
G_2^k = -\tfrac{16}{135}\left(5\,\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\, p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{01}\, z_{jr}^k\Big] + \tfrac{32}{105}\left(7\,\theta_0+2\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{01}\, z_{jr}^k +
$$

$$
+\tfrac{32}{45}\left(6\,\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{01}\, z_{jr}^k + \tfrac{16}{45}\left(5\,\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\, z_{jr}^k,
$$

$$
G_3^k = \tfrac{16}{405}\left(5\,\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\, q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{01}\, w_{jr}^k\Big] - \tfrac{32}{105}\left(7\,\theta_0+2\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{01}\, w_{jr}^k -
$$

$$
-\tfrac{32}{45}\left(6\,\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{01}\, w_{jr}^k - \tfrac{16}{75}\left(5\,\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{01}\, w_{jr}^k,
$$

$$
G_4^k = -\tfrac{16}{135}\left(\theta_0+5\,\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\, p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{10}\, z_{jr}^k\Big] + \tfrac{32}{45}\left(\theta_0+6\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{10}\, z_{jr}^k +
$$

$$
+\tfrac{32}{105}\left(2\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{10}\, z_{jr}^k + \tfrac{16}{45}\left(\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\, z_{jr}^k,
$$

$$
G_5^k = \tfrac{16}{405}\left(\theta_0+5\,\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\, q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{10}\, w_{jr}^k\Big] - \tfrac{32}{45}\left(\theta_0+6\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{10}\, w_{jr}^k -
$$

$$
-\tfrac{32}{105}\left(2\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{10}\, w_{jr}^k - \tfrac{16}{75}\left(\theta_0+5\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{10}\, w_{jr}^k,
$$

$$
G_6^k = \tfrac{16}{135}\left(\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\, p_{jr}^k + 8\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{11}\, z_{jr}^k\Big] - \tfrac{32}{525}\left(7\,\theta_0+10\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{11}\, z_{jr}^k -
$$

$$
-\tfrac{32}{525}\left(10\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{11}\, z_{jr}^k - \tfrac{16}{45}\left(\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\, z_{jr}^k,
$$

$$
G_7^k = -\tfrac{16}{405}\left(\theta_0+\theta_1\right)\Big[\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\, q_{jr}^k + 24\sum_{(j,r)\in K} a_{jr}^{11}\, w_{jr}^k\Big] + \tfrac{32}{525}\left(7\,\theta_0+10\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_0} a_{jr}^{11}\, w_{jr}^k +
$$

$$
+\tfrac{32}{525}\left(10\,\theta_0+7\,\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I_1} a_{jr}^{11}\, w_{jr}^k + \tfrac{16}{75}\left(\theta_0+\theta_1\right)\sum_{(j,r)\in I} b_{jr}^{11}\, w_{jr}^k.
$$

10.3. Согласно (8.2), (8.4), (8.6), (8.8) величины V_{00}^k, V_{01}^k, V_{10}^k, V_{11}^k вычислимы через числа $H_0^k, \ldots, H_7^k$, $G_0^k, \ldots, G_7^k$, каждое из которых является линейной комбинацией, содержащей 48 граничных элементов допустимого массива $\left(u_{jr}^i\right)$, $i = 0, 1, \ldots, 3N$, $j, r = 0, 1, 2, 3$. Каждая из величин V_{00}^k, V_{01}^k, V_{10}^k, V_{11}^k содержит 84 граничных элемента допустимого массива.

Заключение

Алгоритм, представленный в теореме 1, имеет линейную сложность вычислений, и он устойчив (так как неравенство $|D_{ij}| > |d_{ij}|$, справедливое для всех $(i,j) \in \{0,1\}^2$, гарантирует не только существование и единственность решения системы (8.9)–(8.10), но и устойчивость метода прогонки, с помощью которого решается данная система). Численные эксперименты показывают, что с ростом N минимум функционала невязок $J_N \doteq \min J(\cdot)$ стремится к нулю. Полагаем, что линейность алгоритма имеет определенные перспективы, а предложенные многомерные сплайны найдут свое место в ряду многочисленных конструкций, ориентированных на многомерную интерполяцию и аппроксимацию (в этом ряду отметим работы [6–10]).

