На правах рукописи

Емельянов Константин Владимирович

УДК 531.01

МЕТОД КОВАЛЕВСКОЙ И ПОИСК УСЛОВИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 01.04.02 - Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск 2003

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета Удмуртского государственного университета.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: доктор физико-математических наук, профессор А.В. Борисов.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ: доктор физико-математических наук, профессор А.В. Болсинов;

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник А.А. Килин.

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ: Институт прикладной механики УрО РАН.

Защита состоится «25» июня 2003 г. в «___» часов на заседании диссертационного совета К.212.275.04 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Удмуртском государственном университете по адресу: 426034, Ижевск, ул. Университетская, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан «17» мая 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Н.Н. Петров.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Тестов на интегрируемость динамических систем немного. Предложенный С. В. Ковалевской метод занимает особое место: внимание к нему было привлечено найденным интегрируемым случаем в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой [4].

В дальнейшем появилось много других примеров интегрируемых систем, в которых существующие первые интегралы продолжались в комплексную область как однозначные функции своих аргументов. При этом общее решение представляется однозначными функциями. Естественным образом появляется задача о связи между однозначностью общего решения и существованием достаточного числа однозначных первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) — так называемая задача Пенлеве-Голубева [5].

С современной точки зрения идею метода Ковалевской можно выразить следующим образом: решение системы нелинейных ОДУ голоморфно на соответствующей римановой поверхности; голоморфная функция устроена достаточно просто, поэтому сложное поведение в действительной области обусловлено сложным строением римановой поверхности. Стохастическое поведение возникает при проходе по некоторому контуру, соответствующему действительному времени на этой сложной поверхности. Сам метод состоит в подборе таких значений параметров системы, при которых существуют формальные полнопараметрические решения в виде рядов, содержащие в качестве особенностей только полюса (обладающие свойством Пенлеве) или алгебраические точки ветвления (слабое свойство Пенлеве). Часто можно строго сформулировать некоторые утверждения, необходимые для существования первых интегралов или полей симметрии определенного класса [7, 9]. Соответственно, метод Ковалевской может использоваться для доказательства неинтегрируемости.

Все сказанное относилось динамическим системам, представляющим собой ОДУ, однако, возникающие в физике динамические системы чаще представляют собой дифференциальные уравнения с частными производными. Интегрирование таких уравнений, либо исследование их решений гораздо более сложная задача. Тем не менее, разработанный в последние десятилетия метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) позволяет интегрировать нелинейные эволюционные уравнения. В связи с этим часто возникает вопрос: возможно ли предложить конструктивный способ распознавания интегрируемых с помощью МОЗР уравнений. Как одна из попыток ответа возникла так называемая ARS-гипотеза [8], суть которой сводится к тому, что для интегрируемости по МОЗР нелинейного эволюционного уравнения любая его редукция к ОДУ должна обладать свойством Пенлеве.

Таким образом, метод Ковалевской представляет собой одно из актуальных направлений в теории динамических систем и математической физике. Интерес к исследованиям в этом направлении связан как с практическим применением метода, так и с важностью метода для построения теории нелинейных систем.

Цель работы

Были поставлены следующие цели.

1. Применить метод Ковалевской к системам с экспоненциальным взаимодействием, являющимся обобщением хорошо известных цепочек Тоды:
$$H = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle + \sum_{i=1}^{N} \nu_i \exp{(a_i, q)}. \tag{1}$$
Поскольку подобные гамильтоновы системы с псевдоевклидовой метрикой $\langle\cdot, \cdot\rangle$ возникают в космологии [6], ставилась задача изу-

чить возможность обобщения существующих результатов об интегрируемости на псевдоевклидовы системы.

2. Изучить связь между комплексно-аналитическими свойствами общего решения с наличием тензорных законов сохранения в классе квазиоднородных динамических систем.

   Известна теория Х. Иошиды, применившего метод Ковалевской к квазиоднородным системам. Им впервые были доказаны теоремы о связи между ведущими степенями в разложении общего решения - показателями Ковалевской - и весами квазиоднородности первых интегралов. Эти результаты были перенесены В.В. Козловым на поля симметрии и произвольные тензорные инварианты. Однако, все эти теоремы неприменимы для инвариантов, вырожденных на частных решениях типа квазиоднородного «луча». Аналог теоремы Иошиды для вырожденного случая известен, ставилась задача получить аналог теоремы Козлова. Кроме того, получаемой по теоремам Иошиды и Козлова информации об интегралах и полях симметрии часто слишком мало для их поиска, было бы неплохо знать больше, чем просто степень квазиоднородности.

