Ю. М. Сметанин · Л. П. Сметанина · Д. Н. Фёдоров

Удмуртский государственный университет

ВЕРИФИКАЦИЯ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЪЁМНЫХ СООТНОШЕНИЙ МНОЖЕСТВ И ИХ СООТВЕТСТВИЙ

В докладе предлагается постановка задач верификации рассуждений с использованием объемных соотношений и соответствий между модельными множествами. На примерах показано, что для логики предикатов первого порядка с одно и двуместными предикатами верификацию логического следования можно проводить в специально построенной неклассической многозначной логике.

Построена пропозициональная многозначная логика L_{s_2} с базовыми суждениями (конъюнктами) $\langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y), X \subset U, X = U \rangle$, где U −универсум, $X \cdot Y'$ −пересечение X и дополнения Y до универсума. Вместо X и Y можно подставить ППФ $F_1(\tilde{X}_n), F_2(\tilde{X}_n)$ алгебры множеств;

$\mathrm{A}(X,Y) \equiv (X \subset Y)\cdot(X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)$;

$Eq(X,Y) \equiv (X = Y)\cdot(X \subset U)\cdot(X' \subset U)\cdot(Y \subset U)\cdot(Y' \subset U)$;

$IO(X,Y) \equiv (X \cdot Y \subset U)\cdot(X \cdot Y' \subset U)\cdot(X' \cdot Y \subset U)\cdot(X' \cdot Y' \subset U)$.

Посредством конъюнкции $(\cdot)$, дизъюнкции $(+)$ и отрицания $(')$ из базовых конъюнктов можно построить ППФ L_{s_2} двух типов — конъюнктивные и неконъюнктивные. Конъюнктивные ППФ (КППФ) являются конъюнкциями базовых конъюнктов. Неконъюнктивные ППФ (НКППФ) приводятся к дизъюнкции конъюнктивных.

С помощью дискретизации модельных схем [1] вводится семантика. Дискретная модельная схема $I_n = \langle U, X_1, X_2, ..., X_n \rangle$ называется алгебраической онтологией (А-онтологией). Она представляется множеством целых неотрицательных чисел и выражает семантику конъюнктивной ППФ. Значением НКППФ является семейство А-онтологий. **Единицей** $M(I_n)$ дискретизированной модельной схемы $I_n = \langle U, X_1, X_2, ..., X_n \rangle$ называется множество номеров ее непустых конституент.

В L_{s_2} определены формулы, являющиеся законами, противоречиями и выполнимыми ППФ. Программно реализован алгоритм построения А-онтологии $I(Q(F(\tilde{X}_n))$ по КППФ $Q(F(\tilde{X}_n)$ [1]. Доказана функциональная полнота атомных формул, состоящая в том, что любая *n*-арная А-онтология I_n выражается в виде КППФ. А-онтология I_n^0 называется **канонической**, если $M(I_n^0) = \{0,1,...2^n - 1\} = U^0$, $I_n^0 = \langle U^0, X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0 \rangle$. I_n выражает отношение логической независимости для модельных множеств.

Теорема 1. Пусть $I_n = \langle U, X_1, X_2, ..., X_n \rangle$ А-онтология. Тогда имеют место равенства $X_i = U \cdot X_i^0 = M(I) \cdot X_i^0, i = 1, n;$. То есть объемы модельных множеств определяются единицей А-онтологии и модельными множествами канонической А-онтологии [2].

Введено понятие непарадоксального логического следования $\models_N$, которое имеет место только между выполнимыми ППФ (исключая законы и противоречия). В L_{s_2} определено, как соотносятся объемы единиц КППФ, между которыми имеет место $\models_N$. Пусть $Q_1(\tilde{X}_n), Q_2(\tilde{X}_n)$ две КППФ.

Теорема 2.

$$Q_1(\widetilde{X}_n) \models_{\mathrm{N}} Q_2(\widetilde{X}_n) \equiv M(I(Q_1(\widetilde{X}_n))) \subseteq M(I(Q_2(\widetilde{X}_n)))$$

Совпадение единиц указывает на равносильность их логического содержания.

Показано, как можно решать задачи верификации $\models_{\mathrm{N}}$ в логике предикатов первого порядка с одно и двуместными предикатами с использованием логики L_{S_2}, используя свойства соответствий между множествами и соответствий Галуа.

Пример 1. Доказать [3], что в общем универсуме U

$$\forall x \exists y F(x,y), \forall x \exists y G(x,y), \forall x \exists y (F(x,y) + G(x,y) \to \forall z \big(F(y,z) + G(y,z) \to H(x,z)\big) \models_N$$
$$\forall x \exists y H(x,y)$$

Перепишем в терминах соответствий и избавимся от одной импликации в третьей посылке. Множества Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 являются непустыми подмножествами универсума U.

$$\exists Y_1 (F(U,Y_1) \neq \varnothing) \cdot (D_F(U) = U),$$
$$\exists Y_2 (G(U,Y_2) \neq \varnothing) \cdot (D_G(U) = U),$$
$$\exists Y_3 \underbrace{(F(U,Y_3) + G(U,Y_3) \neq \varnothing)}_{A} \cdot \underbrace{(F(Y_3,U) + G(Y_3,U) = \varnothing)}_{B} \to (H(U,U) \neq \varnothing) \cdot (D_H(U) = U) \models_N$$
$$\exists Y_4 (H(U,Y_4) \neq \varnothing) \cdot (D_H(U) = U)$$

F, G, H - соответствия, D_F, D_G, D_H - их области определения. Для доказательства указываются множества Y_i, для которых истинность посылок влечет истинность следствия.

Пример 2. Верифицировать (Чень): «Некоторые пациенты любят всех докторов. Ни один пациент не любит знахаря. Следовательно, никакой доктор не является знахарем».

$$A_1 : \exists x(P(x) \cdot \forall y(D(y) \to L(x,y))), A_2 : \forall x(P(x) \to \forall y Q(y) \to L(x,y)')) \models_N$$
$$B : \forall x D(x) \to Q(x)')).$$

Введем в рассмотрение множества P, D, Q, соответствующие предикатам $P(x), D(x), Q(x)$, и множество V, которое образует вместе с множеством P пару $\langle P, V \rangle \in G(L, X, Y)$. Соответствие Галуа $G(L, X, Y)$ построено на соответствии $L(X, Y)$, которое определяется предикатом $L(x, y)$. Множество $V = \{y \mid \forall x(x \in P) \wedge (L(x,y)\}$ это множество людей, которых любят пациенты. $A_1 \equiv D \subseteq V$, $A_2 \equiv V \subseteq Q' = U \setminus Q$. Из $D \subseteq V$ и $V \subseteq Q'$ следует что $D \subseteq Q'$ - «Все врачи не знахари», равносильное B.

В докладе на примерах показано, что верификация логического следования посредством исчисления конституентных множеств и соответствий Галуа может служить альтернативой методу резолюций и методу аналитических таблиц.

Литература

[1] Бочаров В. А., Маркин В. И. Силлогистические теории.— М.: Прогресс-Традиция, 2010. — 336 с.

[2] Ю. М. Сметанин. «Верификация логического следования с использованием исчисления конституентных множеств и соответствий Галуа», Программные системы: теория и приложения, 2017, 8:2(33), с. 69–93.

[3] В. Н. Вагин, Зо Мьо Хтет. «Параллельный вывод в методе аналитических таблиц», Программные продукты и системы, 2011, №3, с. 8–13.