Список литературы

1. Родионов В.И. О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 146–153. DOI: 10.20537/vm100416
2. Родионов В.И. Об одном методе построения разностных схем // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. Вып. 5-2. С. 2656–2659.
3. Родионов В.И., Родионова Н.В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 141–156. DOI: 10.20537/vm120313
4. Родионова Н.В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим волновым уравнением // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 141–152. DOI: 10.20537/vm140112
5. Rodionov V.I. On exact solution of optimization problem generated by simplest transfer equation // Современные компьютерные и информационные технологии: сборник трудов международной научной российско-корейской конференции. УрФУ. Екатеринбург, 2011. С. 132–135.
6. Пацко Н.Л. О численном решении эллиптических краевых задач методом конечных элементов с применением B-сплайнов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1412–1426.
7. Kounchev O. Multivariate polysplines: applications to numerical and wavelet analysis. San Diego: Academic Press, 2001. 512 p.
8. Lai M.J., Schumaker L.L. Spline functions on triangulations. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 608 p. DOI: 10.1017/CBO9780511721588
9. Силаев Д.А., Коротаев Д.О. Решение краевых задач с помощью S-сплайна // Компьютерные исследования и моделирование. 2009. Т. 1. № 2. С. 161–172.
10. Kuzmenko D., Skorokhodov D. Optimization of transfinite interpolation of functions with bounded Laplacian by harmonic splines on box partitions // J. Approx. Theory. 2016. Vol. 209. P. 44–57. DOI: 10.1016/j.jat.2016.05.002

Поступила в редакцию 27.04.2018

Мзедавее Асаад Насер Хуссейн, аспирант, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: assad0711@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., зав. кафедрой, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru

A. N. Mzedawee, V. I. Rodionov

Exact solution of an optimization problem generated by the three-dimensional Laplace equation

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 51, pp. 52–78 (in Russian).

Keywords: three-dimensional Laplace equation, interpolation, multivariate spline.

MSC2010: 41A15

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-51-03

A one-parameter family of finite-dimensional spaces consisting of special three-dimensional splines of Lagrangian type is defined (the parameter N is related to the dimension of the spline space). The solution of the boundary value problem for the Laplace equation given in a three-dimensional parallelepiped admits a representation in the form of a sum of four summands: a function linear in each of the three variables, and solutions of three particular boundary value problems generated by the original equation. In turn, these problems give rise to three problems of minimizing the functionals of residuals given in the indicated spline spaces. This decomposition allows one to study only one of the three optimization problems (the other two are symmetric in nature). A system of linear algebraic equations is obtained with respect to the coefficients of the optimal spline that gives the smallest discrepancy. It is shown that the system has a unique solution. The numerical solution of the system reduces to the implementation of the sweep method (the stability of this method holds). Numerical experiments show that with increasing N, the minimum of the residual functional tends to zero.

REFERENCES

1. Rodionov V.I. On application of special multivariate splines of any degree in the numerical analysis, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, issue 4, pp. 146–153 (in Russian). DOI: 10.20537/vm100416
2. Rodionov V.I. A method for constructing difference schemes, *Vestn. Tambov. Univ. Ser. Estestv. Tekh. Nauki*, 2013, vol. 18, issue 5-2, pp. 2656–2659 (in Russian).
3. Rodionov V.I., Rodionova N.V. Exact solution of optimization task generated by simplest heat conduction equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2012, issue 3, pp. 141–156 (in Russian). DOI: 10.20537/vm120313
4. Rodionova N.V. Exact solution of optimization task generated by simplest wave equation, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2014, issue 1, pp. 141–152 (in Russian). DOI: 10.20537/vm140112
5. Rodionov V.I. On exact solution of optimization problem generated by simplest transfer equation, *Advanced Computer and Information Technologies: Abstracts of Int. Conf.*, Ural Federal University, Yekaterinburg, 2011, pp. 132–135.
6. Patsko N.L. Numerical solution of elliptic boundary value problems by the finite element method using B-splines, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1994, vol. 34, issue 10, pp. 1225–1236.
7. Kounchev O. *Multivariate polysplines: applications to numerical and wavelet analysis*, San Diego: Academic Press, 2001, 512 p.
8. Lai M.J., Schumaker L.L. *Spline functions on triangulations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 608 p. DOI: 10.1017/CBO9780511721588
9. Silaev D.A., Korotaev D.O. Solving of boundary tasks by using S-spline, *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 161–172 (in Russian).
10. Kuzmenko D., Skorokhodov D. Optimization of transfinite interpolation of functions with bounded Laplacian by harmonic splines on box partitions, *J. Approx. Theory*, 2016, vol. 209, pp. 44–57. DOI: 10.1016/j.jat.2016.05.002

Received 27.04.2018

Mzedawee Asaad Naser Hussein, Post-graduate student, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: assad0711@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the Department, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: rodionov@uni.udm.ru