3. Исследовать на интегрируемость одну гамильтонову систему, получить, если возможно, полный набор ее первых интегралов.

   Известна классификация интегрируемых по Биргкофу систем с экпоненциальным взаимодействием (в евклидовой метрике). Для ее окончательного завершения необходимо исследовать на интегрируемость гамильтониан:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(q_i - q_{i+1}) +$$
$$\exp(-q_1 - q_2) + \exp(q_n) + \exp(2q_n), \quad n \geqslant 4. \quad (2)$$

Научная новизна

Получены следующие результаты:

1. Впервые вычислены все наборы показателей Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием (1). По ним сделано предположение о виде возможных первых интегралов системы (2). Показана невозможность обобщения на псевдоевклидов случай известных результатов об интегрируемости систем в евклидовой метрике.

2. Доказана новая теорема о резонансах на показателях Ковалевской. Теорема представляет собой утверждение о связи степеней квазиоднородности тензорных инвариантов с показателями Ковалевской, включает в себя известные ранее подобные теоремы, применима к более широкому классу систем.

3- С использованием предыдущего результата впервые предложен алгоритм поиска тензорных инвариантов на основе метода Ковалевской. Этот алгоритм может использоваться также как расширенный тест на интегрируемость и особенно эффективен для нахождения полиномиальных первых интегралов и полей симметрии.

4. Полученный алгоритм успешно применен к системе (2) в случае четырех степеней свободы. Доказана интегрируемость этой системы, найден полный набор первых интегралов.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты диссертации могут использоваться при изучении систем с экспоненциальным взаимодействием: при изучении псевдоевклидовых систем и для завершения классификации интегрируемых по Биркгофу систем в евклидовой метрике.

Теорема о резонансах на показателях Ковалевской представляет интерес с теоретической точки зрения.

Полученный алгоритм поиска тензорных инвариантов может весьма эффективно использоваться при интегрировании квазиоднородных систем либо использоваться как более совершенный тест на на интегрируемость.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие положения.

Исследование методом Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием. Вычисление всех наборов показателей Ковалевской.

Невозможность прямого обобщения на псевдоевклидов случай известных интегрируемых систем с экспоненциальным взаимодействием.

Исследование связи комплексно-аналитических свойств решений и наличием у динамической системы тензорных законов сохранения. Обобщение существующих теорем о степенях однородности тензорных инвариантов. Теорема о резонансах на показателях Ковалевской.

Метод поиска тензорных инвариантов квазиоднородных динамических систем. Тест на интегрируемость.

Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновой системы (2) с четырьмя степенями свободы.

Апробация работы

Полученные результаты докладывались на семинаре «Динамические системы классической динамики» (МГУ, руководители: академик РАН проф. В.В. Козлов, д.ф.-м.н. С.В. Болотин), семинаре физического факультета УдГУ, семинарах лаборатории нелинейной динамики и синергетики УдГУ, Всероссийской Научной Конференции Студентов-Физиков (г. Екатеринбург, г. Заречный).

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликованы три работы.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложения и списка литературы. Объем диссертации - 67 страниц.

Содержание работы

Введение

Введение дает краткий обзор истории метода Ковалевской и проблемы интегрируемости динамических систем. Помимо введения работа содержит еще четыре главы и приложение.

Квазиоднородные системы

В первой главе мы даем определение квазиоднородных уравнений и связанных с ними понятий, таких как матрица и показатели Ковалевской. Все определения и теоремы проиллюстрированы на простейших примерах. Далее мы приводим известные теоремы, составляющие основу ставшей уже классической теории Х. Иошиды. Обсуждается представление общего решения вблизи особой точки в виде полнопараметрических обобщенно-степенных рядов, ветвление решений и связь с классическими результатами, такими как теорема Пуанкаре о вырождении периодических решений и теорема Зиглина о ветвлении решений и неинтегрируемости гамильтоновых систем. Квазиоднородные системы являются хорошей моделью для демонстрации метода Ковалевской и обсуждения лежащих в его основе идей. Эту главу нужно рассматривать как вводную: сюда вынесены всевозможные определения, известные результаты.

Системы с экспоненциальным взаимодействием

Вторая глава посвящена системам с экспоненциальным взаимодействием. Речь идет о гамильтоновых уравнениях с гамильтонианами следующего вида:

$$H = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle + \sum_{i=1}^{N} \nu_i \exp\,(a_i, q), \tag{3}$$

где p, q, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение. Изучение таких систем является весьма популярной темой последних десятилетий. В связи с появившимися в космологии приложениями таких систем встает вопрос о возможности перенесения полученных результатов на случай псевдоевклидовой метрики $\{\cdot, \cdot\rangle$. Мы предъявляем методику вычисления показателей Ковалевской произвольных систем с экспоненциальным взаимодействием. Используя эту методику, мы доказываем ряд утверждений, из которых, в частности, последует невозможность обобщения на псевдоевклидов случай условий интегрируемости евклидовых систем. Показано также, что знаконеопределенность псевдоевклидовой метрики принципиальна и приводит к ветвлению решений и алгебраической неинтегрируемости. Таким образом, в главе 2 существующие на сегодня способы исследования применяются к определенному классу систем.

Тензорные инварианты квазиоднородных систем

Основным результатом третьей главы является доказательство теоремы о резонансах на показателях Ковалевской.

Теорема о резонансах. *Предположим, что квазиоднородная систе-*

ма

$$\dot{x}^i = v^i(x^1 \dots x^n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{4}$$

имеет тензорный инвариант степени однородности m с компонентами $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, *голоморфными на частных решениях вида* $x = c(t - t_0)^{-g}$, *тогда существует такой набор индексов* $1 \leqslant i_1, \dots, i_p \leqslant n$ *и неотрицательные целые числа* $k_1, \dots, k_n$ *такие, что*

$$k_1\rho_1 + \dots + k_n\rho_n - \rho_{i_1} - \dots - \rho_{i_p} = m, \tag{5}$$

где ρ_i *-- показатели Ковалевской, причем* $\sum k_j = \mu + q$, μ *- наименьший порядок ненулевой в точке x = c производной компонент тензорного поля.*

Сформулированное утверждение включает почти все известные сейчас теоремы о связи показателей Ковалевской со степенями однородности тензорных инвариантов квазиоднородных систем. Кроме доказательства теоремы и обсуждения некоторых следствий, мы предъявляем алгоритм, по которому можно находить полиномиальные интегралы, либо ряды, представляющие собой тейлоровские разложения инвариантов в окрестности частных решений, инвариантных относительно однопараметической группы квазиоднородных растяжений расширенного фазового пространства. Предлагаемый алгоритм демонстрируется на примере поиска первого интеграла в простой системе с двумя степенями свободы. В этой главе обсуждается также связь между ветвлением решений и несуществованием голоморфных тензорных инвариантов.

Интегрируемость по Биркгофу систем с потенциалом экспоненциального вида

В качестве демонстрации теории, развитой в главе 3, в четвертой главе мы возвращаемся к рассмотрению систем с экспоненциальным взаимодействием (3) и находим полный набор первых интегралов системы с четырьмя степенями свободы. Это система (2). Вопрос ее интегрируемости открыт уже давно и важен для завершения классификации интегрируемых систем. Уравнения Гамильтона для (2) заменой $x_i = \exp(a_i, q)$ преобразуются в систему уравнений с полиномиальными правыми частями. При $n = 4$ получим:

$$
\begin{aligned}
\dot p_1 &= x_4 - x_1, & \dot p_2 &= x_4 + x_1 - x_2,\\
\dot p_3 &= x_2 - x_3, & \dot p_4 &= x_3 - x_5 - 2x_6,\\
\dot x_1 &= x_1(p_1 - p_2), & \dot x_2 &= x_2(p_2 - p_3),\\
\dot x_3 &= x_3(p_3 - p_4), & \dot x_4 &= x_4(-p_1 - p_2),\\
\dot x_5 &= x_5 p_4, & \dot x_6 &= 2x_6 p_4.
\end{aligned}
\tag{б}
$$

Полученная система уравнений квазиоднородна с весами $g_p = 1$ и $g_x = 2$ по переменным p и x соответственно. Применяя теорему о резонансах и следующий из ее доказательства алгоритм поиска, который существенно упрощается для скалярных тензорных инвариантов — первых интегралов, мы находим для этой системы три полиномиальных первых интеграла, степени квазиоднородности 4, 6 и 8. Исходная гамильтонова система (2), таким образом, имеет полный набор первых интегралов в виде полиномов по импульсам с коэффициентами вида:

$$\sum \lambda_k \exp(c_k, q), \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{R}^n.$$

Первые интегралы находятся в инволюции. Полученные для них формулы громоздки и вряд ли могут быть использованы для понимания динамики системы, но качественный результат важен: система полностью интегрируема.

Приложение

Приложение содержит иллюстрации к введению и некоторые громоздкие формулы, которые, будучи выписаны в основном тексте, затруднили бы понимание.

Основные результаты и выводы

Результаты исследования систем с экспоненциальным взаимодействием, полученные во второй главе, усиливают существующие требования, накладываемые на систему для ее интегрируемости. Полученные наборы показателей Ковалевской позволяют делать правдоподобные допущения о виде первых интегралов, например, сделанное предположение о степени однородности дополнительных к гамильтониану (3) интегралов подтверждалось при дальнейшем исследовании. Доказательство того, что для случая псевдоевклидовой метрики всегда найдется комплексно-сопряженная пара показателей позволяет утверждать, что существующие интегрируемые ситуации невозможно обобщить на псевдоевклидов случай. Таким образом, псевдоевклидовы системы с точки зрения метода Ковалевской принципиально отличаются от своих евклидовых аналогов. Если среди них существуют интегрируемые, они будут представлять особый интерес, поскольку комплексно-аналитическая структура их решений намного сложнее.

Доказаная в третьей главе теорема о резонансах связывает степени однородности тензорных законов сохранения с показателями Ковалевской. Этот результат применим в важном случае вырождения инварианта на частных решениях в виде квазиоднородного луча. Построенный алгоритм поиска тензорных инвариантов может использоваться для доказательства неинтегрируемости, им также можно эффективно находить полиномиальные первые интегралы, поля симметрии. Результаты третьей главы диссертации позволяют яснее представлять себе связь между аналитической структурой общего решения, интегрируемостью и аналитическими свойствами законов сохранения динамической системы. Несмотря на большое количество имеющихся в этой области работ, это направление исследований по-прежнему остается перспективным.

Доказательство интегрируемости гамильтониана (3) для четырех степеней свободы может быть полезным для решения более общей задачи о доказательстве полной интегрируемости для произвольного n. Несмотря на то, что предположение об интегрируемости этой системы выдвинуто уже давно, прямых подтверждений этой гипотезы не было, что перепятствует завершению классификации интегрируемых по Биргкофу систем с экспоненциальным взаимодействием.

Литература

[1] Емельянов К. В., Цыгвинцев А. В. Показатели Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием // Матем. сборник. — 2000 т. 191, №10, с. 39-50.

[2] Емельянов К. В. К вопросу о классификации интегрируемых по Биркгофу систем с потенциалом экспоненциального вида // Матем. заметки. — 2000, т. 67, №5, с. 797-801.

[3] Борисов А. В., Емельянов К. В. Неинтегрируемость и стохастичность в динамике твердого тела. — Ижевск: Изд. УдГУ, 1995. 56 стр.

[4] Ковалевская С В . Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // В кн. Научные работы. — М.: Наука, 1948. 153-220.

[5] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 436 стр.

[6] Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980. 319 стр.

[7] Козлов В. В. Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской-Ляпунова // Матем. заметки. 1992. Т. 51. №2, 46-52.

[8] Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H., A connection between nonlinear evolution equations and o.d.e.'s of P-type. // J. Math. Phys., 1980, v. 21, 715-721.

[9] Yoshida H. A criterion for the non-existence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with *n* degrees of freedom // Phys. Lett.A. — 1989, v. 141, №3-4, 108-112.

[10] Flashka H. The Toda lattice. I. Existence of integrals // Phys. Rev. - 1974, №9, 1924-1925.